



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**RIVALDO PANTOJA DOS SANTOS**

**TEOREMA DE PITÁGORAS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO COTIDIANO**

Abaetetuba – Pará

2019

**RIVALDO PANTOJA DOS SANTOS**

**TEOREMA DE PITÁGORAS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO COTIDIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática. Orientador prof. Me. Raimunda Almeida

Abaetetuba – Pará

2019

# RIVALDO PANTOJA DOS SANTOS

## TEOREMA DE PITÁGORAS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES NO COTIDIANO

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado em, para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará Campus Universitário do Baixo Tocantins.

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Me. Raimundo Almeida  
Orientador

---

Prof. Dr. José Francisco da S. Costa  
Coorientador

---

Prof. Dr. Aubedir Seixas  
Membro

Abaetetuba-Pará

2019

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser o autor e consumidor da fé, onde me tem sustentado na felicidade e na angustia e creio em seu Filho amado Jesus Cristo como único salvador, minha mãe Maria Do Carmo Brito Pantoja, meu Pai Raimundo Pantoja dos Santos e aos meus familiares que sempre presentes muito contribuíram nessa minha jornada acadêmica.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me sustentado com saúde e força nas dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que contribuíram para meu crescimento intelectual e profissional.

Ao meu orientador Prof. Me. Raimundo Almeida, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas correções e incentivos.

Aos meus Pais, tios e aos colegas de turma.

E a todos que de uma forma direta ou indireta fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

## EPÍGRAFE

*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”*

***Galileu Galilei.***

## RESUMO

O presente trabalho é dedicado ao estudo do teorema de Pitágoras e suas contribuições nas representações e nas demonstrações de exercícios de comparações de áreas e dos cálculos que o representam, bem como nas construções que usamos no cotidiano, visando também familiarizar os alunos do ensino médio, que muitas das vezes não dão a importância necessária para o estudo do mesmo. Sabemos que ao entrar na faculdade para estudar matemática uma das primeiras disciplinas da estrutura curricular é a matemática básica onde o discente percebe logo que, comparado ao que se estuda no ensino médio em especial nas escolas da rede pública é outro nível, logo este começa a sentir muitas dificuldades, e inspirado nisso foi feito este trabalho. No decorrer deste trabalho, realizaremos umas aplicações do teorema de Pitágoras em questões do cotidiano, pois vivemos em um mundo formado por objetos reproduzidos a partir de formas geométricas, e as vezes nem nos damos conta disso, porém se pararmos para observar, logo notaremos em camas, mesas, portas, paredes, entre outros objetos, que para serem construídos com tanta precisão, foi preciso analisar ângulos; além de cálculos de áreas para saber o tamanho ideal. Mas antes falaremos um pouco da história sobre o matemático que dá o nome a esse teorema, que é Pitágoras, introduzimos conceitos básicos sobre triângulos e duas demonstrações do teorema de Pitágoras.

**Palavra-chave:** Cotidiano, Teorema de Pitágoras, Ensino médio.

## **ABSTRACT.**

The present work is dedicated to the study of the theorem of Pythagoras and its contributions in the representations and the demonstrations of exercises of comparisons of areas and of the calculations that represent it, as well as in the constructions that we use in the quotidian, aiming also to familiarize the students of the high school, which often do not give the necessary importance to the study of it. We know that when entering the university to study mathematics one of the first disciplines of the curricular structure is the basic mathematics where the student realizes soon that, compared to what is studied in high school especially in the schools of the public network is another level, soon this begins to feel many difficulties, and inspired in this was done this work. In the course of this work, we will make some applications of the Pythagorean theorem in everyday questions, since we live in a world formed by objects reproduced from geometric forms, and sometimes we do not even realize it, but if we stop to observe, we will soon notice beds, tables, doors, walls, among other objects, that to be constructed with such precision, it was necessary to analyze angles; plus calculations of areas to know the ideal size. But before we talk about the history about the mathematician who gives the name to this theorem, which is Pythagoras, we introduce basic concepts about triangles and two demonstrations of the theorem of Pythagoras

Keyword: Daily life, Pythagorean theorem, High school.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>1 HISTÓRIA E AS PROPRIEDADES PITAGÓRICAS.....</b>	<b>12</b>
1.1 Pitágoras histórico.....	12
1.1.1 Propriedades pitagóricas.....	14
1.1.2 Definições e Exemplos.....	14
1.1.3 Triângulos Pitagóricos.....	16
1.2 Semelhança de Triângulos.....	17
1.2.1 Casos ou critérios de semelhança.....	19
1.3 Relações Métricas no triângulo retângulo.....	21
<b>2 ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....</b>	<b>25</b>
2.1 Demonstração algébrica.....	25
2.2 Demonstração geométrica.....	27
<b>3 APLICAÇÕES.....</b>	<b>31</b>
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>39</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>40</b>

## INTRODUÇÃO

A noção de números e suas generalizações estão fortemente vinculadas ao homem desde o princípio de sua história. A matemática está ligada a vida e grande parte das comparações feitas pelo homem tem relação com as propriedades geométricas.

As primeiras concepções matemáticas de forma e número surgiram no tempo das cavernas (período paleolítico). Neste período, a necessidade do homem primitivo de estimar quantidades de alimentos, pessoas e animais contribuiu para o surgimento do conceito de número, este iniciou com a simples percepção de diferenças e semelhanças e evoluiu através de contagens primitivas com o uso de pedras, ossos e dedos das mãos. Em um enfoque inicial, é imprescindível destacar esse surgimento das primeiras ideias de número, grandeza e forma que foram registrados através de entalhes em ossos e pinturas nas cavernas. (BARASUOL, 2006).

Os conhecimentos matemáticos foram se aperfeiçoando com o passar do tempo pelas pequenas civilizações, havendo progresso através da formação das cidades e da necessidade dos povos que aumentava consideravelmente.

A intensificação e rapidez da aquisição e desenvolvimento matemático aconteceram no Egito com a criação de técnicas de medição e demarcação de terras em relação as águas do rio nilo e com os registros em papiros (espécie de papel da época) os quais foram propagados e conhecidos ao longo do tempo. Os escribas utilizavam conceitos matemáticos devido aos tesouros reais da babilônia. A matemática na época não era utilizada como ciência organizada e sim para solucionarem situações práticas da vida diária.

A história da matemática é um campo de investigação das origens, descobertas métodos e notações matemáticas desenvolvidas das antigas civilizações. E através dela os povos conseguiram desenvolver os alicerces de várias áreas que futuramente comporiam o que chamamos de matemática.

Há mais de quatro milênios, o homem, aprende e usa a matemática, embora o seu ensino seja relativamente recente, em muitos países, para uma grande parte de sua população.

Em sua trajetória vários acontecimentos, bem como grandes personagens contribuíram para a sua evolução sendo citados e tidos como referências até os dias de hoje. Dentre eles podemos citar Pitágoras.

Apresenta-se como objetivo geral, Direcionar este trabalho para os alunos do ensino médio, para que estes o conheçam, buscando familiarizá-los com o teorema de Pitágoras. Como objetivos específicos, Demonstrar o teorema de Pitágoras de forma prática e sucinta para que os alunos compreendam, mostrar como este teorema se aplica no cotidiano de diversas formas, enfatizar a importância do mesmo para a sociedade e para o futuro deles. Como justificativa, este trabalho foi feito com intuito de buscar uma maior aproximação dos alunos com o teorema de Pitágoras e com a matemática em si. Pois sabemos que os alunos do ensino médio são na maioria adolescentes e estes muitas das vezes acabam não dando a importância devida para a matemática, pelo simples motivo de saberem para que serve a maioria das coisas estudadas em sala de aula, eles se perguntam entre si para que eu vou usar essas coisas? isso vai servir para que? Por isso nossa metodologia será a mais simples e clara possível para que eles possam entender o que queremos repassar de forma prática e sucinta.

## CAPÍTULO 1

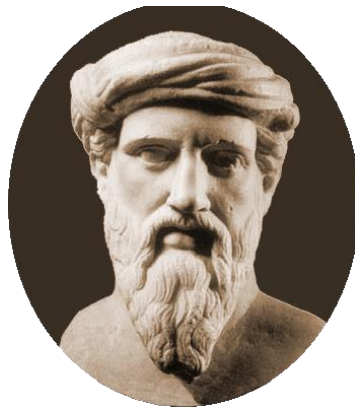
### HISTÓRIA E AS PROPRIEDADES PITAGÓRICAS

Nesse capítulo, serão abordados alguns tópicos que servirão de base para o próximo capítulo. Apresentam-se de forma sucinta os seguintes tópicos, História sobre Pitágoras, algumas propriedades pitagóricas, triângulos pitagóricos, semelhança de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo.

#### 1.1 PITÁGORAS HISTÓRICO.

Pitágoras que segundo Boyer (2010), está envolto em lendas e apoteoses. Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em anos entre 570 a.C. e 571 a.C. Várias foram suas biografias escritas na antiguidade, mas se perderam com o tempo.

Figura: 1: Pitágoras.



Fonte: <https://www.escolasanti.com.br/pitagoras-e-os-pitagoricos/>

Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grego denominada em sua homenagem como pitagórica e a ele também está associado o teorema que relacionou os lados de um triângulo retângulo que é universalmente conhecido pelo seu nome: Teorema de Pitágoras onde este é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Na geometria euclidiana, o teorema afirma que: "Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da

hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos". Mesmo sendo um teorema já conhecido pelos babilônicos dos tempos de Hamurabi, há mais de um milênio antes, é creditado a Pitágoras a primeira demonstração desse teorema.

O teorema de Pitágoras é considerado pelos vários estudiosos da matemática como um dos mais importantes da história. Vários resultados importantes em geometria teórica, bem como da solução de problemas práticos relacionados as medidas, foram descobertos através desse teorema. O fato é que o teorema de Pitágoras é considerado um dos mais famosos e úteis da geometria elementar o que foi demonstrado por várias civilizações no decorrer da história.

Barbosa (1993) cita que o professor de matemática Elisha Sott Loomis do estado de Ohio, nos Estados Unidos reuniu 230 demonstrações do teorema num livro publicado em 1927; e na segunda edição do livro, de 1940, ampliou esse número de demonstrações para 370, Assim é imprescindível que cada professor de matemática cabe o conhecimento de, pelo menos, uma demonstração, para que utilize em suas aulas aquela ou aquelas que melhor se adaptem ao seu curso e preferencialmente permitam a participação dos alunos. Ainda de acordo com Barbosa (1993), é necessário no ensino o entendimento de prova no sentido de prova adequada, com uso de demonstrações que esteja de acordo com o nível de informações e conhecimento do educando, pois só assim haverá um juízo do rigor inerente a essa adaptação.

### 1.1.1 Propriedades pitagóricas.

Nesse item, serão abordados as propriedades pitagóricas, Serão apresentadas de forma sucinta, definições e exemplos e propriedades básicas acerca dos triângulos pitagóricos.

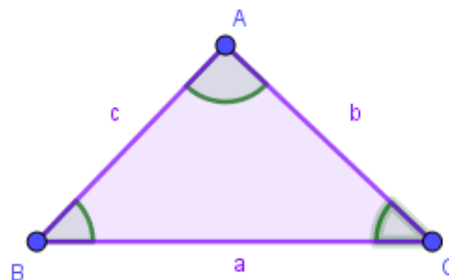
### 1.1.2 Definições e Exemplos

#### Definição 1. (Triângulo)

Dados três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , não colineares (não alinhados), a reunião dos segmentos,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ , chama-se triângulo  $ABC$ .

Indicação: triângulo  $ABC = \Delta ABC$

Figura 2: Triângulo.



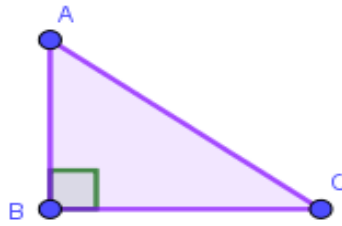
Fonte: autoria própria.

Em outras palavras, um triângulo é um polígono convexo cuja região é formada por três semirretas concorrentes entre si, duas a duas, em três pontos diferentes, formando seus três lados.

#### Definição 2. (Triângulo Retângulo)

Chama-se triângulo retângulo, o triângulo que possui um ângulo de  $90^\circ$  (ângulo reto); por consequência da lei angular de Tales os outros ângulos são agudos.

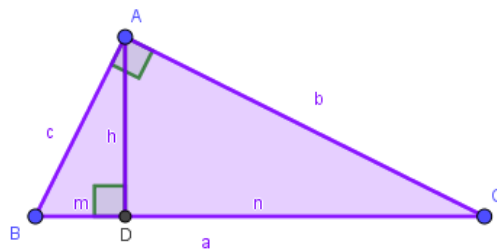
Figura 3: Triângulo retângulo.



Fonte: Autoria própria.

Este triângulo possui algumas características muito importantes, vejamos; tomando um triângulo  $ABC$  qualquer, com o ângulo reto em  $A$ , o lado  $BC$  oposto a esse ângulo é chamado de hipotenusa que é o maior lado do triângulo e os outros dois lados são denominados catetos. Traçando um seguimento  $\overline{AD}$  perpendicular a  $\overline{BC}$ , com  $D$  em  $BC$ , com essas informações podemos nomear os elementos de um triângulo retângulo.

Figura 4: triângulo retângulo.



Fonte: Autoria própria.

onde;

$\overline{BC} = a$ : hipotenusa,

$\overline{AC} = b$ : cateto,

$\overline{AB} = c$ : cateto,

$\overline{BD} = m$ : projeção do cateto  $c$  sobre a hipotenusa,

$\overline{CD} = n$ : projeção do cateto  $b$  sobre a hipotenusa,

$\overline{AD} = h$ : altura relativa à hipotenusa.

### 1.1.3 Triângulos Pitagóricos

Este nome se deu pelo fato de este tipo de triângulo conter lados inteiros, isto é,

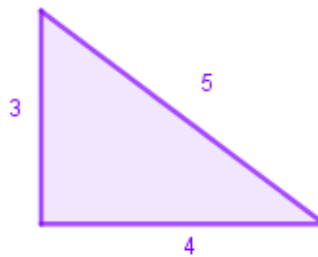
#### Definição 3.

Um triângulo retângulo  $ABC$  de lados  $a, b, c$  é dito pitagórico se as medidas dos lados são números inteiros.

#### Exemplo 1:

São exemplos de triângulos Pitagóricos os três triângulos cujos os lados são  $(3, 4$  e  $5)$ ,  $(5, 8$  e  $13)$ ,  $(7, 24$  e  $25)$  respectivamente, pois estes lados são números inteiros.

Figura 5: Triângulo Pitagórico.

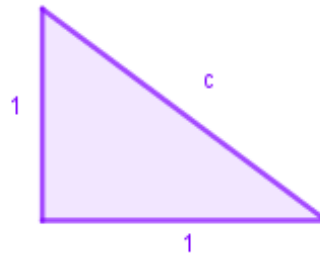


Fonte: Autoria própria.

#### Exemplo 2:

O triângulo de lados  $(1, 1$  e  $\sqrt{2})$ , não é pitagórico, pois

Figura 6: Triângulo não Pitagórico.



Fonte: Autoria própria.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

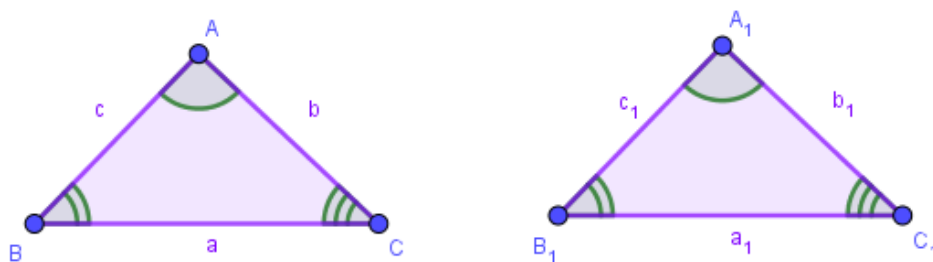
O lado  $c$  não pertence ao conjunto dos números inteiros e sim ao conjunto dos números irracionais.

## 1.2 Semelhança de Triângulos

### Definição 4.

Dois triângulos são semelhantes se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e seus respectivos lados proporcionais.

Figura 7: Triângulos semelhantes.



Fonte: Autoria própria.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \sim A_1 \\ B \sim B_1 \\ C \sim C_1 \end{pmatrix} e \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

onde o símbolo  $\sim$  significa semelhança entre os triângulos.

Chama-se razão de semelhança o número real  $k$ , tal que é a razão entre os respectivos lados dos triângulos, assim temos que:

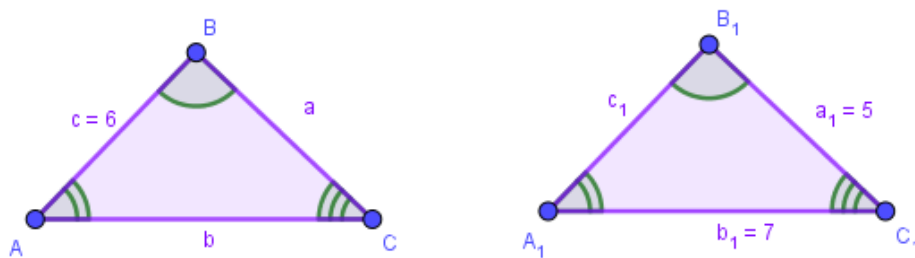
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k,$$

se  $k = 1$ , os triângulos são congruentes.

#### Exemplo 4:

Dado dois triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$ , são semelhantes, sendo a medidas dos lados do segundo  $A_1B_1 = 3\text{cm}$ ,  $A_1C_1 = 7\text{cm}$  e  $B_1C_1 = 5\text{cm}$ , já a medida de um dos lados do primeiro mede  $AB = 6\text{cm}$ , devemos encontrar a razão de semelhança entre os triângulos e com ela encontrar a medida dos dois lados do primeiro triângulo.

Figura 8: Triângulo semelhantes.



Fonte: Autoria própria.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto a razão de semelhança é 2. Daí, temos

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} \Rightarrow a = 10 \\ \frac{b}{7} \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

logo, os lados do primeiro triângulo medem  $BC = 10\text{ cm}$  e  $AC = 14\text{ cm}$ .

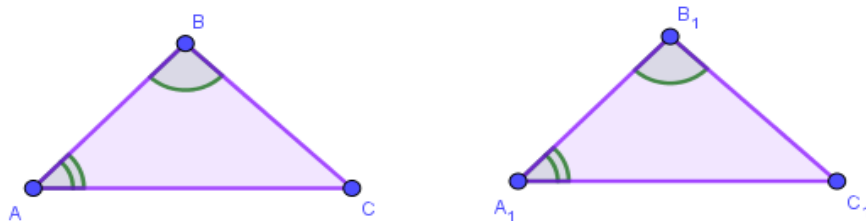
### 1.2.1 Casos ou critérios de semelhança

Não é necessário que se conheça todos os lados e ângulos dos triângulos para que tenhamos a semelhança assegurada. É isso que nos dizem os critérios de semelhança de triângulos, que são divididos em três casos, a saber;

#### I) Caso AA - Ângulo Ângulo

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

Figura 9: Triângulo semelhantes.

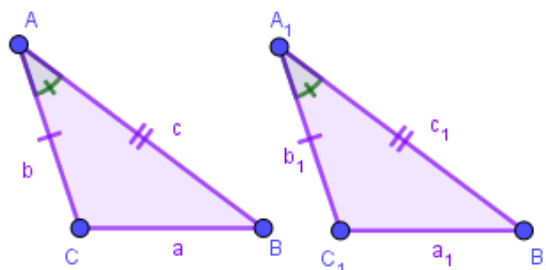


Fonte: Autoria própria.

#### II) Caso LAL – Lado Ângulo Lado

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos do outro triângulo e se o ângulo entre estes lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes."

Figura 10: Triângulo semelhantes.

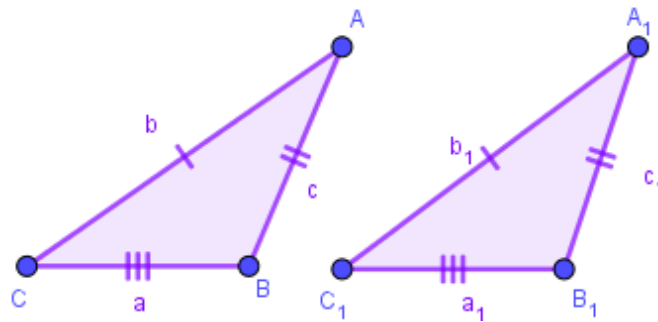


Fonte: Autoria própria.

### III) Caso LLL – Lado Lado Lado

"Se dois triângulos possuem os seus lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

Figura 11: Triângulo semelhantes.



Fonte: Autoria própria.

#### Exemplo 5.

Sejam os triângulos  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  e  $A_2B_2C_2$ , sendo as medidas dos lados dados por  $3,4e5$ ;  $6,8e10$  e  $5,12e13$  respectivamente. Veja que os triângulos  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  são semelhantes, pois seus lados são homólogos proporcionais, isto é,

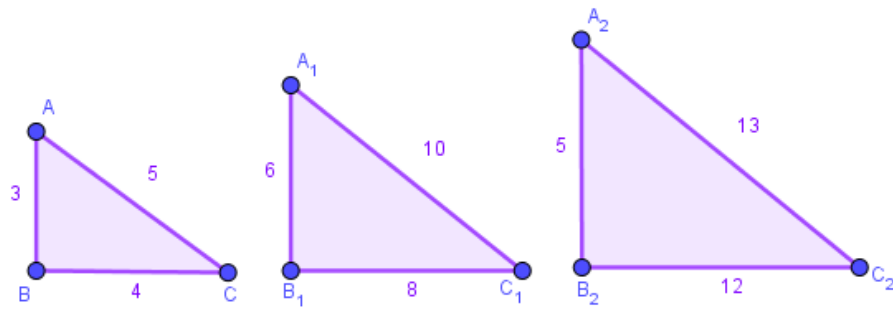
$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$$

Já os triângulos  $A_1B_1C_1$  e  $A_2B_2C_2$  não são semelhantes, pois seus lados homólogos não são proporcionais, ou seja, não existe  $k$  inteiro tal que

$$\frac{5}{10} = \frac{12}{8} = \frac{13}{10} = k$$

Assim como os triângulos  $ABC$  e  $A_2B_2C_2$ .

Figura 12: Triângulos retângulos.



Fonte: Autoria própria.

Como a base de estudo deste trabalho restringe-se aos triângulos retângulos, iremos por tanto, defini-lo a seguir.

**1.3 Relações Métricas no triângulo retângulo.** (Este item tem como referência o capítulo XIV do livro: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª ed. - São Paulo: Atual, 1993).

Elementos

Considerando um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , e conduzindo  $\overline{AD}$  perpendicular a  $\overline{BC}$ , com  $D$  em  $\overline{BC}$ , vamos caracterizar os elementos seguintes:

$\overline{BC} = a$  : hipotenusa

$\overline{AC} = b$  : cateto

$\overline{AB} = c$  : cateto

$\overline{BD} = m$  : projeção do cateto  $c$

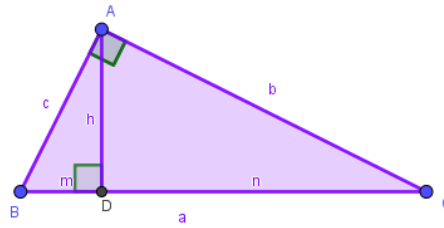
Sobre a hipotenusa,

$\overline{CD} = n$  : projeção do cateto  $b$

sobre a hipotenusa,

$\overline{AD} = h$  : altura relativa à hipotenusa,

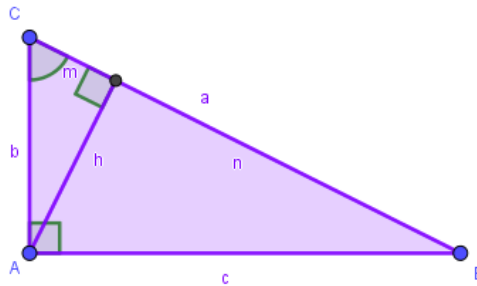
Figura 13: triângulo retângulo.



Fonte: Autoria própria.

Note que, para simplificar, confundimos um seguimento com a sua medida. Assim, dizemos que  $a$  é a hipotenusa, podendo ser entendido que  $a$  é a medida da hipotenusa.

Figura 14: triângulo retângulo.

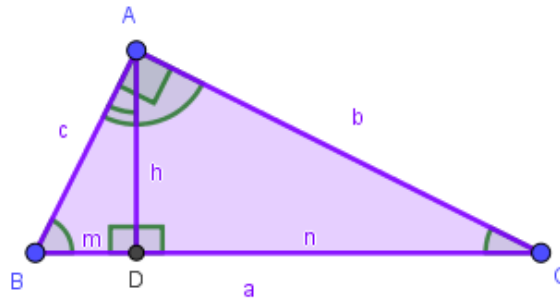


Fonte: Autoria própria.

## Semelhanças

Considerando a altura  $\overline{AD}$  relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo  $ABC$ , obtemos dois triângulos retângulos  $DBA$  e  $DAC$  semelhantes ao triângulo  $ABC$ .

Figura 15: triângulo retângulo.



Fonte: Autoria própria.

De fato, devido a congruência dos ângulos indicados na figura acima,

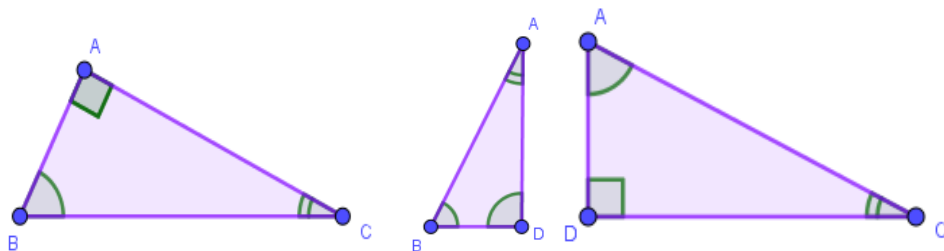
$$\hat{B} = \hat{1} \text{ (complementos de } \hat{C} \text{) e}$$

$$\hat{C} = \hat{2} \text{ (complementos de } \hat{B} \text{)}$$

Temos

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \quad \Delta ABC \sim \Delta DAC \quad \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

Figura 15: triângulos semelhantes.



Fonte: Autoria própria.

Pois eles têm dois ângulos congruentes,

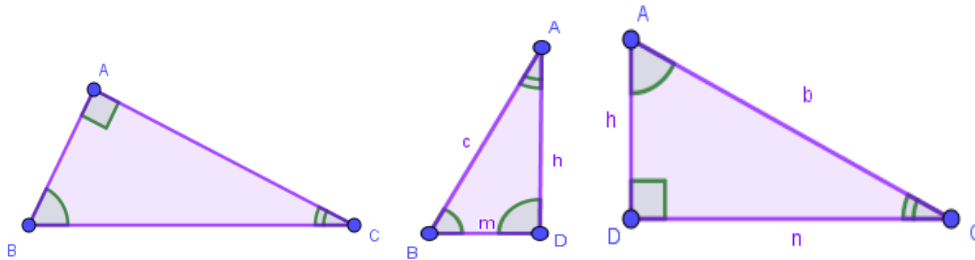
Logo:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

## a) Dedução

Com base nas semelhanças dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já caracterizados, temos:

Figura 15: triângulos semelhantes.



Fonte: Autoria própria.

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4) \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \quad (2) \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \quad (6) \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \quad (1) \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4) \\ \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \quad (5) \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \quad (5) \\ \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \quad (6) \\ \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (3) \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

$$(1) b^2 = a.n$$

$$(3) h^2 = m.n$$

$$(5) b.h = c.n$$

(2)  $c^2 = a.m$

(4)  $b.c = a.h$

(6)  $c.h = b.m$

## Capítulo 2

### ENUNCIADO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Veremos neste capítulo duas formas diferentes de demonstrações do mesmo. Sabemos que existem 370 demonstrações desse teorema porém todas elas são feitas de forma algébrica ou de forma geométrica. Assim usamos nesse trabalho uma de cada forma. Lembrando que estas demonstrações são simples e didáticas, direcionadas para alunos do ensino básico.

O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os três lados de qualquer triângulo retângulo. Que diz;

*“Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”.*

Representado pela fórmula:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

#### 2.1 Demonstração algébrica

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração:

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

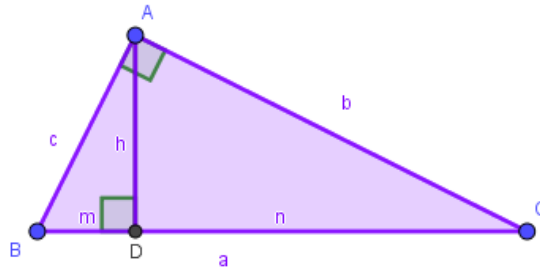
$$\left. \begin{array}{l} b^2 = a.n \\ c^2 = a.m \end{array} \right\} + \Rightarrow b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Observações:

1º) As três primeiras relações métricas são as mais importantes;

$$(1) b^2 = a \cdot n \quad (2) c^2 = a \cdot m \quad (3) h^2 = m \cdot n$$

Figura 16: triângulo retângulo.



Fonte: Autoria própria.

Delas decorrem todas as outras. Por exemplo, fazendo (1) x (2) membro a membro e usando a (3), temos:

$$b^2 \cdot c^2 = a n \cdot a m \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot m n \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

2º) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

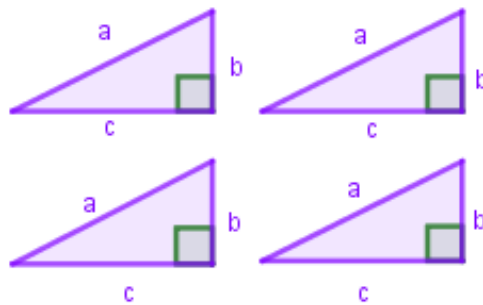
De fato:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2}$$

## 2.2 Demonstração geométrica.

Considere 4 triângulos retângulos, congruentes de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  como na figura abaixo.

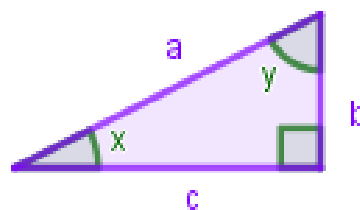
Figura 17 triângulos retângulos



Fonte: Autoria própria.

Tomando um desses triângulos e identificando os ângulos não retos com  $x$  e  $y$ , verifica-se então que  $x + y = 90^\circ$ . Isso acontece porque em todo triângulo a soma dos ângulos internos resulta  $180^\circ$ .

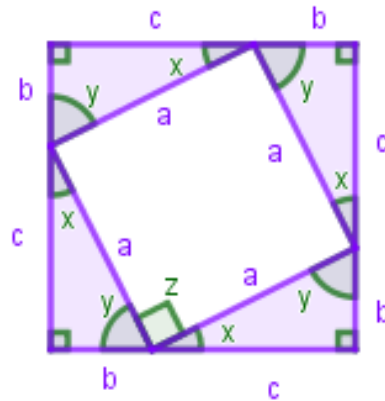
Figura 18 Triângulo retângulo com lados e ângulos definidos



Fonte: Autoria própria.

Os quatro triângulos podem ser reorganizados (Figura 19).

Figura 19 triângulos reorganizados



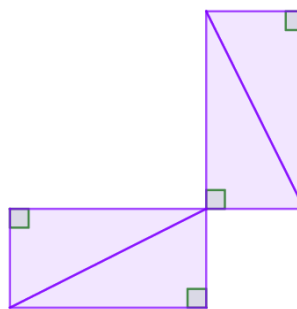
Fonte: Autoria própria.

Com isso, forma-se um quadrado maior de lado  $b + c$  com um quadrilátero de lado  $a$  em seu interior. Pode-se também dizer que esse quadrilátero de lado  $a$  é um quadrado, pois ele possui, além dos lados iguais, ângulos retos. Veja:  $x + y = 90^\circ$  e que  $x + y + z = 180^\circ$ .

Logo  $z = 90^\circ$ .

Agora deve-se arrumar esses quatro triângulos de outro modo. (Figura 20).

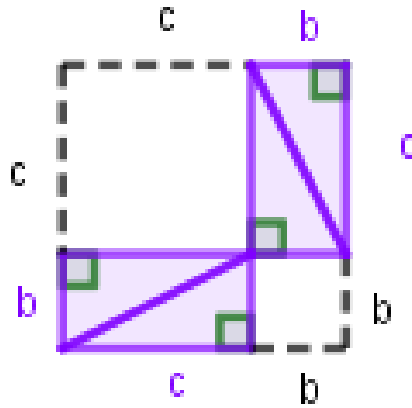
Figura 20 triângulos retângulos em nova configuração



Fonte: Autoria própria.

Nesta figura também é possível formar um quadrado maior de lados medindo  $b + c$ .

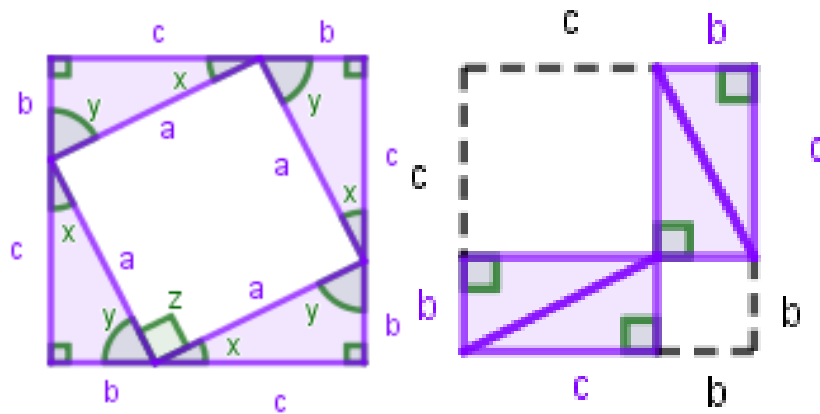
Figura 21 triângulos formando um quadrado



Fonte: Autoria própria

Comparando agora a Figura 19 com a Figura 21, fica claro que ambas possuem áreas iguais, pois possuem lados medindo  $b + c$ .

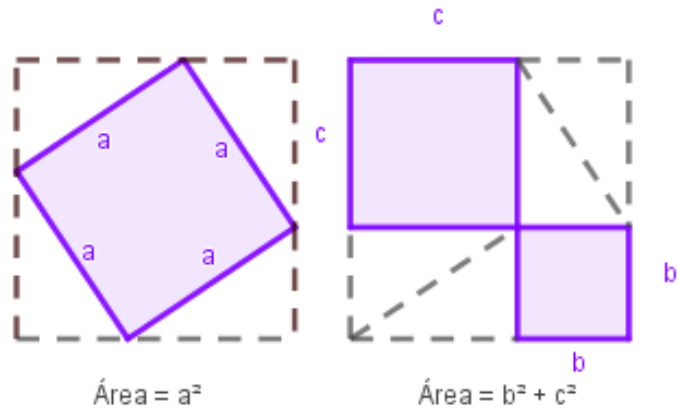
Figura 22 Comparação dos quadrados



Fonte: Autoria própria

Agora, se de cada figura forem retirados os quatro triângulos, as figuras que restarem em cada um deles continuarão tendo áreas iguais, porque estão sendo retirados quantidades iguais de coisas iguais.

Figura 23 Retirada dos 4 triângulos de cada figura



Fonte: Autoria própria

Assim conclui-se que:  $a^2 = b^2 + c^2$

## Capítulo 3

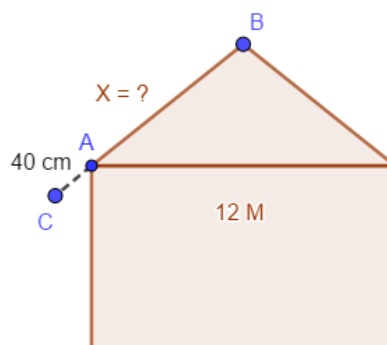
### Aplicações.

Neste capítulo serão feitas algumas aplicações do teorema de Pitágoras no cotidiano como forma de explicar para que ele é usado e a importância do mesmo para a sociedade.

#### Aplicação 1 Caimento de um telhado.

Um pedreiro foi contratado para construir um telhado sobre uma laje que tem largura igual a  $12\text{ M}$ , onde esse telhado será construído em duas bandas, ou seja um caimento para cada lado, onde será aplicado um beiral de  $40\text{ cm}$ , e a telha a ser utilizada deverá ter um caimento de  $30\%$ . Calcule o comprimento  $X = \overline{AB} + \overline{AC}$  da madeira que será usada na fabricação deste telhado.

Figura 24: Esboço do telhado.



Fonte: Autoria própria.

#### Solução:

Primeiro devemos calcular a altura  $h$ , útil do meio do telhado que será determinante para o caimento devido de  $30\%$ . Primeiro construiremos 6 triângulos com base igual a  $1\text{ M}$  e  $0,30\text{ M}$  de Altura por causa do caimento que deve ser de  $30\%$ .

Figura 25: Cálculo da altura do telhado.

Agora basta multiplicarmos:

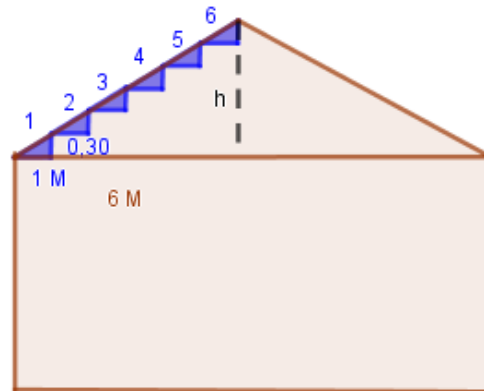
$$1 M \leftrightarrow 30 \text{ cm}$$

$$0,30 M$$

$$30 \text{ cm} \times 6$$

$$180 \text{ cm}$$

$$1,8 M.$$



Fonte: Autoria própria.

Logo a altura do telhado é 1,8 M.

Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$C^2 = 6^2 + 1,8^2$$

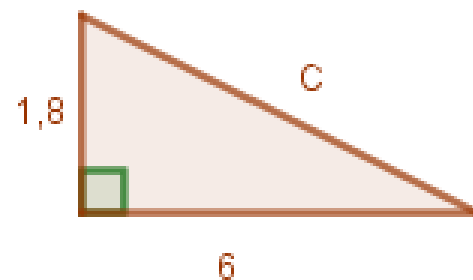
$$C^2 = 36 + 3,24$$

$$C^2 = 39,24$$

$$C = \sqrt{39,24}$$

$$C = 6,264$$

Figura 26: Triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria.

Agora basta somar o valor de  $C = \overline{AB}$  com o seguimento  $\overline{AC} = 40 \text{ cm}$  do beiral para obtermos o valor  $X$  do comprimento da madeira:

$$X = \overline{AB} + \overline{AC} \Rightarrow X = 6,264 M + 0,40 \text{ cm} = 6,664 M.$$

Portanto o comprimento da madeira deverá ser de 6,664 M.

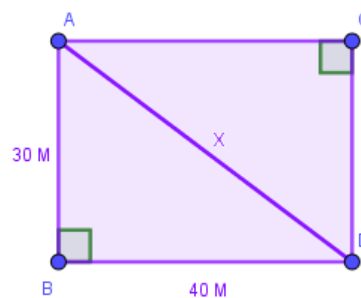
### Aplicação 2

Um terreno tem formato retangular de modo que um de seus lados mede 30 metros e o outro mede 40 metros. Será preciso construir uma cerca que passe pela diagonal desse terreno. Assim considerando-se que cada metro de cerca custará R\$ 12,00, quanto será gasto em reais para sua construção?

#### Solução

Se a cerca passa pela diagonal do retângulo, então, basta calcular o seu comprimento e multiplicá-lo pelo valor de cada metro. Para encontrar a medida da diagonal de um retângulo devemos observar que esse segmento divide-o em dois triângulos retângulos como mostra a figura a seguir.

Figura 25: Retângulo



Fonte: autoria própria.

Aplicando o teorema de Pitágoras, tomando somente o triângulo  $ABD$ ,  $\overline{AD}$  é hipotenusa e  $\overline{BD}$  e  $\overline{AB}$  são catetos portanto teremos:

$$\begin{aligned}x^2 &= 30^2 + 40^2 \\x^2 &= 900 + 1600 \\x^2 &= 2500 \\x &= \sqrt{2500} \\x &= 50\end{aligned}$$

Dessa forma, sabemos que o terreno terá 50M de cerca. Como cada metro custará 12 reais, portanto:

$$50 \cdot 12 = 600$$

Serão gastos R\$ 600,00 nessa cerca.

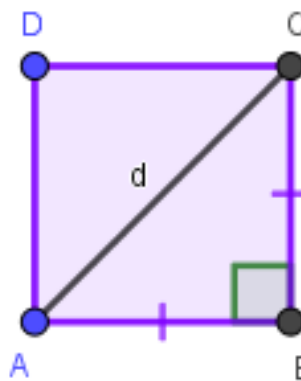
### Aplicação 3

Diagonal do quadrado

Dado um quadrado de lado  $a$ , calcular a sua diagonal  $d$ .

Sendo  $ABCD$  o quadrado de lado  $a$ , aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle ABC$ , temos:

Figura 25: Quadrado.



Fonte: autoria própria.

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

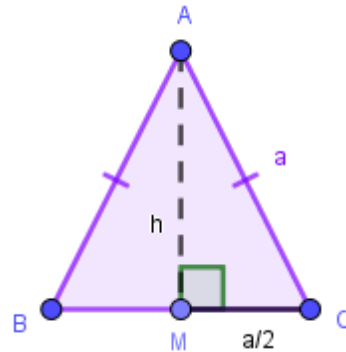
### Aplicação 4

Altura do triângulo equilátero

Dado um triângulo equilátero de lado  $a$ , calcular sua altura  $h$ .

Sendo  $ABC$ , um triângulo equilátero de lado  $a$ ,  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ , calculamos  $\overline{AM} = h$ , aplicando o teorema de Pitágoras no  $\triangle AMC$

Figura 26: Triângulo equilátero.



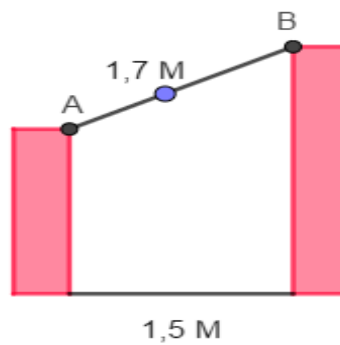
Fonte: autoria própria.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

### Aplicação 5

(PM-SP/2014 – Vunesp). Duas estacas de madeira, perpendiculares ao solo e de alturas diferentes, estão distantes uma da outra  $1,5 M$ , será colocada entre elas uma outra estaca de  $1,7 M$  de comprimento que ficará apoiada nos pontos  $A$  e  $B$ , conforme mostra a figura.

Figura 26: Estacas perpendiculares.

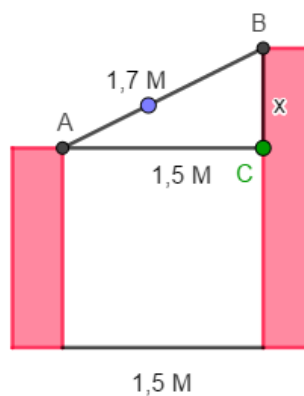


Fonte: autoria própria.

Qual a diferença em cm, entre a altura da maior estaca e a altura da menor estaca, nessa ordem.

**Solução:** A distância entre as duas estacas é igual a 1,5 M, se medida no ponto A, formando o triângulo retângulo ABC, conforme indicado na figura a seguir:

Figura 27: Triângulo formado.



Fonte: autoria própria.

Usando o teorema de Pitágoras teremos:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$1,7^2 = 1,5^2 + BC^2$$

$$2,89 = 2,25 + BC^2$$

$$BC^2 = 2,89 - 2,25$$

$$BC^2 = 0,64$$

$$BC = \sqrt{0,64}$$

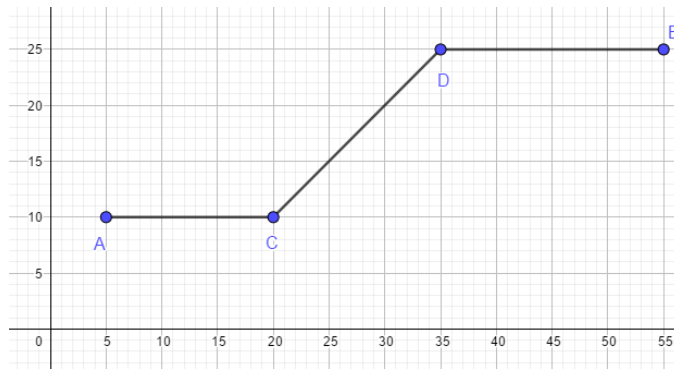
$$BC = 0,8$$

Portanto a diferença entre as estacas é de 80 cm.

## Aplicação 6 (IFSP/2015).

O transporte alternativo é uma maneira de se locomover usando um meio diferente dos mais tradicionais. A bicicleta é um exemplo disso. Em alguns lugares, ela é usada porque é mais barata, como no interior do Brasil e em países como a Índia e China. Outras pessoas escolhem andar de bicicleta por uma questão ideológica, porque elas não agredem o meio ambiente e não causam tantos transtornos quanto os carros. Usando uma bicicleta, uma pessoa sai do ponto  $A$  e se dirige ao ponto  $B$ . O percurso, dado em  $Km$ , representado pelos segmentos  $AC$ ,  $CD$  e  $DB$ , está esboçado no gráfico abaixo.

Figura 28:Gráfico.

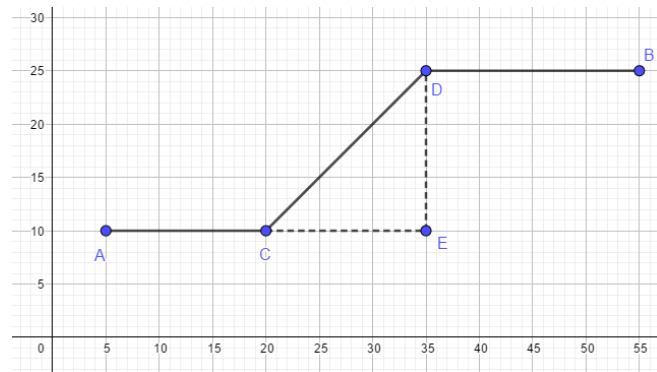


Fonte: autoria própria.

Considerando  $\sqrt{2} = 1,41$ , Qual a distância percorrida pela pessoa do ponto  $A$  ao ponto  $B$ .

**Solução:** Observe o triângulo retângulo construído na imagem abaixo para o cálculo da distância  $CD$ .

Figura 27: Triângulo no gráfico.



Fonte: autoria própria.

Observe que ambos os segmentos  $CE$  e  $ED$  medem  $15\text{ Km}$ . Utilizando o teorema de Pitágoras, calcularemos o comprimento do segmento  $CD$ :

$$CD^2 = 15^2 + 15^2$$

$$CD^2 = 225 + 225$$

$$CD^2 = 450$$

$$CD = \sqrt{450}$$

Simplificando  $\sqrt{450}$  pelo processo de fatoração, obtemos:

$$\sqrt{450} = \sqrt{(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)} = 3.5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} = 15.1,41 = 21,15$$

Para descobrir a distância percorrida entre os pontos  $A$  e  $B$ , basta somar os comprimentos dos segmentos  $AC$ ,  $CD$  e  $DB$ :

$$AC + CD + DB = 15 + 21,15 + 20 = 56,15\text{ Km}.$$

Portanto a distância percorrida é de  $56,15\text{ Km}$ .

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, estudamos de forma básica os triângulos Pitagóricos e o teorema de Pitágoras. Concluimos que este teorema pode ser de grande importância para o ser humano no cotidiano, buscamos formas de aplicações no meio em que vivemos e isso é condição necessária para que os alunos sejam mais atraídos pela matemática. Constatamos que todas essas aplicações, são obtidos através da fórmula,  $b^2 + c^2 = a^2$ , além disso, mostramos que existem diversas formas de aplicação do teorema de Pitágoras, isto é, pudemos mostrar que a matemática estudada em sala de aula tem grande importância para a sociedade

Esperamos que esse trabalho sirva de inspiração e apoio tanto para estudante do ensino médio, como do ensino superior para possíveis estudos e trabalhos que envolvam o mesmo conteúdo.

Caso haja algum interesse para trabalhos futuros sugerimos que explorem o assunto dedicando um capítulo só para aplicações, podem também realizar um trabalho com maior rigor matemático sugerimos o estudo da matemática elementar.

## REFERÊNCIAS

- [1] BARASUOL, F. F. **A matemática da pré-história ao antigo Egito**. Unirevista, São Leopoldo, v. 1, n. 2, abr. 2006.
- [2] BARBOSA, R. M. **Descobrimos padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo: Atual, 1993. 93p
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] BOYER, Carl B. **História da Matemática**, 1906. Tradução: GOMIDE, Elza F. São Paulo, ed. da universidade de São Paulo. 1974.
- [5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único. São Paulo: Atual, 2005
- [6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª ed. - São Paulo: Atual, 1993.
- [7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** / tradução: Hygino H. Domingues, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [8] Lenilson oliveira da silva. **Atividades lúdicas no ensino do teorema de Pitágoras**. Universidade estadual do norte fluminense. Campo dos Goytacazes – RJ, 2016.
- [9] SILVA, Luiz Paulo Moreira. **"Aplicações do Teorema de Pitágoras "**
- [10]<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/o-teorema-pitagoras-no-cotidiano.htm>
- [11]<https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exerciciosmatematica/exercicios-sobre-teorema-pitagoras.htm>
- [12]<https://www.youtube.com/watch?v=ljb6rZfAWvU>
- [13]<https://docplayer.com.br/5142495-Historia-da-matematica-contribuicoes-e-descobertas-para-o-ensino-aprendizagem-de-matematica.html>