

**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – FACET**

YURI CASTRO ALCANTARA

**UMA PROPOSTA DE ESTUDO DE INTEGRAL DUPLA COM O AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

**ABAETETUBA-PA
2019**

YURI CASTRO ALCANTARA

**UMA PROPOSTA DE ESTUDO DE INTEGRAL DUPLA COM O AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia –FACET da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins, como requisito final para obtenção do grau de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Genivaldo dos Passos Corrêa.

**ABAETETUBA-PA
2019**

YURI CASTRO ALCANTARA

**UMA PROPOSTA DE ESTUDO DE INTEGRAL DUPLA COM O AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA**

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia-FACET da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins.

Banca Examinadora

Genivaldo dos Passos Corrêa

Prof. Me. Genivaldo dos Passos Corrêa
Orientador
UFPA/ABAETETUBA

Oswaldo dos Santos Barros

Prof. Dr. Oswaldo Santos Barros
Examinador
UFPA/ABAETETUBA

Silvana da Costa Gomes

Profa. Me. Silvana da Costa Gomes
Examinador
UFPA/ABAETETUBA

DATA DA AVALIAÇÃO: 11/07/2019

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Leonildo dos Santos e Roseleia Castro e aos meus irmãos Jefferson e Yro Castro, por acreditarem em meu potencial e sempre me apoiarem em minha jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus autor da minha vida por essa oportunidade que me concedeu;

A todos os meus familiares e amigos, que sempre me apoiaram e me deram forças durante minha trajetória acadêmica;

A minha família, em especial a meus pais e meus irmãos, por sempre acreditarem em minha capacidade, me incentivando e dando todo o apoio necessário para que eu pudesse obter sucesso;

Ao meu orientador Prof. Me. Genivaldo dos Passos Corrêa pela orientação do trabalho, pela amizade e por todas as oportunidades de desenvolvimento acadêmico que me proporcionou;

A todos os professores do curso que contribuíram para minha formação, pela dedicação que tiveram para com o ensino e a Universidade federal do Pará pela oportunidade de poder fazer parte da sua história;

Aos meus amigos e colegas de turma pelos anos de parceria e amizade construída durante o curso.

RESUMO

Este trabalho faz um estudo sobre as integrais duplas, usando como suporte o software Geogebra para construir as figuras planas e espaciais que surgem no decorrer do estudo. Ressalta-se a importância do software, nessas construções, pois os mesmos são difíceis de ser construídos a mão livre pelo aluno e pelo professor em suas aulas. Cabe ainda ressaltar que a visualização dessas figuras pelos alunos pode facilitar o entendimento da teoria das integrais duplas, diminuindo o teor abstrato do ensino de matemática, contribuindo significativamente com a aprendizagem dos alunos. Além disso apresenta-se um tutorial das construções desenvolvida, afim de que o mesmo sirva de suporte para outros alunos que desejarem estudar com o auxílio do software Geogebra.

Palavra Chave: Ensino de cálculo, Integral Dupla, Software Geogebra.

ABSTRACT

This work makes a study on the double integrals, using as support Geogebra software to build the flat and spatial figures that appear during the course of the study. The importance of software in these constructions is emphasized, since they are difficult to construct by the free hand by the student and the teacher in their classes. It should also be emphasized that the visualization of these figures by the students can facilitate the understanding of the theory of double integrals, reducing the abstract content of mathematics teaching, contributing significantly to students' learning. In addition, a tutorial of the constructions developed is presented, so that it supports other students who wish to study with the help of Geogebra software.

Keywords: Teaching Calculus, Integral Dual, Geogebra Software.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. SOFTWARE GEOGEBRA	3
2.1. Reconhecimento do programa	4
3. INTEGRAL DUPLA	6
3.1. Integral Simples	6
3.2. Definição de integral dupla	10
3.3. Propriedades da integral dupla.....	14
3.4. Somas superiores e inferiores.....	14
3.5. Teorema de Fubini	16
3.6. Integral dupla sobre regiões não retangulares.....	20
3.7. Cálculo de integral dupla.....	21
4. APLICAÇÃO DO GEOGEBRA	26
4.1. Regiões de integração	26
4.2. Construção do sólido	28
4.3. Cálculo de integral com o Geogebra	31
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS.....	37

1. INTRODUÇÃO

O ensino aprendizagem nas disciplinas de cálculo é um processo complexo, abstrato e de difícil compreensão para a maioria dos alunos dos cursos de graduação em ciências exatas e tecnologia, sendo assim um dos principais fatores que acarretam em um número elevado de reprovação dos alunos nessas disciplinas. Em particular, nas universidades, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral IV proposta no sexto semestre do curso de matemática nas universidades. Devido a esse alto grau de complexidade e abstração nos conteúdos da disciplina, as dificuldades tornam-se bastante visíveis, pela necessidade de construções algébrica e geométricas nos assuntos e exercícios abordados em sala de aula pelo professor.

Dessa forma, apresentamos nesse trabalho uma proposta de estudo de cálculo, em especial integral dupla, para alunos e professores com o auxílio do Software Geogebra, com o intuito de facilitar o ensino aprendizagem dos mesmos deixando-o mais prático e dinâmico, amenizando o seu alto grau de abstração. A motivação para o desenvolvimento do mesmo está diretamente ligada a falta de compreensão geométrica dos alunos em relação ao conteúdo de cálculo.

O ensino de Cálculo Diferencial Integral, tradicionalmente se utiliza de recursos didáticos pouco variados que se limitam na maioria das vezes ao quadro, livro texto de cálculo, listas de exercício e realização de trabalhos. É indiscutível que essas didáticas ajudam na aprendizagem dos conteúdos, mas será que elas motivam o aluno a desenvolver um estudo com mais reflexão e dinamismo? Afim de obter respostas para perguntas como esta é que a Educação Matemática tem desenvolvido, ao longo de quatro décadas, estudos que compõem a didática da Matemática e que se ocupam de refletir aspectos da matemática relativos à natureza do seu ensino aprendizagem (BICUDO, 1999), (BRUN, 1996).

O quadro não deixa de ser uma tecnologia importante, sobretudo para o docente de matemática, que o utiliza para interagir com a turma e o conteúdo, seja na demonstração de um teorema, ou nas apresentações das resoluções dos vários exercícios trabalhados em sala de aula, contudo é perceptível que essa didática é extremamente limitada na abordagem de algumas situações matemáticas, devido ao fato de não ser possível apresentar de forma prática e dinâmica a visualização de alguns conceitos matemáticos, deixando assim muitas lacunas a serem preenchidas

na aprendizagem dos alunos. Por isso se faz necessário o uso de novas ferramentas pelos alunos e professores que possibilitem um melhor entendimento do assunto.

Na perspectiva de trazer uma contribuição para tentar superar as dificuldades existentes no cenário do ensino atual utilizamos o software Geogebra que possui uma gama de aplicabilidade na matemática e se mostra exatamente uma dessas ferramentas que se usado de forma planejada e pedagógica, ele não será simplesmente um software que possibilita uma melhor visualização geométrica dos conceitos matemáticos para os alunos, mas uma ferramenta com a qual este desenvolve, descreve, busca novas estratégias e soluciona situações problemas.

A proposta que apresentamos nesse trabalho é resultado de um processo de construção de conhecimento baseado em pesquisas, práticas e reflexões que sintetizamos nesse texto que compreende três capítulos.

No capítulo I apresentamos um breve histórico do Software Geogebra e fazemos um reconhecimento do software, afim de apresentar algumas de suas periciais ferramentas e comandos.

No capítulo II apresentamos a definição formal de integral dupla sobre retângulos e sobre regiões não retangulares, partindo do conceito de integral simples. Além disso, enunciamos suas propriedades e o teorema de Fubini com sua respectiva demonstração.

O capítulo III constitui-se de uma aplicação do software Geogebra na representação geométrica de regiões de integração e na representação da integral dupla como um sólido geométrico, bem como em seu cálculo algébrico.

Por fim, apresentamos as considerações finais que englobam todas as reflexões feitas no desenvolvimento do trabalho.

2. SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um aplicativo interativo sobre Geometria, Álgebra, Estatísticas e Cálculo. Ele tem uma gama de atividades, podendo ser usado por alunos dos primeiros anos escolares, por estudantes de graduação nas áreas de exatas e professores de modo geral. Trata-se de um software, com premiações internacionais pela sua contribuição no estudo da matemática, apresenta versão em português, disponível na rede para Download gratuito no seguinte endereço eletrônico www.geogebra.org. O aplicativo escrito em linguagem Java está disponível em múltiplas plataformas como Windows, MacOS, e Linux, nos computadores de mesa, e no Android, Ipad e Windows, para tablets. Criado pelo prof. Dr. Markus Hohenwarter, que iniciou o projeto em 2001 na universidade de Salzburg, e continuou o projeto na Universidade Atlantic, de 2006 a 2008, indo posteriormente para a Universidade Estadual da Florida.

Segundo HOHENWARTER (2007), idealizador do software, “a característica mais destacável do Geogebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na Zona de Gráficos e vice-versa”. O aplicativo traz muitos recursos dinâmicos e interativos para a sala de aula, tornando-se uma ferramenta de grande valia para ensinar de maneira mais ampla os conteúdos matemáticos abordados durante a aula, pois apresenta inúmeras ferramentas para a criação de gráficos, objetos e fórmulas matemáticas incluindo o cálculo de derivadas e integrais facilitando a visualização e o entendimento do aluno. Além disso, o uso do software Geogebra nas aulas pelos professores é uma forma de aliar a tecnologia a realidade do ensino, motivando e instrumentalizando o processo de construção do conhecimento matemático.

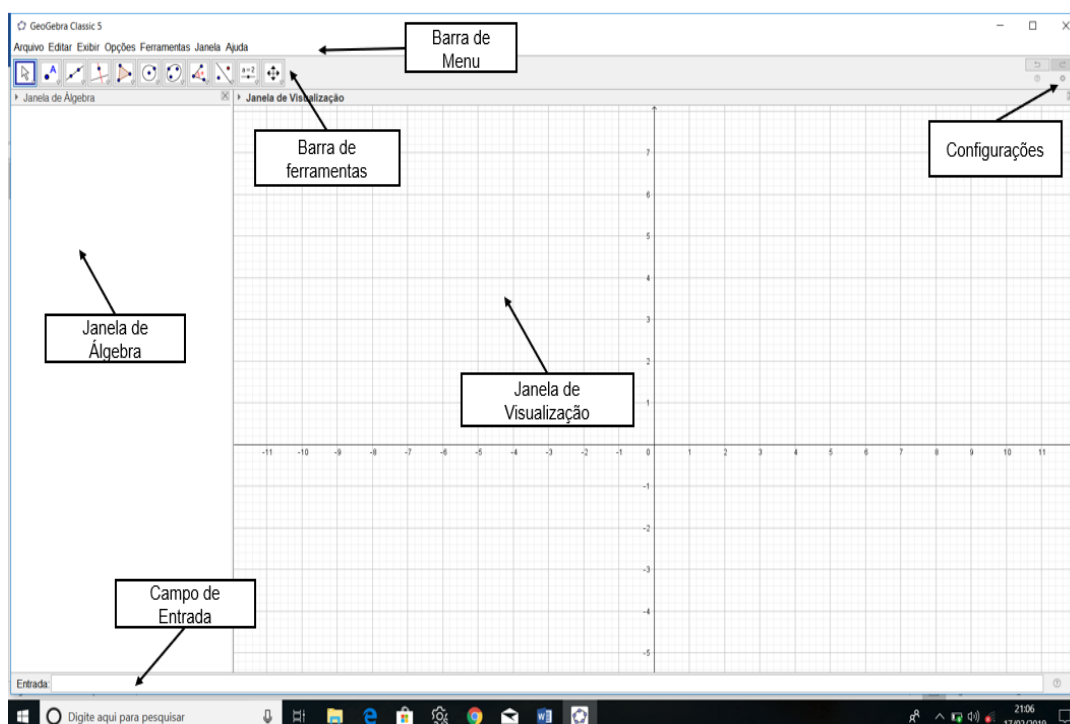
Assim, a escolha do software Geogebra pode ser justificada pelo fato de o mesmo ser um software dinâmico voltado para todos os níveis de ensino e por comporta ferramentas educacionais de qualidade notável, as quais transformarão estudos abstratos e complexos em uma atividade mais aproveitável e dinâmica, dada a facilidade que a tecnologia computacional tem a oferecer as ciências exatas. Dessa forma, pode-se descobrir um mundo fascinante em meio a números e fórmulas matemáticas, tendo a possibilidade de ponderar equações e ainda elevar ao máximo as possibilidades de desenhos e geometria sem precisar de habilidades motoras ou de instrumentos de desenhos especiais.

2.1. Reconhecimento do programa

Para que se possa usar o software Geogebra é necessário inicialmente conhecer sua interface, portanto apresentaremos aqui algumas informações básicas sobre a utilização do software. Para a construção deste trabalho usaremos a versão Geogebra Classic 5. Vamos apresentar o software, suas ferramentas e construções com elas desenvolvida.

Ao entrar no programa nos deparamos com a seguinte janela.

Figura 1 - Janela algébrica e geométrica do Geogebra.



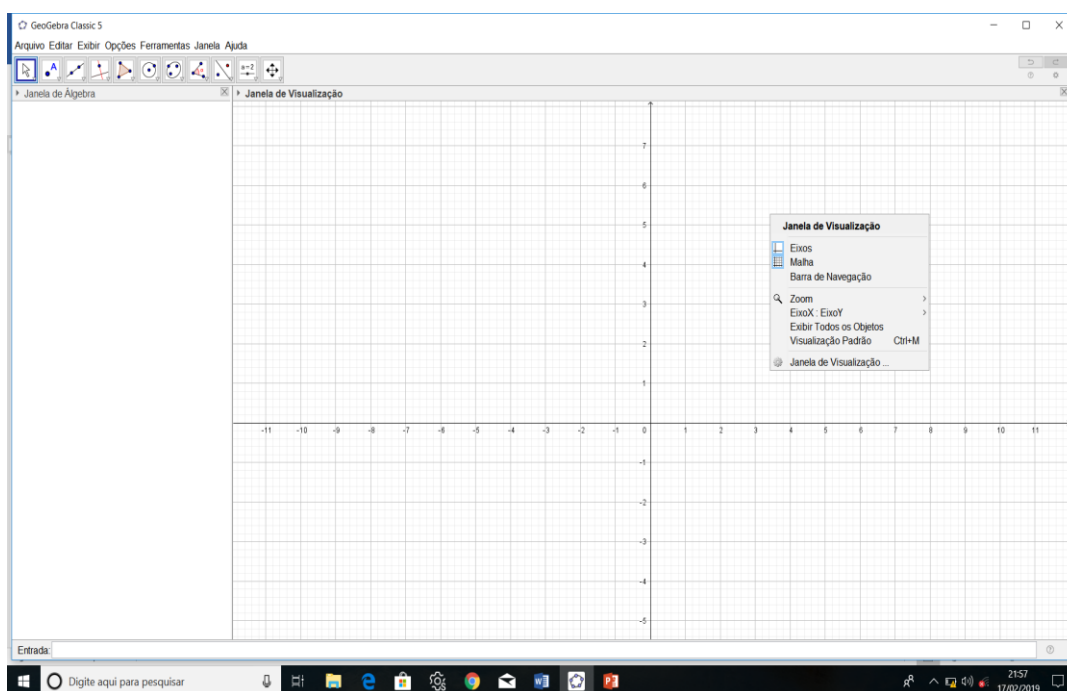
Fonte: Autor, 2019.

Nela podemos observar que a janela inicial se divide em duas: à esquerda a parte algébrica que contém um campo de entrada na parte inferior e vários botões de opções, e que pode ser fechada se necessário, do lado direito temos a parte geométrica ou janela de visualização. Para reativar a janela de álgebra basta ir ao item exibir no menu da janela de visualização e clicar em "janela de álgebra". Neste mesmo item podemos ativar e desativar a janela de cálculo simbólico (CAS), janela de visualização 3D, calculadora de probabilidade e o protocolo de construção.

A janela geometria é o local onde os objetos são construídos, nela é possível colorir os objetos, aumentar a espessura das linhas, medir ângulos e distâncias. Além disso pode-se habilitar as coordenadas polares e cartesianas que facilitam as construções na janela de álgebra e ainda visualizar todas representações algébricas

dos objetos construídos na janela geométrica. Essa dupla representação de objetos são as mais notáveis características do Geogebra que ainda apresenta um campo de entrada de texto localizado na parte inferior direita da janela do software, onde é possível escrever coordenadas, equações, comandos e funções de uma ou várias variáveis, de forma que, pressionando a tecla **Enter**, eles são mostrados imediatamente na janela geométrica em formas de gráficos, pontos, planos, superfícies. O software traz ainda em suas configurações a opção **Eixo**, pra ativar ou desativar devemos ir no menu exibir. Se quisermos que a janela fique quadriculada, basta selecionarmos a opção **Malha**. Essas alterações podem ser feitas de maneira muito simples, clicar com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica. Isso faz abrir uma caixa com algumas opções, conforme a figura a seguir.

Figura 2 - configurações da janela de visualização do Geogebra.



Fonte: Autor, 2019.

A barra de menu fica na parte superior e é composta pelas opções: Arquivos, Editar, Exibir, Ferramentas, Configurações e Janela de Ajuda. Na barra de ferramentas estão presentes as ferramentas que possibilitam fazer construções matemáticas, clicando nos botões temos uma breve descrição do uso de cada um e na extremidade direita ficam as opções desfazer e refazer.

3. INTEGRAL DUPLA

Neste tópico apresentaremos o conceito de Integral Dupla, o qual relaciona vários conceitos algébricos e geométricos, suas propriedades e alguns resultados que são essenciais para um bom entendimento do assunto, tais como Teorema de Fubini. Faremos ainda uma breve explanação da definição de integral simples como ponto de partida da integral dupla.

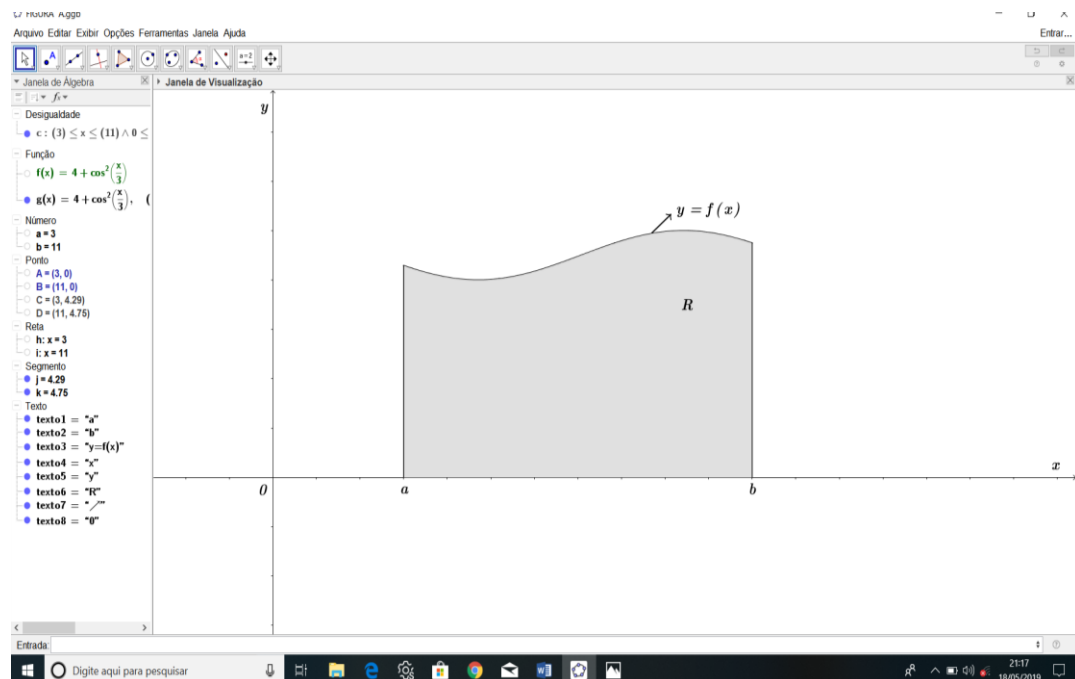
3.1. Integral Simples

Sabe-se que, a área de um polígono, é a soma de todas as áreas dos triângulos contido nesse polígono e ainda dos estudos de cálculo de uma variável real que a integral simples;

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

onde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa, com gráfico situado acima do eixo x no intervalo $I = [a, b]$, é definida como a área da região R delimitada pelas retas que passam pelos extremos do intervalo I e que está acima do eixo das abscissas e abaixo da função $y = f(x)$. Como na figura abaixo:

Figura 3 - Representação geométrica da integral simples como área.



Fonte: Autor, 2019.

No entanto, como se faz, para chegar a esse conceito tão sofisticado de área?

Consideremos a região R como descrita acima. Tomemos $P: a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$, para simplificar escolhamos cada um desses subintervalos como sendo de comprimentos iguais Δx , com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Para cada índice i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), seja c_i um número no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. Considere n retângulos, cada um tendo Δx unidades de largura e uma altura $f(c_i)$ unidades, seja a soma das áreas dos retângulo dada por S_n unidades quadradas, então

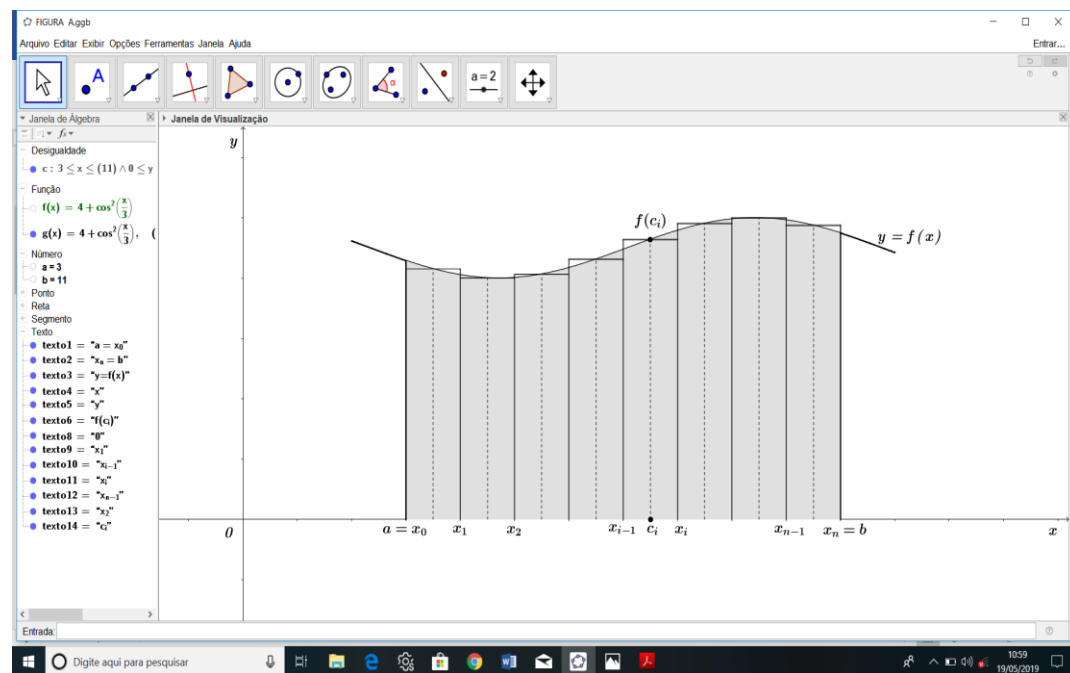
$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \dots + f(c_i)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$$

ou de forma mais compacta:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad (2)$$

O lado direito da igualdade representa uma aproximação por falta ou por excesso da área debaixo do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Como ilustrado na figura a seguir;

Figura 4 – Representação geométrica do cálculo da área da região R .



Fonte: Autor, 2019.

Quando n cresce arbitrariamente, os valores de S_n , dados pela equação (2) também crescem e se diferem um do outro por valores que se tornam arbitrariamente pequenos em quantidade, isto é, o valor da equação (2) se aproxima

de um limite e é este limite que tomamos como definição da medida de área da região R . Isso significa que:

$$A_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

ou ainda,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (3)$$

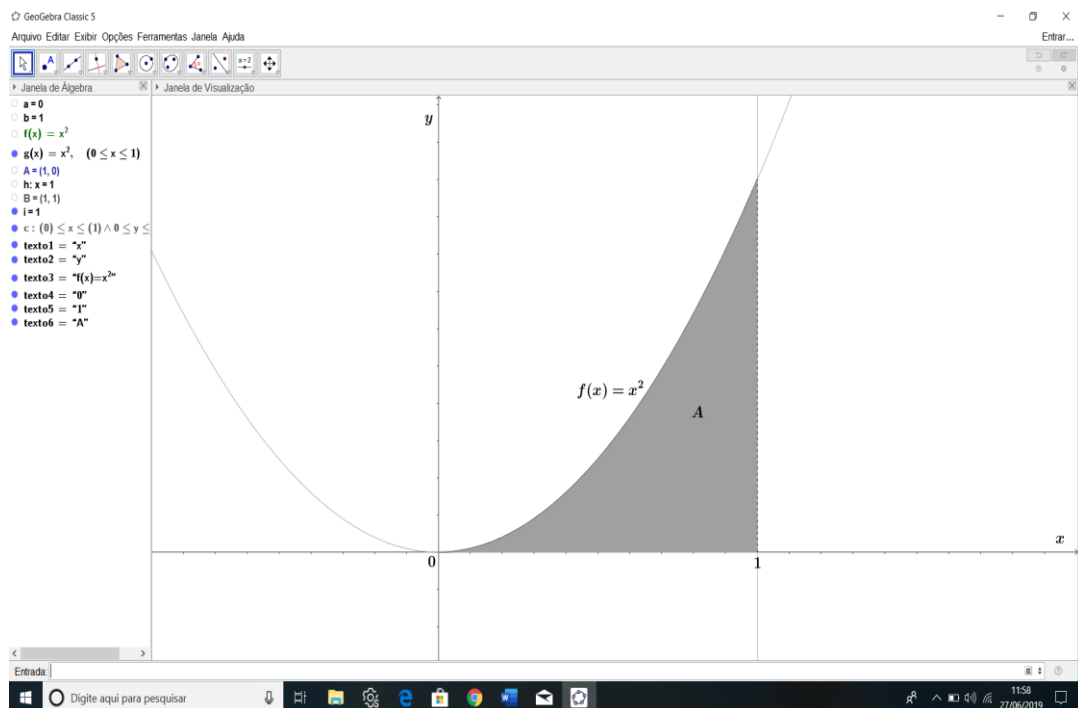
se o limite existir.

Esse processo de construção é denominado Soma de Riemann, a função $f(x)$ é chamada de função integrando, a é o limite superior e b é o limite inferior. Esses ingredientes constituem o que conhecemos como integral simples.

Exemplo: Vamos calcular a área debaixo do gráfico da função $f(x) = x^2$ e acima do eixo x , no intervalo $[0,1]$ usando a definição acima.

Uma representação geométrica da região descrita no enunciado é a apresentada na imagem abaixo:

Figura 5 – Representação geométrica da área debaixo do gráfico da curva.



Fonte: Autor, 2019.

Solução: Inicialmente afirmamos a seguinte igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Prova: Usaremos o Princípio de Indução Matemática.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ é verdadeira}\}$, onde $p(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vamos mostrar que $A = \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se que $p(1)$ é verdadeira, pois:

$$\sum_{i=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Suponhamos que para $n \in A$, $p(n)$ é verdadeira. Mostremos que $p(n+1)$ é verdadeira, isto é, que $(n+1) \in A$. De fato, por definição de somatório temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=1}^n k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Logo $p(n+1)$ é verdadeiro, implicando $(n+1) \in A$. Então, pelo Princípio de Indução Matemática $A = \mathbb{N}$ ■

Além disso, podemos escrever essa área como $\int_0^1 x^2 dx$, dada pelo $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$, da seguinte forma. Tomamos uma partição

$$P: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$$

do intervalo $[0,1]$, onde $x_k = k\Delta x$, com $k = 1,2,3, \dots, n$ e $\Delta x = \frac{1}{n}$. Assim, formamos as somas de Riemann que seguem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n i^2 (\Delta x)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^n i^2 \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \Rightarrow S_n = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \end{aligned}$$

aplicando o limite com n tendendo ao infinito temos;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo conclui-se que a área ilustrada na figura acima é $A = \frac{1}{3} u.a$ ou que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

3.2. Definição de integral dupla

Agora mostraremos que esse mesmo conceito de integral de uma variável pode ser estendido a uma função real de duas variáveis reais $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, bastando que $f(x, y)$ seja contínua na região compacta D . Da seguinte forma:

Considere uma função f contínua de duas variáveis definida em um retângulo compacto

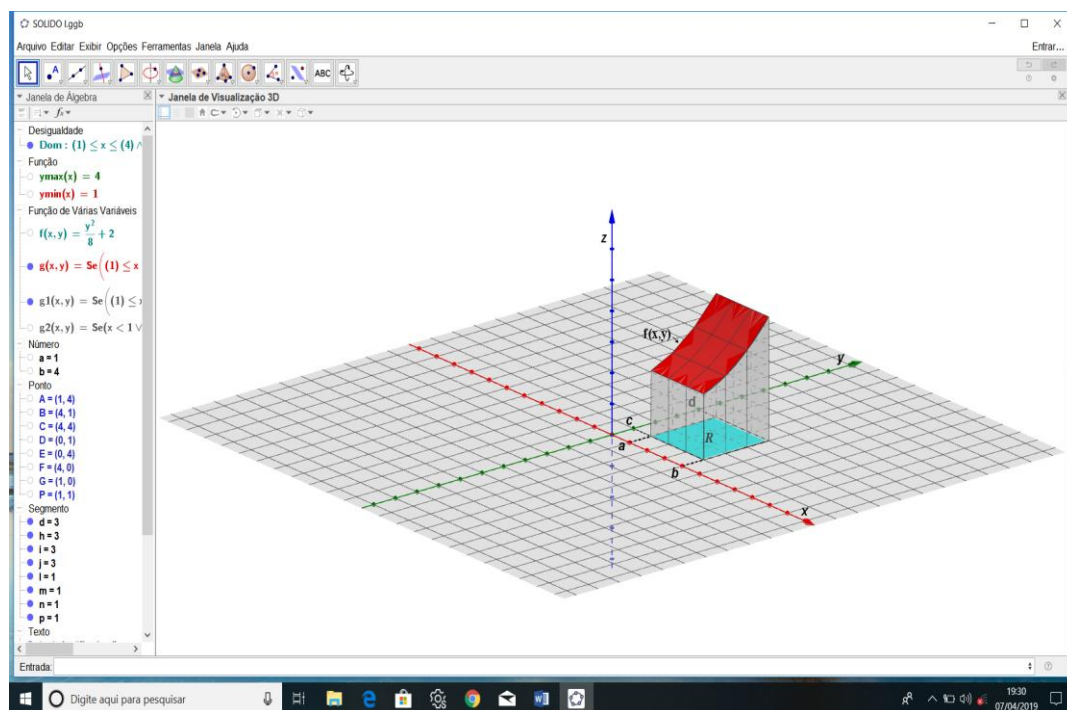
$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor que $f(x, y) \geq 0$, isto é o gráfico de f é uma superfície situada acima do plano xy . Seja S o sólido limitado lateralmente pela região R , inferiormente pelo plano xy e superiormente pelo gráfico de f . Podemos escrever S como um sólido da seguinte forma:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Uma possível representação do sólido S pode ser vista na figura a seguir:

Figura 6 - Representação geométrica do sólido S .



Fonte: Autor, 2019.

O objetivo é determinar o volume do sólido S acima da região R , para tanto devemos proceder da seguinte maneira. Dividir o retângulo R em sub-retângulos, particionando o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos de mesmo comprimento dado por $\Delta x = (b - a)/m$ e o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos de mesmo comprimento dado por $\Delta y = (d - c)/n$, de modo que,

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{i-1} < x_i \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

e

$$c = y_0 < y_1 \dots < y_{j-1} < y_j \dots < y_{n-1} < y_n = d$$

Traçando retas paralelas aos eixos coordenados x e y passando pelos extremos dos subintervalos, formamos mn sub-retângulos R_{ij} de lados $[x_{i-1}, x_i]$ e $[y_{j-1}, y_j]$, ou seja,

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

, com $i = 1, 2, 3, \dots, m$ e $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Cada um desses retângulos possui uma área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Quando m e n tornam-se arbitrariamente grande, ou seja, ($m \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$), então os lados dos retângulos se aproximam de zero, isto é, $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, conseqüentemente ΔA também tende a zero.

Escolhendo em cada R_{ij} um ponto arbitrário, o qual denotaremos por (u_i, v_j) , podemos aproximar o volume de S que está acima de cada sub-retângulos R_{ij} por caixas retangulares de bases R_{ij} e altura $f(u_i, v_j)$. O volume de cada caixa retangular será dado pela formula tradicional que é altura vezes a área do retângulo da base, ou seja,

$$f(u_i, v_j) \Delta A$$

Fazendo a soma do volume de todas as caixas retangulares obtém-se uma aproximação por falta ou por excesso do volume do solido S cuja base é o retângulo D e a altura é a função f , isto é;

$$V_S \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A$$

Essas somas são denominadas somas de Riemann para cálculos de volumes de um sólido qualquer acima de uma determinada região. Assim a partir desse somatório, aplicando o limite definimos o que chamamos de integral dupla de Riemann de f sobre o retângulo D

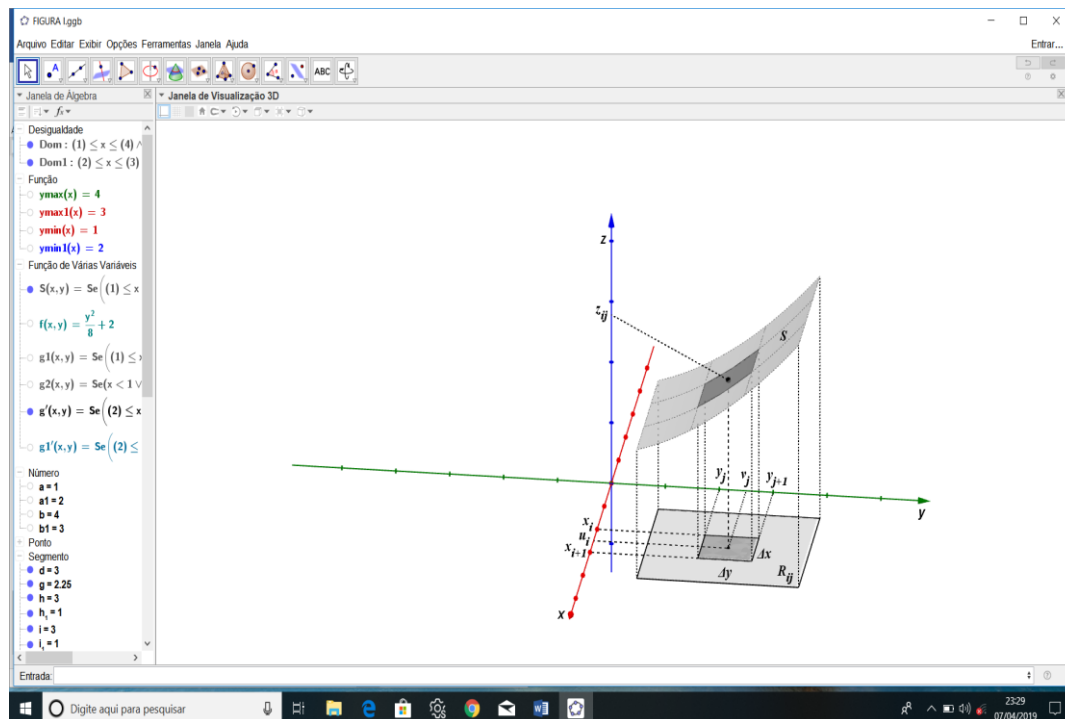
$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A$$

Se o limite existir e for finito. Tal limite será denotado por:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A \quad (4)$$

Uma representação geométrica do que está escrito acima pode ser vista na figura 7.

Figura 7 - Representação do cálculo do volume por caixas retangulares.



Fonte: Autor, 2019.

O elemento dA é a área elementar ou área infinitesimal, usualmente indicada por $dx dy$. Na maioria dos cálculos de integrais, quando é necessário enfatizar as variáveis de integração, utiliza-se a notação

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

peelo fato de ser mais adequada.

Exemplo: Vamos ilustrar nesse exemplo, como usar a definição acima para calcular o volume de um sólido dado pela função $f(x, y) = xy^2$ sobre o retângulo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$.

Solução: Inicialmente, aplicando o método de indução finita demonstramos as igualdades:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tomemos a seguinte partição do retângulo D , determinada pelos pontos $0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = 2$ e $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = 2$, onde, $x_k = k\Delta x$ e $y_k = k\Delta y$, $k = 1, 2, \dots, n$, com $\Delta x = \Delta y = \frac{2}{n}$.

Assim as somas de Riemann desse exemplo, com $u_i = x_i$ e $v_j = y_j$ são

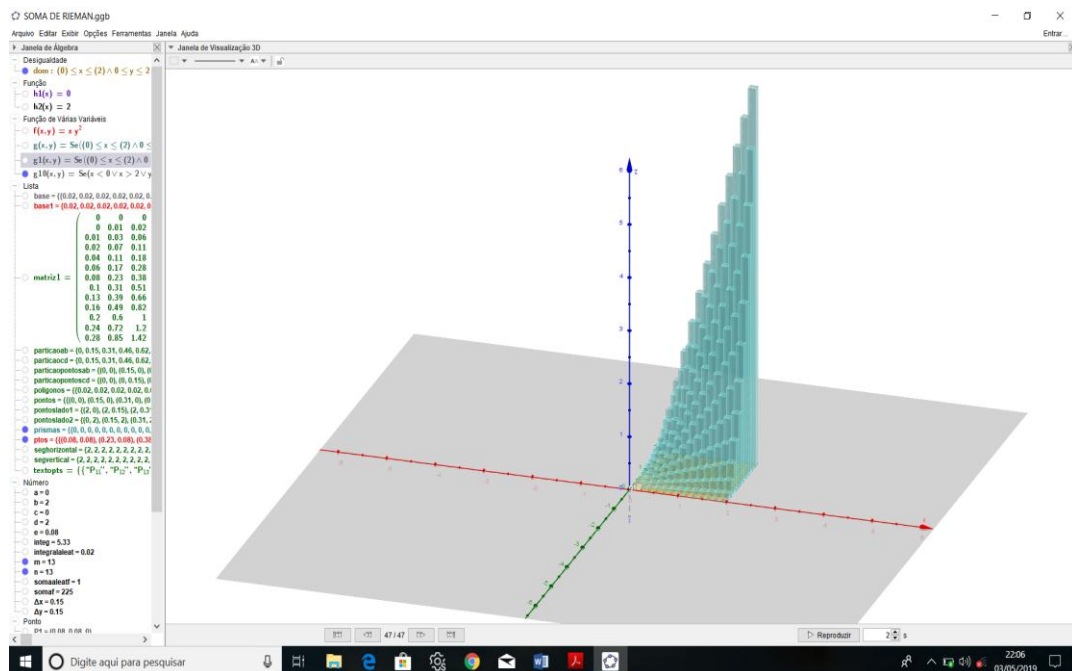
$$\begin{aligned} S_{n,n} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i (\Delta x)^2 \right) j^2 (\Delta y)^3 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right) j^2 (\Delta y)^3 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{4}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] j^2 (\Delta y)^3 = \frac{2(n+1)}{n} \sum_{j=1}^n j^2 (\Delta y)^3 = \frac{2(n+1)}{n} \sum_{j=1}^n j^2 \left(\frac{2}{n} \right)^3 \\ &= \frac{2(n+1)}{n} \frac{8}{n^3} \left(\sum_{j=0}^n j^2 \right) = \left[\frac{2.8(n+1)}{n^4} \right] \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{8(n+1)^2(2n+1)}{3n^3} \end{aligned}$$

Como a integral dupla é o limite desse somatório temos;

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(n+1)^2(2n+1)}{3n^3} = \frac{8}{3} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n^2 + 4n + 1}{n^3} \right] \\ &= \frac{8}{3} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right] = \frac{8}{3} 2 = \frac{16}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Na prática o que fizemos nesse exemplo foi calcular a soma dos volumes de n caixas retangulares de base R_{ij} e altura $f(x,y)$ com n tendendo ao infinito, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 8 - Representação geométrica da soma de Riemann.



Fonte: Autor, 2019.

É evidente nesse exemplo que o cálculo de integral dupla pela definição pode não ser uma tarefa fácil de fazer, exceto para casos elementares, devido ao fato de nem sempre ser possível calcular o somatório $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A$, quando $f(x, y)$ não é digamos uma função simples, isto é, existe uma grande dificuldade em encontrar uma expressão equivalente a esse somatório, afim de que possamos substituí-lo e em seguida aplicarmos o limite. Por isso, o cálculo de integral dupla sobre retângulos e também, sobre regiões fechadas simples não retangulares serão feitos como uma integral repetida ou integral iterada com o auxílio do Teorema de Fubini, o qual será enunciado e demonstrado mais adiante.

3.3. Propriedades da integral dupla

Para enunciar as propriedades seguintes, suponhamos que a fronteira da região de integração R é formada por um numero finito de arco de curvas.

Proposição: Seja $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções contínuas sobre a região D limitada. Dessa forma, temos a garantia da existência das integrais duplas envolvidas, então, valem as seguintes propriedades para as integrais duplas:

$$a) \iint_D k f(x, y) dA = k \iint_D f(x, y) dA, \text{ para todo } k \text{ real.}$$

$$b) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA.$$

$$c) \text{ Se } f(x, y) \geq g(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}, \text{ então } \iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA.$$

$$d) \text{ Se } f(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \text{ pertencente a região } D, \text{ então } \iint_D f(x, y) dA \geq 0.$$

3.4. Somas superiores e inferiores

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ um retângulo qualquer e considere $f(x, y)$ uma função definida e limitada em A . Tomemos uma partição do retângulo A , dada por:

$$P = \{(x_i, y_j) | i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

Definimos M_{ij} e m_{ij} da seguinte forma:

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | (x, y) \in A_{ij}\}$$

e

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | (x, y) \in A_{ij}\}$$

sendo A_{ij} o sub-retângulos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ do retângulo A .

Sendo assim, o número

$$S(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

denomina-se *soma superior* do volume abaixo da superfície $f(x, y)$ em relação a partição P . Por outro lado, o numero

$$S_1(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

denomina-se *soma inferior* do volume abaixo da superfície $f(x, y)$ em relação a partição P .

Como M_{ij} e m_{ij} são respectivamente o supremo e o ínfimo do conjunto das imagens de A_{ij} então, para todo $(u_i, v_j) \in A_{ij}$ temos que:

$$m_{ij} \leq f(u_i, v_j) \leq M_{ij}$$

e conseqüentemente

$$S_1(P) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j \leq S(P) \quad (5)$$

Além disso, resulta ainda do fato de M_{ij} ser o supremo do conjunto dos números $f(x, y)$, com $(x, y) \in A_{ij}$ que, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \in A_{ij}$ tal que:

$$\begin{aligned} M_{ij} - \varepsilon_1 &< f(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \\ \Leftrightarrow M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - \varepsilon_1 \Delta x_i \Delta y_j &< f(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ \Leftrightarrow M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - f(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \Delta x_i \Delta y_j &< \varepsilon_1 \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Note que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varepsilon_1 \Delta x_i \Delta y_j = \varepsilon_1 (b-a)(d-c)$, sendo $(b-a)(d-c)$ a área do retângulo A .

Resta agora provar que se f for integrável em A , então

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

com, $\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots, \Delta y_m\}$.

De fato, sendo $f(x, y)$ integrável em A então, para todo $\varepsilon < 0$, existe um $\delta < 0$ (com δ dependendo apenas de ε) tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_A f(x, y) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

para toda partição P de A , com $\Delta < \delta$. Além disso de (5) tem-se que:

(7)

$$0 \leq S(P) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2}$$

para uma escolha conveniente de (u_i, v_j) em A_{ij} . Logo de (6) e (7) segue que para toda partição P de A e com $\Delta < \delta$ que:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - \iint_A f(x, y) dx dy \right| = \\ & = \left| S(P) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \\ & \leq \left| S(P) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j \right| + \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_A f(x, y) dx dy \right| < \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Do mesmo modo, prova-se

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_A f(x, y) dx dy$$

3.5. Teorema de Fubini

Teorema: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida no retângulo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$. Então,

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (8)$$

Demonstração: Consideremos

$$p_1: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ e

$$p_2: c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_n = d$$

uma partição do intervalo $[c, d]$. Sejam

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

e

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Para todo sub-retângulos A_{ij} dado por $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $y_{j-1} \leq y \leq y_j$, tem se que:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$$

Assim, para qualquer $y \in [y_{j-1}, y_j]$, podemos integrar a desigualdade anterior, no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é;

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_{ij} dx &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} M_{ij} dx \\ \Leftrightarrow m_{ij} x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij} x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \\ \Leftrightarrow m_{ij}(x_i - x_{i-1}) &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij}(x_i - x_{i-1}) \\ m_{ij} \Delta x_i &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \leq M_{ij} \Delta x_i \end{aligned}$$

e ainda segue que

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \leq \alpha(y) \leq \sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i$$

para todo y no intervalo $[y_{j-1}, y_j]$, com $\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Tomando \bar{y}_j no intervalo $[y_{j-1}, y_j]$, com $j = 1, 2, 3, \dots, m$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \right) \Delta y_j \leq \alpha(\bar{y}_j) \Delta y_j \leq \left(\sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i \right) \Delta y_j$$

assim,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \alpha(\bar{y}_j) \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Veja que para $\Delta \rightarrow 0$, ($\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots, \Delta y_m\}$) as somas superiores e inferiores tendem para $\iint_A f(x, y) dx dy$. Logo, $\alpha(y)$ é integrável no intervalo $[c, d]$ e

$$\int_c^d \alpha(y) dy = \iint_A f(x, y) dx dy$$

isto é,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad \blacksquare$$

As integrais a partir da primeira igualdade do teorema são denominadas integrais iteradas ou integrais repetidas da função $f(x, y)$ sobre o domínio D . Veja que nessas integrais já estão especificadas a ordem de integração, isto é, na integral iterada

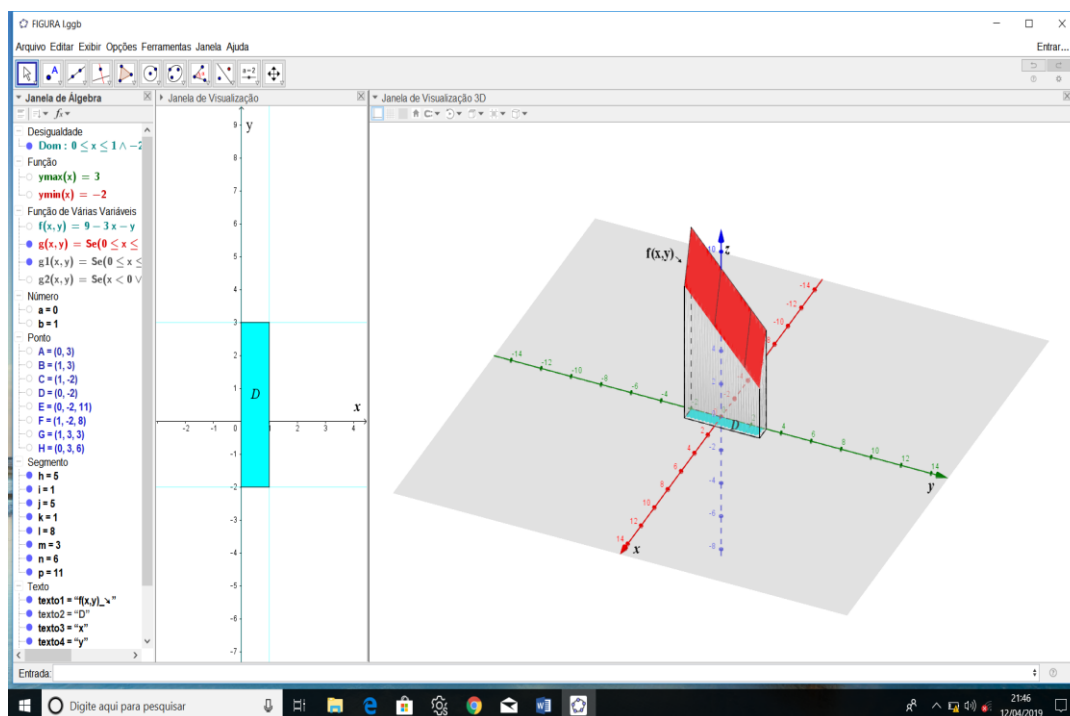
$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

por exemplo, devemos calcular primeiramente a integral na variável y no intervalo $[c, d]$ mantendo assim a variável x temporariamente fixada, em seguida o resultado integramos na variável x no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 1: Determine a integral dupla de $f(x, y) = 9 - 3x - y$ sobre o retângulo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$.

Solução: Podemos representar geometricamente a região D e a integral em questão como um sólido compreendido a cima da região D e abaixo da superfície dada pelo gráfico da função $f(x, y)$ como na figura a seguir.

Figura 9 - Representação da região de integração e da integral dupla como um sólido.



Fonte: Autor, 2019.

Isto é, podemos calcular a integral sobre a região destacada no gráfico como o volume do sólido. Então aplicando o teorema de Fubini para retângulos temos

$$\iint_D (9 - 3x - y) dA = \int_0^1 \left[\int_{-2}^3 (9 - 3x - y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[9y - 3xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-2}^3 dx$$

Deve-se agora substituir os limites de integração na variável que integramos, nesse caso y e integrar novamente a expressão obtida na variável x e substituir os limites de integração, assim substituindo obtemos

$$= \int_0^1 \left(\frac{85}{2} - 15x \right) dx = \left[\frac{85x}{2} - \frac{15x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{85}{2} - \frac{15}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

Assim podemos concluir que

$$\text{Volume} = 35 \text{ u. v}$$

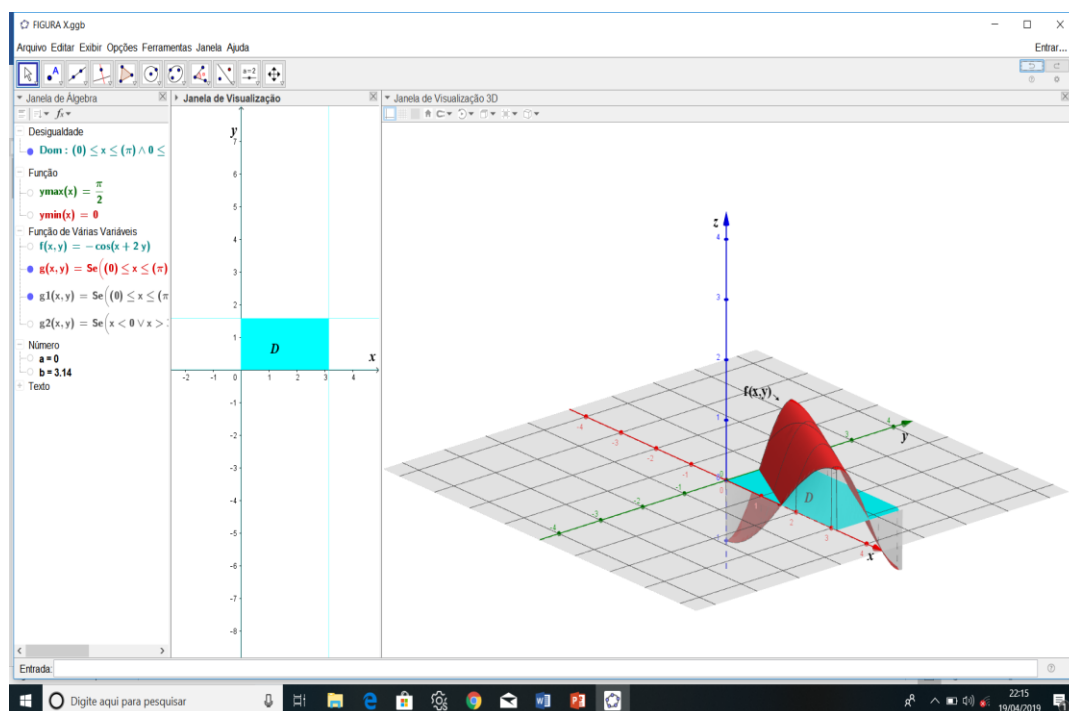
ou ainda que;

$$\iint_D (12 - 3x - 2y) dA = 35$$

Exemplo 2: Calcule a $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} -\cos(x + 2y) dy dx$.

Solução: Observemos inicialmente que a integral a ser calculada está acima de uma região que é um retângulo $[0, \pi] \times [0, \pi/2]$ e abaixo da superfície $f(x, y) = -\cos(x + 2y)$ e também pode ser representada como um sólido da seguinte forma.

Figura 10 - Representação geométrica da integral.



Fonte: Autor, 2019.

Assim, calculando as primitivas e substituindo os extremos obtemos;

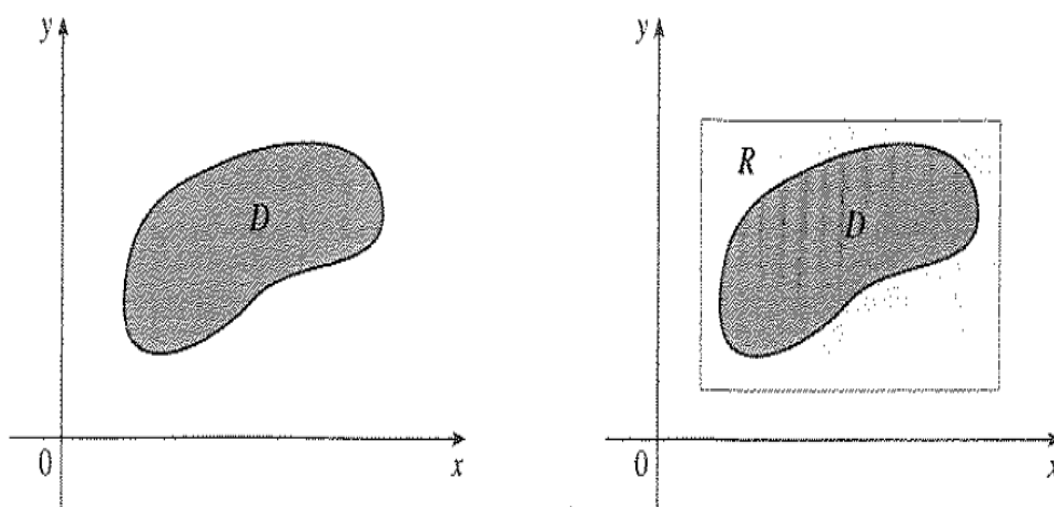
$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} -\cos(x+2y) \, dy \, dx &= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x+2y) \right] \Big|_0^{\pi/2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+\pi) - \operatorname{sen}(x) \, dx = -\frac{1}{2} [-\cos(x+\pi) + \cos(x)] \Big|_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{2} [-1 - 1 - (1 + 1)] = -\frac{1}{2} (-4) = 2
 \end{aligned}$$

3.6. Integral dupla sobre regiões não retangulares

Vimos anteriormente como calcular a integral sobre uma região D retangular, no entanto esse conceito é um tanto limitado, pois o que se quer é calcular integrais não só em domínios retangulares, mas também em regiões mais gerais, ou seja, em domínios não retangulares. Então, vamos agora estender essa ideia de integral dupla de uma função de duas variáveis para uma região mais geral, para isso é necessário definirmos alguns conceitos. Entendemos por uma função suave de uma variável uma função com derivadas contínuas e por uma curva suave uma curva com um número finito de arcos de gráficos de funções suaves. Um bom exemplo desse tipo de curvas são parábolas, retas e elipse. Seja D uma região limitada, isto é, D pode ser colocada dentro de uma região retangular R fechada, cuja fronteira é formada por um número finito de arcos de curvas suaves como na figura abaixo. Seja $F(x, y)$ uma função contínua com domínio R definida por:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ pertence a } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R, \text{ mas não pertence a } D \end{cases} \quad (9)$$

Figura 11 - Representação geométrica da região não retangulares de integração.



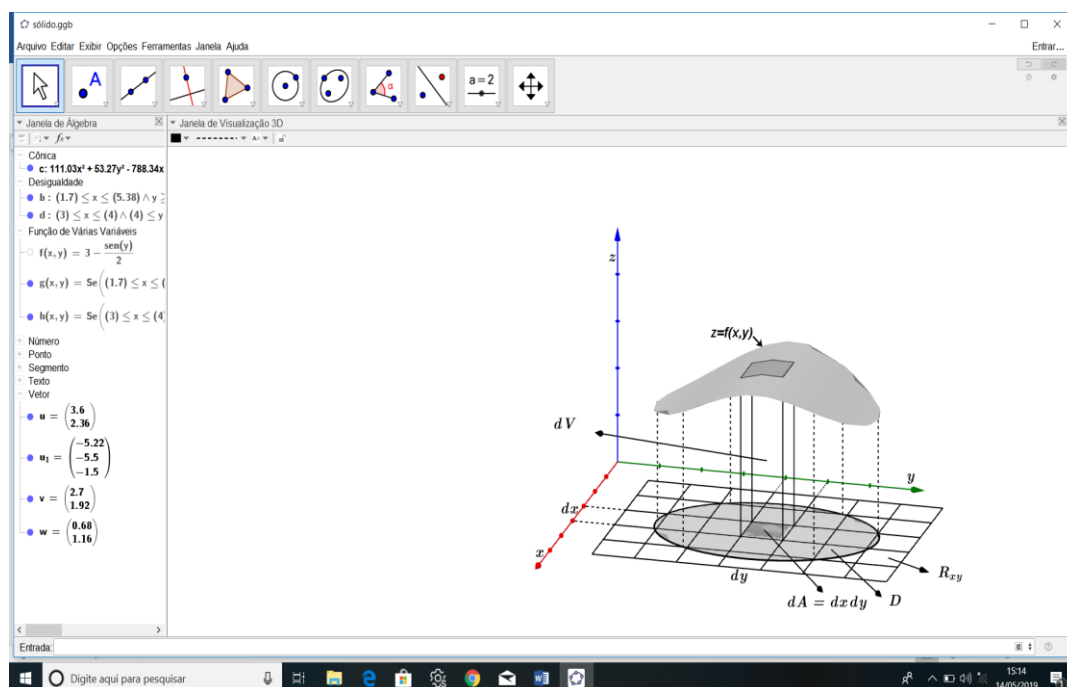
Fonte: internet.

Se a integral dupla de $F(x, y)$ sobre a região R existir, então a integral dupla de $f(x, y)$ por definição é a integral dupla de $F(x, y)$ sobre R , isto é

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA \quad (10)$$

Essa definição tem sentido, pelo fato de R ser um retângulo que contém D e já definimos de maneira precisa anteriormente integrais sobre regiões retangulares. Além disso, os valores de $F(x, y)$ são 0 quando x e y estão fora de D , portanto, não contribuem para o valor da integral, isso significa que não importa qual o retângulo tomado R desde que contenha D . Ver fig(12)

Figura 12 - Representação geométricas do Cálculo do volume sobre regiões não retangulares.



Fonte: Autor, 2019.

A figura (12) mostra geometricamente o que acontece quando definimos uma nova função $F(x, y)$ em R e calculamos a integral pela definição. Isto é, ilustra o volume elementar $dV = f(x, y)dA$. É trivial o fato de que se a função $f(x, y)$ for não negativa a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ representa o volume do sólido com base D e limitado superiormente pelo gráfico de $f(x, y)$.

3.7. Cálculo de integral dupla

Para calcularmos integrais duplas em regiões compactas não retangulares usa-se o mesmo método apresentado anteriormente para regiões retangulares, ou seja, Teorema de Fubini, só que agora em uma versão um pouco mais geral, desde que a região tenha um formato simples. Temos dois tipos de regiões de integração:

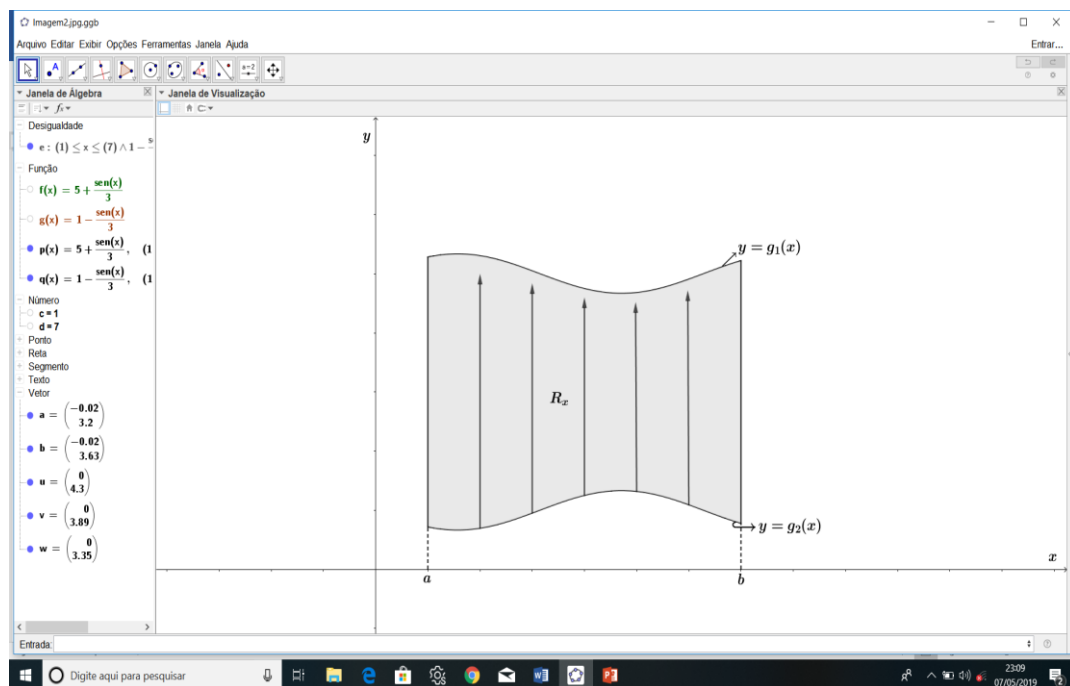
Tipo I: $\begin{cases} g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$, com $g_1(x)$ e $g_2(x)$ contínua em $[a, b]$

Tipo II: $\begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$, com $h_1(y)$ e $h_2(y)$ contínua em $[c, d]$

Podemos calcular essas integrais duplas de uma forma bem simples, por meio de duas integrações sucessivas.

1º Caso: Quando a região D é do tipo I, isto é, está contida entre o gráfico de duas funções contínuas de x no intervalo $[a, b]$.

Figura 13 - Representação geométrica de uma região de integração do tipo I.



Fonte: Autor, 2019.

Nesse caso para calcularmos a $\iint_D f(x, y) dA$, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D e tomamos F como na equação (9), ou seja, F coincide com f na região D , com $F(x, y) = 0$ quando (x, y) estiver fora de D . Assim, aplicando o Teorema de Fubini tem-se:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx \quad (11)$$

Como $F(x, y) = f(x, y)$ em D e $F(x, y) = 0$ quando $y < g_1$ ou $y > g_2$, ou seja, se (x, y) estiver fora de D . Então podemos escrever

$$\int_c^d F(x, y) dA = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

Dessa forma podemos reescrever a equação (11) como uma integral iterada da seguinte forma:

(12)

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

A integral iterada a direita é semelhante a integral definida anteriormente sobre retângulos pois, a priori na integral de dentro enxergamos x como constante não só em $f(x, y)$, como também nos limites de integração.

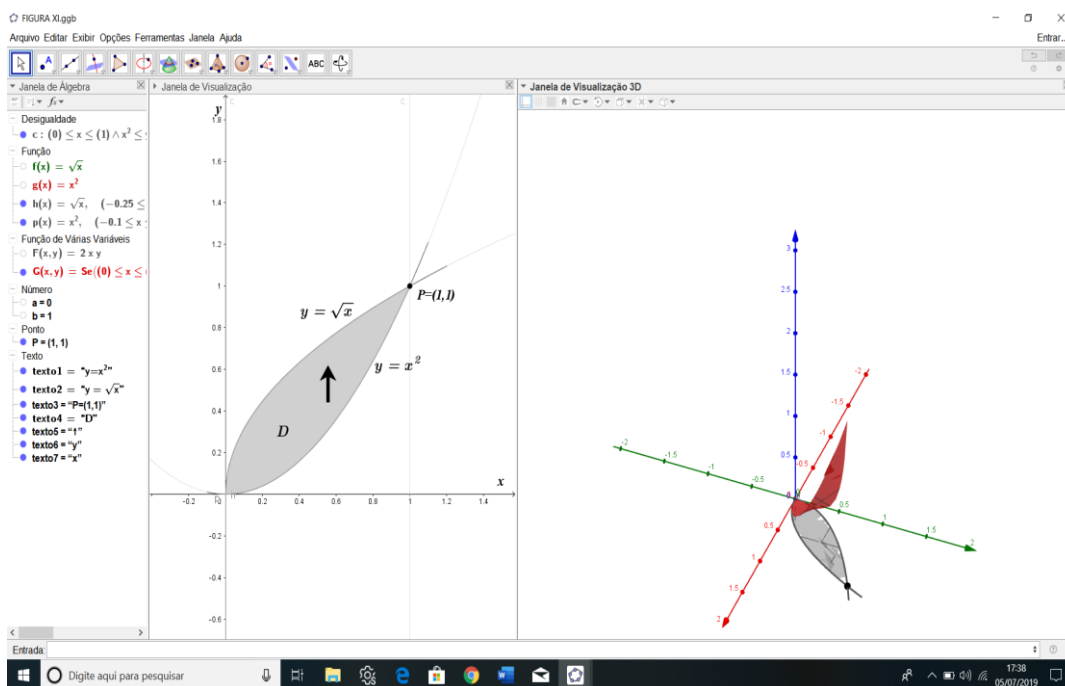
Exemplo: Calcular a integral de $f(x, y) = 2xy$ sobre a região limitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ no intervalo de 0 a 1.

Solução: A região D pode ser descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, e x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

isto é, uma região do tipo I com a seguinte representação geométrica:

Figura 14 - Representação geométrica da região de integração do tipo I.



Fonte: Autor, 2019.

Assim, aplicando o Teorema de Fubini em seu caso mais geral tem-se

$$\iint_D 2xy dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy dy \right] dx = \int_0^1 [xy^2] \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

substituindo os limites de integração na variável y e integrando novamente na variável x obtemos

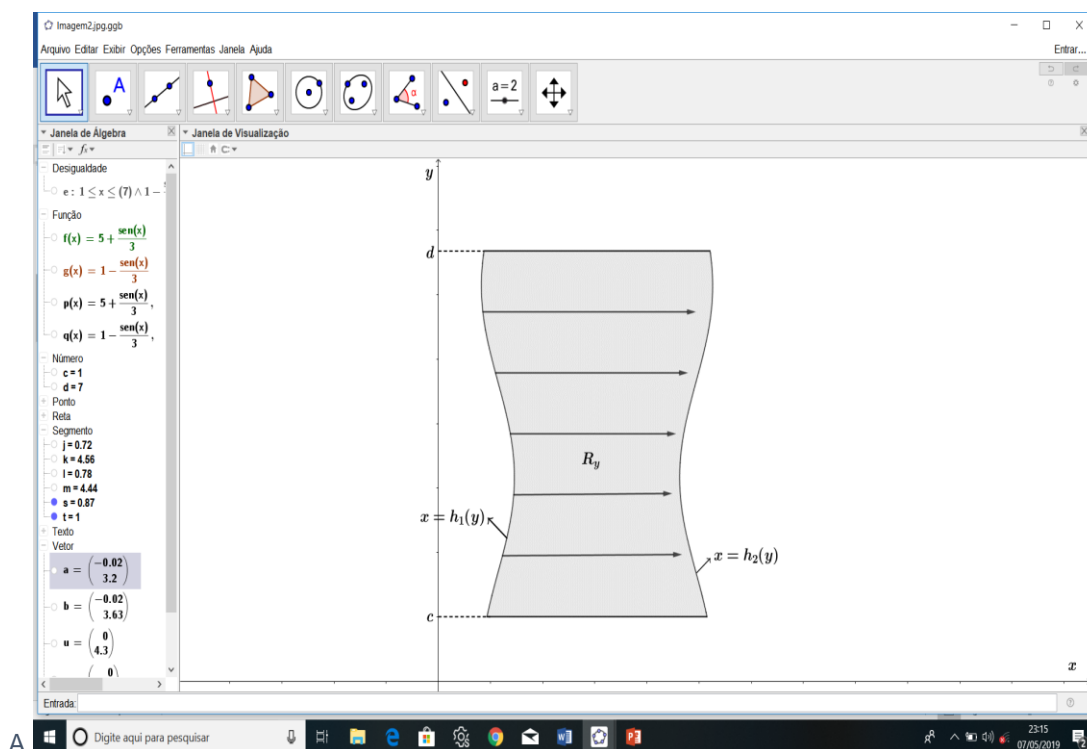
$$= \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Portanto, concluímos que

$$\iint_D 2xy \, dydx = \frac{1}{6}$$

2º caso: Quando a região D é do tipo II, ou seja, está compreendida entre o gráfico de duas funções contínuas de y no intervalo $[c, d]$.

Figura 15 - Representação geométrica de uma região de integração do tipo II.



Fonte: Autor, 2019.

Utilizando o mesmo método que usamos para definir integral na região do tipo I, isto é, Teorema de Fubini, podemos mostrar sem perda de generalidade que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \quad (13)$$

A construção a ser feita é a mesma que fizemos na integral do tipo I com a diferença que dessa vez manteremos fixado temporariamente a variável y na função $f(x, y)$ e no limite de integração da integral de dentro variando apenas a variável x . e substituir os limites de integração correspondentes a ela.

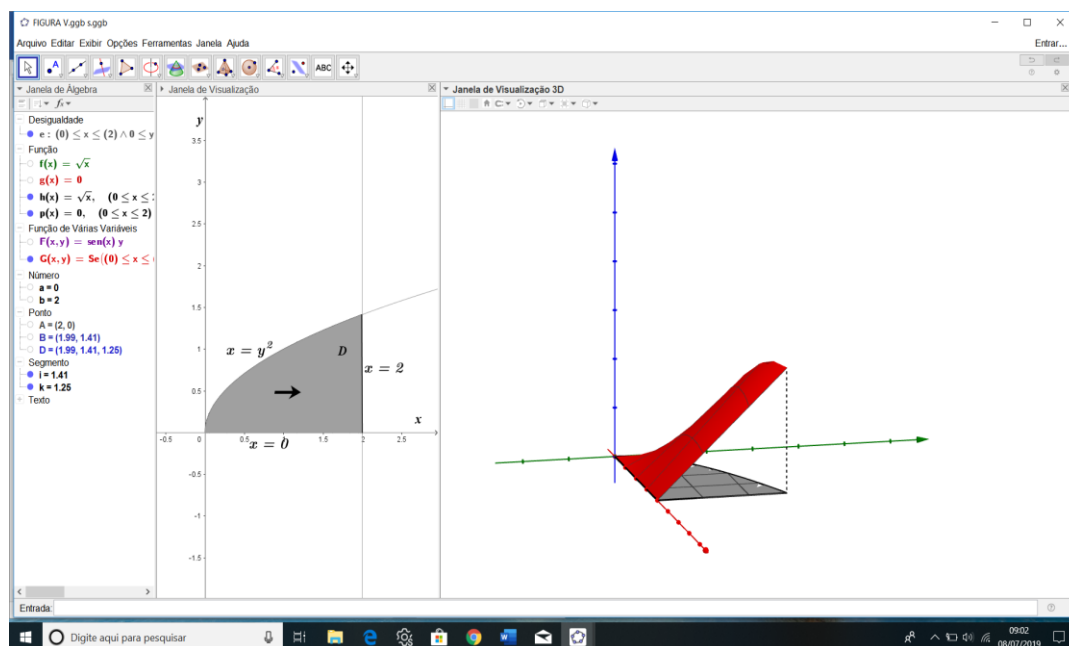
Exemplo: Determine a integral de $f(x, y) = y \, \text{sen}(x)$ e acima da região D do plano xy limitado por $x = y^2$ e por $x = 2$.

Solução: A região D pode ser descrita da seguinte forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq \sqrt{2} \text{ e } y^2 \leq x \leq 2\}$$

ou seja, como uma região do tipo II com a seguinte representação geométrica;

Figura 16 - Representação geométrica da região de integração do tipo II.



Fonte: Autor, 2019.

Para encontramos a integral desejada basta aplicarmos o Teorema de Fubini em seu caso mais geral, isto é,

$$\iint_D y \operatorname{sen}(x) dA = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{y^2}^2 y \operatorname{sen}(x) dx \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}} y [-\cos(x)] \Big|_{y^2}^2 dy$$

Substituindo os extremos de integração na variável x e em seguida integrando a expressão resultante na variável y obtém-se o seguinte resultado

$$= \int_0^{\sqrt{2}} y (-\cos(2) + \cos(y^2)) dy = \int_0^{\sqrt{2}} y \cos(y^2) dy + \int_0^{\sqrt{2}} y \cos(2) dy$$

A primeira integral fazemos por substituição, já segunda calculamos a primitiva diretamente e chegamos a seguinte expressão:

$$= \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}(y^2) - \frac{y^2}{2} \cos(2) \right] \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2) - \cos(2)$$

Logo,

$$\iint_D y \operatorname{sen}(x) dA = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2) - \cos(2)$$

Propriedades:

As integrais duplas sobre regiões limitadas simples, isto é, integrais sobre regiões mais gerais não retangulares, gozam das mesmas propriedades enunciadas anteriormente para integral dupla sobre regiões retangulares. Portanto, não as enunciaremos novamente, afim de que o texto não fique repetitivo.

4. APLICAÇÃO DO GEOGEBRA

Sabe-se que nem sempre é fácil esboçar o gráfico de funções que limitam uma região de integração no plano xy com papel e caneta ou giz, muito menos construir o esboço de um sólido para a visualização do volume em 3D devido ao fato de muitas das vezes não conhecermos o comportamento da superfície sobre a região, limitando-nos apenas as informações algébricas e analítica descrita no papel. Portanto, nesse tópico utilizaremos o software Geogebra como uma ferramenta na representação geométricas de regiões de integração, construção de sólido e ainda no cálculo de integral dupla, descrevendo o passo a passo de cada construção, afim de se obter um roteiro de construção. No entanto, consideremos os seguintes exemplos.

4.1. Regiões de integração

EXEMPLO 1: Considere as seguintes integrais:

$$\mathbf{a)} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy \, dydx$$

$$\mathbf{b)} \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 x \, dydx$$

Nesse exemplo o software será usado para fazer a representação gráfica das regiões ou domínios de integração da integral dupla dos itens (a) e (b), nesse caso integral iterada.

Deve-se inicialmente verificar as variações de x e y tanto no item (a) quanto no item (b). Assim tem-se:

$$\text{Item (a): } x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Item (b): } \ln(x) \leq y \leq 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq x \leq e$$

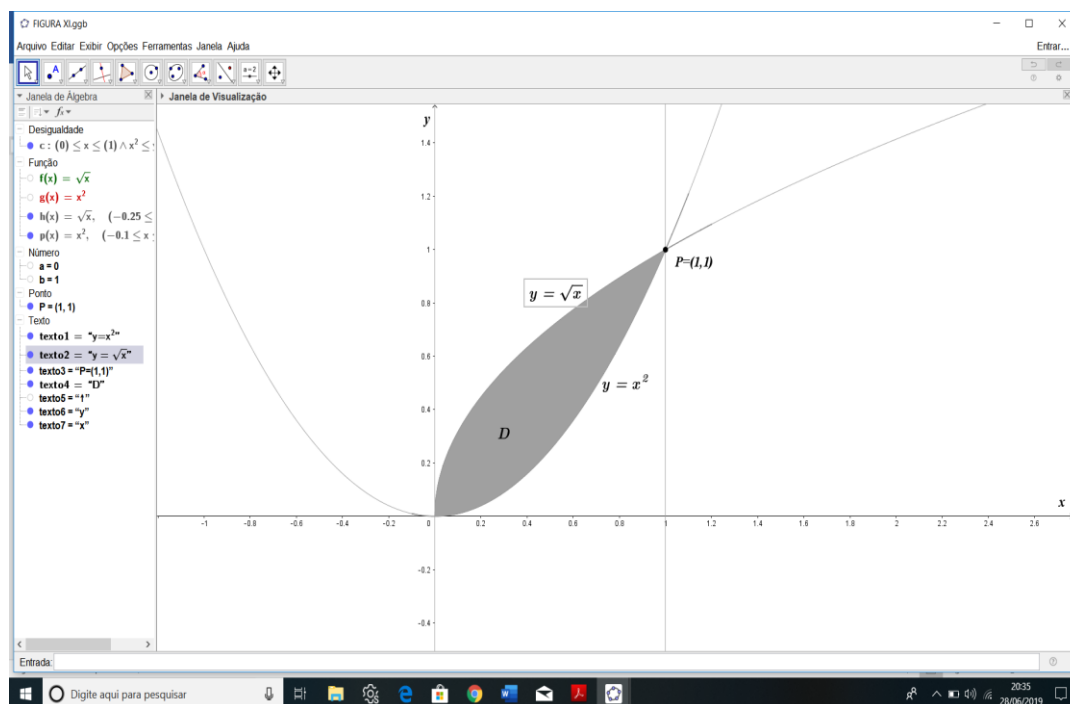
Será feito primeiro a representação do item (a), em seguida o item (b):

Passo 1: Com o Software Geogebra aberto digite na caixa de entrada as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Nesse passo será visualizado apenas gráficos de funções que representam a borda da região de integração, isto é, a variação de y na região de integração. Como x varia entre 0 e 1, basta fazer o seguinte passo.

Passo 2: Construir duas novas funções $h(x)$ e $p(x)$ limitadas no intervalo $[0,1]$, digitando na caixa de entrada **função** e escolhendo a opção *Função* (\langle Função \rangle , \langle Valor de x Inicial \rangle , \langle Valor de x Final \rangle), substituindo x inicial por 0, x final por 1 e tomando como função $f(x)$. Em seguida fazer o mesmo procedimento para a função $g(x)$, o Geogebra criará dois pedaços de gráficos de função no intervalo $[0,1]$;

Passo 3: Para que a região de integração fique destacada basta limitar o valor de y entre a função de baixo e a função de cima no intervalo, digitando na caixa de entrada $h(x) \leq y \leq p(x)$. Após esses passos deve-se obter a seguinte plotagem.

Figura 17 - Plotagem da região de integração.




Fonte: Autor, 2019.

Veja que a figura mostra uma região que é exatamente a região ou domínio de integração, ou seja, se tomarmos a referida integral como um volume, significa dizer que o volume a ser calculado está lateralmente limitado pelas bordas dessa região. É possível ainda configurar a construção como desejarmos usando a ferramenta **propriedades** e nomear com a guia **texto**.




Para construir a região de integração do item (b) vamos proceder de forma parecida ao item (a), mas com algumas modificações em alguns passos, afim de mostrar que há mais de uma maneira de fazer essas construções de regiões.


Passo 1: Inserir no campo de entrada do Geogebra $a = 1$, $b = e$, $fb(x) = \ln(x)$ e $fc(x) = 1$, dando **Enter** em cada comando digitado. O software mostrará o gráfico de duas funções de x , que representam a variação de y e a e b que representam o intervalo da variação de x .

Passo 2: Digite no campo de entrada as condições para que o ponto pertença a região, são elas $a \leq x \leq b \wedge fb(x) \leq y \leq fc(x)$, onde (fc) é a função de cima e (fb) é a função de baixo. O Geogebra encontrará todos os pontos com essa

característica e os destacará em uma outra cor, formando assim uma região de pontos. O símbolo de conjunção localiza-se no botão  do campo de entrada.

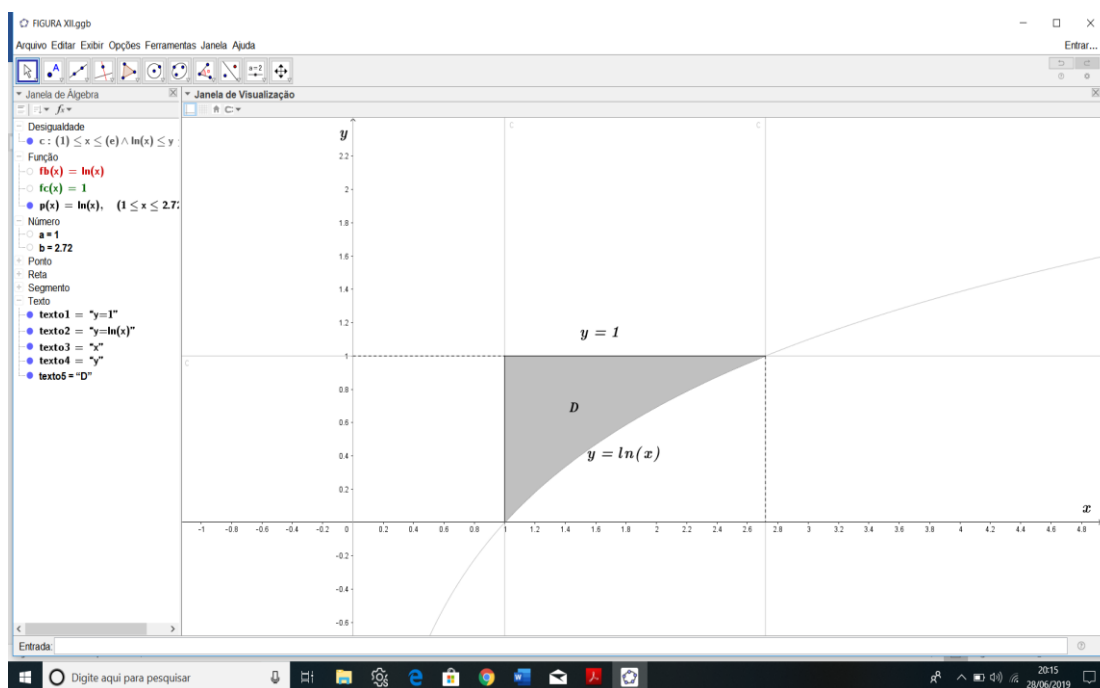
Após o passo 2 as funções $fb(x)$ e $fc(x)$ podem ser desabilitadas se quiser.

Passo 3: Para criar os segmentos de reta pontilhado, basta construir uma reta perpendicular passando pelos extremos do intervalo com a ferramenta reta perpendicular  da barra de ferramenta e em seguida encontrar os pontos de interseção usando a ferramenta interseção entre dois objetos  e por fim construir os segmentos com a ferramenta segmento de reta .

Passo 4: Para inserir as legendas no gráfico, basta selecionar a guia texto  na barra de menu selecionar *fórmula LaTeX* e digitar a legenda.

Após todos os passos e configurações a plotagem a ser visualizada deve ser a seguinte;

Figura 18 - Plotagem do gráfico da região de integração.



Fonte: Autor, 2019.

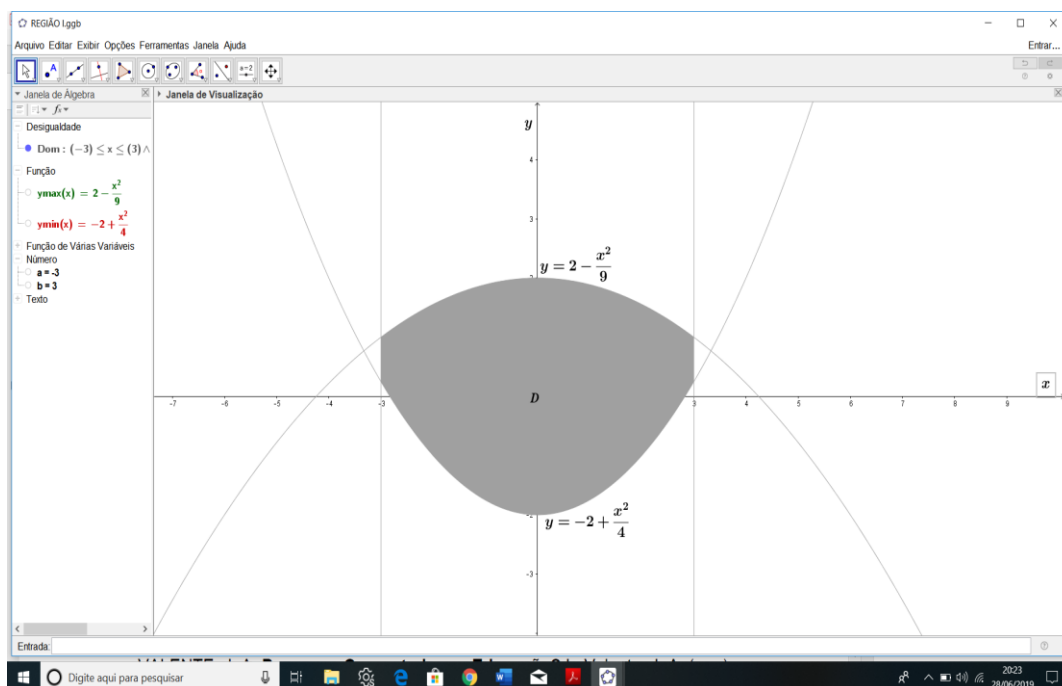
4.2. Construção do sólido

Construir com papel e caneta um sólido abaixo de uma superfície para o cálculo do volume, sem dúvida é a parte mais difícil quando se estuda integral dupla. Mas com o auxílio do Geogebra isso se torna bem mais fácil.

Exemplo 2: Vamos construir o sólido compreendido acima da região no plano xy limitada por $y = 2 - \frac{x^2}{9}$ e $y = -2 + \frac{x^2}{4}$ no intervalo de $[-3,3]$ e abaixo da superfície $f(x, y) = \frac{y}{2} \text{sen}(x) + 2$.

Solução: Inicialmente deve-se construir a região ou domínio que limita o sólido no plano xy , ou seja, na janela de visualização do Geogebra, para isso, basta fazer os mesmos passos como no exemplo 1. Após construção da região será obtido a seguinte imagem na janela do software.

Figura 19 - Plotagem do gráfico da região de integração.



Fonte: Autor, 2019.

Para construir o sólido, é necessário abrir a janela de visualização 3D e condicionar as informações que apresentadas no enunciado para encontrar todos os pontos pertencente ao sólido, para isso, é suficiente fazer os seguintes passos

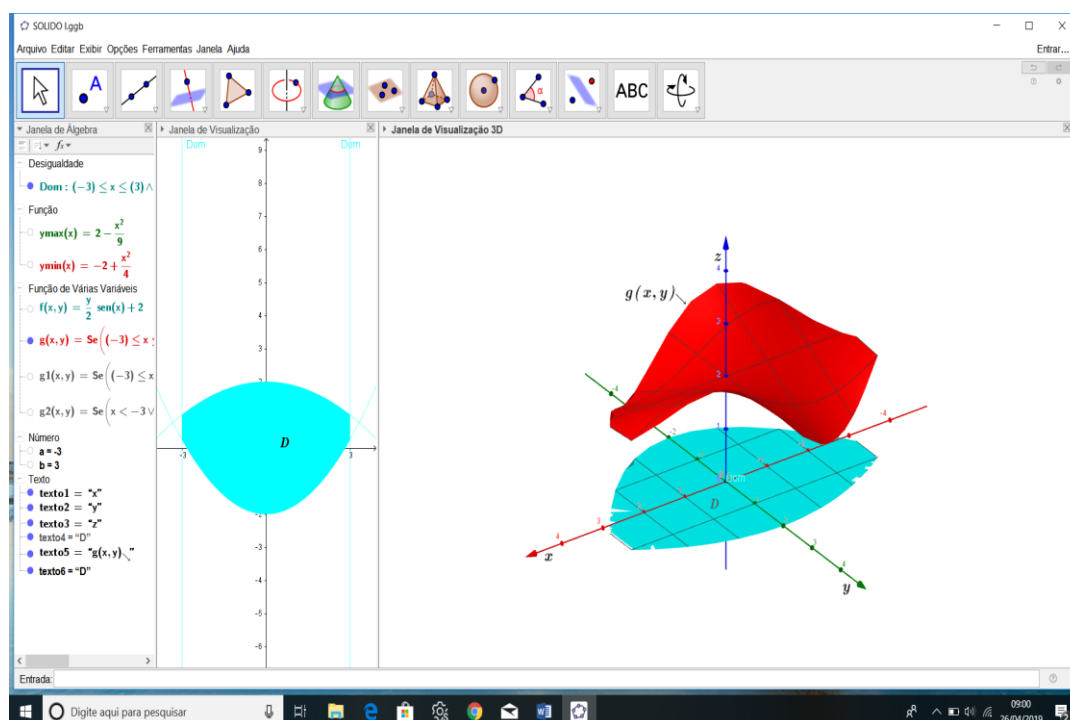
Passo 1: Para abrir a janela de visualização 3D, basta clicar na guia *exibir* da barra de menu e escolher a opção janela de visualização 3D. O software abrirá uma janela com três eixos.

Passo 2: Digitar no campo de entrada a função que define a superfície do sólido, nesse caso a função $f(x, y)$.

Note que o Geogebra plota o gráfico da função toda, mas para o sólido interessa apenas a parte da superfície que está acima da região D , assim é necessário construir uma nova função $g(x, y)$ limitada à região D . Então;

Passo 3: Teclar no campo de entrada $g(x,y) =$, em seguida adicionando a partícula *se*, nas opções que a abrirão no campo de entrada escolher a opção $Se(< Condição >, < Então >)$, substituindo em *Condição* $a \leq x \leq b \wedge y_{min}(x) \leq y \leq y_{max}(x)$ e em *Então* substituir por $f(x,y)$. A plotagem a ser visualizada na janela do software é a expressa na figura abaixo.

Figura 20 - Representação geométrica da região de integração e da superfície acima da região.



Fonte: Autor, 2019.

A parte final da construção, consiste em limitar lateralmente o sólido pelas bordas da região, isto é, construir uma parede da borda da região até a borda da superfície $g(x,y)$ e construir um plano com todos os pontos que não pertencem ao domínio do sólido, afim de diferenciar os pontos do domínio do resto dos pontos do plano. Para isso, precisamos criar duas novas funções fazendo os seguintes passos:

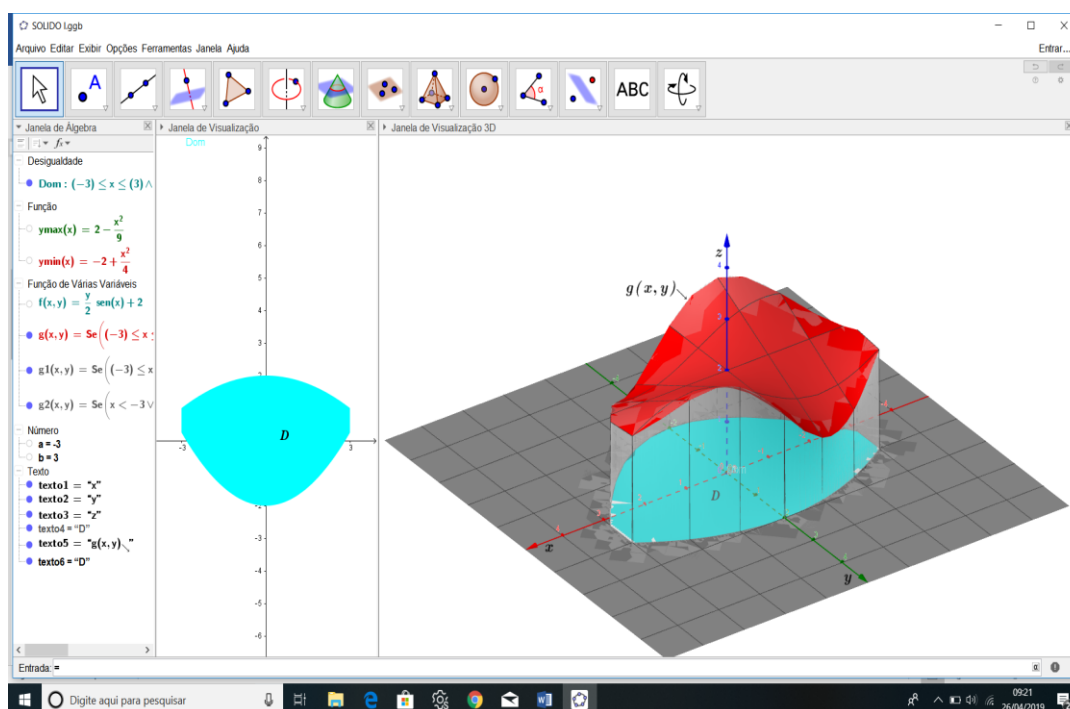
Passo 4: Para construir a casca do sólido, basta digitar no campo de entrada $g1(x,y) = se$, na caixa que abrirá no campo de entrada clicar na opção $Se(< Condição >, < Então >, < Senão >)$. Em *Condição* colocar $a \leq x \leq b \wedge y_{min}(x) \leq y \leq y_{max}(x)$, em *Então* substituir por $g(x,y)$ e em *Senão* trocar por 0.

O software encontrará todos os pontos que satisfazem essa condição e criará uma casca para representar a lateral do sólido. Além disso o software criará um plano com todos os valores 0 que não fazem parte do sólido. Para diferenciar esses pontos dos pontos do sólido, basta criar um outro plano como no passo seguinte.

Passo 5: Inserir no campo de entrada $g_2(x, y) = se$, na caixa de opções que abrirá optar pela opção $Se(< Condição >, < Então >)$ e aplicando os seguintes comandos $x < a \vee x > b \vee y < y_{min}(x) \vee y > y_{max}(x)$ em *Condição* e 0 em *Então*.

Ao concluir todos esses passos será mostrado nas janelas do Geogebra uma imagem como na figura abaixo:

Figura 21 - Plotagem do sólido geométrico sobre a região D.



Fonte: Autor, 2019.


Veja que o software nos mostra um esboço que permite termos uma compreensão mais detalhada sobre o comportamento e o volume do sólido. As configurações de cores e estilos de cada construção é preferencial ao construtor, pois o mesmo pode configura-las como quiser, basta clicar com o botão direito do mouse e selecionar a opção propriedades.

4.3. Cálculo de integral com o Geogebra

Além de conseguirmos construir o sólido e a região de integração de uma integral dupla com o Geogebra, é possível calcular o seu valor usando algumas das ferramentas e comandos oferecidos pelo software. Descreremos a seguir os passos necessários para calcularmos o valor das integrais dos exemplos 1 mostrados anteriormente.

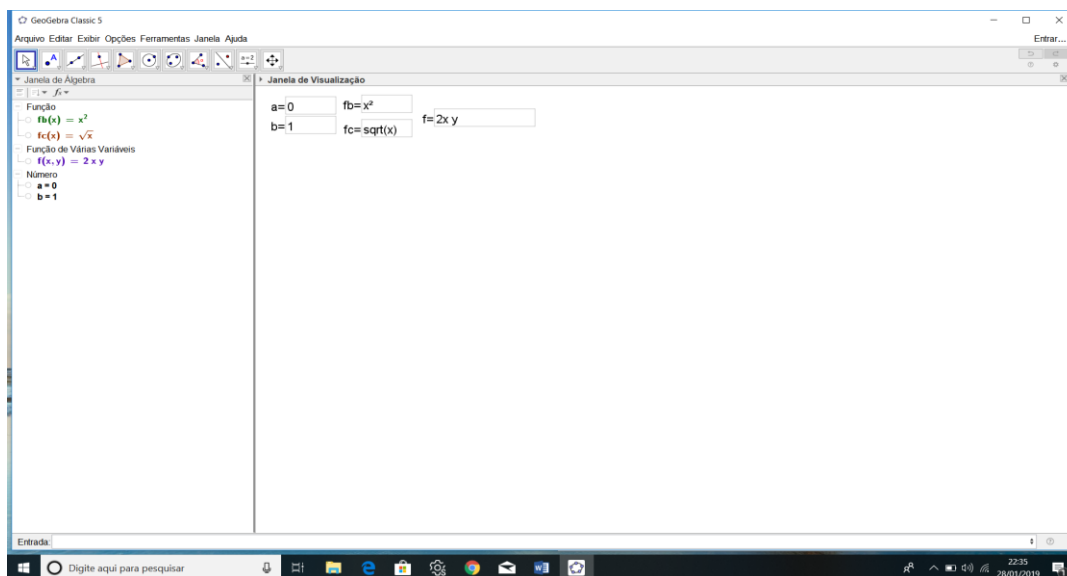
Passo 1: Com o software aberto clicar com o botão direito do mouse na janela de visualização, na janela que abrir selecionar as opções **Malha** e **Eixo** para removê-los, ficando apenas um campo em branco;

Passo 2: No campo de entrada da janela de álgebra digitar os extremo de integração da integral de fora $a = 0$, $b = 1$, para a integral de dentro teclar os extremos $fb(x) = \text{função de baixo} = x^2$ e $fc(x) = \text{função de cima} = \sqrt{x}$ e por fim inserir a função a ser integrada $f(x, y) = 2xy$;


Passo 3: No botão texto  localizado na barra de ferramenta selecionar a opção **Campo de Entrada**, em seguida clicar em qualquer lugar da janela de visualização, na janela que abrir construir um campo de entrada para cada um dos comandos da janela de álgebra, da seguinte forma: Na legenda do campo de entrada aplicar, por exemplo $fb =$, e em objeto vinculado marcar a opção corresponde a fb , repetindo o mesmo processo para todos os outros;

Após a realização desses passos a figura a seguir expressa a construção desenvolvida.

Figura 22 - Vinculação dos comandos da janela de álgebra para a janela de visualização.



Fonte: Autor, 2019.

Passo 4: Ainda na ferramenta  selecionar a opção texto, na janela que abrir clicamos no botão *Formula LaTeX* e iniciar a escrever a integral;

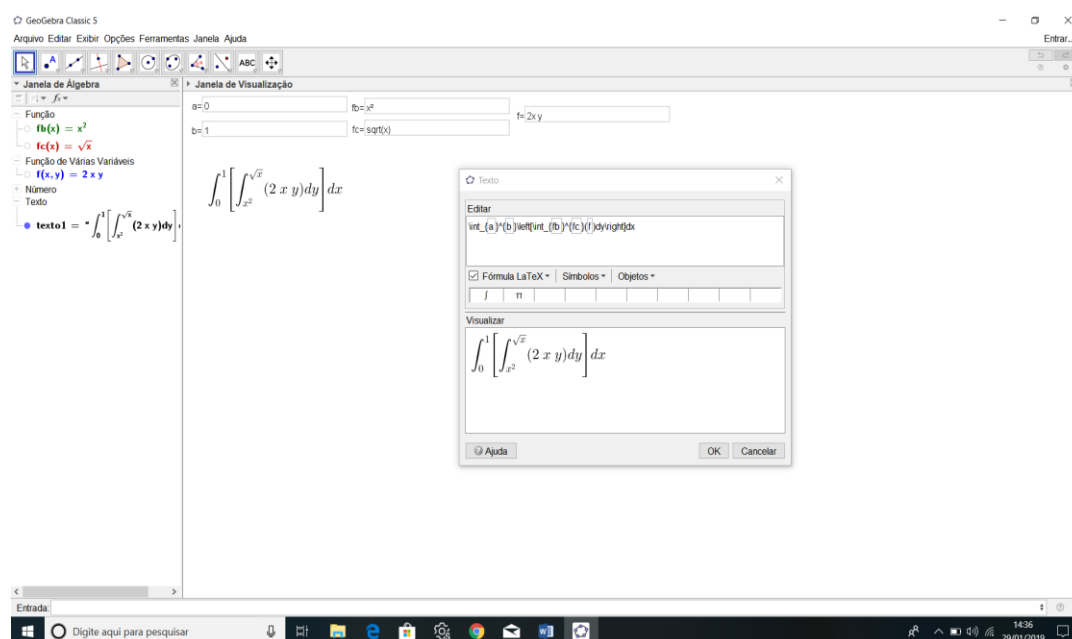
Para escrever a integral podemos usar os comandos que descreveremos a seguir ou usar a guia *Símbolos* e a guia *objetos* da caixa texto.

Passo 5: Para obter o símbolo de integral basta digitar **Int** e para os limites de integração digitamos **_{}^{}** para o limite inferior e **^{}^{}** para o limite superior. Posicionando o cursor dentro de cada chave e seleccione o limite correspondente na janela de álgebra para adicionar os limites de integração. Como são duas integrais

abra um colchete se preferir e repetir o mesmo processo para escrever a segunda integral, após isso inserir a função a ser integrada e os elementos $dx dy$;

Para que os colchetes e os parêntese acompanhem o tamanho das expressões, basta adicionar o comando **left** no início e **right** no final, ou seja, **left[** **right]** e o mesmo vale para os parênteses.

Figura 23 - Representação algébrica do processo de integração no software.



Fonte: Autor, 2019.

Precisa-se agora que o Geogebra calcule a integral de dentro em relação a y , isto é, encontre a primitiva da função $f(x, y)$, para em seguida substituir os limites de integração. Então;

Passo 6: Abrir uma nova caixa texto e repetir a integral de fora do mesmo jeito como no passo 5, em seguida, criar um capo de entrada clicando em qualquer um dos campos da janela de álgebra, no campo criado teclar $integral(f(x, y), y)$, isso fará com que o software calcule a primitiva da função em relação a y ;

A janela de visualização do Geogebra não realiza cálculo numérico, então para substituir os extremos é necessária uma nova janela chamada de Sistema de Álgebra para Computadores ou janela (CAS). Nessa janela é possível fazer os cálculos, então para ativa-la devesse fazer o passo seguinte:

Passo 7: Na barra de menu clicar na opção **Exibir** em seguida selecionar **Janela (CAS)** ou pode ativa-la pelas teclas de atalho **Ctrl+Shift+k**. Nessa janela deve-se criar uma nova função integrando $G(x)$ dada por $G(x) = H(x) - P(x)$, onde $H(x)$ é o limite superior e $P(x)$ é o limite inferior da integral;

Passo 8: No campo de entrada da janela (CAS) inserir $H(x) :=$ para que o software entenda que é uma função, em seguida digitar **substituir**, o Geogebra dará algumas opções, escolha a opção *Substituir* (\langle Expressão \rangle , \langle O Que \rangle , \langle Por \rangle). Em **Expressão** digitamos **integral** e escolhemos a opção *Integral* (\langle Função \rangle , \langle Variável \rangle), substituir **função** por $f(x, y)$ e **variável** por y , o Geogebra encontrará a primitiva da função f em relação a y . Em **Oque** trocar por y , significa que é a variável que será substituída na integral e em **Por** substituir por $fc(x)$ que é o limite superior, em seguida pressionamos **Enter**,

O Geogebra criará uma função que expressa exatamente o limite superior da integral. Para encontrar $P(x)$ que é o limite inferior, basta proceder da mesma forma como no passo anterior com exceção que no lugar de $fc(x)$ será colocado $fb(x)$, após isso para determinar a função $G(x)$, basta fazer a diferença na janela (CAS) das funções $H(x)$ e $P(x)$ encontrada e pressionar **Enter**, a função $G(x)$ será criada na janela (CAS) e também aparecerá na janela de álgebra.

Figura 24 - Representação do processo de integração e da janela CAS para cálculos algébricos.

The screenshot displays the GeoGebra Classic 5 interface with three main windows: 'Janela de Álgebra' (Algebra Window), 'Cálculo Simbólico (CAS)' (Symbolic Calculator), and 'Janela de Visualização' (Visualization Window).
 - The **Algebra Window** lists several functions: $G(x) = -x^3 + x^2 + c_{48} - c_{47}$, $H(x) = x^2$, $P(x) = x^3$, $f(x) = x^2$, $fc(x) = \sqrt{x}$, and $f(x, y) = 2xy$.
 - The **CAS Window** shows a sequence of four steps:
 1. $H(x) := \text{Substituir}(\text{Integral}(f(x, y), y, fc(x)), x, y, f(x))$
 $\rightarrow H(x) := x^2 + c_{48}$
 2. $P(x) := \text{Substituir}(\text{Integral}(f(x, y), y, fb(x)), x, y, f(x))$
 $\rightarrow P(x) := x^3 + c_{47}$
 3. $G(x) := H(x) - P(x)$
 $\rightarrow G(x) := -x^3 + x^2 + c_{48} - c_{47}$
 4. A text input field.
 - The **Visualization Window** shows the integral expression: $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2xy) dy dx$ and its simplified form: $= \int_0^1 [xy^2]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$.
 - The **Algebra Window** also contains two text objects: $\text{texto1} = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2xy) dy dx$ and $\text{texto2} = \int_0^1 [xy^2]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$.

Fonte: Autor, 2019.

Passo 9: Selecionamos a caixa texto novamente e repetimos a integral de fora como no passo 5 colocando agora como função integrando $G(x)$ clicando sobre ela na janela de álgebra. O Geogebra mostrará uma nova integral de uma única variável, nesse caso x ;

Passo 10: Para encontrar a nova integral deve-se criar um campo de entrada na caixa texto selecionando qualquer um dos campos da janela de álgebra, dentro do campo digitar $\text{integral}(G(x), x)$ o Geogebra mostrará a primitiva da função $G(x)$ em relação a x , inserir fora da campo $-$ e \wedge para colocar os limites de integração;

Precisa-se agora substituir os limites de integração novamente para encontrar o valor numérico da integral, para isso é necessário voltar na janela (CAS) e criar uma função $L(x)$ dada pela diferença entre limite superior e o limite inferior da integral, isto é, $L(x) = L_{\text{sup}}(x) - L_{\text{inf}}(x)$ e em seguida reescrever o resultado obtido na caixa texto na janela de visualização.

Passo 11: Para criar a função $L(x)$ o procedimento é análogo ao passo 8, exceto a variável integrada e que será substituída, nesse caso será a variável x .

Ao final de todos esses passos será obtido à construção mostrada na figura a seguir;

Figura 25 - Resultado final do processo de integração com o software Geogebra.

Fonte: Autor.

É evidente que esse processo de construção é um tanto trabalhoso e que exige um pouco de tempo e paciência para aprender os comandos e os passos envolvidos em cada construção. Mas diante de algumas funções integrando que apresentam um alto grau de complexidade para encontrarmos suas primitivas e até a integral em si esse trabalho é compensado pelo fato de conseguirmos encontrá-las, mesmo sem muitas das vezes entender como o software chegou ao resultado,

pois o Geogebra apresenta apenas os resultados sem explicar os meios que o levaram ao mesmo, cabendo ao aluno investigar para compreendê-los e internalizá-los.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que representar conceitos e definições matemáticas através da geometria nem sempre é possível e para aqueles que são possíveis, nem sempre é fácil representá-los, sobretudo quando os recursos que se tem é apenas o quadro. Além disso, para produzir conhecimento sobre a matemática, tanto para tirar conclusões quanto para fazer argumentações é necessário que o aluno compreenda os conceitos e procedimentos matemáticos. Portanto, a partir do conteúdo abordados deve-se se ater às dificuldades de compreensão enfrentadas pelos alunos e proporcionar meios favoráveis que viabilizem a construção do conhecimento, isto é, deve-se buscar sempre novas alternativas para inovar e melhorar nossas metodologias de ensino aprendizagem para que realmente tenhamos um modelo de ensino aprendizagem mais eficiente.

Refletindo sobre o trabalho desenvolvido, posso afirmar que obtive uma melhor compreensão dos conteúdos abordados e dos recursos utilizados, percebendo o quanto é importante, interessante e produtivo o uso didático de tecnologia, tanto para os alunos em seus estudos quanto para os professores em suas aulas, para que se tenha uma melhor compreensão do conteúdo trabalhado, isto é, fazendo com que os alunos tenham um olhar mais crítico sobre as partes do conhecimento, esclarecendo as ideias matemáticas que estão sendo produzidas por eles mesmos e os professores produzam uma aula mais dinamizada.

É evidente que o uso de tecnologias pode trazer contribuições para o processo de ensino aprendizagem à medida que auxiliam na construção do conhecimento. Nesse sentido, os programas educacionais (software) educativos apresentam inúmeras capacidades funcionais, que podem ser utilizadas por professores e alunos para obter resultados eficientes no processo de ensino aprendizagem da matemática. Contudo, para que esse software contribua para a obtenção de resultados positivos dessa natureza em sala de aula, é imprescindível que os professores adotem a postura de mediadores do processo, motivando os alunos o que é um fator essencial para a construção do conhecimento.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro. 2005.

ALLEVATO, N. S. G. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, 2010. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/13/15>. Acessado em 20/09/2018.

ANTON, H. **Cálculo: um novo horizonte**. Vol. 2. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, tecnologias e modelagem Matemática: as discussões dos alunos**. Rio Claro, 2002. (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista.

BIANCHINI, W. **Integral dupla – software Geogebra**. Disponível em: www.geogebra.org/u/waldecir#materials/created-www.geogebra.org/m/fqJ2PkAS. Acesso em: 20 de ago. 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.– **Informática e Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRUN, J. **Didática das matemáticas**. Tradução de FIGUEIREDO, M. J. Lisboa/Portugal: Instituto Piaget, 1996.

CABRAL, Thiago. **Conhecendo um pouco mais sobre o Geogebra**. {online}. Blog destaque.17abril de 2013. Disponível em: <http://edumatecno.blogspot.com/2013/04/conhecendo-um-pouco-mais-sobre-o.html>. Acesso em: 11 dez. 2018.

FLEMMING, D. M.; **CÁLCULO B. Funções de Várias Varáveis**. 2ª Ed. Revista e ampliada. Editora Pearson. São Paulo 2012.

Gravina, M. A., Santarosa, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: <http://ism.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2019.

GUIDORIZZI, H. L.; **Um curso de Cálculo**. Volume 2. 5ª Ed. Livro Técnico e Científico. Editora S.A. Uma das editoras integrantes do GEN | Grupo Editorial Nacional.

HOHENWARTER, M.; **GeoGebra Quickstart: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra**, disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/~jonatan/PET/geogebraquickstart_pt.pdf. Acesso em: 09 de out. de 2018.

HOHENWARTER, M. **Ajuda GeoGebra**. Tradução e adaptações/Português de Portugal: Ribeiro, A. Última modificação: 24 de março de 2009. Disponível em: <https://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em: 19 de fev. 2019.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. D. C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. Cap. 5, p. 92-120.

LISBOA, R. S. **Guia de Elaboração de Trabalhos Acadêmicos**. 2ª Ed., ampl., e atual. Belém: Universidade Federal do Pará, Biblioteca Central, 2019.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do software Geogebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria**. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2012.

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo**. IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/mesa.html>. Acesso em: 15 nov. 2018.

OLIVEIRA, E. M. **Metodologia para o Uso da Informática na Educação**. In: Educação Matemática em Revista – SBEM 23, 2007, p. 57 – 67.

PARANHOS, M. M. **Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo. PUC-SP, 2000. 112p. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>. Acesso em 25 de mar. de 2019.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2; 5ª ed. Tradução: MORETZI, A. C. – São Paulo: Thomson Learning, 2007.