



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**MAYKON GOMES DA SILVA**

**RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DAS REGRAS DE SIMPSON  
COMPOSTA E ADAPTATIVA**

**ABAETETUBA-Pará  
2022**

MAYKON GOMES DA SILVA

**RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DAS REGRAS DE SIMPSON  
COMPOSTA E ADAPTATIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.  
Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

ABAETETUBA-Pará

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

S586r Silva, Maykon Gomes da.  
Resolução de uma integral através das regras de Simpson  
composta e adaptativa / Maykon Gomes da Silva. — 2022.  
xxxi, 31 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de  
Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Métodos numéricos. 2. Regra de Simpson adaptada. 3.  
Quadratura adaptativa. I. Título.

CDD 519.4

---

MAYKON GOMES DA SILVA

**RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DAS REGRAS DE SIMPSON  
COMPOSTA E ADAPTATIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 13/12/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

*Manuel de Jesus dos S. Costa.*

---

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Orientador – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

*Rômulo Corrêa Lima*

---

Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima  
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

*José Francisco da S. Costa*

---

Prof. Dr. José Francisco Silva da Costa  
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer imensamente aos meus pais, **Ailson Costa da Silva** e **Maria Auxiliadora Gomes**, por toda a dedicação, pela ajuda, por todo o incentivo para os meus estudos e pela confiança depositada.

Meus agradecimentos a todos os professores que me ajudaram ao longo dessa caminhada, em especial ao meu orientador **Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa**, por toda a contribuição e motivação para a realização deste trabalho, proporcionando a realização de um grande sonho.

# RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DAS REGRAS DE SIMPSON COMPOSTA E ADAPTATIVA

**Autor:** Maykon Gomes da Silva

**Orientador:** Manuel de Jesus dos Santos Costa

**Banca:** Manuel de Jesus dos Santos Costa, Rômulo Corrêa Lima, José Francisco da Silva Costa

## RESUMO

O presente trabalho, refere-se a apresentação e comparação quanto aos métodos numéricos regra de Simpson composta e adaptativa, na resolução de uma integral. Neste contexto, foram apresentados os conceitos de interpolação, do erro de truncamento e da quadratura adaptativa, sendo implementado na interface do matlab, algoritmos do tipo Simpson convencional e adaptado, nesta ordem, para auxiliar nos cálculos. Assim, foi exibido o resultado de uma integral definida não contextualizada, a qual teve inicialmente sua solução fornecida através do mecanismo computacional denominado Wolfram|Alpha. Seguidamente a integral teve sua resolução por meios numéricos, concedendo uma análise quantitativa utilizando a fundamentação teórica do erro relativo, o qual indicou para o cenário abordado que a regra de Simpson adaptativa se apresenta mais eficiente tanto na acurácia quanto na convergência a menos de uma tolerância requerida.

**Palavras-chave:** Métodos numéricos, Regra de Simpson adaptada, Quadratura adaptativa.

## ABSTRACT

The present work refers to the presentation and comparison of the numerical methods, Simpson's rule, compound and adaptive, in the resolution of an integral. In this context, the concepts of interpolation, truncation error and adaptive quadrature were presented, being implemented in the matlab interface, algorithms of the conventional Simpson type and adapted, in that order, to assist in the calculations. Thus, the result of a non-contextualized definite integral was displayed, which initially had its solution provided through the computational mechanism called Wolfram|Alpha. Afterwards, the integral was resolved by numerical means, granting a quantitative analysis using the theoretical foundation of the relative error, which indicated for the analyzed scenario that the adaptive Simpson's rule is more efficient both in accuracy and in convergence to less than one tolerance required.

**Keywords:** Numerical methods, Adapted Simpson's rule, Adaptive square.

## 1 INTRODUÇÃO

É essencial citar que a utilização analítica é uma das ferramentas mais utilizadas para a resolução do cálculo de integrais. Ainda assim, existem situações em que a resolução analítica não apresenta o caminho mais adequado, em razão do cálculo de funções transcendentais apresentarem alta complexidade, ou até mesmo a impossibilidade de se obter a sua resolução. Levando em consideração isso, deve-se pontuar a existência de outros métodos que possibilitem uma solução para a integral, apresentados como métodos numéricos. Uma das técnicas que são utilizadas, denomina-se como Regra de Simpson (*RS*), em sua configuração simples (*RSS*), composta (*RSC*), e adaptada (*RSA*), as quais estabelecem um valor aproximado para a integral a menos de uma precisão requerida (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003).

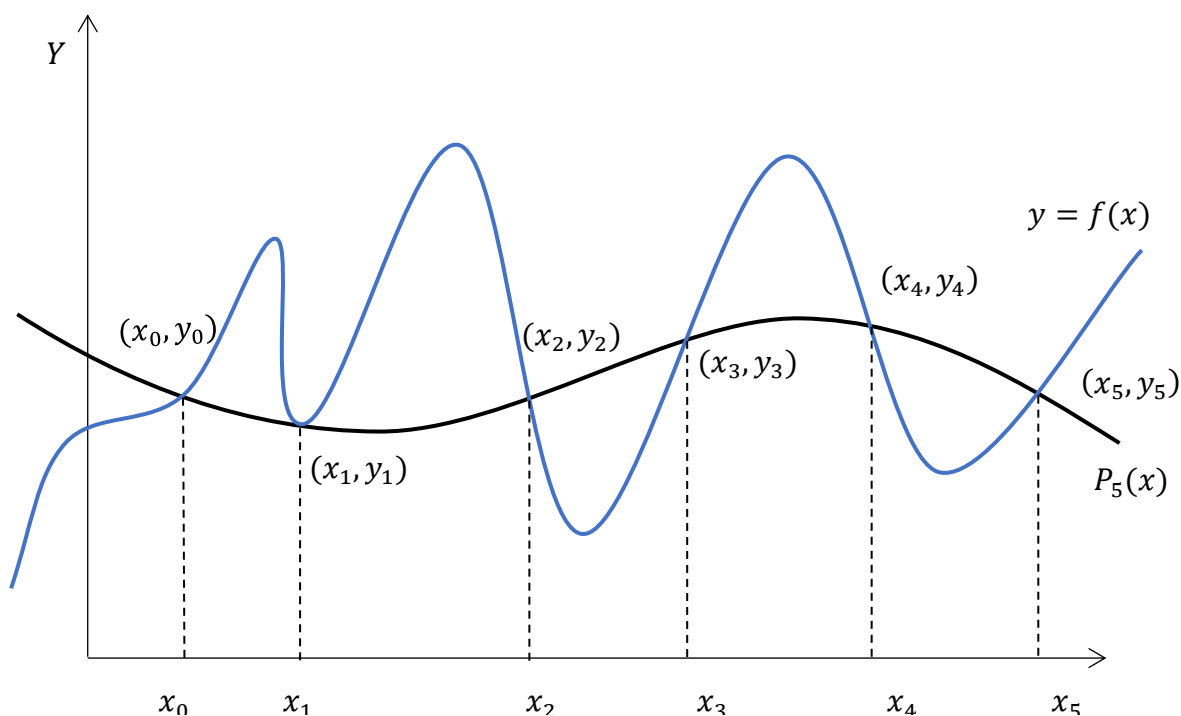
Dissemelhante com a integração numérica convencional, a qual se utiliza uma determinada amplitude  $h$ , a integração numérica adaptativa, procede-se sem se preocupar em fornecer o espaçamento  $h$ , dessa maneira são estabelecidos os algoritmos de quadratura adaptativa. Nessa circunstância o objetivo desse método, é calcular o valor da integral, sendo que nos trechos onde a função apresenta elevado grau de variação, o número de subintervalos será maior, comparado com as áreas que possuem pouca variação. Assim os algoritmos de quadratura adaptativa, são estabelecidos para fornecerem uma precisão que esteja dentro de uma tolerância (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003). Portanto, o presente trabalho irá ilustrar uma integração adaptativa, com base na regra de Simpson.

## 2 INTERPOLAÇÃO

A interpolação se dá por meio de uma das técnicas mais antigas, no que se refere o estudo do cálculo numérico. Antes do advento computacional, o processo de interpolação era amplamente aplicado no cálculo de funções que demandavam amplo esforço por parte humana, visto que funções trigonométricas, hiperbólicas, exponenciais e logarítmicas, apresentam alta complexidade para a sua resolução analítica. Nesse contexto, utiliza-se dessa técnica para auxiliar na resolução de funções de elevado grau de dificuldade, ou quando não se dispõe de sua formulação analítica (CLÁUDIO E MARINS, 1994).

Sejam  $(n + 1)$  um conjunto finito de pontos distintos:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , contidos em um intervalo  $[a, b]$ . Conceituar interpolação de uma função  $f(x)$ , baseia-se em definir uma função polinomial  $P(x)$  de grau menor ou igual a  $n$ , que vai ser uma nova função e uma aproximação da função dada, onde deve-se possuir a condição de interpolação que diz que  $P(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Nesse cenário, substituir funções de elevado grau de dificuldade por um polinômio pode representar a melhor solução para o cálculo, visto que as aproximações por polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade (BARROSO, 1987).

Figura 1 - Representação através de uma função genérica  $y = f(x)$  (cor azul) por um polinômio interpolador de grau 5  $P_5(x)$  (cor preta), o qual mostra geometricamente o processo de interpolação.



Fonte: Adaptado (RUGGIERO, 1996)

## 2.1 INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Para o polinômio interpolador de Lagrange, onde serão conhecidos  $(n + 1)$  pontos distintos de uma função  $y = f(x)$  (BURDEN E FAIRES 2016).

### 2.1.1 Obtenção da Fórmula

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n, (n + 1)$  um conjunto de pontos distintos, tendo  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$  e  $P_n(x)$  um polinômio que possua o seu grau sendo  $\leq n$  que interpola  $f$  em  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Tendo em vista isso, representa-se  $P_n(x)$  na forma (RUGGIERO, 1996, p. 216):

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x) \quad (1)$$

ou ainda:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_kL_k(x) \quad (2)$$

no qual os polinômios  $L_k(x)$  são de grau  $n$ .

Em relação à condição de interpolação  $P_n(x_i) = y_i$ , a mesma deve ser satisfeita para cada  $i$ , isto é:

$$P_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \dots + y_nL_n(x_i) = y_i \quad (3)$$

Para tal objetivo, a forma mais simples de instituir a condição é estabelecer:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \quad (4)$$

dessa maneira, define-se  $L_k(x)$  por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (5)$$

para mais;

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (6)$$

Vale acentuar que como o numerador da expressão  $L_k(x)$  é um produto de  $n$  fatores do tipo:  $(x - x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n, i \neq k$ , logo  $L_k(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , posto isso,  $P_n(x)$  é um polinômio  $\leq n$ . De mais a mais, para  $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$ ; obtém-se:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_kL_k(x_i) = y_iL_i(x_i) = y_i \quad (7)$$

assim sendo, substituindo (6) em (2), tem-se (RUGGIERO, 1996):

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (8)$$

Em vista disso, a fórmula (8), representa a expressão analítica que define o polinômio interpolador de Lagrange de grau  $n$ .

### 2.1.2 Erro de Truncamento da Interpolação de Lagrange ( $E_{TPLg}$ )

Será indicada uma expressão que defina o erro de truncamento para a interpolação de Lagrange, sendo dados  $(n + 1)$  pontos de uma determinada função  $y = f(x)$ , então segue (BARROSO. 1987):

$$E_{TPLg}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).A \quad (9)$$

onde  $A$  é um parâmetro a determinar, e

$$E_{TPLg}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) \quad (10)$$

sendo que  $\bar{x}$  representa o valor a ser interpolado, ou seja, o cálculo está sendo feito especificamente nesse ponto. Segue-se:

$$P_n(\bar{x}) = a_0 + a_1\bar{x} + \dots + a_n\bar{x}_n \quad (11)$$

indica-se o parâmetro  $A$  decorrente da seguinte função auxiliar:

$$G(t) = f(t) - P_n(t) - E_{TLg}(t) \quad (12)$$

Nos pontos  $n + 2 : x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $\bar{x}$ , a função  $G(t)$  anula-se. Portanto, de acordo com o Teorema de Rolle (Anexo A), a derivada da expressão a seguir é verdadeira:

$$G^{(n+1)}(\mu) = 0 \quad (13)$$

para  $\mu \in (x_0, x_n)$ .

Derivando  $G(t)$ ,  $n + 1$  vezes, segue:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!A \quad (14)$$

tornando  $t = \mu$ , tem-se:

$$G^{(n+1)}(\mu) = f^{(n+1)}(\mu) - (n + 1)!A = 0 \quad (15)$$

logo:

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n + 1)!} \quad (16)$$

por fim, substituindo o valor do parâmetro (16) em (9), tem-se (Barroso, 1987):

$$E_{TPLg}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n + 1)!} \quad (17)$$

Portanto (17) representa o erro de truncamento da interpolação de Lagrange.

### 3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Para a compreensão sobre o estudo de integração numérica, necessita-se primeiramente do conhecimento acerca do âmbito do cálculo diferencial e integral, onde a definição aborda que existe uma função  $f(x)$ , a qual deve ser contínua em um intervalo  $[a, b]$ , esta função possui uma primitiva inclusa no intervalo que foi citado, isto é, existe um  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x)$ . Diante disso, a integral definida é dada por (GUIDORIZZI, 2001):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (18)$$

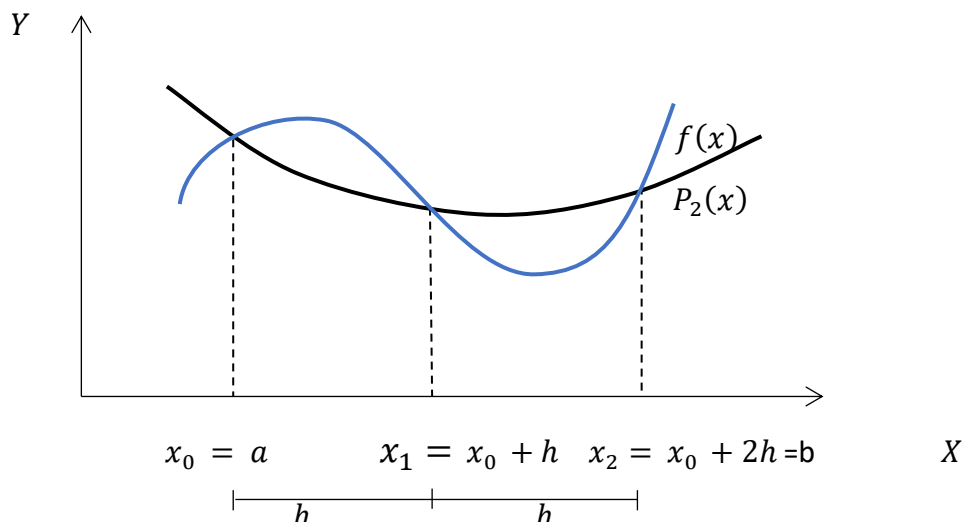
Entretanto, existem casos em que a primitiva  $F(x)$  é desconhecida, assim como a função integrando apresenta alta complexidade no que tange a sua forma analítica, ou ainda, desconhecida, possuindo apenas valores tabelados (BARROSO, 1987, p. 205).

Ante o exposto, deve-se mencionar a existência de técnicas para a obtenção de uma solução para a integral, denominando essas técnicas como métodos de integração numérica, a qual possibilita a determinação de um valor aproximado para a integral  $f(x)$  tratada. Acerca desta análise, Newton-Cotes desenvolveram uma metodologia em geral para as fórmulas de integração, o estudo irá apresentar em particular a regra de Simpson.

#### 3.1 REGRA DE SIMPSON SIMPLES (RSS)

Para a RSS, utiliza-se a fórmula de Lagrange para designar a aproximação de uma função  $f(x)$  (ver na equação 8) por um polinômio interpolador de grau 2. Sendo que o  $P_2(x)$ , interpola o  $f(x)$  nos pontos nos pontos  $x_0 = a$ ,  $x_1 = x_0 + h$  e  $x_2 = x_0 + 2h = b$  (ver Figura 2).

Figura 2 - Representação geométrica da Regra de Simpson Simples (RSS)



Fonte: Adaptado (CLÁUDIO E MARINS, 1994)

Sendo assim, empregando o polinômio interpolador de Lagrange para  $n = 2$ , dispõe-se (RUGGIERO, 1996, p. 302):

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \quad (19)$$

assim como:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (20)$$

sendo  $i = 0, 1, 2$

Posto isso, segue:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (21)$$

para mais, tem-se:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2h)(h)} f(x_2) \quad (22)$$

Por conseguinte, integrando (22), segue:

$$\int_a^b f(x) \approx \int_{x_0=a}^{x_2=b} P_2(x) dx = I_{RSS} \quad (23)$$

Substituindo os valores de  $P_2(x)$  em (23) obtém-se:

$$I_{RSS} = \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_2) dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1) dx \quad (24)$$

utiliza-se uma mudança de variável em (24), segue que:

$$x - x_0 = zh \implies dx = h dz, \quad (25)$$

$$x = x_0 + zh$$

e conseqüentemente:

$$x - x_1 = x_0 + zh - (x_0 + h) = (z - 1)h \text{ e} \quad (26)$$

$$x - x_2 = (z - 2)h$$

determinado os limites de integração, segue-se que:

$$x = x_0, z = 0; x = x_1, z = 1 \text{ e } x = x_2, z = 2 \quad (27)$$

empregando os valores de (27), (26) e (25) em (24) obtém-se:

$$I_{RSS} = \frac{f(x_0)h}{2} \int_0^2 (z-1)(z-2)dz - f(x_1)h \int_0^2 z(z-2)dz + \frac{f(x_2)h}{2} \int_0^2 z(z-1)dz \quad (28)$$

Resolvendo as integrais em (28) obtemos a (RSS):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = I_{RSS} \quad (29)$$

conclui-se que (RUGGIERO, 1996):

$$I_{RSS} = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] \quad (30)$$

Onde  $I_{RSS}$  é denominada a representação da regra de Simpson simples no que tange a representação da sua formulação analítica. Além disso, vale acentuar a utilização de técnicas analíticas com o objetivo de representar uma técnica numérica.

### 3.1.1 Erro de Truncamento da Regra de Simpson Simples ( $E_{TRSS}$ )

Para a determinação do  $E_{TRSS}$ , deve-se utilizar a integração de  $P(x)$  relativo à aproximação polinomial do  $E_{TPLg}$  (ver na equação 17). Ademais, considerando novamente a integral variando de  $x_0$  a  $x_2$ , valores conhecidos em (27). Dessa maneira, toma-se (BARROSO, 1987):

$$E_{TRSS} = \int_{x_0}^{x_2} E_{TLg}(x) dx \quad (31)$$

Por conseguinte, empregando (17) em (31), tem-se:

$$E_{TRSS} = \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdot \frac{f^{(3)}(\mu)}{3!} dx \quad (32)$$

De modo análogo ao cálculo para a obtenção da (RSS), utilizaremos os valores de (25), (26) e (27) em (32), tem-se:

$$E_{TRSS} = \int_0^2 zh(z-1)h(z-2)h \cdot \frac{f^{(3)}(\mu)}{3!} h dz \quad (33)$$

segue que:

$$E_{TRSS} = \frac{h^4}{6} f^{(3)}(\mu) \int_0^2 z(z-1)(z-2) dz \quad (34)$$

Após a resolução do item (34), verificou-se que o valor obtido foi  $E_{TRSS} = 0$ , isto é, constatando-se que o erro de truncamento da (RSS) não depende do resíduo do segundo grau.

Perante o exposto, analisa-se a utilização de um resíduo menor que o anterior, no caso  $n = 3$ . Portanto, temos:

$$E_{TRSS} = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \frac{f^{(4)}(\mu)}{4!} dx \quad (35)$$

utilizando a mudança de variável em (35), chega-se a:

$$E_{TRSS} = \frac{h^5}{24} f^{(4)}(\mu) \int_0^2 z(z-1)(z-2)(z-3) dz \quad (36)$$

Conclui-se que após a resolução de (36), encontra-se o erro de truncamento da regra de Simpson simples (BARROSO, 1987):

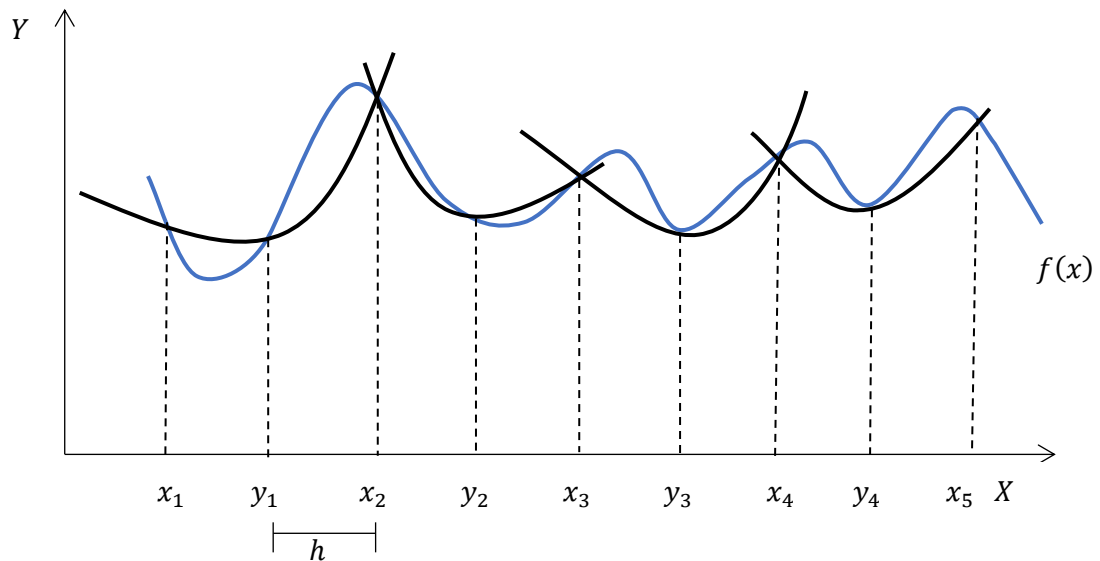
$$E_{TRSS} = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\mu) \quad (37)$$

onde  $a \leq \mu \leq b$ .

### 3.2 REGRA DE SIMPSON COMPOSTA (RSC)

Na definição a seguir para a RSC, substitui-se o intervalo de integração  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos iguais de amplitude  $h$  (ver Figura 3), sendo que para cada par de subintervalos devemos aplicar a RSS. Vale destacar, que a regra a seguir possui como restrição que o número de  $n$  intervalos devem sempre ser par (BARROSO, 1987, p. 217).

Figura 3 - Representação geométrica da Regra de Simpson Composta (RSC)



Fonte: Adaptado (CLÁUDIO E MARINS, 1994)

Para determinamos o número de subintervalos  $n$  e a amplitude  $h$ , utiliza-se a seguinte expressão:

$$n = \frac{b-a}{h} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} \quad (38)$$

e os pontos serão:  $x_i; i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Sendo que os pontos são igualmente espaçados, assim, segue-se:

$$I_{RSC} = \int_a^b f(x) dx \quad (39)$$

deve-se substituir  $f(x)$  por  $n$  subintervalos representados da forma  $I_{RSS}$  (ver na equação 30):

$$I_{RSC} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots \quad (40)$$

$$+ \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

define-se a regra de Simpson composta da seguinte forma (BARROSO, 1987):

$$I_{RSC} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) \quad (41)$$

$$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

### 3.2.1 Erro de Truncamento da Regra de Simpson Composta ( $E_{TRSC}$ )

Com a finalidade de atingir o ( $E_{TRSC}$ ), deve-se efetuar a soma de todos os erros cometidos a cada aplicação da ( $RSS$ ) (ver em 37), isto é (BARROSO, 1987, p. 218):

$$E_{TRSC} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_{n/2} = \sum_{i=1}^{n/2} E_i \quad (42)$$

no qual  $E_i$  é o erro de integração numérica no par de subintervalos cujos extremos são:

$[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$  e  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$

Acrescentando (37) em (42), apresenta-se:

$$E_{TRSC} = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\mu_i) \quad (43)$$

sendo  $x_{2i-2} \leq \mu_i \leq x_{2i}$ .

Pela continuidade de  $f^{(4)}(x)$ , existe  $\mu \in [a, b]$ , tal que:

$$\frac{n}{2} f^{(4)}(\mu) = \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\mu_i) \quad (44)$$

Incorporando (44) em (43), tem-se:

$$E_{TRSC} = \frac{-h^5}{180} n f^{(4)}(\mu) \quad (45)$$

como;

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (46)$$

então (BARROSO, 1987):

$$E_{TRSC} = \frac{-(b - a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\mu) \quad (47)$$

sendo  $a \leq \mu \leq b$

Por conseguinte (47) representa a fórmula teórica do erro de truncamento para a regra de Simpson composta.

## 4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA ADAPTATIVA

Acerca das técnicas supracitadas *RSS* e *RSC*, as quais são utilizadas quando a função integrando  $f(x)$ , possui variação suave ao longo do seu intervalo, contudo, é de conhecimento que existe funções que apresentam um elevado grau de variação no intervalo. Diante disso, deve-se apresentar os métodos de quadratura adaptativa, os quais são estratégias iterativas que proporcionam a melhora dos resultados de um determinado problema. Diferente dos métodos *RSS* e *RSC* que possuem espaçamento  $h$  (constante), as abordagens adaptativas possuem maior eficácia na acurácia, devido ela agir em regiões que necessitam de algum refinamento, ou seja, variando a dimensão dos subintervalos, proporcionando uma maior dinâmica computacional na implementação deste processo (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

### 4.1 REGRA DE SIMPSON ADAPTATIVA (RSA)

Com a finalidade de alcançar uma aproximação mais precisa para a integral no intervalo  $[a, b]$ , a regra de regra de Simpson adaptada se torna uma alternativa para a implementação do algoritmo numérico adaptativo. Levando em consideração que a função possua tanto regiões com grande variação funcional como regiões com pequena variação, tendo vista isso, pode-se partir de um erro pré-estabelecido e adaptar o tamanho do degrau para as necessidades de variação. O cálculo deste erro pode ser atingido através da aproximação de uma  $\int_a^b f(x) dx$  com uma tolerância  $\varepsilon > 0$ . Onde necessita-se aplicar primeiramente a primeira regra de Simpson (ver na equação 30) com o tamanho da amplitude  $h$ , sendo  $h = \frac{b-a}{2}$ . Assim, temos (BURDEN E FAIRES 2016, p. 244):

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\mu) \quad (48)$$

para algum  $\mu$  em  $(a, b)$ , no qual:

$$S(a, b) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] \quad (49)$$

Ademais, o passo a seguir requer a determinação de uma aproximação de precisão que não requeira  $f^{(4)}(\mu)$ . Nessa circunstância, deve-se aplicar a *RSC* (ver na equação 41), com  $n = 4$  e tamanho da amplitude sendo  $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{4}$ , o que gera:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \left[ f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right] - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(\tilde{\mu}) \quad (50)$$

para qualquer  $\tilde{\mu}$  em  $(a, b)$ . Simplificando a notação, obtemos:

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{h}{6} \left[ f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right] \quad (51)$$

e

$$S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{h}{6} \left[ f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right] \quad (52)$$

Sendo assim, a equação (50), poder ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \left(\frac{h^5}{90}\right) \cdot f^{(4)}(\tilde{\mu}) \quad (53)$$

A estimativa do erro é calculada assumindo-se que  $\mu \approx \tilde{\mu}$ , ou, mais precisamente que  $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\tilde{\mu})$ , sendo que o sucesso desta técnica depende da precisão dessa suposição. Se ela é precisa, então devemos equacionar as integrais nas equações (48) e (53) que irá implicar:

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \left(\frac{h^5}{90}\right) \cdot f^{(4)}(\tilde{\mu}) \approx S(a, b) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\mu) \quad (54)$$

assim sendo

$$\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\mu) \approx \frac{16}{15} \left[ S(a, b) - S\left(a + \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right] \quad (55)$$

a utilização dessa estimativa na equação (53) produz a estimativa de erro.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{16} \left(\frac{h^5}{90}\right) \cdot f^{(4)}(\mu) \approx \frac{1}{15} \left| S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \quad (56)$$

O resultado encontrado enfatiza que  $S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$  aproxima  $\int_a^b f(x) dx$  cerca de 15 vezes melhor do que concorda com o valor conhecido  $S(a, b)$ . Assim, se:

$$\left| S(a, b) - S\left(a + \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < 15\varepsilon \quad (57)$$

espera-se ter:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < \varepsilon \quad (58)$$

e

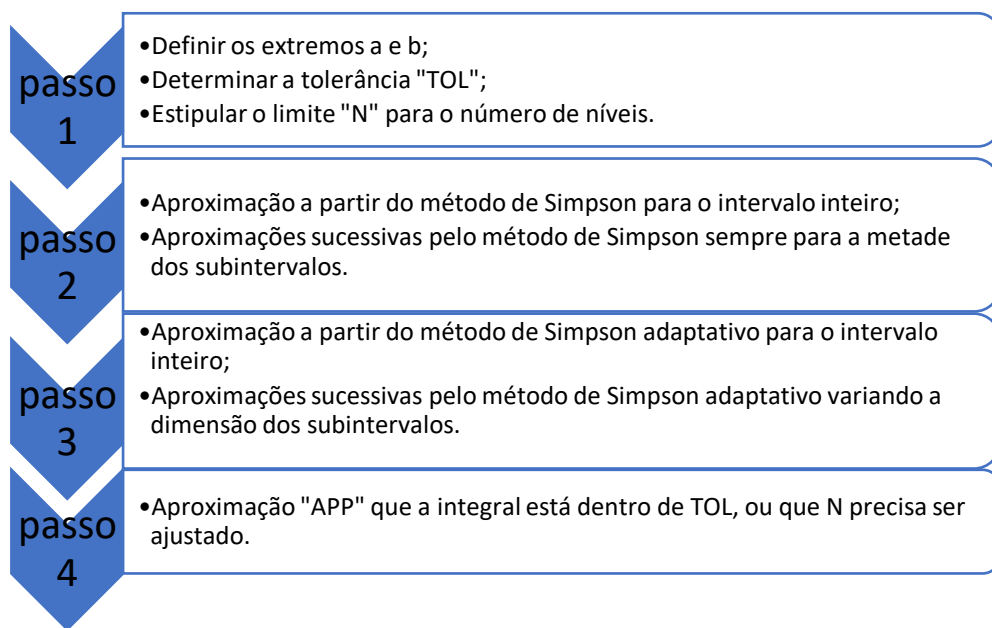
$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \quad (59)$$

é aceito como uma aproximação precisa o suficiente de  $\int_a^b f(x) dx$  (BURDEN E FAIRES 2016).

#### 4.2 ALGORITMO ADAPTATIVO BASEADO NA REGRA DE SIMPSON

Nesta seção, será apresentado como forma de fluxograma as etapas para a utilização do algoritmo, o qual será implementando para a regra de Simpson (BURDEN E FAIRES 2003).

Para a aproximação de uma determinada integral  $\int_a^b f(x) dx$  dentro de uma tolerância dada, deve-se primeiramente definir uma entrada que é apresentada no **passo 1**, a resolução da integral por meio da regra de Simpson composta e adaptativa nos **passos 2 e 3** respectivamente, e uma saída que é mostrada no **passo 4**:



## 5 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

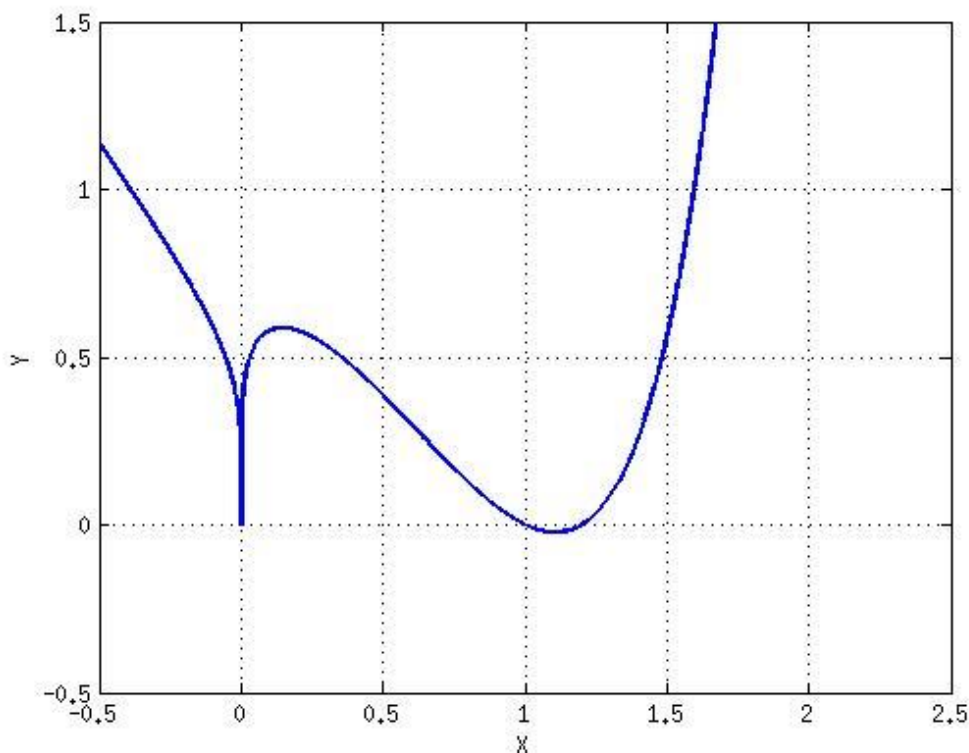
Para testar o método numérico para a regra de Simpson, será apresentado a solução analítica de uma integral de um problema não contextualizado por meio da ferramenta matemática Wolfram|Alpha, tal como a sua solução numérica através da utilização de uma interface do programa Matlab, aplicando a *RSC* e *RSA*, a menos de uma precisão requerida.

### 5.1 PROBLEMA

Calcular  $\int_0^1 x^{0,2} \cdot \left(\frac{6}{5} - x\right) \cdot (1 - e^{2(x-1)}) dx$ , analiticamente e numericamente.

Para a figura 4 tem-se a exibição da imagem geométrica da função  $f(x) = x^{0,2} \cdot \left(\frac{6}{5} - x\right) \cdot (1 - e^{2(x-1)})$  no intervalo de  $[-0,5, 2,5]$ , sendo que a função será integrada no intervalo de  $[0, 1]$ . Verifica-se ainda, que no intervalo de  $[0, 1]$ , a função apresenta um comportamento abrupto.

Figura 4 – Imagem geométrica da função integrando  $f(x) = x^{0,2} \cdot \left(\frac{6}{5} - x\right) \cdot (1 - e^{2(x-1)})$  no intervalo  $[-0,5, 2,5]$



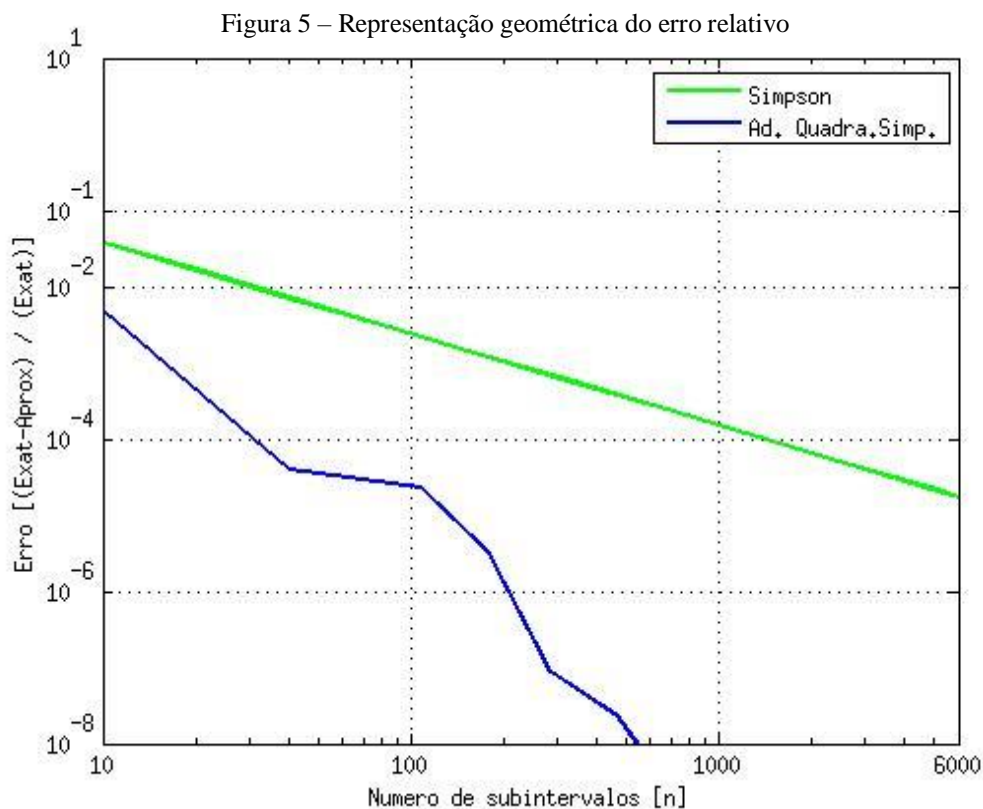
Fonte: Autoria própria (2022)

Vale salientar que a integral supracitada será resolvida pelo teorema fundamental do cálculo (Anexo B), sendo que para a obtenção do seu resultado, foi utilizado o Wolfram|Alpha (Anexo C). Neste sentido, segue:

$$\int_0^1 x^{0,2} \cdot \left(\frac{6}{5} - x\right) \cdot (1 - e^{2(x-1)}) dx = 0,345727359282500 \quad (60)$$

## 5.2 COMPARAÇÃO DA INTEGRAL RESOLVIDA NUMERICAMENTE

Para a realização da atividade, a qual retrata o desempenho comparativo entre os processos citados, para buscar definir quais dessas técnicas apresenta uma performance mais significativa em relação a robustez e acurácia em circunstâncias onde a função apresenta regiões com amplas variações (ver, Figura 4). Ademais, é apresentado na Figura 5, o processo que estima o erro relativo quanto aos resultados numéricos comparados ao resultado analítico.



Fonte: Autoria própria (2022)

No decorrer do processo apresentado na Figura 5, pode-se descrever a análise do comportamento do erro relativo quando os resultados numéricos são comparados com o resultado analítico. Sendo assim, para uma estimativa de erro de  $10^{-2}$ , o método convencional

necessitou de aproximadamente 40 subintervalos para atingir o erro, enquanto que o método adaptativo com apenas 10 subintervalos já apresenta o mesmo erro. Logo mais, para uma estimativa de erro de  $10^{-4}$ , o método convencional necessitou de aproximadamente 1200 subintervalos, sendo que o adaptativo precisou de aproximadamente 40 subintervalos, ou seja, nota-se a mesma quantidade de subintervalos que o método convencional precisou para um erro de  $10^{-2}$ . Além disso, já se percebe uma grande diferença no número de subintervalos em relação aos métodos a partir de um erro de  $10^{-4}$ . Em última análise, o método convencional não atinge o erro de  $10^{-6}$  e  $10^{-8}$  na Figura 5, todavia o método adaptativo atinge o erro de  $10^{-6}$  e  $10^{-8}$  em aproximadamente 300 e 700 subintervalos respectivamente.

Após a obtenção dos valores numéricos na interface do programa Matlab, será exibido na Tabela 1, os resultados da integral, sendo mostrado o seu resultado analítico e seus resultados numéricos, tanto pelo método convencional quanto pelo adaptado.

Tabela 1 – Resultados da integral analiticamente e numericamente

Integral exata = 0, 345727359282500
Integral de Simpson composta = 0,345724187395835
Integral de Simpson adaptada = 0, 345727359689493

Fonte: Produzida pelo autor com base nos dados (Matlab, 2022)

### 5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Posteriormente a execução do cálculo previamente computado, a *RSA* apontou uma maior acurácia para o cálculo da integral empregada. Desse modo o erro relativo apresentado na figura 5 é menor para a *RSA* do que para a *RSC*. Além disso, percebe-se na Figura 5 que para determinar uma estimativa de erro de aproximadamente  $10^{-8}$ , foi necessário subdividir o intervalo de integração em aproximadamente 700 subintervalos para a *RSA*, enquanto que para a *RSC*, levando em consideração a mesma estimativa de erro, mesmo com a subdivisão de 6000 subintervalos, não houve a obtenção da mesma acurácia.

Além do mais, ainda como informação, deve-se ponderar o tempo decorrido para o processamento dos métodos da *RSC* e *RSA* para a subdivisão dos 10240 subintervalos definidos. O método composto, mesmo não atingido o erro pré-estipulado, necessitou de aproximadamente 0.157421 segundos, no entanto o método adaptativo, o qual atingiu o erro pré-estabelecido, foi operado em aproximadamente 24.178959 segundos, sendo um tempo de aproximadamente 90 vezes maior que a realização do método composto.

## 6 CONCLUSÃO

Portanto, o trabalho constituiu-se em retratar o desempenho no que se refere os meios numéricos, tendo em conta a regra de Simpson composta e uma adaptação para a mesma, tratada com regra de Simpson adaptativa. Levando em consideração este fato, foi realizado primeiramente o processo de obtenção do resultado analítico, para assim, instituir a solução para os meios numéricos mencionados, tendo concluído a maior eficácia na acurácia para a *RSA*, visto que a mesma apresenta melhor performance para funções que exibem regiões com grandes variações funcionais para o intervalo de integração.

Apresenta-se como como proposta de estudo futuro a atuação em uma questão que envolva uma situação problema real, podendo estender todo o processo abordado para uma integração múltipla.

## 7 REFERÊNCIAS

BARROSO, Leônidas Conceição. **Calculo Numérico (Com Aplicações)**. 2ª. ed. São Paulo: HARBRA, 1987.

BURDEN, Richard L; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. Cengage Learning. Tradução da 10ª. ed. Americana, 2016.

CLÁUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara Maria. **Cálculo Numérico Computacional**. 2ª. ed. Atlas, 1994.

FLEMMING, Diva Marília.; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, limite, derivação, integração**. 6ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Gen/LTC, 2001.

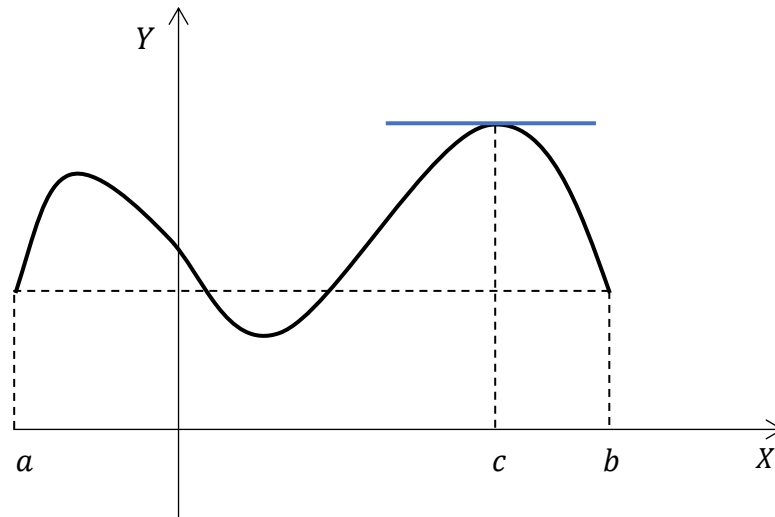
RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Education, 1996.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken. **Cálculo Numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: PEARSON PRENTICE HALL, 2003.

## ANEXO A – TEOREMA DE ROLLE

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $]a, b[$  e  $f(a) = f(b)$ , então existirá pelo menos um  $c$  em  $]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$  (GUIDORIZZI, 2008).

Figura A1 - Representação geométrica do Teorema de Rolle



Fonte: Adaptado (Guidorizzi, 2008).

Demonstração:

Se  $f$  for constante em  $[a, b]$ , então  $f'(x) = 0$  em  $]a, b[$ ; logo existirá  $c$  em  $]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ . Suponhamos, então, que  $f$  não seja constante em  $[a, b]$ . Como  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , pelo teorema de Weierstrass (GUIDORIZZI, 2008), existem  $x_1$  e  $x_2$  em  $[a, b]$ , tais que  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  são respectivamente, os valores máximo e mínimo, de  $f$  em  $[a, b]$ . Como  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , pois estamos supondo  $f$  não-constante em  $[a, b]$ , segue que  $x_1$  ou  $x_2$  pertence a  $]a, b[$  (estamos usando aqui a hipótese  $f(a) = f(b)$ ), daí  $f'(x_1) = 0$  ou  $f'(x_2) = 0$ . Portanto, existe  $c$  em  $]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

## ANEXO B – TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC)

Para a demonstração em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo, necessitamos primeiramente definir uma função auxiliar como segue a baixo:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (D1)$$

cuja a sua derivada é definida da seguinte forma (FLEMMING, 2007):

### PROPOSIÇÃO

Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$ . Então a função  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (D2)$$

possuindo derivada em todos os pontos  $x \in [a, b]$  que é dada por:  $G^{(1)}(x) = f(x)$ , ou seja;

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (D3)$$

### PROVA

Através da seguinte definição a seguir podemos definir a  $G^{(1)}(x)$ :

$$G^{(1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} \quad (D4)$$

dessa forma, possuímos:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (D5)$$

e

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (D6)$$

subtraindo (D5) de (D6), torna-se:

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \quad (D7)$$

Exercendo que:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (D8)$$

e, então:

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \quad (D9)$$

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (D10)$$

Como  $f$  é contínua em  $[x, x + \Delta x]$ , então existe um ponto  $\bar{x}$  entre  $x$  e  $x + \Delta x$ , tal que:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = (x + \Delta x - x)f(\bar{x}) = f(\bar{x})\Delta x \quad (D11)$$

Por consequência:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) \quad (D12)$$

Como  $\bar{x}$  está entre  $x$  e  $x + \Delta x$ , segue que  $\bar{x} \rightarrow x$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Como  $f$  é contínua obtemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x) \quad (D13)$$

Assim:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x) \quad (D14)$$

isto é;

$$G^{(1)}(x) = f(x) \quad (D15)$$

Podemos agora determinar o Teorema Fundamental do Cálculo TFC:

## TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $F$  é uma primitiva de  $f$  neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - f(a) \quad (D16)$$

## DEMONSTRAÇÃO

Como  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então, sucede-se que:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (D17)$$

é uma primitiva de  $f$  nesse intervalo.

Seja  $F(x)$  uma primitiva qualquer sobre o intervalo  $[a, b]$ , daí tem-se que:

$$F(x) = G(x) + C, \forall x \in [a, b]. \quad (D18)$$

como:

$$G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \quad (\text{D19})$$

e

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt \quad (\text{D20})$$

Efetuando a diferença entre  $F(b)$  e  $F(a)$ , tem-se:

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) \quad (\text{D21})$$

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad (\text{D22})$$

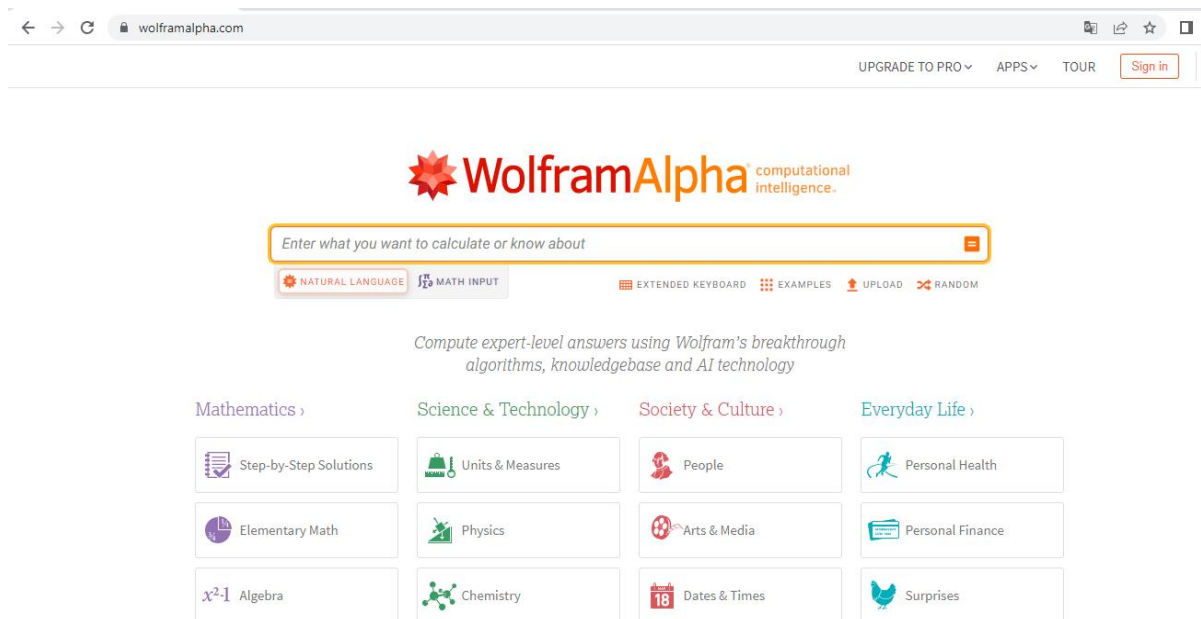
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad (\text{D23})$$

Desta maneira, ficando demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo.

## ANEXO C – WOLFRAM|ALPHA

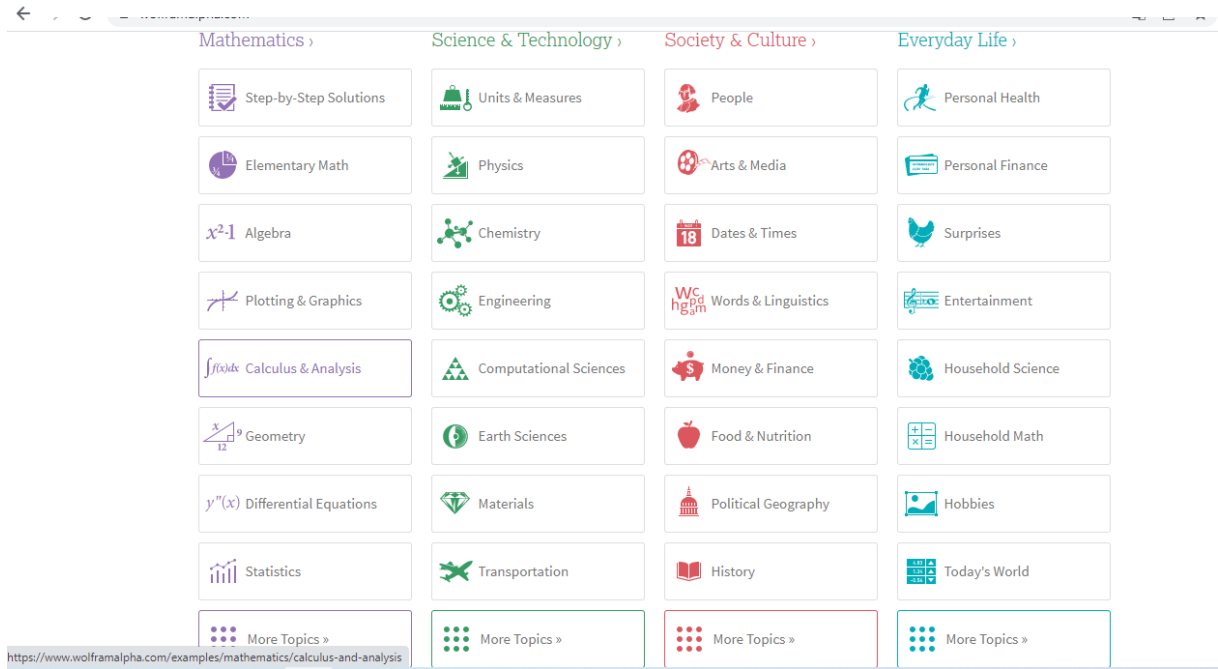
o mecanismo computacional Wolfram|Alpha, é habilitado para computar o conhecimento nas mais diversas áreas, como matemática, estatística, finanças, geografia e nutrição. O mecanismo fornece respostas analíticas, através do processamento extraído por dados estruturados. Além disso, a ferramenta apresenta extrema rapidez para o cálculo e fornece o passo a passo da resolução da função, sendo que para esse recurso deve-se adquirir uma licença paga.

Figura A2 - Interface inicial do Wolfram|Alpha.



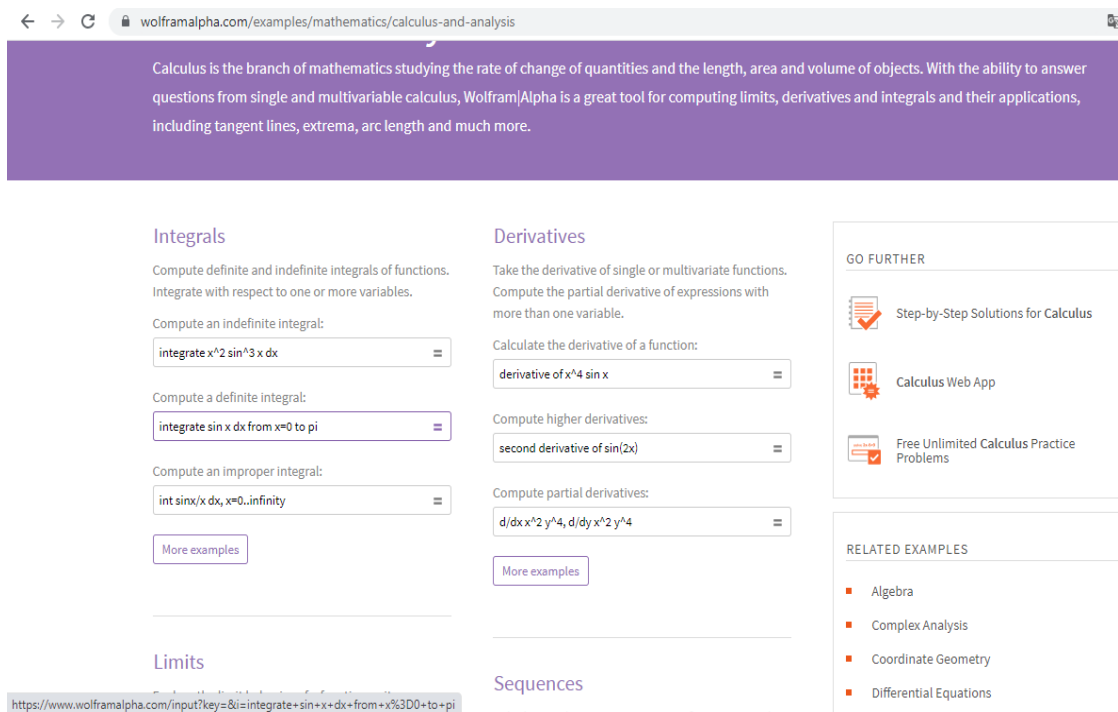
Fonte: Autoria Própria

Figura A3 - opção Calculus&Analysis para resolver a integral.



Fonte: Autoria Própria

Figura A4 - opção Compute a definite integral, para integrais definidas.



Fonte: Autoria Própria

Figura A5 - Resolução da integral.



integrate (x<sup>1/5</sup>)\*(6/5-x)\*(1-exp(2\*(x-1))) dx from x=0 to 1

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Definite integral Fewer digits More digits

$$\int_0^1 \sqrt[5]{x} \left( \frac{6}{5} - x \right) (1 - \exp(2(x-1))) dx = \frac{396 E_{-\frac{1}{5}}(-2) + 230 e^2 - 99 (-2)^{4/5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{220 e^2} \approx$$

0.34572735928252396249536025757108322689433098716137457984447284102;  
3320057859753759053473676744028186 + 0. x 10<sup>-100</sup> i

$E_n(x)$  is the exponential integral E  
 $\Gamma(x)$  is the gamma function

Fonte: Aatoria Própria