UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

MATHEUS LIMA DE ARAÚJO

EQUIVALÊNCIA ENTRE A ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL E A OBSERVABILIDADE NA FRONTEIRA PARA SISTEMAS DE DILATAÇÃO DE SOLOS ELÁSTICOS POROSOS COM SATURAÇÃO

SALINÓPOLIS
2023

MATHEUS LIMA DE ARAÚJO

EQUIVALÊNCIA ENTRE A ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL E A OBSERVABILIDADE NA FRONTEIRA PARA SISTEMAS DE DILATAÇÃO DE SOLOS ELÁSTICOS POROSOS COM SATURAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de grau de licenciado, Faculdade de Física, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos.

SALINÓPOLIS–PA
2023

MATHEUS LIMA DE ARAÚJO

EQUIVALÊNCIA ENTRE A ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL E A OBSERVABILIDADE NA FRONTEIRA PARA SISTEMAS DE DILATAÇÃO DE SOLOS ELÁSTICOS POROSOS COM SATURAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Física do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Física.
Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos.

Data de Aprovação: 30 de outubro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Orientador)

Luiz Gutemberg R Miranda

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Membro externo)

Thiago R S Moura

Prof. Dr. Thiago Rafael da Silva Moura (Membro interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Senhor Jesus, que sempre tem me dado conforto e forças nos momentos de dificuldades ao longo desta graduação. E por ter me iluminado e capacitado para conseguir realizar este trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais, Abson Renato das Neves Araújo, por todo cuidado, amor e a educação maravilhosa que me repassou, à Joaneide Lima de Araújo por todo amor, cuidado, incentivo aos estudos e a minha irmã Adriane Lima de Araújo Laube por todos momentos que passamos juntos repletos de alegria e de motivação recíproca, obrigado por sempre acreditar no meu potencial. Em especial, agradeço a minha avó Tereza, heroína que sempre cuida de nós, és o "alicerce" de nossa família.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos, pelo seu profissionalismo e magnificência, pela paciência, disponibilidade e motivação aos estudos e a pesquisa.

Aos meus colegas de turma que sempre me deram força e acreditaram no meu trabalho. Em especial: Joicy Beatriz Nunes, Francisco Flávio Cavalcante, William Oliveira, Luís Ribeiro, Álvaro Neto, Josemar Souza, Douglas Santos e Rômulo Raiol.

Ao Prof. Ms. Rafael Lima de Moraes, técnico do laboratório de física, que no início de minha jornada me ajudou a superar as minhas dificuldades e me auxiliou durante grande parte de minha graduação, sua contribuição foi de muita importância para minha formação.

A minha namorada Joicy Beatriz de Souza Nunes, por sempre me apoiar, me motivando a superar as adversidades, minha companheira e amiga, por trazer paz e felicidade para minha vida e por me incentivar quando eu fraquejei, e ao seu pai José Nunes por me ceder o espaço de sua casa nos momentos que precisei e por toda receptividade e ao seu carisma.

Aos meus colegas de iniciação científica que sempre me motivaram e me auxiliaram. São eles: Joelson Dias Martins, que me repassou materiais necessários para que eu pudesse desenvolver meus trabalhos e aos momentos de descontração jogando videogame, a Bráulio Ludero de Lucena Júnior, sempre muito carismático e mostrando que somos capazes de nos superarmos diante das dificuldades acadêmicas, e por sempre incentivar os estudos.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Física do Campus Salinópolis pelos ensinamentos passados. Em especial: Prof. Dr. Jeferson Danilo Lima Silva, Prof. Dr. Cledson Santana Lopes Gonçalves e Prof. Dr. Caio Filipe Bezerra Macedo. Aos professores Lindomar Ribeiro, Mirelson Freitas, Manoel Jeremias dos Santos, Luiz Gutemberg Miranda e a todo corpo docente da UFPA Salinópolis, por todo aprendizado e colaboração para a minha formação acadêmica.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278e de Araújo, Matheus Lima.
Equivalência entre a estabilização exponencial e a observabilidade na fronteira para sistemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação / Matheus Lima de Araújo. — 2023.
iv, 27 f.

Orientador(a): Prof. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura em Física, Salinópolis, 2023.

1. Sistemas elásticos porosos . 2. Estabilização exponencial. 3. Observabilidade na fronteira. I. Título.

CDD 530.1

Equivalência entre a estabilização exponencial e a observabilidade na fronteira para sistemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação

Matheus Lima de Araújo

Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará.
Rua Raimundo Santana Cruz, s/n, 68721-000, Salinópolis–Pa, Brasil.

Resumo

Neste trabalho, investigamos um sistema de equações diferenciais parciais que modela a dilatação de solos elásticos porosos com saturação. A principal relevância deste trabalho é a prova do importante resultado de estabilização exponencial da energia total do sistema através de um resultado mais geral que é a equivalência entre a estabilização exponencial e a observabilidade na fronteira do sistema.

Palavras-chave: Sistemas elásticos porosos, estabilização exponencial, observabilidade na fronteira

1. Introdução

Nas últimas décadas, a teoria das misturas tem sido estudada por pesquisadores de diversas áreas, entre elas, destacamos: biologia, ciência do solo, indústria do petróleo, etc. A necessidade de entender como a matriz sólida se comporta como resultado do movimento e interação com fluidos, foi motivação para formular a teoria da mistura para sólidos elásticos porosos preenchidos com fluido.

O problema de dilatação dos solos tratado neste projeto, representa um desafio significativo para engenheiros e arquitetos, que lidam com construção de fundações. Assim, encontrar soluções duradouras para o problema estimula uma área ativa de pesquisa em disciplinas afins. A investigação das leis do inchaço foi iniciada por Katz [2] e depois promovido por Philip [3] e Sposito [4]. Em [6], Eringen desenvolveu o primeiro trabalho sobre a teoria da mistura para saturação de sólidos porosos pela ação de um gás ou fluidos. É um modelo matemático que consiste em três equações diferenciais parciais que configuram o problema da saturação de sólidos porosos pela ação de um gás ou fluidos.

Até onde sabemos, o modelo matemático para a teoria linear de misturas binárias de corpos elásticos em um espaço unidimensional foi introduzida pela primeira vez por Quintanilla [5]. Ele a derivou do espaço tridimensional proposto por Eringen [6]. As equações de campo do movimento para o modelo matemático no espaço unidimensional são dadas por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = P_{1x} - G_1 + F_1, \\ \rho_u u_{tt} = P_{2x} - G_2 + F_2, \end{cases} \tag{1}$$

onde z simboliza o deslocamento do fluido e u representa o deslocamento do sólido elástico. Atuando na equação de deslocamento, temos P_1, G_1 e F_1 designando a tensão parcial, a força interna do corpo e a força externa, respectivamente. Uma representação semelhante na equação elástica são P_2, G_2 e F_2 . As constantes positivas ρ_z e ρ_u representam a densidades de z e u, respectivamente. As equações constitutivas das tensões parciais são dadas por

$$P_1 = a_1 z_x + a_2 u_x \quad \text{e} \quad P_2 = a_2 z_x + a_3 u_x, \tag{2}$$

onde $a_1 > 0$, $a_2 \neq 0$ e $a_3 > 0$ são coeficientes constitutivos que satisfazem a relação

$$a_1 a_3 > a_2^2. \tag{3}$$

A relação é indispensável para garantir a positividade da energia interna. Ao substituir (2) em (1) acoplado com as seguintes forças internas e externas

$$G_1 = G_2 = \xi(z_t - u_t), \quad F_1 = \mu_1 z_{xxt} \quad \text{e} \quad F_2 = 0, \tag{4}$$

onde ξ e μ_1 são coeficientes constitutivos positivos, temos

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi(z_t - u_t) - \mu_1 z_{xxt} = 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} - \xi(z_t - u_t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Muitos são os resultados sobre a estabilidade assintótica do sistema (5) e suas variantes. Quintanilla [5] estabeleceu um resultado de estabilidade exponencial para (5) usando técnicas multiplicativas. Além disso, ele estabeleceu um resultado semelhante para o caso limite (isto é, $\xi = 0$) empregando o Teorema de Hurwitz. Usando a abordagem da base de Riesz, Wang e Guo [7] analisaram o caso limite, substituindo $\mu_1 z_{xxt}$ por $-k_1(x) z_t$, onde $k_1(x)$ é o coeficiente do amortecimento viscoso interno satisfazendo a relação $\int_0^1 k_1(\tau) d\tau > 0$. Eles provaram um resultado de estabilidade exponencial. Outros resultados interessantes no caso limite com vários mecanismos de amortecimento pode ser encontrado em [8],[9],[10],[11],[12]. Alguns outros resultados fascinantes, também podem ser encontrados em [13], [14], [15] e suas referências.

Neste trabalho, investigamos o problema de estabilização do caso limite do sistema (5) quando $\xi = \mu_1 = 0$, com amortecimento atuando na fronteira. Em outras palavras, consideramos o problema de inchaço em solos elásticos porosos com saturação de fluido dada por

$$\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, T), \tag{6}$$

$$\rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, T), \tag{7}$$

com condições iniciais dadas por

$$z(x, 0) = z_0(x), z_t(x, 0) = z_1(x), u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \ \forall\, x \ \in \ (0, l), \tag{8}$$

as condições de contorno

$$z(0,t) = a_1 z_x(l,t) + a_2 u_x(l,t) + \gamma_1 z_t(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{9}$$
$$u(0,t) = a_2 z_x(l,t) + a_3 u_x(l,t) + \gamma_2 u_t(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{10}$$

onde os coeficientes γ_1 e γ_2 são constantes positivas. A energia total associada ao sistema (6)–(10) satisfazendo a relação (3) é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) \;:=\; & \frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}(a_1 - a_2^2/a_3)\int_0^l |z_x|^2 dx \\ & + \frac{1}{2}\int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx, \quad \forall t \geq 0,\end{aligned} \tag{11}$$

e satisfaz a seguinte lei de dissipação

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; t) = -\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 - \gamma_2 |u_t(l,t)|^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{12}$$

Isso mostra que a energia é uma função monótona e não crescente no tempo. Por outro lado, se $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, consideramos o problema conservativo dado por

$$\rho_z \varphi_{tt} - a_1 \varphi_{xx} - a_2 \psi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,T), \tag{13}$$
$$\rho_u \psi_{tt} - a_3 \psi_{xx} - a_2 \varphi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,T), \tag{14}$$

com as seguintes condições iniciais

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \forall\, x \;\in\; (0,l). \tag{15}$$

e as condições de contorno

$$\varphi(0,t) = a_1 \varphi_x(l,t) + a_2 \psi_x(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{16}$$
$$\psi(0,t) = a_2 \varphi_x(l,t) + a_3 \psi_x(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{17}$$

Neste caso, a energia total atende a lei de conservação

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t; t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{18}$$

A principal contribuição deste trabalho é estabelecer um resultado de equivalência entre a estabilização exponencial do sistema (6)–(10) e a observabilidade da fronteira do sistema (13)–(17). Ao melhor do nosso conhecimento, este resultado ainda não foi considerado no estudo de sistemas elásticos porosos com saturação de fluido. Essas questões foram estudadas em outros contextos, como por exemplo, encontramos em [16, 17], questões similares para a equação da onda quasilinear, em [18] para o problema de transmissão da equação da onda, em [19, 20] para feixes piezoelétricos e outros [21, 22, 23, 24].

O objetivo deste trabalho é provar o importante resultado de estabilização exponencial da energia total do sistema através de um resultado mais geral que é a equivalência entre a estabilização exponencial e a observabilidade da fronteira do sistema. Com isso, consideremos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *(Equivalência entre estabilização e observabilidade) As seguintes estimativas são equivalentes*

(i) Existem constantes $C > 0$ *e* $T > T_0$ *tais que para todos* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H^1_*(0,l) \times L^2(0,l) \times H^1_*(0,l) \times L^2(0,l)$ *com* $H^1_*(0,l) := \left\{ f \in H^1(0,l); f(0) = 0 \right\}$ *temos*

$$\mathcal{E}(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1; 0) \leq C(T) \int_0^T \Big(|\varphi_t(l,t)|^2 + |\psi_t(l,t)|^2 \Big) dt, \tag{19}$$

onde $C(T) = l/2(T - 2\tau l)$.

(ii) Existem constantes $M > 0$ *e* $\omega > 0$ *tais que para todo* $(z_0, z_1, u_0, u_1) \in H^1_*(0,l) \times L^2(0,l) \times H^1_*(0,l) \times L^2(0,l)$ *temos*

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; t) \leq M\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{20}$$

A metodologia usada neste trabalho consiste em dividir o problema objeto de estudo e dois novos problemas: um conservativo e outro não conservativo. Para o problema conservativo, construiremos a desigualdade de observabilidade e para o problema não conservativo, construiremos alguns lemas técnicos, que serão usados posteriormente para estabelecer a equivalência com o resultado de decaimento exponencial das soluções do problema objeto de estudo. Em ambos os caso, será usado o Método Multiplicativo.

2. Resultados

Esta seção é dedicada aos importantes resultados deste trabalho.

Prova: Iremos utilizar o método multiplicativo, ou seja, multiplicaremos a equação (6) por z_t e integraremos por partes em $(0,l)$

$$\rho_z \int_0^l z_{tt} z_t dx - \int_0^l (a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx}) z_t dx = 0. \tag{21}$$

Segue daí, a seguinte identidade

$$z_{tt} z_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |z_t|^2, \tag{22}$$

substituindo a equação (22) em (21), temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx - \int_0^l \big(a_1 z_x + a_2 u_x \big)_x z_t dx = 0. \tag{23}$$

Integrando por partes o termo acoplado em $(0,l)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx - \big(a_1 z_x + a_2 u_x \big) z_t \Big|_0^l + \int_0^l \big(a_1 z_x + a_2 u_x \big) z_{tx} dx = 0, \\ &\frac{d}{dt} \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx - \big(a_1 z_x(l,t) + a_2 u_x(l,t) \big) z_t(l,t) + \int_0^l \big(a_1 z_x + a_2 u_x \big) z_{tx} dx = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Lembrando das condições de contornos dado em (9), obtemos a seguinte relação

$$a_1 z_x(l,t) + a_2 u_x(l,t) = -\gamma_1 z_t(l,t), \quad \forall t \geq 0. \tag{25}$$

Substituindo (25) em (24), temos

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx + \gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \int_0^l a_1 z_x z_{tx} dx + \int_0^l a_2 u_x z_{tx} dx = 0. \tag{26}$$

Usando a identidade seguinte

$$z_x z_{tx} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|z_x|^2, \tag{27}$$

em (26), temos

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx + \gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \frac{d}{dt}\frac{a_1}{2}\int_0^l |z_x|^2 dx + \int_0^l a_2 u_x z_{tx} dx = 0. \tag{28}$$

Agora, multiplicamos a equação (7) por u_t e integramos por partes em $(0,l)$, logo

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2 dx + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2 + \frac{d}{dt}\frac{a_3}{2}\int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l a_2 z_x u_{tx} dx = 0. \tag{29}$$

Somando as equações (28) e (29), temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{a_1}{2}\int_0^l |z_x|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{a_3}{2}\int_0^l |u_x|^2 dx \\ &+ \int_0^l a_2 u_x z_{tx} dx + \int_0^l a_2 z_x u_{tx} dx + \gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2 = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}\big(u_x z_x\big) = u_{tx} z_x + u_x z_{tx}. \tag{31}$$

Reescrevendo a equação (30) conforme (31), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{a_1}{2}\int_0^l |z_x|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt}\frac{a_3}{2}\int_0^l |u_x|^2 dx \\ &+ \frac{d}{dt} a_2 \int_0^l u_x z_x dx + \gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2 = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

Adicionando e subtraindo o termo abaixo

$$\frac{a_2^2}{2a_3}\frac{d}{dt}\int_0^l |z_x|^2 dx, \tag{33}$$

na equação (32), obtemos

$$\frac{\rho_z}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l |z_t|^2dx + \frac{\rho_u}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\big(a_1 - a_2^2/a_3\big)\frac{d}{dt}\int_0^l |z_x|^2dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left(\frac{a_2^2}{a_3}|z_x|^2 + 2a_2(u_xz_x) + a_3|u_x|^2\right)dx + \gamma_1|z_t(l,t)|^2 + \gamma_2|u_t(l,t)|^2 = 0. \quad (34)$$

Observe que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left(\frac{a_2^2}{a_3}|z_x|^2 + 2a_2(u_xz_x) + a_3|u_x|^2\right)dx \;=\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x\right|^2 dx. \quad (35)$$

Substituindo a equação (35) em (34), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2dx + \frac{1}{2}(a_1 - a_2^2/a_3)\int_0^l |z_x|^2dx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^l \left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x\right|^2 dx\right) = -\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2 + \gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big). \quad (36)$$

Definimos a energia total do sistema (6)–(10) por

$$\mathcal{E}(t) \;:=\; \frac{\rho_z}{2}\int_0^l |z_t|^2dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^l |u_t|^2dx + \frac{1}{2}(a_1 - a_2^2/a_3)\int_0^l |z_x|^2dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^l \left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x\right|^2 dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (37)$$

a qual satisfaz a seguinte lei de dissipação

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; t) = -\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2 + \gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big) \quad \forall t \geq 0. \quad (38)$$

■

2.1. Problema Conservativo

Considerando o sistema de solos elásticos porosos, temos:

$$\rho_z\varphi_{tt} - a_1\varphi_{xx} - a_2\psi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,T), \quad (39)$$
$$\rho_u\psi_{tt} - a_3\psi_{xx} - a_2\varphi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,T), \quad (40)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\varphi(0,t) = a_1\varphi_x(l,t) + a_2\psi_x(l,t) = 0, \qquad \forall t \geq 0, \quad (41)$$
$$\psi(0,t) = a_2\varphi_x(l,t) + a_3\psi_x(l,t) = 0, \qquad \forall t \geq 0, \quad (42)$$

e com as condições iniciais

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\psi(x,0)=\psi_0(x),\psi_t(x,0)=\psi_1(x),\forall\ x\ \in\ (0,l). \tag{43}$$

A energia total associada ao problema é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t):=\ & \frac{\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx+\frac{\rho_u}{2}\int_0^l|\psi_t|^2dx+\frac{1}{2}(a_1-a_2^2/a_3)\int_0^l|\varphi_x|^2dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^l\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x+\sqrt{a_3}\psi_x\right|^2dx,\quad\forall t\geq 0,\end{aligned} \tag{44}$$

e satisfaz a seguinte identidade

$$\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)=\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;0),\quad\forall t\geq 0. \tag{45}$$

Isto nos diz que a energia $\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)$ é um funcional constante no tempo. A proposição seguinte trata deste resultado.

Proposição 2.1. *A energia total do problema (39)–(43) dada em (44) satisfaz a seguinte lei de conservação*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)=0,\quad\forall t\geq 0. \tag{46}$$

Prova: Multiplicando a equação (39) por φ_t e integrando por partes em $(0,l)$ temos

$$\rho_z\int_0^l\varphi_{tt}\varphi_t dx-\int_0^l(a_1\varphi_{xx}+a_2\psi_{xx})\varphi_t dx=0. \tag{47}$$

Utilizando a identidade $\varphi_t\varphi_{tt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t|^2$ na equação (47), obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx-\int_0^l(a_1\varphi_x+a_2\psi_x)_x\varphi_t dx=0. \tag{48}$$

Integrando por partes o termo acoplado, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx-(a_1\varphi_x+a_2\psi_x)\varphi_t\Big|_0^l+\int_0^l(a_1\varphi_x+a_2\psi_x)\varphi_{tx}dx=0,\\ \frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx-(a_1\varphi_x(l,t)+a_2\psi_x(l,t))\Big|_0^l\varphi_t+\int_0^l(a_1\varphi_x+a_2\psi_x)\varphi_{tx}dx=0.\end{aligned} \tag{49}$$

Considerando as condições de contorno dado em (41), *i.e.*,

$$a_1\varphi_x(l,t)+a_2\psi_x(l,t)=0,\quad\forall t\geq 0, \tag{50}$$

reescrevemos a equação (49) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx+\int_0^l a_1\varphi_x\varphi_{tx}dx+\int_0^l a_2\psi_x\varphi_{tx}dx=0. \tag{51}$$

Agora, multiplicamos a equação (40) por ψ_t e integramos por partes em $(0,l)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_u}{2}\int_0^l |\psi_t|^2 dx + \int_0^l a_2\varphi_x\psi_{tx}dx + \frac{d}{dt}\frac{a_3}{2}\int_0^l |\psi_x|^2 dx = 0. \tag{52}$$

Somando as equações (51) e (52), temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_z}{2}\int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2}\int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2}(a_1 - a_2^2/a_3)\int_0^l |\varphi_x|^2 dx \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^l \left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x + \sqrt{a_3}\psi_x\right|^2 dx\right) = 0, \tag{53}$$

para todo $t > 0$, e portanto, a prova está completa. ■

2.2. Desigualdade de Observabilidade

Aqui estabelecemos a desigualdade de observabilidade do problema conservativo (39)–(43), usando técnicas multiplicativas.

Teorema 2.2. *Para $T > 2\tau l$, existe uma constante $C(T) > 0$, tal que para todo (φ, ψ) solução de (39)–(43) vale a seguinte estimativa*

$$\mathcal{E}(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1; 0) \leq C(T)\int_0^T \left(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2 + \rho_u|\psi_t(l,t)|^2\right)dt, \tag{54}$$

onde $C(T) = l/2(T - 2\tau l)$.

Prova: Multiplicando a equação (39) por $x\varphi_x$ e integrando por partes em $[0,l]\times[0,T]$ temos:

$$\int_0^T\int_0^l \left(\rho_z\varphi_{tt} - a_1\varphi_{xx} - a_2\psi_{xx}\right) x\,\varphi_x\,dxdt = 0. \tag{55}$$

Consequentemente,

$$\int_0^T\int_0^l \rho_z\varphi_{tt}\varphi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_1\varphi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\psi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt = 0. \tag{56}$$

Segue daí que,

$$\rho_z\int_0^l \varphi_t\varphi_x\,x\,dx\Big|_0^T - \rho_z\int_0^T\int_0^l \varphi_t\varphi_{tx}\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_1\varphi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt$$
$$- \int_0^T\int_0^l a_2\psi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt = 0. \tag{57}$$

Fazendo $\mathcal{X}_\varphi(t) = \rho_z\displaystyle\int_0^l \varphi_t\varphi_x\,x\,dx$ e usando as seguintes identidades,

$$\varphi_t\varphi_{tx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\varphi_t|^2, \qquad \varphi_x\varphi_{xx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\varphi_x|^2, \tag{58}$$

obtemos

$$\mathcal{X}_\varphi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_z}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\varphi_t|^2 x dxdt - \frac{a_1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\varphi_x|^2 x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\psi_{xx}\varphi_x x\,dxdt = 0. \quad (59)$$

Desse modo,

$$\mathcal{X}_\varphi(t)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2 + a_1|\varphi_x|^2\Big)x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\psi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt = 0. \quad (60)$$

De maneira análoga para a equação (40), multiplicamos por $x\psi_x$ e integramos por partes em $[0,l]\times[0,T]$, obtemos

$$\int_0^T\int_0^l \Big(\rho_u\psi_{tt} - a_3\psi_{xx} - a_2\varphi_{xx}\Big)x\psi_x\,dxdt = 0. \quad (61)$$

Consequentemente,

$$\int_0^T\int_0^l \rho_u\psi_{tt}\psi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_3\psi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\varphi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt = 0. \quad (62)$$

Portanto,

$$\rho_u\int_0^l \psi_t\psi_x\,x\,dx\Big|_0^T - \rho_u\int_0^T\int_0^l \psi_t\psi_{tx}\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_3\psi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\varphi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt = 0. \quad (63)$$

Fazendo $\mathcal{X}_\psi(t) = \rho_u\int_0^l \psi_t\psi_x\,x\,dx$, e usando as seguintes identidades, temos

$$\psi_t\psi_{tx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\psi_t|^2, \qquad \psi_x\psi_{xx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\psi_x|^2, \quad (64)$$

dessa forma

$$\mathcal{X}_\psi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_u}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\psi_t|^2 x\,dxdt - \frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\psi_x|^2 x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\varphi_{xx}\psi_x x\,dxdt = 0. \quad (65)$$

Assim temos,

$$\mathcal{X}_\psi(t)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_u|\psi_t|^2 + a_3|\psi_x|^2\Big)x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\varphi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt = 0. \quad (66)$$

Somando as equações (60) e (66), obtemos

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t) + \mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2 + \rho_u|\psi_t|^2 + a_1|\varphi_x|^2\Big)x\,dxdt$$
$$-\frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\psi_x|^2 x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\psi_{xx}\varphi_x\,x\,dxdt - \int_0^T\int_0^l a_2\varphi_{xx}\psi_x\,x\,dxdt = 0. \quad (67)$$

Note que,

$$\frac{d}{dx}(\psi_x\varphi_x) = (\psi_{xx}\cdot\varphi_x) + (\psi_x\cdot\varphi_{xx}). \tag{68}$$

Reescrevendo a equação (67) levando em consideração a equação (68), temos

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+a_1|\varphi_x|^2\Big)x\,dxdt\\ -\frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\psi_x|^2 x\,dxdt - a_2\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}(\psi_x\varphi_x)x\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{69}$$

Adicionando e subtraindo o seguinte na equação (69)

$$\frac{a_2^2}{2a_3}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\varphi_x|^2\,x\,dxdt. \tag{70}$$

Daí temos,

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+(a_1-a_2^2/a_3)|\varphi_x|^2\Big)x\,dxdt\\ -\frac{a_2^2}{2a_3}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\varphi_x|^2 x\,dxdt - a_2\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}(\psi_x\varphi_x)x\,dxdt - \frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}|\psi_x|^2 x\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{71}$$

Neste sentido,

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+(a_1-a_2^2/a_3)|\varphi_x|^2\Big)x\,dxdt\\ -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\left(\frac{a_2^2}{a_3}|\varphi_x|^2+2a_2(\psi_x\varphi_x)+a_3|\psi_x|^2\right)x\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{72}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\left(\frac{a_2^2}{a_3}|\varphi_x|^2+2a_2(\psi_x\varphi_x)+a_3|\psi_x|^2\right)x\,dxdt\\ = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x+\sqrt{a_3}\psi_x\right|^2 x\,dxdt.\end{aligned} \tag{73}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{d}{dx}\Big(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+(a_1-a_2^2/a_3)|\varphi_x|^2\\ +\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x+\sqrt{a_3}\psi_x\right|^2\Big)x\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{74}$$

Integrando por partes em $[0,l]$, encontramos

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T-\frac{1}{2}\int_0^T x\bigg(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+(a_1-a_2^2/a_3)|\varphi_x|^2$$
$$+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x+\sqrt{a_3}\psi_x\right|^2\bigg)dt\Big|_0^l+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l\bigg(\rho_z|\varphi_t|^2+\rho_u|\psi_t|^2+(a_1-a_2^2/a_3)|\varphi_x|^2$$
$$+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\varphi_x+\sqrt{a_3}\psi_x\right|^2\bigg)dxdt=0. \tag{75}$$

Devido as condições de contorno, temos

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T-\frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2+\rho_u|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt+\int_0^T\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)dt=0, \tag{76}$$

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T+\int_0^T\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)dt=\frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2+\rho_u|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{77}$$

Por outro lado, temos que

$$\Big|\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big|\leq l\rho_z\int_0^l\big|\varphi_t\varphi_x\big|dx+l\rho_u\int_0^l\big|\psi_t\psi_x\big|dx. \tag{78}$$

Observe que a $\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)$ é dado em (44). Usando a desigualdade de Young $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, temos

$$\Big|\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big|\leq\frac{l\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_t|^2dx+\frac{l\rho_z}{2}\int_0^l|\varphi_x|^2dx+\frac{l\rho_u}{2}\int_0^l|\psi_t|^2dx+\frac{l\rho_u}{2}\int_0^l|\psi_x|^2dx. \tag{79}$$

Consequentemente,

$$\Big|\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big|\leq l\tau\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t),\quad t\geq0, \tag{80}$$

onde

$$\tau:=\max\left\{1,\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\frac{|a_2|}{a_3},\left(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\right)^{-1}\left(\rho_z+\frac{\rho_u|a_2|}{a_3}\right),\frac{\rho_u}{\sqrt{a_3}}\right\}. \tag{81}$$

Considerando a lei de conservação de energia, obtemos

$$\mathcal{E}(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t)=\mathcal{E}(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0),\quad\forall t\geq0, \tag{82}$$

por outro lado, usando (80), encontramos

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T=\mathcal{X}_\varphi(T)+\mathcal{X}_\psi(T)-\Big(\mathcal{X}_\varphi(0)+\mathcal{X}_\psi(0)\Big)$$
$$\geq-l\tau\mathcal{E}\big(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;T\big)-l\tau\mathcal{E}\big(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;0\big).$$

De (82), temos

$$\Big[\mathcal{X}_\varphi(t)+\mathcal{X}_\psi(t)\Big]_0^T \geq -2l\tau\mathcal{E}(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0). \tag{83}$$

Combinando (77) e (83), temos

$$-2l\tau\mathcal{E}\big(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0\big)+\int_0^T\mathcal{E}\big(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t;t\big)dt \leq \frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2+\rho_u|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{84}$$

Ao usar (82), temos

$$\big(T-2l\tau\big)\mathcal{E}\big(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0\big) \leq \frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2+\rho_u|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{85}$$

Portanto,

$$\mathcal{E}\big(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0\big) \leq C(T)\int_0^T\Big(\rho_z|\varphi_t(l,t)|^2+\rho_u|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt, \tag{86}$$

onde $C(T)=l/2(T-2\tau l)$. ■

2.3. Problema auxiliar

Aqui nossa intenção é estabelecer um problema auxiliar para ser ponte de ligação entre os problemas dissipativo (6) – (10) e conservativo (39) – (43), a fim de obtermos a conexão entre a estabilização exponencial e a observabilidade exata na fronteira.

A partir de agora, o problema não conservativo será chamado de problema auxiliar. Para obtê-lo, consideramos a mudança de variável $z:=\varphi+y$ e $u:=\psi+w$ onde (y,w) é solução do problema auxiliar dado por

$$\rho_z y_{tt}-a_1y_{xx}-a_2w_{xx}=0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,T), \tag{87}$$
$$\rho_u w_{tt}-a_3w_{xx}-a_2y_{xx}=0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,T), \tag{88}$$

com as seguintes condições de contorno

$$y(0,t)=a_1y_x(l,t)+a_2w_x(l,t)+\gamma_1z_t(l,t)=0, \quad \forall t\geq 0, \tag{89}$$
$$w(0,t)=a_2y_x(l,t)+a_3w_x(l,t)+\gamma_2u_t(l,t)=0, \quad \forall t\geq 0, \tag{90}$$

e com condições iniciais

$$y(x,0)=y_0(x)=y_t(x,0)=y_1(x)=w(x,0)=w_0(x)=w_t(x,0)=w_1(x)=0, \forall x\in(0,l). \tag{91}$$

A energia total associada ao problema (87) – (91) é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t):=\ & \frac{\rho_z}{2}\int_0^l|y_t|^2dx+\frac{\rho_u}{2}\int_0^l|w_t|^2dx+\frac{1}{2}(a_1-a_2^2/a_3)\int_0^l|y_x|^2dx\\ & +\frac{1}{2}\int_0^l\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}\,w_x\right|^2dx, \quad \forall t\geq 0.\end{aligned} \tag{92}$$

Enfatizando que a condição $a_2^2 < a_1 a_3$ é fundamental para garantir a energia positiva. Para todo $t > 0$ e satisfaz a taxa de mudança

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; t) = -\gamma_1 y_t(l,t) z_t(l,t) - \gamma_2 w_t(l,t) u_t(l,t), \quad \forall t \geq 0. \tag{93}$$

2.4. Lemas Técnicos

A prova do Teorema (1.1) baseia-se na construção de dois lemas que serão vistos a seguir. O primeiro deles, estabelece uma relação entre os sistemas auxiliar e dissipativo, enquanto que o segundo, estabelece uma relação entre os sistemas dissipativo e conservativo.

Lema 2.3. *Para todo $T > 0$ e (y, w) solução do problema (87) − (91) existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^T \Big(|y_t(l,t)|^2 + |w_t(l,t)|^2 \Big) dt \leq C \int_0^T \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 \Big) dt, \tag{94}$$

para toda (z, u) solução do problema (6) − (10).

Prova: Multiplicando a equação (87) por y_t e integrando por partes em $[0, l] \times [0, S]$ com $0 \leq S \leq T$, temos

$$\int_0^S \int_0^l \big(\rho_z y_{tt} - a_1 y_{xx} - a_2 w_{xx}\big) y_t \; dxdt = 0. \tag{95}$$

Dessa forma, obtemos

$$\int_0^S \int_0^l \rho_z y_{tt} y_t \; dxdt - \int_0^S \int_0^l \big(a_1 y_{xx} + a_2 w_{xx}\big) y_t \; dxdt = 0. \tag{96}$$

Utilizando a seguinte identidade: $y_{tt} y_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|y_t|^2$, obtemos

$$\frac{\rho_z}{2} \int_0^S \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|y_t|^2 dxdt - \int_0^S \int_0^l \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big)_x y_t \; dxdt = 0. \tag{97}$$

Integrando por partes o termo acoplado em $[0, l] \times [0, S]$, temos

$$\frac{\rho_z}{2} \int_0^S \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|y_t|^2 dxdt - \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big) y_t \; dt \Big|_0^l + \int_0^S \int_0^l (a_1 y_x + a_2 w_x) y_{tx} dxdt = 0. \tag{98}$$

Segue daí, a seguinte identidade: $y_x y_{tx} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|y_x|^2$, assim teremos

$$\frac{1}{2} \int_0^S \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \Big(\rho_z |y_t|^2 + a_1 |y_x|^2 \Big) dxdt + \int_0^S \int_0^l a_2 w_x y_{tx} \; dxdt = \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big) y_t \; dt \Big|_0^l. \tag{99}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\frac{1}{2}\frac{a_2^2}{a_3}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|y_x|^2\ dxdt$ na equação (99) temos

$$\frac{1}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho_z|y_t|^2 + \big(a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2\Big)dxdt + \frac{a_2^2}{a_3}\int_0^S\int_0^l y_x y_{tx}\ dxdt + \int_0^S\int_0^l a_2 w_x y_{tx}\ dxdt$$
$$= \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big)y_t\ dt\Big|_0^l. \tag{100}$$

Note que,

$$\frac{a_2^2}{a_3}\int_0^S\int_0^l y_x y_{tx}\ dxdt + \int_0^S\int_0^l a_2 w_x y_{tx}\ dxdt = \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^S\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)y_{tx}\ dxdt. \tag{101}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho_z|y_t|^2 + \big(a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2\Big)dxdt + \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^S\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)y_{tx}\ dxdt$$
$$= \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big)y_t\ dt\Big|_0^l. \tag{102}$$

De maneira análoga procedemos para a Eq. (88). Multiplicando por w_t e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^S\int_0^l \big(\rho_u w_{tt} - a_3 w_{xx} - a_2 y_{xx}\big)w_t\ dxdt = 0. \tag{103}$$

Com isso, temos

$$\int_0^S\int_0^l \rho_u w_{tt} w_t\ dxdt - \int_0^S\int_0^l \big(a_3 w_{xx} + a_2 y_{xx}\big)w_t\ dxdt = 0. \tag{104}$$

Utilizando a seguinte identidade: $w_{tt}w_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2$, obtemos

$$\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt - \int_0^S\int_0^l \big(a_3 w_x + a_2 y_x\big)_x w_t\ dxdt = 0. \tag{105}$$

Integrando por partes o termo acoplado, teremos

$$\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt + \int_0^S\int_0^l \big(a_3 w_x w_{tx}\big)\ dxdt + \int_0^S\int_0^l \big(a_2 y_x w_{tx}\big)\ dxdt$$
$$= \int_0^S \big(a_3 w_x + a_2 y_x\big)w_t\ dt\Big|_0^l. \tag{106}$$

Utilizando a seguinte identidade: $w_x w_{tx} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2$. Consequentemente,

$$\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt + \frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt + a_2\int_0^S\int_0^l y_x w_{tx}\ dxdt$$
$$= \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x)w_t\ dt\Big|_0^l. \tag{107}$$

Adicionando e subtraindo o seguinte termo $\frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt$, temos

$$\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt + \frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt - \frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt$$
$$+a_2\int_0^S\int_0^l y_x w_{tx}\ dxdt + \frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt = \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t\ dt\Big|_0^l. \tag{108}$$

Observe que,

$$a_2\int_0^S\int_0^l y_x w_{tx}\ dxdt + \frac{a_3}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_x|^2 dxdt = \sqrt{a_3}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) w_{tx}\ dxdt. \tag{109}$$

Com isso, temos

$$\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt + \sqrt{a_3}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) w_{tx} dxdt = \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t dt\Big|_0^l. \tag{110}$$

Somando as equações (102) − (110), teremos

$$\frac{1}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_z |y_t|^2 + (a_1 - \frac{a_2^2}{a_3})|y_x|^2\right) dxdt + \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) y_{tx}\ dxdt$$
$$+\frac{\rho_u}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|w_t|^2 dxdt + \sqrt{a_3}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) w_{tx}\ dxdt$$
$$= \int_0^S (a_1 y_x + a_2 w_x) y_t\ dt\Big|_0^l + \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t\ dt\Big|_0^l. \tag{111}$$

Note que,

$$\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) y_{tx}\ dxdt + \sqrt{a_3}\int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right) w_{tx}\ dxdt$$
$$= \int_0^S\int_0^l \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right)\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right)_t dxdt. \tag{112}$$

Usando a seguinte identidade

$$\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right)\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right)_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right|^2, \tag{113}$$

e substituindo na equação (111), temos

$$\frac{1}{2}\int_0^S\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_z |y_t|^2 + \rho_u |w_t|^2 + (a_1 - \frac{a_2^2}{a_3})|y_x|^2 + \left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_x + \sqrt{a_3} w_x\right|^2\right) dxdt$$
$$= \int_0^S (a_1 y_x + a_2 w_x) y_t\ dt\Big|_0^l + \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t\ dt\Big|_0^l. \tag{114}$$

Usando a definição de $\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; t)$ e integrando por partes em $[0, S]$, obtemos

$$\int_0^S \frac{d}{dt}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; t)dt = \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big) y_t \ dt\Big|_0^l + \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t \ dt\Big|_0^l. \tag{115}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) - \mathcal{E}(y_0, y_1, w_0, w_1; 0) = \int_0^S \big(a_1 y_x + a_2 w_x\big) y_t dt\Big|_0^l + \int_0^S (a_3 w_x + a_2 y_x) w_t dt\Big|_0^l. \tag{116}$$

Levando em conta as condições iniciais (91), temos que $\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; 0) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) =& \int_0^S \big(a_1 y_x(l,t) + a_2 w_x(l,t)\big) y_t(l,t) \ dt\Big|_0^l \\ &+ \int_0^S (a_3 w_x(l,t) + a_2 y_x(l,t)) w_t(l,t) \ dt\Big|_0^l.\end{aligned} \tag{117}$$

Reescrevendo a equação, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) = -& \int_0^S \big(- a_1 y_x(l,t) - a_2 w_x(l,t)\big) y_t(l,t) \ dt\Big|_0^l \\ &- \int_0^S (-a_3 w_x(l,t) - a_2 y_x(l,t)) w_t(l,t) \ dt\Big|_0^l.\end{aligned} \tag{118}$$

Daí temos,

$$\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) = -\gamma_1 \int_0^S z_t(l,t) y_t(l,t) \ dt - \gamma_2 \int_0^S w_t(l,t) u_t(l,t) \ dt. \tag{119}$$

Decorre da desigualdade de Young $ab \leq \dfrac{a^2}{4\varepsilon} + \varepsilon b^2$,

$$\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^S \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 \Big) dt + \varepsilon \int_0^S \Big(|y_t(l,t)|^2 + |w_t(l,t)|^2 \Big) dt. \tag{120}$$

$$\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; S) \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_0^S \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 \Big) dt + \varepsilon \int_0^S \Big(|y_t(l,t)|^2 + |w_t(l,t)|^2 \Big) dt. \tag{121}$$

Para todo $t > 0$, $\varepsilon > 0$ e $0 \leq S \leq T$.

Por outro lado, multiplicamos a equação (87) por xy_x e integrando por partes em $[0, l] \times [0, T]$, temos

$$\int_0^T \int_0^l \big(\rho_z y_{tt} - a_1 y_{xx} - a_2 w_{xx}\big) x y_x \ dx dt = 0. \tag{122}$$

Logo,

$$\rho_z \int_0^T \int_0^l y_{tt} y_x x \; dxdt - a_1 \int_0^T \int_0^l y_{xx} y_x x \; dxdt - a_2 \int_0^T \int_0^l w_{xx} y_x x \; dxdt = 0. \tag{123}$$

Daí temos,

$$\rho_z \int_0^l y_t y_x x \; dx \Big|_0^T - \rho_z \int_0^T \int_0^l y_t y_{tx} x \; dxdt - a_1 \int_0^T \int_0^l y_{xx} y_x x \; dxdt - a_2 \int_0^T \int_0^l w_{xx} y_x x \; dxdt = 0. \tag{124}$$

Usando as seguintes identidades: $y_t y_{tx} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|y_t|^2$ e $y_{xx} y_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|y_x|^2$ e substituindo na equação (124), obtemos

$$\rho_z \int_0^l y_t y_x x \; dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho_z |y_t|^2 + a_1 |y_x|^2 \Big) x \; dxdt - a_2 \int_0^T \int_0^l w_{xx} y_x x \; dxdt = 0. \tag{125}$$

Adicionando e subtraindo o seguinte termo $\frac{1}{2}\frac{a_2^2}{a_3} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} |y_x|^2 x \; dxdt$ na equação (125), teremos

$$\begin{aligned} \rho_z \int_0^l y_t y_x x \; dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho_z |y_t|^2 + (a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}) |y_x|^2 \Big) x \; dxdt \\ - a_2 \int_0^T \int_0^l w_{xx} y_x x \; dxdt - \frac{1}{2}\frac{a_2^2}{a_3} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} |y_x|^2 x \; dxdt = 0. \end{aligned} \tag{126}$$

Note que,

$$-a_2 \int_0^T \int_0^l w_{xx} y_x x dxdt - \frac{a_2^2}{a_3} \int_0^T \int_0^l y_{xx} y_x x dxdt = -\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \int_0^T \int_0^l \Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_{xx} + \sqrt{a_3} w_{xx} \Big) x y_x dxdt. \tag{127}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \rho_z \int_0^l y_t y_x x \; dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho_z |y_t|^2 + (a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}) |y_x|^2 \Big) x \; dxdt \\ - \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \int_0^T \int_0^l \Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} y_{xx} + \sqrt{a_3} w_{xx} \Big) x y_x \; dxdt = 0. \end{aligned} \tag{128}$$

De maneira análoga procedemos para a equação (88), multiplicamos por xw_x e integramos por partes em $[0, l] \times [0, T]$.

$$\int_0^T \int_0^l \big(\rho_u w_{tt} - a_3 w_{xx} - a_2 y_{xx} \big) x w_x \; dxdt = 0. \tag{129}$$

Consequentemente,

$$\rho_u \int_0^l w_t w_x x dx \Big|_0^T - \rho_u \int_0^T \int_0^l w_t w_{tx} x dxdt - a_3 \int_0^T \int_0^l w_{xx} w_x x dxdt - a_2 \int_0^T \int_0^l y_{xx} w_x x dxdt = 0. \tag{130}$$

Utilizando as seguintes identidades: $w_t w_{tx} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|w_t|^2$ e $w_{xx}w_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|w_x|^2$, obtemos

$$\rho_u \int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho_u|w_t|^2 + a_3|w_x|^2\Big)x\ dxdt - a_2\int_0^T\int_0^l y_{xx}w_x x\ dxdt = 0. \quad (131)$$

Adicionando e subtraindo o seguinte termo $\frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}|w_x|^2 x\ dxdt$ na equação (131). Dessa forma, temos

$$\rho_u \int_0^l w_t w_x x\ dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(\rho_u|w_t|^2)x\ dxdt - a_2\int_0^T\int_0^l y_{xx}w_x x\ dxdt$$
$$-\frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}|w_x|^2 x\ dxdt = 0. \quad (132)$$

Observe que,

$$-a_2\int_0^T\int_0^l y_{xx}w_x x dxdt - \frac{a_3}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}|w_x|^2 x dxdt = -\sqrt{a_3}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xw_x dxdt. \quad (133)$$

Assim temos,

$$\rho_u \int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(\rho_u|w_t|^2)x dxdt - \sqrt{a_3}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xw_x dxdt = 0. \quad (134)$$

Somando as equações (128) − (134), temos

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho_z|y_t|^2 + \rho_u|w_t|^2 + (a_1 - \frac{a_2^2}{a_3})|y_x|^2\Big)x dxdt$$
$$-\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xy_x dxdt - \sqrt{a_3}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xw_x dxdt$$
$$+\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T + \rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T. \quad (135)$$

Note que,

$$-\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xy_x dxdt - \sqrt{a_3}\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_{xx} + \sqrt{a_3}w_{xx}\Big)xw_x dxdt$$
$$= -\int_0^T\int_0^l\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)_x x dxdt. \quad (136)$$

Decorre daí, a seguinte identidade

$$-\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)\Big(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big)_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x + \sqrt{a_3}w_x\Big|^2. \quad (137)$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_z|y_t|^2+\rho_u|w_t|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}w_x\right|^2\right)xdxdt$$
$$+\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T+\rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T=0. \tag{138}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_z|y_t|^2+\rho_u|w_t|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}w_x\right|^2\right)xdxdt$$
$$=\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T+\rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T. \tag{139}$$

Integrando por partes, temos

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\left(\rho_z|y_t|^2+\rho_u|w_t|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}w_x\right|^2\right)dt\Big|_0^l$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l\left(\rho_z|y_t|^2+\rho_u|w_t|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}w_x\right|^2\right)dxdt$$
$$=\rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T+\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T. \tag{140}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\left(\rho_z|y_t|^2+\rho_u|w_t|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x+\sqrt{a_3}w_x\right|^2\right)dt\Big|_0^l$$
$$=\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt+\rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T+\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T. \tag{141}$$

Consequentemente,

$$\frac{l}{2}\int_0^T\left(\rho_z|y_t(l,t)|^2+\rho_u|w_t(l,t)|^2+\big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\big)|y_x(l,t)|^2+\left|\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}y_x(l,t)+\sqrt{a_3}w_x(l,t)\right|^2\right)dt$$
$$=\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt+\rho_z\int_0^l y_t y_x x\ dx\Big|_0^T+\rho_u\int_0^l w_t w_x x dx\Big|_0^T. \tag{142}$$

Com isso, temos

$$\frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|y_t(l,t)|^2+\rho_u|w_t(l,t)|^2\Big)dt\le\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt+\int_0^l\Big(\rho_z y_t y_x x+\rho_u w_t w_x x\Big)dx\Big|_0^T. \tag{143}$$

Por outro lado, note que, usando a desigualdade triangular, temos

$$\frac{l}{2}\int_0^T\Big(\rho_z|y_t(l,t)|^2+\rho_u|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt$$
$$+l\rho_z\int_0^l|y_ty_x|dx\Big|_0^T+l\rho_u\int_0^l|w_tw_x|dx\Big|_0^T. \tag{144}$$

Devido as condições inciais (91), chegamos em

$$\alpha\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{2}{l}\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt$$
$$+2\rho_z\int_0^l|y_t(x,T)||y_x(x,T)|dx+2\rho_u\int_0^l|w_t(x,T)||w_x(x,T)|dx. \tag{145}$$

Onde $\alpha:=\min\{\rho_z,\rho_u\}$, e da desigualdade de Young, temos

$$\alpha\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{2}{l}\int_0^T\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;t)dt+l\tau\mathcal{E}(y,y_t,w,w_t;T), \tag{146}$$

onde $\tau=\max\Big\{1,\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\frac{|a_2|}{a_3},\Big(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\Big)^{-1}\Big(\rho_z+\frac{\rho_u|a_2|}{a_3}\Big),\frac{\rho_u}{\sqrt{a_3}}\Big\}$, substituindo (121) em (146), obtemos

$$\alpha\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{(2T+l\tau)C}{\varepsilon l}\int_0^T\Big(|z_t(l,t)|^2+|u_t(l,t)|^2\Big)dt$$
$$\frac{(2T+l\tau)}{l}\varepsilon\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{147}$$

Consequentemente,

$$\Big(\alpha-\frac{(2T+l\tau)\varepsilon}{l}\Big)\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{(2T+l\tau)C}{\varepsilon l}\int_0^T\Big(|z_t(l,t)|^2+|u_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{148}$$

Escolhendo $\varepsilon:=\alpha l/2(2T+\tau l)$, obtemos

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{2(2T+l\tau)^2C}{\alpha l^2}\int_0^T\Big(|z_t(l,t)|^2+|u_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{149}$$

A partir daí concluímos a prova.

$$\int_0^T\Big(|y_t(l,t)|^2+|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{4(2T+l\tau)^2C}{\alpha^2l^2}\int_0^T\Big(|z_t(l,t)|^2+|u_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{150}$$

■

Lema 2.4. *Para toda solução $T > 0$ e (z, u) solução do problema (6) − (10)*

$$\int_0^T \Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2 + \gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt \leq 4\int_0^T \Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2 + \gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt, \tag{151}$$

para todas as soluções (y, w) do problema (39)–(43).
Prova: *Da taxa de mudança (93), temos*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; t) = -\gamma_1 y_t(l,t)z_t(l,t) - \gamma_2 w_t(l,t)u_t(l,t) \quad \forall t \geq 0. \tag{152}$$

Note que, $z = \varphi + y$ e $u = \psi + w$. Então temos,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; t) = -\gamma_1\Big(\varphi_t(l,t) + y_t(l,t)\Big)y_t(l,t) - \gamma_2\Big(\psi_t(l,t) + w_t(l,t)\Big)w_t(l,t). \tag{153}$$

Integramos em $[0, T]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; T) - \mathcal{E}(y_0, y_1, w_0, w_1; 0) = -\gamma_1\int_0^T \varphi_t(l,t)y_t(l,t)dt - \gamma_1\int_0^T |y_t(l,t)|^2dt \\ -\gamma_2\int_0^T \psi_t(l,t)w_t(l,t)dt - \gamma_2\int_0^T |w_t(l,t)|^2dt.\end{aligned} \tag{154}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}0 \leq \mathcal{E}(y, y_t, w, w_t; T) = -\gamma_1\int_0^T \varphi_t(l,t)y_t(l,t)dt - \gamma_1\int_0^T |y_t(l,t)|^2dt - \gamma_2\int_0^T \psi_t(l,t)w_t(l,t)dt \\ -\gamma_2\int_0^T |w_t(l,t)|^2dt.\end{aligned} \tag{155}$$

Consequentemente,

$$\int_0^T \Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2 + \gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt \leq -\Big(\gamma_1\int_0^T \varphi_t(l,t)y_t(l,t)dt + \gamma_2\int_0^T \psi_t(l,t)w_t(l,t)dt\Big). \tag{156}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T \Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2 + \gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2 + \gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{157}$$

Por outro lado, $\varphi = z - y$ e $\psi = u - w$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T \Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2 + \gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt = \frac{\gamma_1}{2}\int_0^T |z_t(l,t) - y_t(l,t)|^2dt \\ +\frac{\gamma_2}{2}\int_0^T |u_t(l,t) - w_t(l,t)|^2dt.\end{aligned} \tag{158}$$

Note que,

$$\frac{1}{2}\int_0^T\Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2+\gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt=\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T|z_t(l,t)|^2dt+\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T|y_t(l,t)|^2dt$$
$$-2\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T z_t(l,t)y_t(l,t)dt+\frac{\gamma_2}{2}\int_0^T|u_t(l,t)|^2dt+\frac{\gamma_2}{2}\int_0^T|w_t(l,t)|^2dt$$
$$-2\frac{\gamma_2}{2}\int_0^T u_t(l,t)w_t(l,t)dt. \tag{159}$$

Aplicando a desigualdade de Young ($\geq$)*, obtemos*

$$\frac{1}{2}\int_0^T\Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2+\gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt\geq\quad\frac{\gamma_1}{4}\int_0^T|z_t(l,t)|^2dt-\frac{\gamma_1}{2}\int_0^T|y_t(l,t)|^2dt$$
$$+\frac{\gamma_2}{4}\int_0^T|u_t(l,t)|^2dt-\frac{\gamma_2}{2}\int_0^T|w_t(l,t)|^2dt. \tag{160}$$

Consequentemente,

$$\int_0^T\Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2+\gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt\geq\frac{1}{4}\int_0^T\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2+\gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt \tag{161}$$

Substituindo (161) *em* (157)*, temos*

$$\int_0^T\Big(\gamma_1|y_t(l,t)|^2+\gamma_2|w_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\frac{1}{4}\int_0^T\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2+\gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt \tag{162}$$

Portanto,

$$\frac{1}{4}\int_0^T\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2+\gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\int_0^T\Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2+\gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{163}$$

■

3. Prova do Teorema (1.1)

Esta seção é dedicada à prova do Teorema (1.1), que será feito a partir dos resultados estabelecidos das seções anteriores.

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii). Assumindo $(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1)=(z_0,z_1,u_0,u_1)$ e tendo em mente que $\varphi=z-y$ e $\psi=u-w$, segue da desigualdade de observabilidade que

$$\mathcal{E}(z_0,z_1,u_0,u_1;0)=\mathcal{E}(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0)\leq C\int_0^T\Big(|\varphi_t(l,t)|^2+|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt$$
$$=C\int_0^T\Big(|z_t(l,t)-y_t(l,t)|^2+|u_t(l,t)-w_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{164}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) \leq C \int_0^T \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 + |y_t(l,t)|^2 + |w_t(l,t)|^2 \Big) dt. \tag{165}$$

Usando o Lema (2.3), segue que

$$\int_0^T \Big(|y_t(l,t)|^2 + |w_t(l,t)|^2 \Big) dt \leq C \int_0^T \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 \Big) dt, \tag{166}$$

obtemos,

$$\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) \leq C \int_0^T \Big(|z_t(l,t)|^2 + |u_t(l,t)|^2 \Big) dt. \tag{167}$$

Por outro lado, da lei de dissipação (12), temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; t) = -\Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2 \Big) \quad \forall t \geq 0. \tag{168}$$

Integrando em $[0, T]$, obtemos

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0) - \mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) = \int_0^T \Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2 \Big) dt. \tag{169}$$

Segue daí que,

$$\int_0^T |z_t(l,t)|^2 dt + \int_0^T |u_t(l,t)|^2 dt \leq C \Big(\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0) - \mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \Big), \tag{170}$$

onde $C := 1/\min\limits_{i=1,2}\{\gamma_i\}$. Resulta da desigualdade (167) e (170) tal que $C > 0$. Note que o problema é dissipativo, então

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq \mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0), \forall t \geq 0. \tag{171}$$

Substituindo (171) em (170), temos

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq C\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0) - C\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T). \tag{172}$$

Dai temos

$$(1 + C)\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq C\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0). \tag{173}$$

Dessa forma, temos

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq \frac{C}{(1 + C)}\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; 0). \tag{174}$$

Decorre da teoria de semigrupos (ver Pazy [26]) que

$$\|S(T)\| \leq \frac{C}{(1+C)}, \quad \forall t \geq 0. \tag{175}$$

Assim, dado $t \in (0,T)$ existem $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + r$ com $0 \leq r \leq \delta$. Por sua vez

$$\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\| \leq \left(\frac{C}{1+C}\right)^n \left(\frac{C}{1+C}\right) = \left(1+\frac{1}{C}\right)^{-\frac{t}{\delta}} \left(1+\frac{1}{C}\right)^{-1+\frac{r}{\delta}} = Me^{-\omega t}. \tag{176}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq M\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{177}$$

onde $\omega := \frac{1}{\delta}\ln(1+1/C)$ e $M := (1+1/C)^{-1+\frac{r}{\delta}}$. Portanto está provado que decai exponencialmente. (i) $\Rightarrow$ (ii). Agora provaremos que o decaimento exponencial implica na desigualdade de observabilidade. De fato, segue da lei de dissipação (12) que

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) - \mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) = -\gamma_1 \int_0^T |z_t(l,t)|^2 dt - \gamma_2 \int_0^T |u_t(l,t)|^2 dt, \tag{178}$$

decorre daí que,

$$\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) - \mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) = \int_0^T \Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2\Big) dt. \tag{179}$$

Por outro lado, segue da hipótese (ii) que para $T \geq T^* = \ln\left(\frac{4M}{3}\right)/\omega$, a energia satisfaz

$$\mathcal{E}(z, z_t, u, u_t; T) \leq \frac{3}{4}\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0). \tag{180}$$

Substituindo (180) em (179), temos

$$\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) - \frac{3}{4}\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) \leq \int_0^T \Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2\Big) dt. \tag{181}$$

Segue que,

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) \leq \int_0^T \Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2\Big) dt. \tag{182}$$

Devido $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) = (z_0, z_1, u_0, u_1)$, temos

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1; 0) = \frac{1}{4}\mathcal{E}(z_0, z_1, u_0, u_1; 0) \leq \int_0^T \Big(\gamma_1 |z_t(l,t)|^2 + \gamma_2 |u_t(l,t)|^2\Big) dt. \tag{183}$$

Aplicando o Lema (2.4), temos

$$\frac{1}{4}\int_0^T\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2+\gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt\leq\int_0^T\Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2+\gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{184}$$

Decorre daí que,

$$\int_0^T\Big(\gamma_1|z_t(l,t)|^2+\gamma_2|u_t(l,t)|^2\Big)dt\leq 4\int_0^T\Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2+\gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{185}$$

Substituindo (185) em (183), obtemos

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0)\leq 4\int_0^T\Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2+\gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt. \tag{186}$$

Portanto,

$$\mathcal{E}(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1;0)\leq 16\int_0^T\Big(\gamma_1|\varphi_t(l,t)|^2+\gamma_2|\psi_t(l,t)|^2\Big)dt,\ \text{ para } T\geq \ln\big(4M/3\big)/\omega \tag{187}$$

Diante disso, a prova está concluída. ■

4. Considerações finais

Neste trabalho de conclusão de curso, investigamos o problema que trata de um sistema de equações diferenciais parciais que modela a dilatação de solos elásticos porosos com saturação. Em outras palavras, mostramos o decaimento exponencial do problema de inchaço em solos elásticos porosos com saturação de fluido. A principal contribuição deste trabalho foi provar o resultado de estabilização exponencial da energia total do sistema através de um resultado mais geral que é a equivalência entre a estabilização exponencial e a observabilidade na fronteira do sistema. Mais precisamente, provamos estabilização do caso limite do sistema elástico poroso com saturação de fluido sem a necessidade de mecanismos internos de dissipação atuando no sistema, ou seja, com amortecimento atuando apenas na fronteira. Para isso, dividimos o problema objeto de estudo em dois novos problemas: um conservativo e outro não conservativo. Para o problema conservativo, extraímos a desigualdade de observabilidade e para o problema não conservativo, construímos alguns lemas técnicos, que foram usados posteriormente para estabelecer a equivalência com o resultado de decaimento exponencial das soluções do problema objeto de estudo. Em ambos os casos, foi usado o método multiplicativo. Finalmente, concluo dizendo que os resultados obtidos neste trabalho foram publicados em um importante periódico científico internacional e que posteriormente, estando em uma pós-graduação, pretendo dar continuidade aos estudos realizados nesse trabalho aplicando as técnicas que aprendi em outros problemas para obter resultados semelhantes.

Referências Bibliográficas

[1] T. K. Karalis, "On the elastic deformation of non-saturated swelling soils,"Acta mechanica **84**(1), 19–45 (1990).

[2] J. R. Katz, "The laws of swelling,"Transactions of the Faraday Society **29**(140), 279–297 (1933).

[3] J. R. Philip, "Hydrostatics and hydrodynamics in swelling soils,"Water Resources Research**5**(5), 1070–1077 (1969).

[4] G. Sposito, "Thermodynamics of swelling clay-water systems,"Soil Science **114**(4), 243–249 (1972).

[5] R. Quintanilla, "Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation,". J. Comput. Appl. Math. **145**(2), 525–533 (2002).

[6] A. C. Eringen, "A continuum theory of swelling porous elastic soils,"Int. J. Eng. Sci. **32** 1337–1349 (1994).

[7] J-M. Wang and B-Z. Guo, "On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping,". IMA J. Applied Mathematics **71**(4), 565-–582 (2006).

[8] A. J. A. Ramos, D. S. Almeida Júnior, M. M. Freitas, A. S. Noé and M. J. Dos Santos, "Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms,". J. Mathematical Physics **62**(2), 021507 (2021).

[9] A. J. A. Ramos, M. M. Freitas, D. S. Almeida Júnior, A. S. Noé and M. J. Dos Santos, "Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping". J. Mathematical Physics, **61**(10) 101505, 1-–10, (2020).

[10] T. A. Apalara, "General stability result of swelling porous elastic soils with a viscoelastic damping". Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **71**(6), 1—10 (2020).

[11] T. A. Apalara, M. O. Yusuf and B. A. Salami, "On the control of viscoelastic damped swelling porous elastic soils with internal delay feedbacks,"J. Mathematical Analysis and Applications 125429, (2021).
[12] A. Choucha, S. M. Boulaaras, D. Ouchenane, B. B. Cherif and M. Abdalla, "Exponential stability of swelling porous elastic with a viscoelastic damping and distributed delay term,"Journal of Function Spaces, 2021, (2021).
[13] F. Dell'Oro and J. E. M. Rivera, "Stabilization of ternary mixtures with frictional dissipation,"Asymptotic Analysis, **89**(3-4), 235—262, (2014).
[14] R. Quintanilla, "On the linear problem of swelling porous elastic soils with incompressible fluid,"International J. Engineering Science **40**(13),1485-–1494, (2002).
[15] R. Quintanilla, "Exponential stability of solutions of swelling porous elastic soils,". Meccanica, **39**(2), 139-–145, (2004).
[16] L. Hu, F. Ji and K. Wang, "Exact boundary controllability and exact boundary observability for a coupled system of quasilinear wave equations,"Chinese Annals of Mathematics, Series B, **34**(4), 479–490 (2013).
[17] T. Li, "Exact boundary observability for 1-D quasilinear wave equations,"Mathematical methods in the applied sciences **29**(13), 1543–1553 (2006).
[18] A. J. A. and M. W. P. Souza, "Equivalence between observability at the boundary and stabilization for transmission problem of the wave equation,"Z. Angew. Math. Phys. **68**(48), (2017).
[19] A. J. A. Ramos , M. M. Freitas, D. S. Almeida Júnior, S. S. Jesus and T. R. S. Moura, "Equivalence between exponential stabilization and boundary observability for piezoelectric beams with magnetic effect,"Z. Angew. Math. Phys, **70**(60), 1–14 (2019).
[20] A. Kong, C. A. Nonato, W. Liu, M. J. Dos Santos and C. A. Raposo, "Equivalence between exponential stabilization and observability inequality for magnetic effected piezoelectric beams with time-varying delay and time-dependent weights,"Discrete and Continuous Dynamical Systems-B (2021).
[21] L. T. Tebou, "Equivalence between observability and stabilization for a class of second order semilinear evolution,"Discrete & Continuous Dynamical Systems, 744–752 (2009).
[22] J. L. Lions, "Exact Controllability, stabilization and perturbations for distributed parameter systems,"SIAM Rev **30**(1), 1–68 (1988).
[23] J. L. Lions, "Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués,"Tome I, Masson, (1988).
[24] V. Komornik, "Exact controllabillity an stabilization. The multiplier method,". John Wiley, Masson (1994).
[25] Z. Liu and S. Zheng, "Semigroups Associated with Dissipative Systems,", vol. 398. Research Notes in Mathematics, Champman & Hall/CRC (1999).
[26] A. Pazy, "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,". Springer, New York (1983).