



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – FACET CURSO
DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

IRISLENO BARROSO PANTOJA

ESTUDO DE MATRIZES, DETERMINANTES, SISTEMAS LINEARES E
APLICAÇÕES

Abaetetuba-PA

2022

IRISLENO BARROSO PANTOJA

**ESTUDO DE MATRIZES, DETERMINANTES, SISTEMAS LINEARES E
APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Manoel Lima.

Abaetetuba-PA

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

P198e Pantoja, Irislino Barroso.
Estudo de matrizes, determinantes, sistemas lineares e
aplicações / Irislino Barroso Pantoja. — 2022.
60 f. : il.

Orientador(a): Prof^ª. Dra. Manoel Lima Corrêa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Matrizes. 2. Determinantes. 3. Sistemas Lineares. 4.
Aplicações. I. Título.

CDD 510

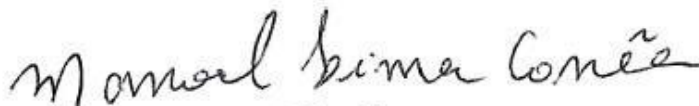
IRISLENO BARROSO PANTOJA

**ESTUDO DE MATRIZES, DETERMINANTES, SISTEMAS LINEARES E
APLICAÇÕES**

Este trabalho de Conclusão de Curso foi avaliado e aprovado, para obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET, da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

BANCA

Abaetetuba (PA), 18 de Fevereiro de 2022.



**Prof. Me Manoel Lima Correa
Presidente/Orientador**



**Prof. Dr Sebastião Martins Pequena Lordeiro
Membro Interno – FACET/CUBT**



**Prof. Dr José Francisco da Silva Costa
Membro Externo – FADECAM/CUBT**

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, em especial aos meus Pais!

AGRADECIMENTOS

À Deus por tudo que tem me proporcionado até chegar a esse momento;

A minha esposa, minhas filhas e amigos, ao meus Pais por estarem sempre ao meu lado em todos os momentos e familiares pelo incentivo, carinho, amor, paciência durante minha caminhada acadêmica e no meu dia a dia, meu muito obrigado;

Aos meus professores e orientadores que contribuíram durante minha jornada acadêmica, todo conhecimento adquirido foi de suma importância no meu crescimento intelectual e concepção do aprendizado adquirido;

Aos meus amigos de curso que estiveram compartilhando seus conhecimentos, dando força e coragem durante quatro anos,

A todos que contribuíram direta e indiretamente nessa conquista, meu muito obrigado.

*Um bom ensino da Matemática forma melhores
hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a
usar melhor a sua inteligência.*

Irene de Albuquerque

RESUMO

O presente trabalho propõe um estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares (SL), visando a aplicabilidade nas outras áreas das ciências exatas. Desse modo, o trabalho desenvolvido busca apresentar alguns problemas que podem ser utilizados na ótica do cotidiano, a fim de mostrar existência de outras áreas do conhecimento que fazem uso dos conteúdos a serem abordados. A relação teoria/prática, motiva a curiosidade, cria um ambiente de uma maior interação professor/aluno que vem ampliar a compreensão de determinado assunto. Dessa forma, assim o trabalho procura oferecer problemas que venha despertar interesse pelo conteúdo, contribuindo para que o aluno compreenda os conceitos e contextos que podem ser utilizados nas resoluções propostas. Para desenvolver a pesquisa, de caráter bibliográfica, optou-se na busca de diferentes autores que ampliam a discussão de metodologias que trazem em seu bojo a ampliação de conhecimento para compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem. Para enfatizar a importância do trabalho, abordam-se diferentes problemas que relacionam a teoria e prática como forma de resgatar a importância dos conteúdos de sistema lineares, matrizes e determinantes para que sejam capazes de fazer a relação com a teoria que o professor desenvolve na sala de aula. Espera-se que a temática possa contribuir tendo em vista a metodologia que em síntese, coloca o aluno e professor diante de um processo de ensino em que a teoria e a prática estão intrinsicamente ligadas.

Palavras-chave: Matrizes; Determinantes; Sistemas Lineares; Aplicações.

ABSTRACT

The present work proposes a study of matrices, determinants and linear systems (SL), aiming at applicability in other areas of the exact sciences. Thus, the work developed seeks to present some problems that can be used from the perspective of everyday life, in order to show the existence of other areas of knowledge that make use of the contents to be addressed. The theory / practice relationship, motivates curiosity, creates an environment of greater teacher / student interaction that increases understanding of a given subject. Thus, the work seeks to offer problems that will arouse interest in the content, helping the student to understand the concepts and contexts that can be used in the proposed resolutions. To develop the research, of bibliographic character, it was chosen to search for different authors that expand the discussion of methodologies that bring in their core the expansion of knowledge to better understand the teaching and learning process. To emphasize the importance of the work, different problems that relate theory and practice are approached as a way to rescue the importance of the contents of linear systems, matrices and determinants so that they are able to relate to the theory that the teacher develops in the classroom. class. It is hoped that the theme can contribute in view of the methodology that, in summary, puts the student and teacher before a teaching process in which theory and practice are intrinsically linked.

Keywords: arrays; Determinants; Linear systems; applications.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. CAPÍTULO 1-MATRIZES E DETERMINANTES: CONCEITOS E DEFINIÇÕES	13
2.1 MATRIZES	13
2.2 MATRIZES ESPECIAIS	17
2.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES	20
2.3.1 Adição	20
2.3.2 Multiplicação de um número por uma matriz	22
2.3.3 Multiplicação de Matrizes	22
2.4 MATRIZ TRANSPOSTA	24
2.5 MATRIZ INVERSA	25
2.6 DETERMINANTES	26
2.6.1 Cofatores	28
2.6.2 Obtenção da matriz inversa por determinante	29
2.6.3 Aplicação de determinantes em sistemas lineares – Regra de Cramer	30
3. CAPÍTULO 2- SISTEMAS LINEARES	32
3.1 CONCEITO E DEFINIÇÃO	32
3.2 SISTEMAS EQUIVALENTES	35
3.3 SISTEMAS ESCALONADOS	37
3.4 DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR	38
4. CAPÍTULO 3-APLICAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES	41
4.1. CIRCUTOS ELÉTRICOS.....	41
4.1.1 Lei de Ohm	41
4.1.2 Leis de Kirchhoff	41
Soluções	46
Aplicação 5: Compras de revistas	46
5.2. MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF	47
5.2.1. O modelo fechado (de input-output) de Leontief	47
5.2.2 O modelo aberto (de produção) de Leontief	49
5.3 APLICAÇÕES NO CÁLCULO NUMÉRICO	50
5.3.1 Sistemas Lineares e Interpolação polinomial	50
CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS	57

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata do conhecimento de sistemas lineares (SL) considerando uma relação entre a teoria a ser abordada com resolução de problemas ligada a Física e a Matemática voltados estudantes do 2º ano do ensino médio. Essa abordagem metodológica pode contribuir para uma melhor aprendizagem, tendo em vista que a ciência se torna importante quando se constitui em desenvolver a teoria e a prática de maneira biunívoca onde o estudante pode aprender de maneira proveitosa.

A razão de acreditar num ensino eficiente por meio desta metodologia voltada ao ensino de SL considerando problemas cotidianos, pode ser muito explicado segundo relata o autor Libâneo, acredita o papel do professor como mediador, como um conhecedor do desenvolvimento humano vincula numa perspectiva de saber direcionando. Os alunos à apropriação do conhecimento, por meio da valorização dos conteúdos e das ações mentais correspondentes ao modo de constituição dos mesmos, ou seja, nas palavras do autor: “Uma boa didática na perspectiva da mediação é aquela que promove e amplia o desenvolvimento das capacidades intelectuais dos alunos por meio dos conteúdos” (LIBÂNEO, 2011, p. 88).

Neste sentido, o autor considera que o professor como mediador de conhecimento deve saber construir e desenvolver técnicas metodológicas onde venham instigar a aprendizagem no aluno de modo que sejam capazes de prosseguir com a valorização daquilo que é repassado pelo professor ao ponto de após cada etapa do processo de ensino, eles sejam capazes de construir as próprias metodologias (ALVES, 2006) voltadas para um ensino não mecanizado. A matemática aplicada quando bem exercitada, faz com que os alunos tenham maior entendimento dos conceitos envolvidos e dos fenômenos do dia a dia que podem ser estudados. (CUBERES APUD VIEIRA E VOLQUIND, 2002, IN PAVIANI E FONTANA, 2009).

O professor pode utilizar diversos métodos de ensino de matemática, como a resolução de problemas como meio de ensinar os conceitos de modo prático, considerando fenômenos de diversas áreas para melhor aprofundar o conhecimento do conteúdo a ser abordado (LDB - art. 2º).

O uso de uma metodologia criativa, capaz de envolver o aluno e seu contexto cotidiano, a disciplina matemática deixa de ser encarada como sem utilidade e passa a entusiasmar o processo de ensino aprendizagem, e os rendimentos passam a melhorar tendo em vista que a compreensão dos alunos aumenta. Sendo assim, as metodologias aplicadas contribuem para uma nova maneira de ensinar e aprender. (POLYA, 1978, p. 2).

Assim sendo, torna-se evidente que é importante desenvolver uma metodologia ligada a resolução de problemas a fim de oferecer subsídios concretos que possam ser usados em sala de aula pelos professores. No entanto, é interessante que as escolhas dos problemas para o ensino de matemática estejam em consonância com o cotidiano. Isto é, o professor deve fazer uma coletânea de problemas que o próprio aluno vivencia o que pode contribuir para uma melhor compreensão além de dinamizar o ensino e viabilizar a aprendizagem (FREIRE, 1996).

Tendo em vista a experiência do professor e as metodologias a serem aplicadas no estudo de matrizes, determinantes e sistema linear sobre essa ótica de associar a teoria com aplicações de problemas contextualizados que em síntese representa a proposta metodológica do trabalho, acredita-se que com base nos autores citados, o ensino se torna muito mais atraente, motivador e curioso para o aluno.

O trabalho aborda como objetivo geral, estudar matrizes, determinantes e sistemas lineares com aplicação em resolução de problemas contextualizados nas áreas das ciências exatas. Para atingir a esse objetivo, procura-se abordar como objetivos específicos,

- ✓ Desenvolver um estudo teórico de Matrizes e determinantes em relação aos conceitos e definições;
- ✓ Verificar a importância do estudo de sistemas lineares, bem como conceito, definição e escalonamento;
- ✓ Aplicar as definições e conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares em problemas contextualizados.

Com o propósito obter o objetivo proposto, o trabalho foi estruturado em três capítulos. Sendo que no primeiro capítulo foram enfatizadas todas as perspectivas e realidades da teoria de matrizes e determinantes, juntamente com suas propriedades. No segundo capítulo foi realizada uma abordagem da teoria dos sistemas lineares, dando ênfase a sua discussão e métodos de resolução. No terceiro capítulo foram apresentados alguns problemas e sua resolução por meio dos SL.

2. CAPÍTULO 1-MATRIZES E DETERMINANTES: CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos e definições básicas sobre matrizes e determinantes. Estes, encontram-se comumente presentes na resolução de inúmeros tipos de problemas, sendo imprescindíveis, não somente por ordenarem e simplificarem o problema, mas, todavia, por fornecerem novos métodos de resolução.

2.1 MATRIZES

As matrizes constituem podem ser muito úteis em diversos problemas que envolve este conhecimento e através dela se torna possível compreender certos problemas cotidianos. Considere o seguinte exemplo. Uma montadora produz três modelos de veículos, x, y e z. instalando três tipos de *air bags*, w, h e p. A matriz [*air bag* modelo] mostra a quantidade de unidades de *air bags* instaladas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

As colunas representam os modelos e as linhas os tipos de air bags. Considere ainda que a quantidade de modelo seja dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 5.650 \\ 6.950 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Numa determinada semana foram produzidas as seguintes quantidades de veículos, dadas pela matriz

$$\begin{pmatrix} a \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Na primeira linha tem-se a quantidade do modelo x, na segunda linha do modelo y e na terceira linha o modelo do tipo z. Pretende-se descobrir a quantidade de modelo do tipo x produzida no decorrer da semana.

Para obter o valor de a, deve-se fazer a matriz produto. Isto é,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 1600 + 3600 \\ 5a + 2000 + 4200 \\ 8a + 2400 + 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5.200 \\ 5a + 6.200 \\ 8a + 4.800 \end{pmatrix}$$

Considerando que o produto dessas matrizes seja dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 5.650 \\ 6.950 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Quantos modelos de veículos do tipo x foram instalados na semana?

Neste caso, temos que,

$$8a + 4800 = 6000$$

$$8a = 1200$$

$$a = 150$$

Ou seja, foram instalados 150 modelos do tipo x. Verifica-se a partir deste exemplo a importância de estudar as matrizes e suas propriedades. Assim sendo a resolução do exemplo desenvolvido anteriormente, pode motivar e despertar um interesse no aluno quando se leva em conta as aplicações do conteúdo ministrado.

Diante deste exemplo, mostra-se que a matriz pode ser usada como ferramenta matemática para solucionar muitos problemas que necessitam da utilidade de representá-los por meio de matrizes (STRANG, 2003). Do ponto de vista por volta de 2500 a.C, os chineses desenvolviam problemas envolvendo cálculos, sobre uma tabela. Entretanto foi James Joseph Sylvester (1814-1897), matemático inglês quem nomeou esses cálculos de matrizes. Os tópicos a seguir procuram desenvolver os conhecimentos de matrizes para as futuras aplicações considerando importantes definições para uma melhor compreensão.

Definição 1. Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz $m \times n$ é uma dupla sequência de números reais, dispostos em m linhas e n colunas, originando uma tabela, indicada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Resumidamente esta matriz pode ser expressa por $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou somente por (a_{ij}) , se não houver possibilidade de confusão em relação à variação dos índices.

Cada número que integra uma matriz é denominado *termo* dessa matriz. Dada a matriz $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ao símbolo a_{ij} , que representa indistintamente todos os seus termos será chamado

de *termo geral* da matriz.

Deve-se observar que o conjunto das matrizes reais $m \times n$ será indicado por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Se $m = n$, ao invés de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, utiliza-se à notação $M_n(\mathbb{R})$. Cada matriz de $M_n(\mathbb{R})$ chama-se *matriz quadrada de ordem n*. Em contrapartida, quando $m \neq n$, uma matriz de $m \times n$ diz uma *matriz retangular*. Uma matriz 1×1 (a_{11}) se identifica com o número real a_{11} .

Exemplo 1. Observe a matriz dada, onde são apresentados os resultados do aproveitamento escolar de 3 turmas diferentes com as respectivas disciplinas e o aproveitamento de cada turma por disciplina.

	Português	Inglês	História
Turma X	6	9	6
Turma Y	7	7	6
Turma Z	9	7	7

Pode-se considerar a seguinte matriz para representar as turmas e as disciplinas.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 7 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Pode-se representar a situação dada, considerando uma matriz A representada por 3×3 .

Assim $A \in M_{3 \times 3}$.

Definição 2. (Igualdade de Matrizes). Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de ordem $m \times n$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) para todo par (i, j) em que $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 2. Numa escola três turmas x , y e z obtiveram notas nas disciplinas de Português, Inglês e História como é mostrado na tabela a seguir:

	Português	Inglês	História
Turma X	9	9	6
Turma Y	7	8	9
Turma Z	9	7	4

Numa outra escola e nas turmas H, P e W, nas mesmas disciplinas os alunos obtiveram as seguintes notas.

	Português	Inglês	História
Turma H	A	B	6
Turma P	7	C	9
Turma W	9	E	d

Sabendo que as notas obtidas foram as mesmas da primeira escola, quais são os valores de a, b, c, d e e?

A representação das notas dos alunos da primeira escola pode ser representada pela matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A matriz B da outra escola obedece a representação:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 6 \\ 7 & c & 9 \\ 9 & e & d \end{pmatrix}$$

Tendo em vista a definição de igualdade matricial, tem-se que

$$A = B$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 6 \\ 7 & c & 9 \\ 9 & e & d \end{pmatrix}$$

Neste caso, os elementos correspondentes devem ser todos iguais. Assim sendo,

$$a = 9, b = 9, c = 8, d = 4 \text{ e } e = 7$$

2.2 MATRIZES ESPECIAIS

Definição 3. (Matriz linha). Uma matriz que possui apenas uma linha, ou seja, uma matriz de ordem $1 \times n$:

$$M_{1 \times n} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}],$$

É denominada matriz linha.

Definição 4. (Matriz coluna). Uma matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, uma matriz de ordem $m \times 1$:

$$M_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

É denominada matriz coluna.

Definição 5. (Matriz quadrada). Uma matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas é chamada de matriz quadrada. Usaremos a notação M_n e a chamaremos de matriz quadrada de ordem n :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definição 6. (Diagonal principal). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada $n \times n$. Os elementos a_{ij} em que $i = j$, com $i, j = 1, \dots, n$ são os elementos da diagonal principal.

Definição 7. (Matriz triangular superior). Uma matriz quadrada, em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos a_{ij} em que, $i > j$, são nulos:

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \dots \end{matrix}$$

É denominada de matriz triangular superior.

Definição 8. (Matriz triangular inferior). Uma matriz quadrada, em que os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos a_{ij} em que, $i < j$, são nulos:

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

É denominada de matriz triangular inferior.

Definição 9. (Matriz Diagonal). Uma matriz quadrada, em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos:

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

É denominada de matriz diagonal.

Definição 10. (Matriz identidade). A matriz identidade é denotada por I_n , onde n é a sua ordem, e é uma matriz quadrada (a_{ij}) em que os elementos a_{ij} da diagonal principal ($i = j$) são iguais a 1 e os elementos a_{ij} com $i \neq j$ são iguais a 0, com $i, j = 1, \dots, n$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. A matriz identidade possui uma importante aplicação no estudo de equações diferenciais de segunda ordem ou de ordem superior. A solução de uma equação diferencial em termos matriciais envolve matrizes identidade e matrizes quadradas que conduzem aos autovalores dos parâmetros que conduzem a solução da equação diferencial. Seja a equação diferencial

$$x'' - 5x' + 6x = 0 \text{ Quais}$$

a matriz quadrada representativa desta equação?

Solução:

Neste caso, precisa-se considerar a seguinte notação:

$$x'' = x'_2$$

$$x' = x_2$$

$$x = x_1$$

Tomando x_2 , pode-se escrever da seguinte maneira:

$$x_2 = 0x_1 + 1x_2$$

e

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Logo,

$$x'_2 = -6x_1 + 5x_2$$

Neste caso, tem-se que:

$$x_2 = 0x_1 + 1x_2$$

$$x'_2 = -6x_1 + 5x_2$$

A partir dos coeficientes das variáveis x_1 e x_2 , tem-se a seguinte matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

A solução da equação diferencial envolve a seguinte expressão matricial,

$$e^{At} = A \cdot a_1 + I\alpha_0$$

Onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representa a matriz identidade e a_1 , α_0 são os parâmetros em função do tempo para solução da equação diferencial.

Definição 11. (Matriz nula). Uma matriz em que todos os elementos são iguais a zero:

$$O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

É denominada matriz nula.

2.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

2.3.1 Adição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$. indica-se por $A + B$ e chama-se soma de A com B a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

A operação que transforma cada par (A, B) de matrizes do mesmo tipo na matriz $A + B$ chama-se adição de matrizes. É uma operação no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 12 & \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ logo } A + B = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n+1 & p \\ x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & -b & -c \\ -m & -n & -p \\ -x & -y & -z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 12. (Matriz oposta). Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, a matriz $B = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = -a_{ij}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), é chamada oposta de A , e indicamos por $-A$.

Definição 13. A diferença entre a matriz A e a matriz B , indicada por $A - B$ é a soma de A com $-B$ ($A + (-B)$).

Proposição .1. Para a adição de matrizes são válidas as seguintes propriedades:

P1) (Comutativa) $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

P2) (Associativa) $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

P3) (Elemento neutro). Existe uma matriz $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, tal que $A + 0 = A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

P4) (Oposta de qualquer matriz) Dada uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $(-A)$, também de ordem $m \times n$, tal que $A + (-A) = 0$

Demonstração.

P1) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$. *P2)* Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ então $(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} =$

$$((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C).$$

P3) Sejam $A = (a_{ij})$ e $0 = (0_{ij})$ então $A + 0 = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A$.

P4) Sejam $A = (a_{ij})$, $-A = (-a_{ij})$ e $B = A + (-A)$, com $B = (b_{ij})$ então $b_{ij} = a_{ij} +$

$$(-a_{ij}) \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \Rightarrow b_{ij} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A + (-A) = 0.$$

2.3.2 Multiplicação de um número por uma matriz

Definição 14. Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$, $m \times n$, e dado um número real α , o produto de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposição 2. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números reais. Logo as seguintes propriedades são válidas:

$$P1) (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$P2) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$P3) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$P4) 1A = A;$$

Demonstração.

P1) Seja $A = (a_{ij})$. Então $(\alpha\beta)A = \alpha\beta(a_{ij}) = \alpha\beta a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = \alpha(\beta A)$.

P2) Seja $A = (a_{ij})$. Então $(\alpha + \beta)A = ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha A + \beta A$.

P3) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Então $\alpha(A + B) = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = \alpha A + \alpha B$.

P4) Seja $A = (a_{ij})$. Então $1A = 1a_{ij} = a_{ij} = A$.

2.3.3 Multiplicação de Matrizes

Definição 15. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ de ordem $m \times n$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$ de ordem $n \times p$.

Defina-se $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde:

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \dots + a_{un}b_{nv}$$

Proposição 3. (*Propriedades da Multiplicação de Matrizes*) Sejam $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ de ordem $n \times p$ as seguintes propriedades são válidas:

P1) Se $C = (c_{ks})$ de ordem $p \times q$, logo $A(BC) = (AB)C$.

P2) Se $C = (c_{jk})$ de ordem $n \times p$ então $A(B + C) = AB + AC$.

P3) Se $C = (c_{jk})$ de ordem $n \times p$ então $(A + B)C = AC + BC$.

P4) $I_m \times A = A$.

Demonstração.

P1) O termo geral de $A(BC)$ é obtido através

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{ks} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij}b_{jk}c_{ks}.$$

ao passo que o termo geral de $(AB)C$ é obtido por:

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{ks} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{ks} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij}b_{jk}c_{ks}.$$

P2)

$$(A + B)C = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} = AB + AC.$$

P3)

$$(A + B)C = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{jk})c_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{jk}c_{jk} = AC + BC.$$

P4)

Seja $I = (\gamma_{ij})$ e $A = (a_{jk})$

$$I = \begin{cases} \gamma_{ij} = 1, & i = j \\ \gamma_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$I_m \times A = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} a_{jk} = \gamma_{i1} a_{1k} + \gamma_{i2} a_{2k} + \dots + \gamma_{ii} a_{ik} + \dots + \gamma_{im} a_{mk} = a_{ik} = a_{jk} = A_{j=1}$$

Então: $I_m X A = A$

Observações:

- 1) Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ e $B = (b_{jk}) \in M_{n \times p}$. Multiplica-se A por B , entretanto não é possível multiplicar B por A .
- 2) se A e B forem matrizes quadradas de ordem n , então os produtos AB e BA são possíveis, mas AB e BA não serão necessariamente iguais. Quando $AB = BA$ dizemos que as matrizes A e B comutam.

2.4 MATRIZ TRANSPOSTA

Definição 16. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, é possível obter-se outra matriz

$A' [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são colunas de A , ou seja, $b_{ij} = a_{ij}$. A' é denominada transposta de A .

Exemplo 6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Proposição 4. (*Propriedades da Matriz Transposta*) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\bar{a}_{ji})$ e $B^t = (\bar{b}_{ji})$. As seguintes propriedades são válidas:

P1) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

P2) $(\beta A)^t = \beta A^t$, $\beta \in \mathbb{R}$ P3)

$(A^t)^t = A$.

P4) $(AB)^t = A^t B^t$.

Demonstração.

P1) Chama-se a matriz $C = A + B$, $C = (c_{ij})$ e $C^t = (c_{\bar{j}i})$. Por definição $a_{ij} =$

\bar{a}_{ji} , $b_{ij} = \bar{b}_{ji}$, $c_{ij} = c_{\bar{j}i}$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo, $c_{\bar{j}i} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$. Portanto, $c_{\bar{j}i} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$. Como $c_{\bar{j}i} = \bar{a}_{ji} + \bar{b}_{ji}$, $\forall i, j$, então $C^t = A^t + B^t \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$.

P2) Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $A^t = (\bar{a}_{ji})_{n \times m}$. Como $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\forall i, j$ então $(\beta A)^t = \beta A^t$, $\beta \in \mathbb{R}$.

P3) Sejam $A = (a_{ij})$, $A^t = (\bar{a}_{ij})$ e $(A^t)^t = D = (d_{ij})$. É necessário mostrar que $d_{ij} = a_{ij}$. Como D é a transposta da matriz A^t , então $\bar{a}_{ji} = d_{ij}$ (1). Mas, A^t é a transposta de A , então, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (2).

De (1) e (2) tem-se que $d_{ij} = a_{ij}$. Logo, $D = A \Rightarrow (A^t)^t = A$.

P4) Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\bar{a}_{ji})$ e $B^t = \bar{b}_{ji}$. Chama-se de $E = AB = (e_{ij})$ e $F = B^t A^t = (f_{ji})$ e $E^t = e_{\bar{j}i}$. É necessário mostrar que $e_{\bar{j}i} = f_{ji}$. Se E^t é a transposta de E , então $e_{ij} = e_{\bar{j}i}$.

Como $e_{\bar{j}i} = e_{ij} = \sum_{nj=1} a_{ij} b_{ij} = \sum_{nj=1} \bar{a}_{ji} \bar{b}_{ji} = \sum_{nj=1} \bar{b}_{ji} \bar{a}_{ji} = f_{ji}$. Portanto, $e_{\bar{j}i} = f_{ji} \Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$.

Definição 17. Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A^t = A$.

Definição 18. Uma matriz quadrada A diz-se antissimétrica se $A^t = -A$.

2.5 MATRIZ INVERSA

Definição 19. Uma matriz A de ordem n é dita inversível se, e somente se, existe uma matriz B , também de ordem n , de maneira que

$$AB = BA = I_n.$$

A matriz B , caso exista, é única e denominada inversa de A , e indicada por A^{-1} .

Proposição 5. (*Propriedades da matriz inversa*). Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\bar{a}_{ji})$ e $B = (\bar{b}_{ji})$, as seguintes propriedades são válidas:

P1) $I = I^{-1}$

P2) Se a matriz A admite inversa A^{-1} , então sua transposta A^t também admite inversa $(A^t)^{-1}$ e $(A^{-1})^t$.

P3) Se as matrizes de mesma ordem, A e B , admitem inversas A^{-1} e B^{-1} , então o produto AB também possui uma inversa, e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

P4) Se a matriz A é inversível, logo A^{-1} consequentemente também é, e a seguinte igualdade é válida: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demonstração.

P1) Seja B inversa de I , logo, $B = I^{-1}$.

$$BI = I \Leftrightarrow B = I \Leftrightarrow I^{-1} = I$$

P2) Sabe-se que $AA^{-1} = I$ e $I = I^t$

$$(A^t)_t((A^{-1})_t)_t = I \Leftrightarrow (A^t(A^{-1})_t)_t = I \Leftrightarrow A^t(A^{-1})_t = I$$

Dessa forma a matriz $(A^{-1})^t$ é a matriz inversa A^t

Logo, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

P3) $(AB)(AB)^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow (A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow$

$IB(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow B(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I \Leftrightarrow I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

P4) Sabe-se que $AA^{-1} = I$ e $I = I^{-1}$

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow (AA^{-1})^{-1} = I^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I^{-1} \Leftrightarrow A(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = AI$$

$$\Leftrightarrow I(A^{-1})^{-1} = AI \Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = A.$$

Para determinar a inversa de uma matriz, caso exista, podem ser utilizadas as operações da definição seguinte.

Definição 20. Dada uma matriz A , compreende-se por operações elementares sobre as linhas de A , qualquer uma das seguintes alternativas:

- 1) *Permutar duas linhas de A .*
- 2) *Multiplicar uma linha de A por um número diferente de zero.*
- 3) *Somar a uma linha de A uma outra linha também de A , multiplicada por um número.*

2.6 DETERMINANTES

A teoria dos determinantes pode ser vista em muitos ramos da matemática, como na geometria analítica na colinearidade entre três pontos.

O termo determinante como conhecido atualmente surgiu em 1812, através do trabalho realizado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) acerca do tema. Porém, o seu precursor foi Leibniz (1646-1716), o qual desenvolveu a empregabilidade de determinantes, relacionado com a aplicação em sistemas lineares.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real de ordem n . Considerando-se um produto da forma:

$$a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}$$

onde φ é uma permutação do conjunto N_n . Nesse produto apenas um elemento de cada linha e coluna de A encontrassem presentes, pois seus primeiros e segundos índices não se repetem, respectivamente, já que φ é bijetora. Multiplica-se esse produto pelo sinal de φ 1 ou -1

$$\text{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}.$$

Finalmente somasse todos os números assim obtidos, de forma que φ percorra o conjunto de todas as permutações de N_n , assim, portanto, na somatória terá $n!$ parcelas

$$\sum_a \text{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}.$$

Denomina-se determinante da matriz A de ordem n o número real

$$\det(A) = \sum_{\varphi} \text{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)}$$

onde φ percorre todas as permutações de $N_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Demonstração.

P1) Quando a linha i for nula, $a_{i\varphi(i)} = 0$ para toda permutação φ e dessa forma, $\det(A) = 0$. Uma coluna nula em uma matriz corresponde a uma linha nula em sua transposta. Assim, $\det(A^t) = 0$ e, portanto, $\det(A) = 0$.

P2) Se duas linhas da matriz A são iguais, ao trocar uma linha pela outra, a matriz A permanece inalterada e seu determinante tem o sinal trocado. Logo, $\det(A) = -\det(A)$, o que resulta em $\det(A) = 0$.

P3) Seja uma matriz $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sua transposta, então $a_{ij} = b_{ji}$. Dessa forma:

$$\det(A) = \sum_{\varphi} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \dots a_{n\varphi(n)} = \sum_{\varphi} \operatorname{sgn}(\varphi) b_{\varphi(1)1} b_{\varphi(2)2} \dots b_{\varphi(n)n} = \det(B).$$

P4) Se A for invertível, $A = E_1 E_2 \dots E_k$, onde E_1, E_2, \dots, E_k são matrizes elementares. Assim $\det(AB) = \det(E_1 E_2 \dots E_k B) = \det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_k) \det(B) = \det(A) \det(B)$. Se A ou B for singular, AB é singular e $\det(AB) = 0$ e $\det(A) \det(B) = 0$.

P5) Se A é invertível, tem-se que $A \cdot A^{-1} = I$, como $\det(I) = 1$, $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$, e portanto, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

2.6.1 Cofatores

Definição 23. Chama-se cofator do elemento a_{ij} da matriz A , o número real Δ_{ij} . A submatriz A_{ij} de ordem $n - 1$ é obtida de A por meio da supressão da linha i -ésima e da coluna j -ésima, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Dessa forma o cofator de a_{ij} é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Definição 24. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n e seja também Δ_{ij} o cofator do elemento a_{ij} . Chama-se adjunta de A a matriz transposta da matriz de cofatores de A :

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 1: O determinante da matriz $A = (a_{ij})$ é igual à som dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de qualquer linha (coluna) pelos seus respectivos cofatores:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

2.6.2 Obtenção da matriz inversa por determinante

Teorema. Para qualquer matriz quadrada A , $A \cdot (adjA) = (adjA) \cdot A = \det(A) \cdot I$ onde I é a matriz identidade. Dessa forma se $\det(A) \neq 0$, logo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA$$

Demonstração.

Sejam $A = (a_{ij})$ e $A \cdot (adjA) = (b_{ij})$. A i -ésima linha de A é

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

Como $adjA$ é a transposta da matriz dos cofatores, a j ésima coluna da $adjA$ é a transposta dos cofatores da j -ésima linha de A , ou seja,

$$(A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn})^T$$

Mas b_{ij} , o elemento de ordem ij em $A \cdot (adjA)$, obtém-se através da multiplicação de (1) por (2)

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$$

Pelo teorema x1 e x2

$$b_{ij} \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Consequentemente, $A \cdot (adjA)$ é a matriz diagonal em cada elemento diagonal $\det(A)$.

Em outros termos, $A \cdot (adjA) = AI$. Igualmente, $(adjA) \cdot A = \det(A)I$. Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA.$$

2.6.3 Aplicação de determinantes em sistemas lineares – Regra de Cramer

Nesta seção será apresentado um teorema que fornece uma fórmula para resolução de determinados sistemas lineares de n equações e n incógnitas. Tal fórmula é denominada regra de Cramer, e além disso, é de interessante para fins computacionais, entretanto é de utilidade para estudo das propriedades matemáticas de uma solução, sem necessidade de resolver o sistema.

Considera-se um sistema de n equações lineares e n incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2.$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Ou, de maneira equivalente,

$$Ax = b$$

Tem-se que, $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ e $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$ e (a_{ij}) é a matriz quadrada de coeficientes.

Seja A_i a matriz obtida de A substituindo-se a i -ésima coluna de A pelo vetor coluna B . Seja $D = \det(A)$ e $N_i = \det(A_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Segue a relação fundamental entre determinantes e a solução do sistema acima.

Teorema. O sistema apresentado anteriormente tem solução única se, e somente se, $D \neq 0$. Em tal caso, a solução (única) é dada por:

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, x_2 = \frac{N_2}{D}, \dots, x_n = \frac{N_n}{D}$$

Demonstração.

Pelos resultados anteriores, $Ax = b$ tem solução única se e somente se A é invertível, e A é invertível se e somente se $D = \det(A) \neq 0$.

Seja $D \neq 0$. Pelo Teorema, $A^{-1} = (1/D)(adj A)$. Multiplicando-se $Ax = b$ por A^{-1}

obtem-se:

$$x = A^{-1}Ax = (1/D)(adj A)b$$

Se $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^t$ então, por (1),

$$x_i = (1/D)(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni})$$

Todavia, tal como no teorema x , $b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni} = N_i$, o determinante da matriz obtida substituindo-se a i -ésima coluna de A pelo vetor b . Logo:

$$x_i = (1/D)N_i.$$

O teorema é conhecido como “regra de Cramer” para solução de sistemas de equações lineares. Observa-se que o Teorema faz referência apenas a um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas, que só é possível quando $D \neq 0$

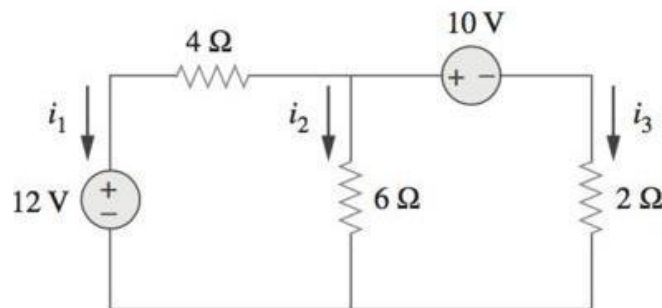
3. CAPÍTULO 2- SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo é feito um estudo sobre os conceitos e definições de sistema linear sobre o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Os conceitos apresentados aqui serão utilizados no capítulo 3, onde abordaram-se suas aplicações em circuitos elétricos, balanceamento de equações química, dentre outras.

3.1 CONCEITO E DEFINIÇÃO

Existem muitas aplicações de sistema linear tanto em matemática quanto em Física e o conhecimento desta teoria constitui nas soluções de importantes problemas. A exemplo introdutória deste capítulo, tem-se a determinação das correntes num circuito onde se podem aplicar a lei das malhas. Observe a figura (Figura 2) utilizando sistemas lineares.

Figura 2- Circuito elétrico 1



Fonte: <https://www.respondeai.com.br/conteudo/eletrica/circuitos-cc/lista-de-exercicios/analise-de-malha-1300>

Como se observará, posteriormente, aplicando as leis de Kirchhoff nas malhas e fazendo o percurso no sentido contrário a i_1 e i_2 , vem que,

$$-12 - 4i_1 + 6i_2 = 0$$

$$10 + 2i_3 - 6i_2 = 0$$

$$i_1 + i_2 = i_3$$

A partir daí, forma-se o sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ -2 \cdot i_1 + 3i_2 + 0 \cdot i_3 = 6 \\ 1 \cdot i_1 - 2 \cdot i_2 + 0i_3 = -5 \end{cases}$$

Escalonando esse sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -2i_1 + 3i_2 = 6 \\ i_2 = 4 \end{cases}$$

Dessa forma, verifica-se que $i_1 = 3A$, $i_2 = 4A$ e $i_3 = 7A$.

De acordo com documentos históricos o estudo de sistemas lineares desenvolveu-se, com grande intensidade nas civilizações orientais, a exemplo da babilônica e chinesa. Em meados do século XVII, a partir de um artigo escrito pelo alemão Gottfried W. Leibniz (1646-1716) o estudo aprofundou-se, pois foram estabelecidas condições para associação de um sistema de equações lineares a um determinante. O artigo contou também com a colaboração do suíço Gabriel Cramer (1704-1752), responsável por solucionar um sistema de equações em um caso particular. Já o alemão Carl Jacobi (1804-1851) fez a leitura dessa teoria que até hoje é estudada.

Definição 1. Dados os números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ ($n \geq 1$), a equação

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$$

onde os x_i são variáveis em \mathbb{R} , dar-se o nome de equação linear sobre \mathbb{R} nas incógnitas x_1, \dots, x_n .

Uma solução dessa equação corresponde a uma sequência de n números reais (*), não necessariamente distintos entre si, indicada por (b_1, \dots, b_n) , tal que

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \beta$$

uma sentença verdadeira.

Definição 2. Um sistema de m equações lineares com n incógnitas ($m, n \geq 1$)(**) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta da seguinte forma:

$$S: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema apresentado anteriormente é uma n -upla (b_1, \dots, b_n) de números reais, que é solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplo 1. Dado o sistema

$$S: \begin{cases} 2x + 3y + z = 16 \\ x - y + 2z = 10 \end{cases}$$

Uma solução de S é $(0, 3, 4)$. Nota-se que essa solução não é a única: a terna $(8, 11, 0)$ também é solução de S .

Se no sistema S , tiver $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, o sistema S será homogêneo. A n -upla $(0, 0, \dots, 0)$ é solução de S neste caso, e por essa razão todo sistema homogêneo é compatível, de

acordo com a definição 2.3 mencionada a seguir. A solução $(0, 0, \dots, 0)$ é denominada de solução trivial do sistema homogêneo.

Definição 3. Diz-se que um sistema linear S é incompatível se S não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado compatível determinado. Se um sistema linear S admite mais do que apenas uma única solução, então é denominado de compatível indeterminado.

Exemplo 2.

1) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_i \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Necessariamente é incompatível: como nenhuma n -upla é a solução da equação i -ésima, logo nenhuma n -upla é a solução do sistema. 2) Um sistema do tipo

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

É compatível determinado e $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é a sua solução única.

3) O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

É indeterminado pois, de acordo como visto anteriormente, as ternas $(0, 3, 4)$ e $(-\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0)$

São soluções deste sistema. Como serão vistos, existem infinitas soluções deste sistema.

3.2 SISTEMAS EQUIVALENTES

Seja S definido como um sistema linear de m equações com n incógnitas, faz-se necessário considerar os sistemas que podem ser obtidos de S de uma das seguintes formas:

(1) *Permutar* duas das equações de S . É evidente que se S_1 , indicar o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 também é considerada solução de S e vice-versa.

(2) *Multiplicar* uma das equações de S por um número real $\varphi \neq 0$, indicando por S_1 o sistema assim obtido, mostrara-se que toda solução de S_1 é também solução de S e vice-versa.

Em razão de (1) supõe-se que a equação multiplicada seja a primeira. Como as demais equações de S e S_1 coincidem, basta verificar que a afirmação feita a respeito da primeira equação.

Se (b_1, \dots, b_n) é uma solução de S (de acordo com a definição 2.2), logo:

$$\alpha_{11}b_1 + \dots + \alpha_{1n}b_n = \beta_1$$

Multiplicando-se a igualdade por γ obtém-se:

$$(\gamma\alpha_{11})b_1 + \dots + (\gamma\alpha_{1n})b_n = \gamma\beta_1$$

O que mostra que (b_1, \dots, b_n) também é uma solução da primeira equação de S_1 .

Em contrapartida, se (b_1, \dots, b_n) é solução de S_1 , então a igualdade (2) torna-se verdadeira. Dividindo (2) por γ obtém-se (1). Dessa forma, (b_1, \dots, b_n) pertence ao conjunto das soluções de S .

(3) *Somar* a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.

$$S: \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_i \\ \vdots \\ (\gamma\alpha_{i1} + \alpha_{j1})x_1 + \dots + (\gamma\alpha_{in} + \alpha_{jn})x_n = \gamma\beta_i + \beta_j \\ \vdots \end{array}$$

$$\{ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

Assim obtido e o sistema S ou são ambos incompatíveis ou admitem as mesmas soluções.

Definição 4. Dado um sistema linear S , quaisquer das modificações explicadas acima em (I), (II), (III) que se opere com esse sistema recebe o nome de operação elementar com S .

Se obteve-se um sistema linear S_1 de um sistema linear S por meio de um número finito de operações elementares, diz-se que S_1 é equivalente a S .

Notação: $S_1 \sim S$. É fácil perceber que a relação \sim assim definida são válidas as seguintes propriedades:

- (a) $S \sim S$ (reflexiva)
- (b) $S_1 \sim S \implies S \sim S_1$ (simétrica)
- (c) $S_1 \sim S$ e $S \sim S_2 \implies S_1 \sim S_2$ (transitiva)

Convém salientar, por último, que em decorrência de tudo que já foi verificado neste parágrafo, se $S_1 \sim S$, então toda solução de S é solução de S_1 e vice-versa. De forma particular, se S_1 é incompatível, o mesmo ocorre com S .

Desta forma criou-se um mecanismo extremamente vantajoso, visando a busca de soluções de um sistema linear S . Procura-se sempre localizar um sistema linear equivalente a S e que seja de certa forma “mais simples”.

Exemplo 3. Considere o seguinte sistema linear

$$S: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Para estudo deste sistema faz-se necessário aplicar sobre ele uma série de operações elementares, visando a obtenção de um número maior de coeficientes iniciais nulos em cada equação (à partir da segunda) do que na precedente. Visualiza-se como é possível fazer isso.

$$\begin{array}{ccc} x - y + z = 1 & x - y + z = 1 & x - y + z = 1 \\ \{ 2x - y + z = 4 * \{ & y - z = 2 * * \{ & y - z = 2 \} \\ x - 2y + 2z = 0 & -y + z = 1 & 0 = 1 \end{array}$$

* Multiplica-se a primeira equação por -2 , e o resultado é somado a segunda equação; multiplica-se a primeira equação por -1 e soma-se com a terceira.

** Soma-se a segunda equação com a terceira.

Como este último sistema é incompatível, o mesmo ocorre com o sistema S dado inicialmente.

$$\begin{array}{l}
 x_1 + \dots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
 \omega_{2r_1}x_{r_1} + \dots + \omega_{2n}x_n = \beta_2 \\
 \vdots \\
 \omega_{mr_1}x_{r_1} + \dots + \omega_{mn}x_n = \beta_{m'}
 \end{array}
 \quad S_1:$$

onde $\omega_{2r_1} \neq 0$ e $r_1 \geq 2$, que é equivalente a S.

Dividindo a segunda equação de S_1 por ω_{2r_1} obtém-se S_2 , ainda equivalente a S_1 , com o qual o raciocínio foi desenvolvido até este ponto, entretanto a partir da segunda equação. Claramente, depois de aplicar esse raciocínio determinado número de vezes, se chegará a um sistema escalonado equivalente a S. A importância dos sistemas escalonados consta na Proposição 1. Sendo todo sistema equivalente a um sistema escalonado, bastará saber lidar com os sistemas escalonados e também com a redução de um sistema qualquer a um escalonado.

Convém observar que as equações do tipo $0 = 0$ que por ventura encontram-se presentes no processo de escalonamento devem ser suprimidas, como é evidente.

3.4 DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear S significa efetuar um estudo de S, com intuito de classificá-lo segundo a definição 2.3. Resolver um sistema linear significa determinar todas as suas soluções. O conjunto dessas soluções é denominado de conjunto solução do sistema. Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Procedendo ao escalonamento de S chega-se a uma das três seguintes situações:

1) Em uma determinada etapa, durante o processo de escalonamento, obtém-se um sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_1 \quad (\beta_1 \neq 0) \\
 \vdots \\
 \dots \neq
 \end{array} \right. \quad S':$$

Como S' é incompatível, então o mesmo se pode dizer de S.

(I) Obtém-se um sistema escalonado do seguinte tipo:

$$S: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

Neste caso S' poderá ser transformado, por equivalência, no seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1 \\ x_2 = \gamma_2 \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n \end{cases}$$

Logo S é compatível determinado e $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ é a sua solução.

(II) Obtém-se um sistema escalonado do tipo abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + \alpha_{1r_2}x_{r_2} + \dots + \alpha_{1r_3}x_{r_3} + \dots + \alpha_{1r_p}x_{r_p} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ x_{r_2} + \dots + \alpha_{2r_3}x_{r_3} + \dots + \alpha_{2r_p}x_{r_p} + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ x_{r_p} + \dots + \alpha_{pr_3}x_{r_3} + \dots + \alpha_{pn}x_n = \beta_p \end{cases}$$

Onde $p < n$.

É fácil então ir eliminando, por meio de operações elementares, o termo em x_{r_2} na primeira equação, os termos em x_{r_3} da primeira e segunda equação, ..., os termos em x_{r_p} da primeira a $(p - 1)$ -ésima equação. Por exemplo, multiplicando a segunda equação por $(-\alpha_{1r_2})$ e somando o resultado com a primeira eliminando o termo $\alpha_{1r_2}x_{r_2}$. Feito isto, repassasse para o segundo termo de cada equação todas as parcelas, com exceção a primeira. Assim terá algo como:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ \dots \\ x_{r_2} = f_2 \\ \dots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1, j \neq r_2, \dots, j \neq r_p$. A cada sequência de valores dados então a estas $n - p$ variáveis (variáveis livres) serão obtidos valores para $x_1, x_{r_2}, \dots, x_{r_p}$ e conseqüentemente uma solução do sistema. Como $p < n$, se terá mais do que uma solução (infinitas na verdade) e o sistema é *indeterminado* neste caso.

3.5 RESUMO DA DISCUSSÃO

A discussão apresentada anteriormente pode ser resumida da seguinte forma:

Supõe-se que um sistema tenha sido escalonado e, teve as equações do tipo $0 = 0$ retiradas, assim restaram somente p equações com n incógnitas.

- 1) Se a última das equações restantes é

$$0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_p \quad (\beta_p \neq 0)$$

Então o sistema é *incompatível*; Caso contrário, restam apenas duas possibilidades:

- 2) Se $p = n$, então o sistema é *compatível e determinado*;
- 3) Se $p < n$, então o sistema é *compatível indeterminado*.

4. CAPÍTULO 3-APLICAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações de Álgebra Linear envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares, empregadas nas áreas das ciências exatas, em especial na Física e Matemática.

4.1. CIRCUTOS ELÉTRICOS

Para abordagem de circuitos elétricos faz-se necessário definir as seguintes leis.

4.1.1 Lei de Ohm

A Lei de Ohm foi descoberta pelo físico Georg Simon Ohm, e nela a força elétrica corresponde ao produto da resistência pela corrente elétrica, descrita pela equação:

$$V = R \cdot i$$

- 1) V é a tensão elétrica, sua unidade é o volt (V é a letra que representa a unidade).
- 2) R é a resistência elétrica, sua unidade é ohm (Ω é a letra grega que representa a unidade).
- 3) i é corrente elétrica, sua unidade é o ampère (A é a letra que representa a unidade).

4.1.2 Leis de Kirchhoff

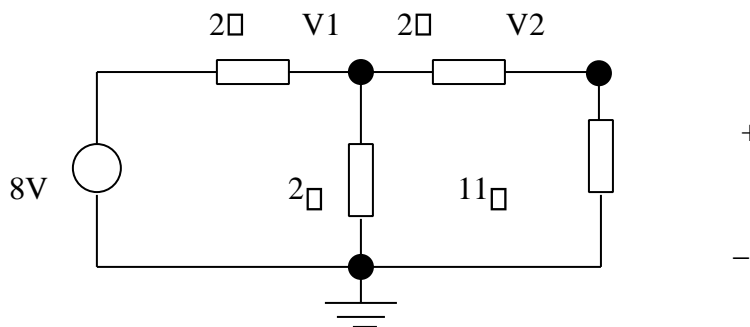
-Em cada nó, a soma das correntes de dentro é correspondente à soma das correntes de fora do nó

-Em um ciclo fechado, a diferença de potencial total corresponde a zero.

A aplicação das Leis de Kirchhoff na resolução de circuitos elétricos, resulta em um sistema de equações lineares.

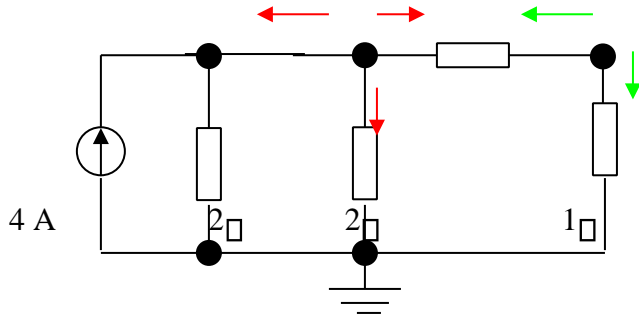
Aplicação 1-Lei dos nós.

Seja o circuito, determinar V_1 e V_2 .



Determinando as tensões no Nó V_1 e V_2 .

$$V_1 \quad 2\Omega \quad V_2$$



$$\begin{cases} -4 + V_1 - 0 + V_1 - 0 + V_1 - V_2 = 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{2} - \frac{V_2}{1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 + V_1 - V_2 = 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{2} - V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -V_1 - 3V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -V_1 - 3V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -2V_1 - 6V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -6V_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -6V_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = 4 \\ -6V_2 = 4 \end{cases}$$

$$-3V_1 + 3V_2 = 2$$

$$\begin{cases} -V_1 + V_2 = 0 \\ -3V_1 + 3V_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_1 + V_2 = 0 \\ -3V_1 + 3V_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -V_1 + V_2 = 0 \\ -V_1 + V_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$V_1 = -4$$

$$4V2 = 4$$

$$V2 = 1 \text{ V Substituindo}$$

V2, fica:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} V1 - \frac{2}{2} V2 &= 4 \\ \frac{3}{2} V1 - \frac{1}{2} V2 &= 4 \\ \frac{3}{2} V1 &= 4 + \frac{1}{2} \\ V1 &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Aplicação 2-Solução de uma equação diferencial homogênea de ordem 2

Resolva a seguinte equação diferencial aplicando matriz e determinante.

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Qual a matriz quadrada representativa desta equação?

Solução.

Neste caso, precisa-se considerar a seguinte notação:

$$x'' = x'_2$$

$$x' = x_2$$

$$x = x_1$$

Tomando x_2 , pode-se escrever da seguinte maneira:

$$x_2 = 0x_1 + 1x_2$$

e

$$x'' - 5x' + 6x = 0 \text{ Neste}$$

caso, tem-se que:

$$x_2 = 0x_1 + 1x_2$$

$$x'_2 = -6x_1 + 5x_2$$

A partir dos coeficientes das variáveis x_1 e x_2 , tem-se a seguinte matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

A solução da equação diferencial envolve a seguinte expressão matricial

$$e^{At} = A \cdot a_1 t + I \alpha_0$$

Onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representa a matriz identidade e a_1, α_0 são os parâmetros em função do tempo para solução da equação diferencial.

Devemos encontrar a solução da equação diferencial, encontrando os autovalores que é dado pela relação

$$\text{Det} [A - I\lambda] =$$

Onde Det representa o determinante. Logo,

$$A - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & & & & & \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -6 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Logo,

$$5\lambda + 6 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{Det} [\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}] = \lambda^2 - 0$$

Resolvendo esta equação, tem-se que, $\lambda_1 = 3t$ e $\lambda_2 = 2t$, onde considera os autovalores como função de t. Para obter a solução da equação, usa-se a seguinte relação,

$$e^{\lambda t} = \lambda a_1 + \alpha_0$$

Logo, λ_1

$$e^{3t} = 3ta_1 + \alpha_0$$

$$e^{2t} = 2ta_1 + \alpha_0$$

Resolvendo este sistema, tem-se que,

$$a_1 = \frac{e^{3t} - e^{2t}}{t}$$

E

$$\alpha_0 = e^{3t} - 3ta_1 = e^{3t} - 3 \cdot t \left(\frac{e^{3t} - e^{2t}}{t} \right)$$

E

$$\alpha_0 = e^{3t} - 3ta_1 = e^{3t} - 3 \cdot \left(\frac{e^{3t} - e^{2t}}{t} \right) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

Assim,

$$\alpha_0 = 3e^{2t} - 2e^{3t} \quad A$$

solução do sistema é dada pela expressão,

$$e^{At} = \mathbf{A} \cdot a_1 + I\alpha_0 \text{ Logo,}$$

$$e^{At} = \mathbf{A} \cdot a_1 + I\alpha_0$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -06 & 15 \end{pmatrix} \cdot a_1 t + \begin{pmatrix} 01 & 10 \end{pmatrix} \alpha_0$$

Ou

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 01 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left(e^{\frac{3t - e^{2t}}{t}} \right) + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (3e^{2t} - 2e^{3t})$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{3t - e^{2t}} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 2t - 2e^{3t} \end{pmatrix} (3e^{2t} - 2e^{3t})$$

$$e^{At} = (-6(e^{3t} - e^{2t}) + 5(e^{3t} - e^{2t})) \cdot \begin{pmatrix} e^{3t - e^{2t}} \\ 1 \end{pmatrix} + (3e^{2t} - 2e^{3t}) \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 2e^{3t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Ou

$$e^{At} = (-36e^{2t} + 5e^{3t} - 2e^{2t}) \begin{pmatrix} e^{3t - e^{2t}} \\ 1 \end{pmatrix} + (3e^{2t} - 2e^{3t}) \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 2e^{3t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Supondo como condições de contorno a matriz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

A solução obedece a relação,

$$e^{At} = (-36e^{2t} + 5e^{3t} - 2e^{2t}) \begin{pmatrix} e^{3t - e^{2t}} \\ 1 \end{pmatrix} + (3e^{2t} - 2e^{3t}) \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 2e^{3t} - 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Logo,

Tem-se como solução da equação diferencial,

$$X(t) = (e^{2t} - 2e^{3t})x_1 + (e^{3t} - e^{2t})x_2$$

Ou,

$$X(t) = (e^{2t} - 2e^{3t})(x_1 + x_2)e^{2t} + (e^{2t})(-2x_1 - x_2)e^{2t}$$

Substituindo por outras variáveis, tem-se a seguinte solução,

$$X(t) = Ce^{2t} + De^{2t}$$

Aplicação 4- Preço de material escolar

Uma lapiseira, três cadernos e duas canetas custam, juntos, 40 reais. Três lapiseiras, nove cadernos e duas canetas custam, juntos, 90 reais. O custo de uma lapiseira, três cadernos e uma caneta, juntos, em reais custam quanto?

Solução

Vamos atribuir a incógnita x ao preço de cada lapiseira, y ao preço de cada caderno e z ao preço de cada caneta. Do enunciado, temos que:

$$x + 3y + 2z = 40$$

$$3x + 9y + 2z = 90$$

O sistema acima representa a questão do enunciado. Quer-se se saber quanto custam

$$x + 3y + z$$

Neste caso, Multiplicando a primeira expressão do sistema dado pelo valor -3 , tem-se que

$$-3x - 9y - 6z = -120$$

$$3x + 9y + 2z = 90$$

Obtém para o valor de y , após a soma, o valor $z = 7,5$

Substituindo o valor de y encontrado na primeira equação, teremos que:

$$x + 3y = 25$$

$$3x + 9y = 75$$

Logo, sendo $x + 3y = 25$ representa o preço de uma lapiseira e três canetas e como o caderno custa $7,5$, temos que o custo dos três custam. Ou seja,

$$x + 3y + z = 32,5$$

Aplicação 5: Compras de revistas

Com determinada quantidade de dinheiro é possível comprar 4 revistas em quadrinhos, todas de mesmo valor e, ainda, sobram R\$ 3,00. Porém, se com a mesma quantia de dinheiro forem compradas 8 revistinhas de palavras cruzadas, cada uma delas de mesmo valor, sobrarão R\$ 1,00. Sabendo que uma revistinha de palavra cruzada custa R\$ 0,50 a menos que uma revistinha em quadrinhos, então, o preço de uma revistinha de palavras cruzadas quanto vale?

Resolução:

Seja x o valor de cada revista em quadrinhos e y o valor de cada palavra cruzada.

Pela afirmação: “é possível comprar 4 revistas em quadrinhos, todas de mesmo valor e, ainda, sobram R\$ 3,00. Porém, se com a mesma quantia de dinheiro forem compradas 8

revistinhas de palavras cruzadas, cada uma delas de mesmo valor, sobrarão R\$ 1,00.”, tem-se, então,

$$4x + 3,00 = 8y + 1,00$$

Pela afirmação: “uma revistinha de palavra cruzada custa R\$ 0,50 a menos que uma revistinha em quadrinhos”, temos $y = x - 0,50$

Note que temos duas equações com duas variáveis, ou seja, um sistema de primeiro grau. Substituindo a segunda na primeira equação

$$4x + 3,00 = 8(x - 0,50) + 1,00$$

$$4x + 3 = 8x - 4 + 1$$

$$-4x = -4 + 1 - 3$$

$$-4x = -6$$

$$x = 1,5 \text{ Calculando}$$

y:

$$y = x - 0,5 = 1,5 - 0,5 = 1,00$$

5.2. MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF

Nesta seção serão abordados os modelos econômicos de Wassily Leontief, economista russo que em 1973 ganhou o prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual emprega métodos matriciais para estudar as relações em diversos segmentos da economia.

5.2.1. O modelo fechado (de input-output) de Leontief

Esse modelo é constituído por um número finito de n indústrias e cada uma dessas indústrias produz uma quantidade fixa de um produto ou serviço que é utilizado pelas n indústrias. O objetivo desse modelo é a determinação de um preço para cada produto de tal forma que o total de gastos seja equivalente ao total recebido.

Exemplo. Três proprietários de casas, um pedreiro, um serralheiro e um pintor, pretendem fazer concertos em suas casas. Eles concordam em trabalhar um total de dez dias cada, de acordo com a tabela dada.

CASAS	PEDREIRO	SERRALHEIRO	PINTOR
Casa do Pedreiro	5	4	2
Casa do Serralheiro	3	4	2
Casa do Pintor	2	2	6

Os trabalhadores precisam declarar e pagar um ao outro um salário diário. Seus salários diários, são aproximadamente de R\$100,00, mas eles concordam em ajustar esses salários de

modo que o total pago por cada um seja igual ao total recebido. Determinaram-se o salário de cada um.

Chama-se de x_1 o salário do pedreiro, de x_2 o salário do serralheiro e de x_3 o salário do pintor. Para satisfazer a condição de equilíbrio, em que o total gasto seja igual ao total recebido para cada um dos proprietários no período de dez dias, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10x_1 & & -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ \{ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10x_2 & \sim & \{ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10x_3 & & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}$$

Fazendo $L_2 = 3L_1 + 5L_2$, tem-se:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \text{ Fazendo} \end{cases}$$

$L_3 = 2L_1 + 5L_3$, tem-se:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0x_1 + 18x_2 - 16x_3 = 0 \text{ Fazendo} \end{cases}$$

$L_3 = L_3 + L_2$, tem-se:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Chamando $x_3 = \alpha$, obtém-se $x_2 = 8\alpha/9$ e $x_1 = 10\alpha/9$, onde α pode assumir qualquer valor real. Verifica-se que o sistema de equações possui infinitas soluções dadas por: x_1

10

$$\begin{array}{l} [x_2] = y [8] \\ x_3 \quad \quad 9 \end{array}$$

onde y é uma constante qualquer, em que os proprietários tem a possibilidade de escolher de acordo com sua conveniência. Nesse exemplo como o salário de cada aproximadamente equivale a R\$ 100,00, então escolhe-se $y = 10$. Dessa forma, o salário do pedreiro será de R\$100,00, o do serralheiro R\$ 80,00 e o salário do pintor será de R\$ 90,00.

5.2.2 O modelo aberto (de produção) de Leontief

Diferentemente do modelo fechado, em que os produtos das n indústrias são distribuídos somente entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta suprir uma demanda externa para os produtos. Dessa forma, em relação a produção, uma parte é destinada para as próprias indústrias, e parte do excedente direcionado para satisfazer a demanda externa.

No modelo em questão, o que são fixados são os preços e o objetivo é determinar os níveis de produção nas indústrias para atender a demanda externa.

Denota-se por:

x : vetor- produção

x_i : valor monetário da produção total da i -ésima indústria

$d = [d_i]$: vetor demanda

d_i : valor necessário para a i -ésima indústria satisfazer a demanda externa

$C = [c_{ij}]$: matriz de consumo quadrada

c_{ij} : valor monetário da produção da i -ésima indústria, necessária para j -ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

O vetor Cx é denominado vetor demanda intermediária da economia. Uma vez atendida essa demanda, a porção da produção restante para atender as necessidades da demanda externa é $x - Cx$. Assim, caso o vetor demanda externa seja d , então x deve satisfazer a equação:

$$x - Cx = d$$

$$(I - C)x = d$$

A matriz $I - C$ é denominada matriz de Leontief e (4.6) é denominada equação de Leontief.

Exemplo. Duas oficinas de concerto de veículos, uma que cuida da parte mecânica (M) e outra de lataria (L), utilizam uma os serviços da outra. Para cada R\$ 1,00 de negócios que M faz, M utiliza R\$ 0,50 de seus próprios serviços e R\$ 0,25 dos serviços de L e, para cada R\$ 1,00 de negócios que L faz, L utiliza R\$ 0,10 de seus próprios serviços e R\$ 0,25 dos serviços de M.

Construa uma matriz de consumo para essa economia

Quais valores de M e L devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de R\$ 7.000,00 de serviços mecânicos e R\$ 14.000,00 de serviços de lataria?

Resolução

a) A matriz de consumo será

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,1 \end{bmatrix}$$

b) A matriz $I - C$ será

$$I - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

Para calcular os valores de M e L que devem ser produzidos para essa economia gerar uma demanda de R\$ 7.000,00 de serviços mecânicos e R\$ 14.000,00 de serviços de lataria, utiliza-se $(I - C)x = d$, onde x_1 e x_2 representam M e L , respectivamente, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 14000 \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema abaixo

$$\begin{cases} 0,5x_1 - 0,25x_2 = 7000 \\ -0,25x_1 + 0,9x_2 = 14000 \end{cases}$$

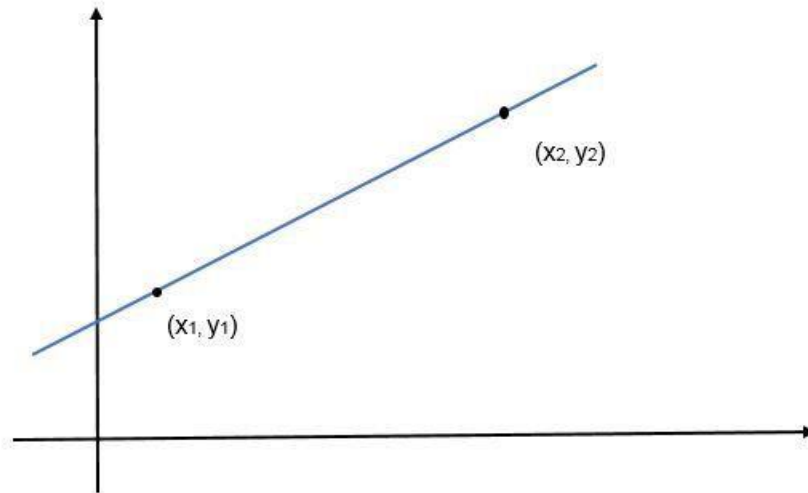
Resulta em $x_1 = -12.645$ e $x_2 = 22.581$. Assim, $M = \text{R}\$12645,00$ e $L = \text{R}\$22581,00$.

5.3 APLICAÇÕES NO CÁLCULO NUMÉRICO

5.3.1 Sistemas Lineares e Interpolação polinomial

Neste tópico deseja-se abordar um tipo de problema bastante interessante com várias aplicações, que é o de encontrar um *polinômio interpolador*, cujo gráfico passe por um conjunto de pontos caracterizados no plano. Um exemplo bem simples de um problema desse tipo é a localização de um polinômio linear $p(x) = ax + b$, no qual o seu gráfico passe por dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano xy de acordo com a Figura abaixo:

Figura 2: Representação gráfica do polinômio linear percorrendo dois pontos



Fonte: Autoria própria

Para localizar os valores de a e b , a partir de dos dois pontos dados, precisa-se solucionar

o sistema linear $\begin{cases} ax^1 + b = y_1 \\ ax^2 + b = y_2 \end{cases}$. De onde se obteve $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$.

Quando o número de pontos é bem maior, em geral a aproximação por um polinômio linear passa a ser insignificante. Neste caso é interessante empregar polinômios de graus maiores. A obtenção desse polinômio ocorre através da resolução de um **sistema linear de n equações e n incógnitas**. Isto ficará mais evidente a seguir:

Considera-se o problema de encontrar um polinômio cujo gráfico passe pelos n pontos de coordenadas distintas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), \dots, (x_n, y_n)$. Como existem n condições a serem satisfeitas, a intuição sugere que se inicie procurando um polinômio da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Para encontrar o polinômio interpolador que passa por n pontos, faz-se necessário solucionar um **sistema linear de n equações e n incógnitas**, da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_{n-1}x_k^{n-1} = y_k \\ \dots \dots \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Exemplo: Encontrar o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos $(1,3)$, $(2,-2)$ e $(4,0)$.

Solução:

Procura-se um polinômio de grau 3, da forma

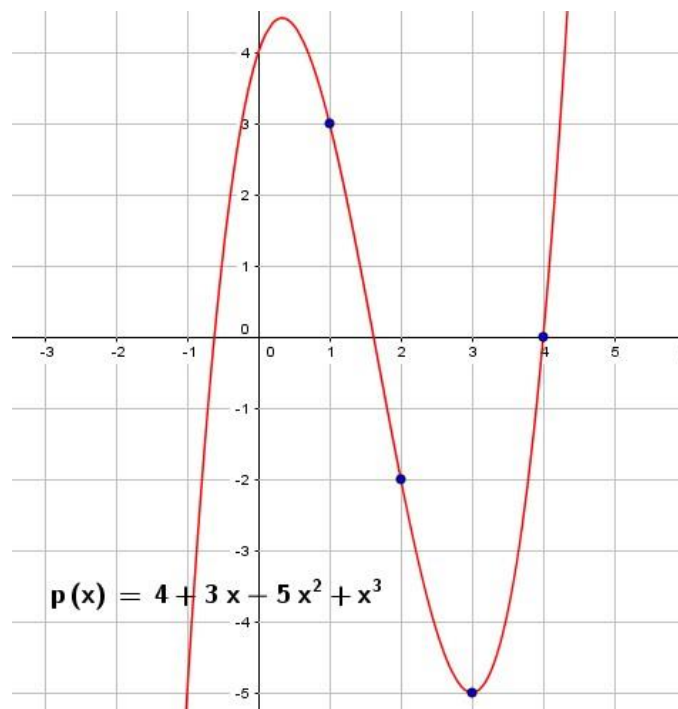
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \text{ com } a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3.$$

Substituindo os pontos dados no polinômio, o seguinte sistema linear foi encontrado:

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 & & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ \{ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -2 \sim \{ a_1 + a_2 + a_3 = -5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -5 & & a_2 + a_3 = 1 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0 & & a_3 = 1 \end{array}$$

Da resolução do sistema, obtiveram-se $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$ e $a_3 = 1$. Assim, o polinômio procurado terá a forma $p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$, cujo gráfico é representado a seguir:

Figura 3: Gráfico de terceiro grau



Fonte: BOCCARDO (2017)

5.4.1 Sistemas Lineares e Situação de Otimização

As equações e inequações lineares, assim como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis para resolução de problemas de economia, transporte, alimentação, etc. Em problemas como esses, geralmente é necessário ter conhecimento sobre os valores máximo ou mínimo de uma função cujas variáveis são lineares e estão sujeitas a

certas desigualdades. Pode-se utilizar a modelagem matemática para solucionar muitos problemas (BASSANEZI, 2003). Quando isso ocorre, encontra-se diante de um problema de **programação linear** (problema mais complexo do que os de sistemas lineares, mas que fortemente utiliza sistemas lineares para sua resolução, como será ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo: Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas na tabela abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indicam o preço de cada produto por unidade. Qual quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação com custo mínimo?

Figura 4:Produtos P e Q e suas respectivas quantidades de vitaminas A, B e C

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Fonte: Adaptado de BOCCARDO (2017) **Solução:**

Diante de um problema desse tipo (em programação linear), as seguintes orientações devem ser consideradas para resolvê-lo:

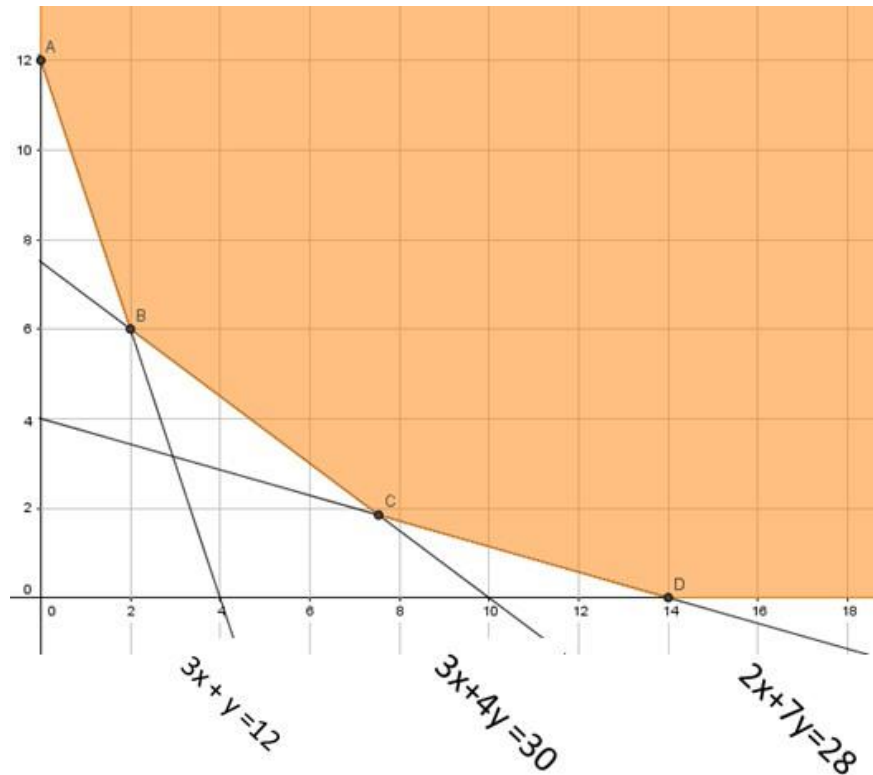
Estabelece-se a função objetivo, ou seja, a função a ser maximizada ou minimizada.

Transformam-se as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.

Traça-se o gráfico da região poligonal convexa correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.

Calculam-se os valores da função objetivo em cada um dos vértices.

Constata-se que o maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo.



Fonte: BOCCARDO (2017)

Seja x a quantidade do produto P e y a quantidade do produto Q nas condições do problema.

- 1) Função Objetivo: O custo, o qual se deseja minimizar será dado por $C = 3x + 2y$;
- 2) Restrições: As condições impostas pelo problema são $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \geq 12$, $3x + 4y \geq 30$ e $2x + 7y \geq 28$.
- 3) Gráfico.

Nesse caso, a região de possibilidades compreende a parte do plano limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $3x + y = 12$, $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas lineares:

$$\begin{aligned} & x = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{array} \right. & \Rightarrow (x, y) = (0, 12) \\ & 3x + y = 12 \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{array} \right. & \Rightarrow (x, y) = (2, 6), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x+7y=28 & \frac{98}{13} \quad \frac{24}{13} \\ 3x+4y=30 & \frac{98}{13} \quad \frac{24}{13} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13} \right)$$

$$\begin{cases} 2x+7y=28 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14, 0)$$

- 4) Valores que a função objetivo assume nos vértices

Tabela X – Valores assumidos pela função objetivo nos vértices

Vértice	Valor da função $C = 3x + 2y$
(0, 12)	$C = 3.0 + 2.12 = 24$
(2, 6)	$C = 3.2 + 2.6 = 18 \leftarrow \textit{mínimo}$
$\frac{98}{13}, \frac{24}{13}$	$C = 3. \left(\frac{98}{13} \right) + 2. \left(\frac{24}{13} \right) = 26,3$
(14, 0)	$C = 3.14 + 2.0 = 42 \leftarrow \textit{máximo}$

Fonte: Adaptado de BOCCARDO (2017)

- 5) Conclusão: A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a abordagem do tema, tornou-se possível elaborar alguns problemas e resolução utilizando matrizes, determinantes e sistemas lineares de modo que se tivesse uma melhor compreensão do assunto estudado. Além do mais, a resolução de problemas permitiu que se tivesse um aprofundamento e fixação de conceitos e desenvolvimento matemáticos, além de mostrar a aplicabilidade nas áreas das ciências exatas, como na Física referente a solução de uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com a utilização de matriz identidade, matriz quadrada e de determinante para determinação dos autovalores da equação diferencial.

Utilizou-se ainda a teoria em problemas relacionados com material escolar e outros pertencentes a matemática o que se tornou possível constatar da importância de conhecer os conteúdos de matrizes, determinantes e sistema linear. Apesar de haver muitas outras aplicações, acredita-se que os problemas resolvidos que fora apresentado no capítulo 3, pode contribuir na compreensão da teoria abordada, principalmente, quando se tratar de soluções de equações diferenciais de ordem 2, mostrando aplicabilidade de matrizes e determinantes para os cálculos dos autovalores.

Dessa forma, as aplicações relacionadas a lei dos nós e a outros problemas que foram resolvidos é fundamental para uma fixação melhor da teoria, pois o aluno não consegue aplicar desenvolver um problema, carece de interpretação e falta de conceitos ou definições. Aprende-se aplicando e resolvendo problemas, pois essa forma de metodologia ainda é muito aplicada e traz no final um bom resultado.

Desse modo, a proposta de ligar teoria com a prática ligada a problemas contextualizados com a utilização de resolução de problemas, tornou-se possível permitir que o ensino da matemática adquira uma maior dinâmica no processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista que aproxima o aluno do cotidiano em problemas que estão ligados com que ele vive no dia a dia. Em todo caso, Supre-se a necessidade de um envolvimento muito mais abrangente que extrapola o quadro giz professor aluno, necessitando de outros recursos para obter ainda êxitos no processo de ensino e aprendizagem, aumentando com as diferentes metodologias a interação professor-aluno e aluno-aluno..

REFERÊNCIAS

ALVES, S. **A Matemática do GPS**. Revista do Professor de Matemática, vol. 59, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002

BRASIL. Ministério de Educação. Lei de diretrizes e bases da educação – LDB 9.394/96, Brasília, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

LIBÂNEO, J. C.; SUANNO, M. V. R.; LIMONTA, S. V. (Org.). **Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança: diferentes olhares para a didática**. Goiânia: CEPED/Editora PUC Goiás, 2011.

PAVIANI, N. M. S.; FONTANA, N. M. **Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência**. Revista Conjectura. V. 14, n. 2, p. 77 – 88. Caxias do Sul: maio/ago, 2009

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciências. 1978.

MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

STRANG, Gilbert. **Introduction to linear algebra**. Wellesley: Cambridge, 2003.