SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

HELOISA HELENA ALVES TRINDADE DOS SANTOS

RENAN CARDOSO DOS SANTOS

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WXMAXIMA NA SOLUÇÃO DE EDOs LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

ABAETETUBA – PA
2025

HELOISA HELENA ALVES TRINDADE DOS SANTOS

RENAN CARDOSO DOS SANTOS

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WXMAXIMA NA SOLUÇÃO DE EDOs LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, *Campus* Universitário do Baixo Tocantins, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Rômulo Correa Lima.

ABAETETUBA – PA
2025

HELOISA HELENA ALVES TRINDADE DOS SANTOS
RENAN CARDOSO DOS SANTOS

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WXMAXIMA NA SOLUÇÃO DE EDOs LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, *Campus* Universitário do Baixo Tocantins, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Rômulo Correa Lima.

APROVADA EM: ____/_____/_____

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Correa Lima

Prof Drº Rômulo Correa Lima

Orientador

Genivaldo dos Passos Correa.

Prof Drº Genivaldo dos Passos Correa

Examinador

José Francisco da S. Costa

Prof Drº José Francisco da Silva Costa

Examinador

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H474u Helena Alves Trindade dos Santos, Heloisa.

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WXMAXIMA NA SOLUÇÃO DE EDOs LINEARES DE SEGUNDA ORDEM /

Heloisa Helena Alves Trindade dos Santos, Renan Cardoso. — 2025.

42 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Romulo Correa Lima

Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2025.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. wxMaxima. 3. Solução de EDOs. 4. Problema de valor inicial e\ou contorno.

5. movimento harmônico simples. I. Título.

CDD 510

Dedicamos este TCC primeiramente a Deus, a família do discente Renan e a família da discente Heloisa. Sem vocês, nada disso seria possível; Dedicamos este trabalho a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que este momento seja possível.

RESUMO

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) desempenham um papel fundamental na modelagem de fenômenos físicos, químicos, biológicos e de engenharias, sendo amplamente utilizadas para descrever sistemas dinâmicos. Este trabalho tem como objetivo geral analisar a aplicação do software wxMaxima na solução de EDOs lineares de segunda ordem, destacando sua eficiência e acessibilidade. A metodologia utilizada consistiu em pesquisa bibliográfica sobre equações diferenciais, seguida de aplicação prática do software wxMaxima na resolução dessas equações. Primeiramente, discute-se a teoria das equações diferenciais, abordando sua classificação, métodos de solução e conceitos fundamentais, como linearidade, homogeneidade, problemas de valor inicial (PVI) e problemas de valor de contorno (PVC). Em seguida, são apresentados os comandos e funcionalidades do wxMaxima, demonstrando sua aplicação na resolução de equações diferenciais de forma eficiente. Por fim, um exemplo prático baseado no Movimento Harmônico Simples (MHS) ilustra a utilização do software, evidenciando sua eficiência no ensino e aprendizagem de matemática aplicada. Conclui-se que o wxMaxima se mostra uma ferramenta eficaz para o estudo das EDOs, proporcionando maior agilidade e precisão nos cálculos, além de auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos e sua aplicação em diversas áreas da ciência.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, wxMaxima, Solução de EDOs, Problema de Valor Inicial, Problema de Valor de Contorno, Movimento Harmônico Simples.

ABSTRACT

Ordinary differential equations (ODEs) play a fundamental role in the modeling of physical, chemical, biological and engineering phenomena, and are widely used to describe dynamic systems. This work aims to analyze the application of the wxMaxima software in the solution of second-order linear ODEs, highlighting its efficiency and accessibility. The methodology used consisted of a bibliographical research on differential equations, followed by a practical application of the wxMaxima software in the resolution of these equations. First, the theory of differential equations is discussed, addressing their classification, solution methods and fundamental concepts, such as linearity, homogeneity, initial value problems (IVPs) and boundary value problems (BVPs). Then, the commands and functionalities of wxMaxima are presented, demonstrating its application in the efficient resolution of differential equations. Finally, a practical example based on Simple Harmonic Motion (SHM) illustrates the use of the software, evidencing its efficiency in the teaching and learning of applied mathematics. It is concluded that wxMaxima proves to be an effective tool for the study of ODEs, providing greater agility and precision in calculations, in addition to helping in the understanding of mathematical concepts and their application in various areas of science.

Keywords: Ordinary Differential Equations, wxMaxima, Solution of ODEs, Initial Value Problem, Simple Harmonic Motion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Gráfico da solução de um PVI……...…....13

Figura 2 – Gráfico da Solução de um PVC…….....15

Figura 3 – Interface inicial do software wxMaxima…….....30

Figura 4 – Interface do menu equações do software wxMaxima…….....31

Figura 5 – Interface do menu equações: Problema de valor inicial (1) …….....31

Figura 6 – Solução de uma EDO utilizando o fator integrante no software wxMaxima…....34

Figura 7 – Ilustração de um MHS .....…....36

Figura 8 - Movimento Harmônico Simples ……...…….....37

Figura 9 - Solução no software Wxmaxima …….....37

Figura 10 - Segundo método de solução …….....38

Figura 11 – Representação da força de um pêndulo ….....40

SUMÁRIO

1. Introdução.....9

2. **Equações diferenciais**..... .11

2.4 Definição.....11

2.2 Classificação.....11

2.3 Solução de uma EDO.....12

2.3.1 Problema de Valor Inicial.....13

2.3.2 Problema de Valor de Contorno.....15

2.3.3 Dependência Linear e Independência Linear.....18

2.3.4 Wronskiano.....19

2.3.5 Solução Geral.....20

2.3.6 Solução Particular.....21

2.3.7 Soluções para Equações Lineares.....21

2.3.8 Princípio de Superposição.....21

2.3.7 EDOs Lineares de 2ª Ordem.....22

2.4.2.3 Definição e Características.....23

2.4.2 Métodos de Solução.....23

2.4.2.1 Soluções Linearmente Independentes.....23

2.4.2.2 Conjunto Fundamental de Soluções.....24

2.4.2.3 Método da Variação de Parâmetros ou Método Lagrange.....26

3. Comandos de Resolução de EDOs de Segunda Ordem Utilizando o wxMaxima..... 29

3.1 wxMaxima.....29

3.1.1 Interface e Comandos.....30

3.2 Resolução de EDOs de Segunda Ordem.....32

4. **Modelo Matemático Resolvido Utilizando o wxMaxima**.....35

4.1 Movimento Harmônico Simples (MHS): Sistema Massa Mola.....35

4.1.1 Exemplo de Movimento Harmônico Simples.....36

4.2 Movimento Harmônico Amortecido (MHA).....39

4.2.1 Exemplo de Movimento Harmônico Amortecido.....39

5. Considerações finais..... .41

1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais (ED) desempenham um papel crucial em diversos ramos da ciência e engenharia, fornecendo ferramentas poderosas para descrever fenômenos dinâmicos e evolutivos. Este trabalho tem como objetivo geral investigar a resolução de EDOs lineares de segunda ordem utilizando o software wxMaxima, explorando sua aplicabilidade no ensino e resolução de problemas matemáticos.

As equações diferenciais podem ser classificadas com base em diferentes critérios, como tipo, ordem e linearidade. Foram divididos tópicos para explorar a distinção entre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP), bem como a ordem de uma equação, destacando exemplos elucidativos, realizando também uma análise aprofundada sobre a distinção entre equações diferenciais lineares e não lineares, com ênfase nas características de linearidade. Além disso, explora-se a homogeneidade das equações, identificando quando uma EDO é considerada homogênea ou não homogênea, proporcionando exemplos esclarecedores.

A resolução de equações diferenciais é um aspecto crucial. Por isso se ressalta a definição de solução para uma EDO em um intervalo, destacando a diferença entre solução geral e soluções particulares, especialmente no contexto de Problemas de Valor Inicial (PVI) e Problemas de Valor de Contorno (PVC), pondo em destaque um teorema fundamental, o da Existência e Unicidade, é introduzido para equações diferenciais lineares de segunda ordem com condições iniciais adequadas. Este teorema garante a existência de uma única solução para tais equações, ilustrado por um exemplo prático.

Este trabalho se concentra na apresentação das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem e suas formas de solução, mas também a forma de como solucionar estes problemas no software wxMaxima, e para aplicar essas soluções foi explorado um modelo matemático, destacando sua relevância na área de exatas e demonstrando características essenciais, como linearidade, coeficientes variáveis ou constantes, e a distinção entre solução geral e solução particular. Citando dois teoremas importantes, o da Superposição e o da Existência de um Conjunto Fundamental de Soluções, onde são discutidos, fornecendo ferramentas valiosas para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem.

A metodologia empregada envolveu revisão bibliográfica sobre EDs, análise dos principais conceitos matemáticos envolvidos e experimentação prática com o wxMaxima. O trabalho é estruturado em quatro capítulos. O primeiro apresenta uma introdução geral ao tema. O segundo discute a teoria das equações diferenciais, abordando sua classificação e soluções. O terceiro capítulo detalha os comandos do wxMaxima e sua utilização na resolução de EDOs. O quarto capítulo apresenta a modelagem matemática de um sistema físico baseado no Movimento Harmônico Simples (MHS), utilizando o wxMaxima para sua solução.

No capítulo 2, é explanado o universo das equações diferenciais, com foco especial nas equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, tomando como referências obras de renomados autores, onde é apresentado exemplos de equações diferenciais ordinárias e se discute a importância de compreender suas características e soluções.

O capítulo 3 introduz o software wxMaxima como uma ferramenta eficaz para a resolução de equações diferenciais de segunda ordem. Exploram-se comandos específicos e funcionalidades do software, tornando evidente sua utilidade e acessibilidade.

O capítulo 4 aborda um dos modelos matemáticos que trabalham com a EDO de segunda ordem e conclui destacando a importância das equações diferenciais, especialmente as lineares de segunda ordem, e enfatizando a praticidade do software wxMaxima na abordagem e resolução desses problemas matemáticos complexos.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais (ED) são muito utilizadas nos ramos da ciência, física entre outros, neste capítulo será definido o que é, e tomando por base a definição em si, aborda-se as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem.

2.1 Definição

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED). (ZILL, p.2, 2007)

Exemplos:

a) $R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} = V(t)$

b) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{1}sen\theta = 0$

c) $m\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{dx}{dt} + kx = F_0cos(wt)$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

e) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$

2.2 Classificação

As EDs podem ser classificadas por seu tipo, ordem, linearidade:

i) Tipo: uma equação que envolve exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável dependente é denominada Equação Diferencial Ordinária (EDO). Como por exemplo:

$$(y - x)dx + 4xdy = 0$$

Se uma equação inclui as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é denominada Equação Diferencial Parcial (EDP). Como por exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

ii) Ordem: nesta classificação a derivada de maior ordem é a que a define, como por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Onde a maior derivada encontra-se no termo $\frac{d^2y}{dx^2}$, sendo assim classificada como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem é escrita geralmente na forma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

onde

- y é a variável dependente;
- x é a variável independente;
- $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ representam as derivadas ordinárias de y em relação a x;
- F é uma função que relaciona $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$, e assim por diante.

iii) Linearidade: as EDs podem ser classificadas como linear e não-linear. A linearidade possui duas características, a(s) variável(is) dependente(s) e suas derivadas são de grau 1 e cada coeficiente depende apenas da(s) variável(is) independente(s). Uma equação diferencial que não é linear é chamada de não-linear. No subtópico 2.1 pode-se averiguar a sua classificação conforme a linearidade, os exemplos (a), (c) e (d) são lineares e (b) e (e) são não-lineares.

A partir deste ponto o foco central deste trabalho se destinará somente em equações diferenciais ordinárias lineares.

iv) Homogêneas e não homogêneas: a homogeneidade é dada quando os termos podem ser expressos como funções lineares ou polinomiais das derivadas da variável dependente, e não da variável em si, ou seja, a soma dos termos da equação e suas derivadas, quando todos estão do mesmo lado da equação, é igual a zero, caso contrário a EDO é dita não homogênea.

Exemplos:

a) $2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$

b) $\frac{dy}{dt+2}y = 5t$

Nos exemplos acima (a) é uma EDO linear homogênea e (b) uma EDO linear não homogênea.

2.3 Solução de uma EDO

Uma solução para uma equação diferencial em um intervalo I é qualquer função y definida nesse intervalo que, quando inserida na equação diferencial, a transforma em uma identidade (ZILL, 2010).

Uma EDO pode ter uma solução geral, que é uma família de funções que satisfaz a equação, e soluções particulares, que são soluções específicas dentro dessa família que atendem a certas condições inicias ou de contorno.

Ex:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = \int 2xdx = x^2 + C$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$$

Logo, qualquer função da forma: $y(x) = x^2 + C$ definida em um intervalo I transforma a equação diferencial dada em uma identidade, confirmando que ela é uma solução.

2.3.1 Problema de Valor Inicial

Um problema de valor inicial (PVI) de uma EDO de segunda ordem é atribuída pela exigência de duas condições iniciais para encontrar uma única solução.

Para identificar um PVI temos a sua forma geral de uma equação diferencial de n-ésima ordem:

Resolva: $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ (2)

Sujeita a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$ (3)

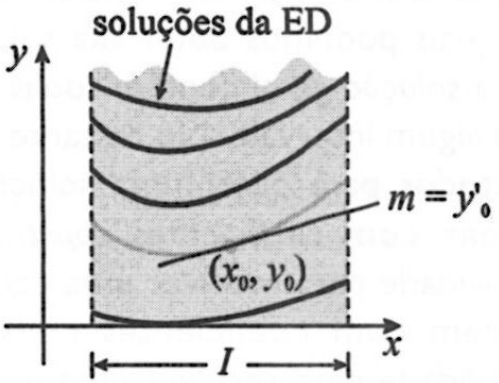
onde $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$ são constantes arbitrárias, esse caso é chamado de problema de valor inicial e os valores de $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$ são chamados de condições iniciais, onde procura-se a solução em algum intervalo I contendo x_0 .

Para uma equação diferencial linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial tem-se a sua forma geral:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\ ,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \quad (4)$$

Uma função que atenda à equação diferencial em I, cujo gráfico passe por (x_0, y_0) com uma inclinação igual a y'_0, como mostrado na figura 1.

Figura 1 – Gráfico da solução de um PVI



Fonte: Zill (2010)

Por exemplo:

$$\text{(PVI)} \begin{cases} \frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde y(0) e y'(0) são constantes que definem as condições iniciais para solução da EDO, porém este problema pode ser solucionado pela veracidade do teorema da existência e unicidade.

2.3.1.1 Teorema da Existência e Unicidade

O teorema da existência e unicidade garante a existência de uma solução única para uma equação diferencial linear de segunda ordem com condições iniciais adequadas. Em outras palavras, dado um problema de valor inicial (ou de contorno), há uma única função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais ou de contorno específicas.

Teorema 1: Considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (5)$$

$$y(t_0) = y_0 \,, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Para um intervalo aberto I que contenha o ponto t_0, suponha que as funções p, q e g sejam contínuas. Nesse caso, há uma única solução $y = \phi(t)$ para este problema, e essa solução é válida em todo o intervalo I.

Destaca-se que o teorema afirma três aspectos:

- A solução para o problema de valor inicial existe; em outras palavras, há uma solução.
- Apenas uma solução existe para o problema de valor inicial; em outras palavras,

a solução é única.

- A solução ϕ é definida em todo o intervalo *I*, onde os coeficientes são contínuos, e é diferenciável pelo menos duas vezes nesse intervalo.

A demonstração deste teorema não se encontra no escopo deste trabalho. Contudo, pode-se encontrá-la em livros de equações diferenciais como por exemplo ZILL, 2010.

Exemplo: Considere a equação diferencial $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. O teorema de existência e unicidade garante a existência de uma única solução para esta equação com essas condições iniciais, sendo assim:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 0, \text{ onde } y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = -1 \qquad (6)$$

Com base no teorema podemos definir que a solução abaixo é única e verdadeira.

$$y(x) = e^{-x} \qquad (7)$$

A descoberta de uma solução certamente confirma a existência de uma solução para este problema de valor inicial. Além disso, a solução (7) é diferenciável duas vezes, e de fato, é diferenciável em qualquer número de vezes, em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, onde os coeficientes da equação diferencial são contínuos. Por outro lado, não é evidente e é mais desafiador demonstrar que o problema de valor inicial não possui outras soluções além daquela fornecida pela equação. No entanto, o teorema 1 assegura que essa solução é, de fato, a única solução do problema de valor inicial.

Para a maioria dos problemas, não é possível derivar uma expressão útil para a solução. Essa limitação representa uma grande disparidade em relação às equações lineares de primeira e segunda ordens. Portanto, todos os aspectos do teorema precisam ser provados por meio de métodos gerais, que incluem a obtenção de tal expressão.

2.3.2 Problema de Valor de Contorno

Um problema de valor de contorno (PVC) refere-se a um sistema de equações diferenciais, acompanhado por um conjunto de restrições adicionais chamadas de condições de contorno, limite ou fronteira. Um PVC envolve a solução de uma equação diferencial, na qual a variável dependente y ou suas derivadas são fornecidas em pontos distintos.

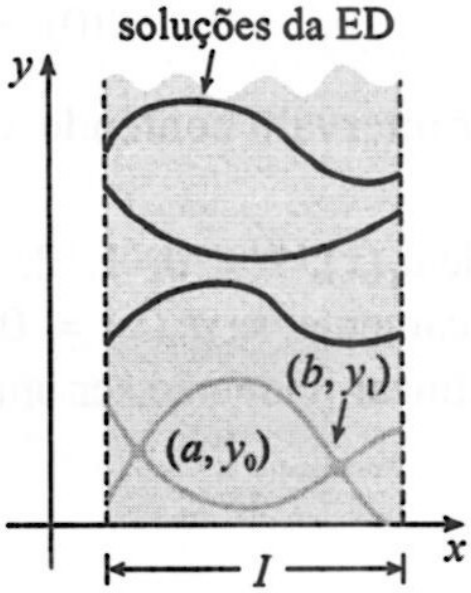
Resolva: $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Sujeita a: $y(a) = y_0, y(b) = y_1$

é chamado de problema de valor de contorno. Os valores referidos $y(a) = y_0, y(b) = y_1$, são chamados de condições de contorno ou fronteira. Uma resposta para a questão em discussão é

uma função que atenda à equação diferencial em um intervalo I, que inclui a e b, e cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1), como demonstrado na figura 2.

Figura 2 – Gráfico da Solução de um PVC



Fonte: Zill (2010)

A solução para um problema de valor de contorno é a solução desse sistema de equações diferenciais que atende às condições de contorno estabelecidas. Por exemplo

$$y'' + 2y' + y = 0 \text{ , } y(0) = 1 e y(1) = 3$$

Resolvendo $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y(x) = 0$, tal que $y(0) = 1$ e $y(1) = 3$:

Suponha que uma solução será proporcional a $e^{\lambda x}$ para alguma constante λ.

Substituindo $y(x) = e^{\lambda x}$ na equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda x} + 2\frac{d}{dx}e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

Substitui-se $\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ e $\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

Fatora-se $e^{\lambda x}$:

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 1)e^{\lambda x} = 0$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$ para qualquer λ finito, os zeros devem vir do polinômio:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Fatorando:

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

Resolvendo λ:

$$\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = -1$$

A multiplicidade da raiz $\lambda = -1$ é 2, o que dá $y_1(x) = c_1 e^{-x}, y_2(x) = c_2 e^{-x} x$,como soluções, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

A solução geral é a soma das soluções acima:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x$$

Resolva as constantes desconhecidas usando as condições iniciais:

Substituindo $y(0) = 1$ em $y(x) = e^{-x} c_1 + e^{-x} x c_2$:

$$c_1 = 1$$

Substituindo $y(1) = 3$ em $y(x) = e^{-x} c_1 + e^{-x} x c_2$:

$$\frac{c_1 + c_2}{e} = 3$$

Resolva o sistema:

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = -1 + 3e$$

Substituindo $c_1 = 1$ e $c_2 = -1 + 3e$ em $y(x) = e^{-x} c_1 + e^{-x} x c_2$ temos como solução a equação abaixo:

$$y(x) = e^{-x}(-x + 3ex + 1)$$

Há casos em que uma EDO linear de segunda ordem dado um PVC não possui uma solução, como por exemplo, considere a EDO com as condições de contorno:

$$y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Sabendo que a solução geral dada para essa EDO é:

$$y(x) = C_1 sen(2x) + C_2 cos(2x)$$

Solução: Como

$$y(0) = C_1 sen(0) + C_2 cos(0) = C_2$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno $y(0) = 1$, C_2 deve ser igual a 1. Como

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 sen(\pi) + C_2 cos(\pi) = -C_2$$

Para satisfazer a segunda condição de contorno $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, C_2 deve ser obrigatoriamente igual a -2. Nesse caso para satisfazer ambas as condições de contorno

simultaneamente, $C_2 = 1$ e $C_2 = -2$, o que se mostra impossível. Dessa maneira, o PVC não admite solução.

Os problemas de valor de contorno são comumente encontrados em contextos que envolvem equações diferenciais parciais (ZILL, 2010). Portanto, essa condição não será enfatizada neste trabalho.

2.3.3 Dependência Linear e Independência Linear

Os conceitos a seguir são básicos e de suma importância para o estudo das equações diferenciais lineares.

a) Definição Dependência Linear: afirma-se que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I quando existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, não sendo todas nulas, de modo que,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo.

b) Definição Independência Linear: afirma-se que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ é literalmente independente em um intervalo I se ele não é inteiramente dependente no intervalo.

Em outros termos, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais ocorre são

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo, são $c_1 = c_2 = \ldots c_n = 0$.

É simples compreender essas definições no caso de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se as funções são linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes c_1 e c_2, ambas não nulas, tais que, para todo x no intervalo,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Dessa forma, se for considerado $c_1 \neq 0$ segue-se que,

$f_1(x) = \frac{-c_2}{c_1} f_2(x)$;

em outras palavras, se duas funções são linearmente dependentes, isso significa que uma é, simplesmente, uma constante multiplicativa da outra. De maneira recíproca, se existe uma constante c tal que $f_1(x) = c_2 f_2(x)$, então

$$(-1) f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em algum intervalo. Dessa forma, as funções são consideradas linearmente dependentes, pois pelo menos uma das constantes (especificamente, $c_1 = -1$) não é nula. Pode-se concluir que duas funções são linearmente independentes quando nenhuma delas pode ser expressa como uma constante multiplicativa da outra em um determinado intervalo.

2.3.4 Wronskiano

O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para a independência linear de n funções em um intervalo. Assume-se que cada função é diferenciável pelo menos $n - 1$ vezes.

Teorema 2: Critério para Independência Linear de Funções

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, sejam diferenciáveis n-1 vezes. Se o determinante

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Se f é não nulo em pelo menos um ponto no intervalo I, então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ serão linearmente independentes no intervalo.

O determinante do teorema 2 é representado por

$$W\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$$

é chamado o Wronskiano das funções.

Demonstração: Atesta-se o Teorema 2 utilizando o método da contradição quando $n = 2$. Assume-se que $W(f_1(x_0), f_2(x_0) \neq 0)$ para um x_0 fixado no intervalo I, e que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente dependentes nesse intervalo. A dependência linear das funções implica a existência de constantes c_1 e c_2, ambas não nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em I. Derivando essa combinação, tem-se

$$c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) = 0.$$

Obtêm-se então um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= 0 \\ c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

No entanto, a dependência linear entre f_1 e f_2 implica que a equação (8) tem uma solução não trivial para cada x no intervalo. Portanto,

$$W\big(f_1(x), f_2(x)\big) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{bmatrix} = 0$$

para todo x em I.*Isso entra em contradição com a suposição de que $W(f_1(x_0), f_2(x_0) \neq 0)$. Portanto, conclui-se que f_1 e f_2 são linearmente independentes. ■

Corolário: Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ possuem pelo menos $n-1$ derivadas e são linearmente dependentes em I então

$$W\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big) = 0$$

para todo x no intervalo.

2.3.5 Solução Geral

Toda a solução de uma EDO de enésima ordem $F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0$ em um intervalo I pode ser obtida em uma família de n-parâmetros $G\big(x, y, c_1, c_2, \dots, c_{(n)}\big) = 0$, pelas escolhas apropriadas dos parâmetros em c como $c_1 = 1,2, \dots, n$ então dessa forma, afirma-se que todo o grupo cabível a solução da EDO é chamado de solução geral. Ao solucionar EDOs lineares, basta impor restrições relativamente simples nos coeficientes da equação; sendo assim, haverá a certeza de que não existe apenas uma solução em um intervalo mas também um grupo familiar de soluções que abrange todas as soluções possíveis da equação. EDOs não lineares, com exceção de algumas equações de primeira ordem, são geralmente mais difíceis ou impossíveis para se resolver de forma elementar. Além disso, se ocorrer a possibilidade de existir um grupo de soluções para uma equação não linear, não é certo afirmar que esse grupo conterá todas as soluções possíveis. Logo, a designação "solução geral" é aplicada apenas a EDOs lineares.

Ex:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = 1r = 2$$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^x$$

2.3.6 Solução Particular

Uma solução particular é derivada da solução geral definindo as constantes para valores particulares, muitas vezes escolhidos para cumprir o conjunto de condições iniciais ou condições de contorno (ZILL, 2010).

Ex:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = 1r = 2$$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

$$y_p = Ae^x$$

$$A = \frac{1}{1} = 1$$

$$y_p = xe^x$$

2.3.7 Soluções para Equações Lineares

a) Equações Homogêneas: uma equação diferencial de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (9)$$

é chamada homogênea, enquanto

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (10)$$

onde g(x) não é identicamente zero, é referida como não homogênea.

2.3.8 Princípio de Superposição

O teorema do princípio da superposição afirma que a soma de duas soluções particulares de uma equação diferencial linear também é uma solução da equação diferencial. Em outras palavras, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação, então $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes, também é uma solução.

Teorema 3: Princípio da Superposição – Equações Homogêneas

Considerando $y_1, y_2, \ldots, y_k$ como soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (9) em um intervalo I, a combinação linear resultante será

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x) \tag{11}$$

onde os c_i, para $i = 1,2,\ldots,k$, representam constantes arbitrárias, constitui igualmente uma solução dentro do intervalo.

Demonstração: Para confirmar o caso em que $n = k = 2$. Considere $y_1(x)$ e $y_2(x)$ como soluções para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Define-se $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, então

$$a_2(x)[c_1 y''_1 + c_2 y''_2] + a_1(x)[c_1 y'_1 + c_2 y'_2] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2]$$

$$= c_1 \underbrace{[a_2(x)y''_1 + a_1(x)y'_1 + a_0(x)y_1]}_{\text{zero}} + c_2 \underbrace{[a_2(x)y''_2 + a_1(x)y'_2 + a_0(x)y_2]}_{\text{zero}}$$

$$= c_1 . 0 + c_2 . 0 = 0$$

Corolário

a) Uma combinação linear $y = c_1 y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea também constitui uma solução.

b) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui uma solução trivial $y = 0$.

2.4 EDOs Lineares de 2ª Ordem

Equações diferenciais de segunda ordem desempenham um papel fundamental na análise matemática, por duas razões essenciais. Em primeiro lugar, as equações lineares apresentam uma estrutura teórica complexa que sustenta várias abordagens sistemáticas de resolução. Além disso, uma parcela significativa dessa estrutura e desses métodos é compreensível em um nível matemático relativamente básico (BOYCE, DIPRIMA, 2010).

A partir desta seção, este trabalho somente enfatizará EDOs Lineares de Segunda Ordem, para estudos mais aprofundados se sugere os livros de equação diferencial dos autores Zill (2010) e Boyce e Diprima (2010).

2.4.1 Definição e Características

Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem são equações que pertencem ao grupo das equações diferenciais lineares e satisfazem as características, ou seja, a variável dependente y e suas derivadas são de grau 1 e cada coeficiente depende apenas de x. Para identificá-las como de segunda ordem as equações devem satisfazer a seguinte forma:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r(x) \tag{12}$$

onde $a, b, c,$ e r são funções conhecidas, dependentes apenas da variável x. Esta é uma forma geral e pode variar dependendo dos coeficientes e das funções envolvidas, a solução dessa equação pode envolver a escolha de condições iniciais ou de contorno, dependendo do problema específico que está se resolvendo.

2.4.2 Métodos de Solução

A aptidão para identificar soluções precisas geralmente está vinculada à capacidade de reconhecer determinados tipos de equações diferenciais e aplicar métodos específicos. Em termos simples, o que é eficaz para um tipo de equação diferencial nem sempre é aplicável a outro tipo.

2.4.2.1 Soluções Linearmente Independentes

É chamada de solução linearmente independente quando se quer determinar n soluções para uma equação diferencial, utilizando o Wronskiano não nulo de um conjunto de soluções em um intervalo I pode-se verificar a independência linear.

Teorema 4: Critério para Independência Linear de Soluções

Sejam y_1, y_2 soluções para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem em um intervalo I. Então o conjunto de soluções é linearmente independente em I se e somente se

$$W(y_1, y_2) \neq 0$$

para todo x no intervalo.

Demonstração: Para provar o teorema 4 sendo $n = 2$, se $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I, sucede de maneira consecutiva tomando por base o teorema 2 em que y_1 e y_2 são linearmente independentes. Logo deve-se demonstrar que, se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I. Admitindo que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes e

que existe um ponto x_0 em I para o qual $W\big(y_1(x_0), y_2(x_o)\big) = 0$. Logo existem c_1 e c_2, não nulas, tais que

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$$
$$c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = 0 \qquad (13)$$

Definindo $\qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$

Então, por consequência de (13), $y(x)$ satisfaz também

$$y(x_0) = 0 \qquad y'(x_0) = 0 \qquad (14)$$

Contudo, a função que é identicamente nula atende à equação diferencial e às condições iniciais (14). Dessa forma, de acordo com o Teorema 1, ela se configura como a única solução. Em termos mais simples, $y = 0$, isto é,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

para todo x em I. Contrapondo a suposição de que y_1 e y_2 são linearmente no intervalo. ■

2.4.2.2 Conjunto Fundamental de Soluções

Um conjunto fundamental de soluções em um intervalo I para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem consiste em qualquer par y_1, y_2 de soluções que sejam linearmente independentes.

Teorema 5: Dado que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem em um intervalo I. Logo, qualquer solução $Y(x)$ para essa equação pode ser expressa como uma combinação linear das soluções independentes y_1 e y_2. Em outras palavras, existem constantes C_1 e C_2, de modo que

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Demonstração: Dada a equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, onde Y é uma solução e y_1, y_2 são soluções linearmente independentes da equação em um intervalo I. Assumindo que $x = t$ é um ponto pertencente a esse intervalo, no qual $W\big(y_1(t), y_2(t)\big) \neq 0$. Além disso, considere que os valores de $Y(t)$ e $Y'(t)$ são dados por

$$Y(t) = k_1, \qquad Y'(t) = k_2.$$

Analisando o sistema de equações

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1$$
$$C_1 y'_1(t) + C_2 y'_2(t) = k_2,$$

Consequentemente, podemos encontrar C_1 e C_2 de forma única, desde que o determinante dos coeficientes atenda à seguinte condição

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

No entanto, este determinante é nada mais que o wronskiano calculado no ponto $x = t$ e, segundo a hipótese, $W \neq 0$. Estabelecendo a função,

$$G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Nota-se que:

a) A função $G(x)$ atende à equação diferencial, pois resulta da sobreposição de duas soluções, y_1 e y_2.

b) G(x) cumpre as condições iniciais

$$G(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1$$

$$G'(t) = C_1 y'_1(t) + C_2 y'_2(t) = k_2.$$

c) $Y(x)$ supre a mesma equação linear e as mesmas condições iniciais.

Como a solução para esse PVI é única de acordo com o teorema 1, tem-se $Y(x) = G(x)$, ou

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

O próximo teorema fornece a resposta essencial à questão da existência de um conjunto fundamental para uma equação linear.

Teorema 6: Existência de um Conjunto Fundamental

Seja a equação diferencial linear homogênea de ordem n:

$$y^n + p_{n-1}(x) y^{n-1} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$$

onde os coeficientes $p_i(x)$ são funções contínuas em um intervalo II. Então, existe um conjunto fundamental de soluções, ou seja, um conjunto de nn soluções linearmente independentes:

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

tal que qualquer solução geral da equação pode ser escrita como uma combinação linear dessas soluções:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$, onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Demonstração: Pelo teorema da existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, sabemos que, dado um ponto x_0 e condições iniciais arbitrárias $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$, existe uma solução única para a equação.

Escolhemos n conjuntos diferentes de condições iniciais, cada um com um vetor inicial diferente da forma:

$$y_k(x_0) = \delta_{k1}, y'_k(x_0) = \delta_{k2}, \dots, y_k^{n-1}(x0) = \delta_{kn}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que vale 1 se $i = j$ e 0 caso contrário. Isso garante que cada solução $y_k(x)$ gerada seja diferente das outras.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Pelo teorema de Abel (teorema de potência), essa matriz satisfaz a equação diferencial:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int p_n-1(x)dx}$$

Como as condições iniciais escolhidas são de forma que $W(x_0) \neq 0$, segue que $W(x) \neq 0$ para todo x, garantindo a independência linear das soluções. Como tem n soluções linearmente independentes, elas formam um conjunto fundamental de soluções, e qualquer outra solução pode ser escrita como uma combinação linear dessas. ■

2.4.2.3 Método da Variação de Parâmetros ou Método Lagrange

O Método de Variação de Parâmetros, também conhecido como Método de Lagrange, é empregado na determinação de uma solução específica para uma equação diferencial não homogênea. Este método envolve a suposição de que as constantes (parâmetros) na solução geral da equação homogênea associada são expressas como funções da variável independente. Em seguida, impõe-se que essa nova função seja uma solução particular da equação diferencial ordinária (EDO).

O método envolve a obtenção da solução geral da equação homogênea associada, seguida pela substituição das constantes por duas funções, $u(x)$ e $v(x)$. Posteriormente, impõe-se que a nova função $y(x) = u(x)y_1 + v(x)y_2$ seja uma solução particular da equação.

Com base nisso, deduzem-se as expressões de $u(x)$ e $v(x)$, resultando na determinação da solução particular.

Para utilizar esse método de solução existem algumas etapas a seguir como:

- Solução da EDO homogênea associada
- Variação dos parâmetros
- Impor uma condição
- Substituir as equações na EDO
- Resolver o sistema pela regra de Cramer

Considerando as fases a serem percorridas, serão detalhadas a seguir cada uma dessas etapas para a demonstração do método de solução.

Seja a EDO de segunda ordem:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{15}$$

onde p(t), q(t) e g(t) são funções contínuas em um intervalo I.

Assumindo que uma solução geral da equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{16}$$

é previamente conhecida, associada à equação não homogênea (15). Considerando que y_1 e y_2 constituem um conjunto fundamental de soluções para a equação (16).

O método envolve a suposição de que:

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \tag{17}$$

Ao derivar a função y em relação a t, é obtida:

$$y' = (u_1y_1)' + (u_2y_2)' = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2$$

A condição a ser imposta é que a soma dos termos que contêm $u'_1(t)$ e $u'_2(t)$ devem ser igual a zero. Ao impor essa condição, é possível determinar $u(t)$ e $v(t)$. Isso porque, ao substituir y_p na equação, obtém-se uma única equação que envolve alguma combinação de $u_1(t)$ e $u_2(t)$, agregado a suas primeiras e segundas derivadas.

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \Rightarrow y' = u_1y'_1 + u_2y'_2 \tag{18}$$

Derivando:

$$y'' = u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_2y'_2 + u_2y''_2 \tag{19}$$

Substituindo as equações (17), (18) e (19) em (15), é obtida

$$u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_2y'_2 + u_2y''_2 + p(t)[u_1y'_1 + u_2y'_2] + q(t)[u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)] = g(t)$$

Simplificando:

$$u_1(y''_1 + py'_1 + qy'_1) + u_2(y''_2 + py'_2 + qy'_2) + u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = g(t) \tag{20}$$

com

$$(y''_1 + py'_1 + qy'_1) = 0 \text{ e } (y''_2 + py'_2 + qy'_2) = 0$$

Dado que y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada, podemos concluir que a equação (20) é simplificada para:

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t)$$

Resumindo, obtêm-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t) \end{cases}$$

Uma solução única para este sistema é encontrada em u'_1 e u'_2, uma vez que o determinante $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$.

Tem-se:

$$u'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y'_2 \end{vmatrix}}{W\big(y_1, y_2(t)\big)}$$

e

$$u'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(t) \end{vmatrix}}{W\big(y_1, y_2(t)\big)}$$

onde $W\big(y_1, y_2(t)\big)$ é o Wronskiano.

Daí,

$$u'_1 = \frac{-y_2 g(t)}{W(y_1, y_2(t))} \text{ e } u'_2 = \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2(t))}$$

Integrando as duas expressões, tem-se:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2 g(t)}{W\big(y_1, y_2(t)\big)} dt + c_1$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{y_1 g(t)}{W\big(y_1, y_2(t)\big)} dt + c_2$$

Portanto, a solução geral para a equação (15) é:

$$y(t) = y_c + Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u_1(t) y_1 + u_2(t) y_2$$

3. COMANDOS DE RESOLUÇÃO DE EDOS DE SEGUNDA ORDEM UTILIZANDO O WXMÁXIMA

A abordagem deste capítulo será nas resoluções de EDOs de segunda ordem utilizando o software Wxmáxima, onde pode-se demonstrar a praticidade dos comandos do software para executar essas resoluções, lembrando que para sua utilização o usuário não precisa ser um programador experiente, sendo necessário apenas um conhecimento básico de informática, assim rompendo o paradigma com a dificuldade que muitos encontram ao solucionar problemas matemáticos aliado aos softwares computacionais.

3.1 wxMáxima

O Máxima pode ser considerado uma melhoria de uma versão de 1982 do Macsyma (foi o software original criado em 1968 e ficou em circulação até 1982 quando o criador resolveu realizar a sua melhoria), que foi desenvolvida no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts) com fundos do Departamento de energia dos Estados Unidos e outras agências governamentais. A última versão do software original, foi mantida por seu criador Bill Schelter de 1982 até o seu falecimento em 2001. E somente em 1998 Schelter obteve autorização do Departamento de energia para liberar sua versão sob a GPL (Licença Pública Geral GNU), pois até aquele ano, a licença do software era de domínio privado, ou seja, só tinha quem comprasse a mesma. Tal versão, hoje chamada de Máxima, é acondicionada a um grupo autônomo de usuários e desenvolvedores. O Máxima não abrange nenhuma das várias modificações e melhorias feitas à versão comercial do Macsyma durante o período de 1982 a1999. Apesar das funcionalidades centrais serem semelhantes, um código que dependa dessas melhorias pode não operar no Máxima, e erros que já foram solucionados no Macsyma ainda podem existirem no Máxima, e vice-versa.

O wxMaxima representa uma ferramenta de software de código aberto projetada para a execução de cálculos matemáticos por meio da manipulação de expressões simbólicas e numéricas. Suas funcionalidades abrangem diversas operações, como diferenciação, integração, resolução de equações diferenciais ordinárias, solução de sistemas de equações lineares, manipulação de vetores, matrizes, entre outras. Adicionalmente, destaca-se que o wxMaxima proporciona resultados de elevada precisão e possui a capacidade de gerar representações

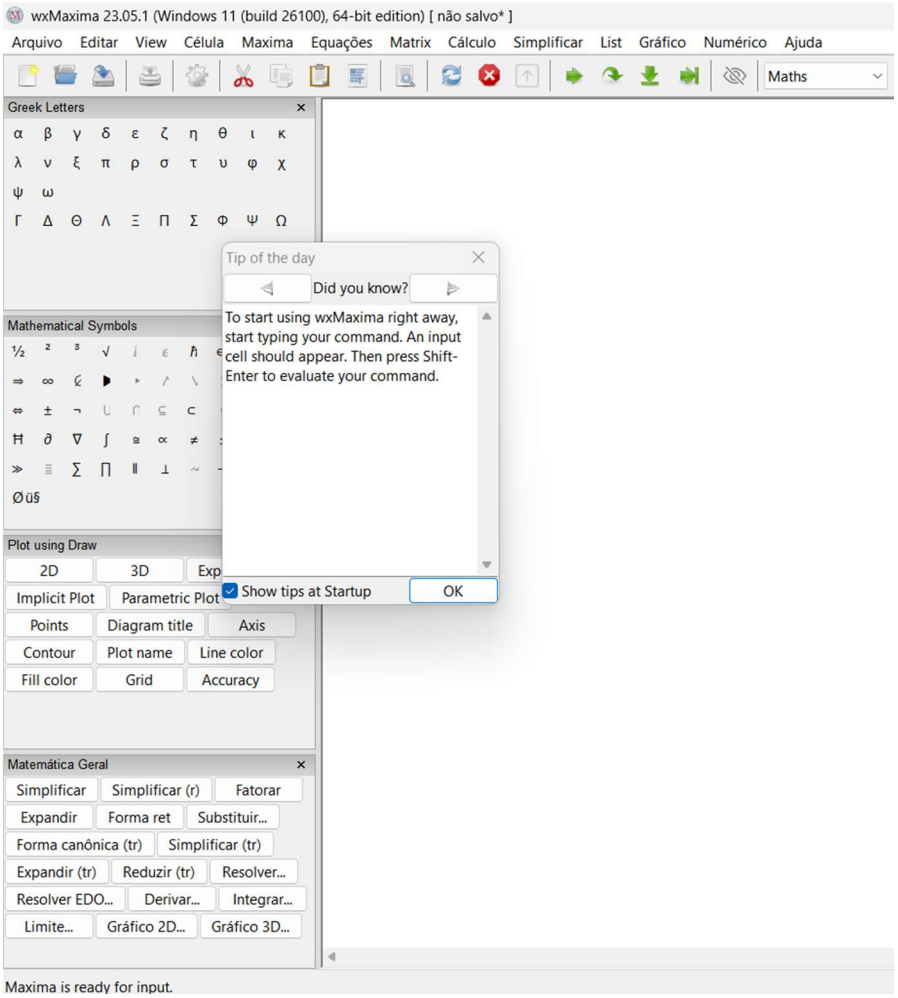
gráficas de funções em duas e três dimensões (FLORES, et al. 2013, p.4). O software é de naturalidade open source, com seu código livre (onde o usuário pode alterar comandos e sua interface) e gratuito, estando disponível para download para qualquer sistema operacional.

3.1.1 Interface e Comandos

A interface visual do wxMaxima é bastante simples e de fácil compreensão, assim o usuário pode encontrar com facilidade o que se busca.

O wxMaxima permite gerar diversos comandos para resolução de expressões, diferenciais e integrais, gráficos, etc. Para isso, basta escolher o item desejado no menu da interface. Portanto neste subtópico será demonstrado apenas os comandos que serão utilizados nesse trabalho.

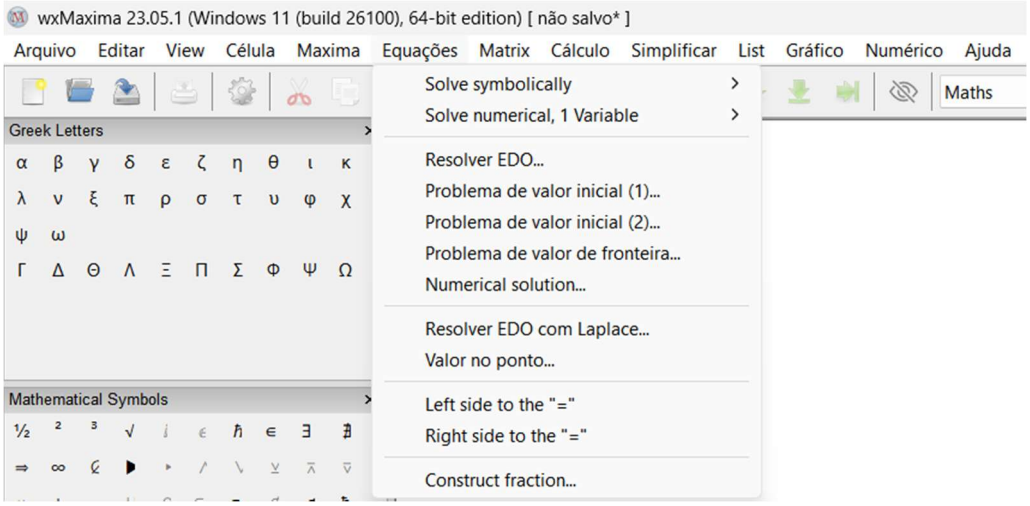
Figura 3 – Interface inicial do software wxMaxima



Fonte: Autoria Própria

Na figura 3, é vista a interface inicial, onde se pode visualizar na parte de cima o nome do software e sua versão, logo abaixo o menu e suas abas, no lado esquerdo alguns atalhos e no lado direito o histórico, no mesmo lado logo abaixo fica a tabela de conteúdo.

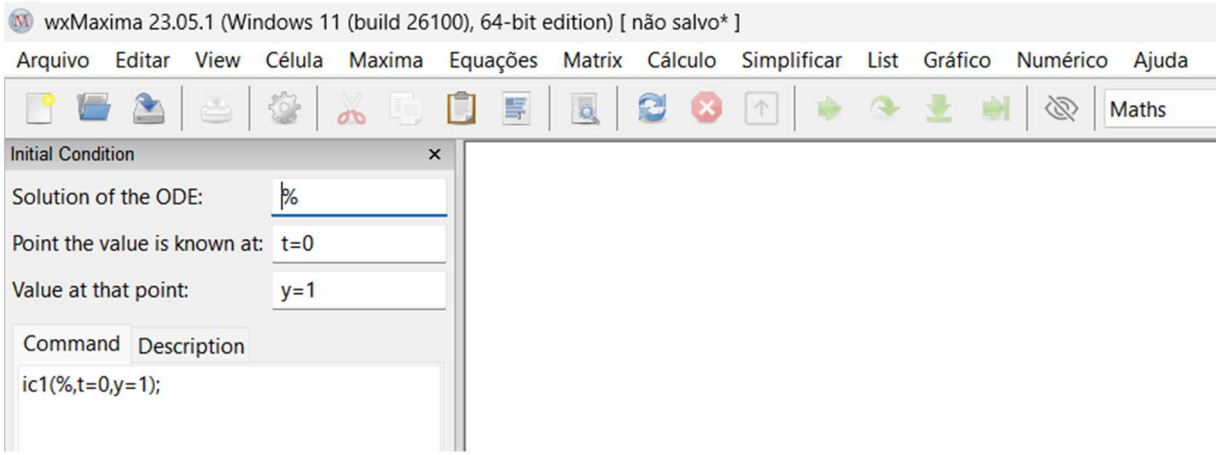
Figura 4 – Interface do menu equações do software wxMaxima



Fonte: Autoria Própria

Na figura 4, é demonstrada a interface do menu equações, onde é possível visualizar alguns dos comandos que serão utilizados neste trabalho, estes comando são: Problema de valor inicial (1), Problema de valor inicial (2), Resolver EDO com Laplace

Figura 5 – Interface do menu equações: Problema de valor inicial (1)



Fonte: Autoria Própria

Na figura 5, demonstra a caixa de comando para informar os valores de problema inicial onde:

Solution of the ODE (solução da EDO): deve-se colocar qual é a célula a ser analisada, ou seja, a célula que possui a EDO;

point the value is know at: primeiro valor de problema inicial;

value at that point: segundo valor de problema inicial.

3.2 Resolução de EDOs de Segunda Ordem

No WxMaxima, é possível resolver equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem utilizando o comando ode2(equação, variavel_dependente, variavel_independente); Esse comando analisa a equação e aplica o método de solução adequado até encontrar a solução geral, retornando-a de forma explícita ou implícita. Caso nenhuma solução seja encontrada, o comando retorna false. As constantes de integração são representadas como %k1 e %k2 para equações de segunda ordem. Para descobrir qual método foi utilizado pelo WxMaxima na solução da equação, basta usar o comando method. Porém como já foi informado este estudo tem como base somente as edo's linear de segunda ordem, portanto não serão mencionadas as de primeira ordem.

Para resolver uma PVI utiliza-se o comando ic2.

Ex: Resolva a edo a seguir:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Para a esta resolução é utilizado os comandos ode2 para definir que a equação é uma EDO de segunda ordem, ic2 para indicar que a EDO possui um PVI, avaliar célula(s) . No software é descrita a EDO e avalia-se a célula para que haja uma solução. Outro método para definir que a equação a ser solucionada é uma EDO de segunda ordem é utilizar o seguinte comando: 'diff(x, t,2). Essa seria a estrutura da solução no software:

ode2 ('diff (y,t,2) + 5 . 'diff (y,t) + 6 . y=0,y,t);

ic2 (%, t=0, y=2, 'diff (y,t) =3);

y = %k1 %e $^{-(2t)}$ + %k2 %e $^{-(3t)}$

y = 9 %e $^{-(2t)}$ -7 %e $^{-(3t)}$

Obs: a variável x e t não é fixa, podendo ser alterada para qualquer outra variável, o que não se pode mudar é o número 2, pois é ele que define a equação como de segunda ordem.

Para fins de análise, demonstra-se a solução desta mesma EDO sem a utilização do software:

Para resolver a EDO de segunda ordem devemos seguir alguns passos

Resolver a equação característica

A equação característica associada é:7

$r^2 + 5r + 6 = 0$

Resolvemos essa equação quadrática:

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{(5^2 - 4.1.6)}}{2.1} = \frac{-5 \pm \sqrt{(25 - 24)}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Portanto, as raízes são:

$r_1 = -2$ e $r_2 = -3$

Solução geral

A solução geral para a EDO é dada por:

$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$,

Onde e são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

Determinar as constantes

Derivar para usar a segunda condição inicial:

$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$.

Usando $y(0) = 2$:

$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 2$

Usando $y'(0) = 3$:

$y'(0) = -2C_1 e^0 - 3C_2 e^0 = -2C_1 - 3C_2 = 3$.

Resolver o sistema de equações lineares:

$C_1 + C_2 = 2$;
$-2C_1 - 3C_2 = 3$.

Substituir na segunda equação:

$-2C_1 - 3(2 - C_1) = 3$

$-2C_1 - 6 + 3C_1 = 3$,

$C_1 = 9$.

Substituir na primeira equação:

$9 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -7$.

Solução final

Substituir os valores de e na solução geral:

$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$.

Obs: em alguns casos, a solução só será obtida com a utilização de um fator integrante. O comando intfactor; verifica se um fator integrante foi utilizado e o retorna. Caso contrário, o comando retorna false.

Um exemplo clássico onde é necessário o uso de um fator integrante é de equações lineares não homogêneas. O fator integrante pode ser uma função que, quando multiplicada por ambos os lados da equação diferencial, torna-a mais fácil de resolver.

Ex: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

Para esta equação ser resolvida no wxMaxima, é necessário definir o fator integrante, multiplicar a EDO pelo fator integrante, simplificar a equação, integrar duas vezes a equação, substituir o fator integrante para poder encontrar a solução geral: $y(x) = (C_1x + C_2) - e^{-4x}$. A figura 6 demonstra os passos seguidos no software:

Figura 6 – Solução de uma EDO utilizando o fator integrante no software wxMaxima

```
(%i16) intfactor(x)·('diff(y,x,2) + 4· 'diff(y,x) + 4·y(x) = 0)
       ('diff(intfactor(x)·y,x,2) = 0);
       y(x) = (C1·x + C2)/intfactor(x);
       y(x) = (C1·x + C2)·exp(−4·x);
```

$$(\%o14)\ \left(\%e^{4x}\right)(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}y+4\left(\frac{d}{dx}y\right)+4\,y(x)=0\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(\%e^{4x}\right)(x)\,y\right)=0\right)$$

$$(\%o15)\ y(x)=\frac{C1\,x+C2}{\left(\%e^{4x}\right)(x)}$$

$$(\%o16)\ y(x)=(C1\,x+C2)\,\%e^{-(4x)}$$

Fonte: Autoria Própria

É possível averiguar que após realizada a solução da EDO da maneira habitual, a solução pelo software é mais eficaz pois, torna o processo de solução mais rápido, onde a mesma é realizada diretamente, sem precisar seguir cada um dos passos habituais.

4. MODELO MATEMÁTICO RESOLVIDO UTILIZANDO O WXMAXIMA

Um modelo matemático consiste em um conjunto de símbolos e relações matemáticas que de alguma maneira representam o objeto em estudo. Pode-se conceber o modelo como uma síntese reflexiva de uma parcela da realidade. Sua finalidade reside em elucidar ou compreender a situação sob análise, permitindo, eventualmente, intervenções eficazes. Mesmo as circunstâncias mais singelas proporcionam estímulos para a iniciação científica (BASSANEZI, 2002). Nesse tópico do trabalho a abordagem central será modelo matemático de EDO linear de segunda ordem e sua resolução, porém esta será realizada através do software wxMaxima.

4.1 Movimento Harmônico Simples (MHS): Sistema Massa Mola

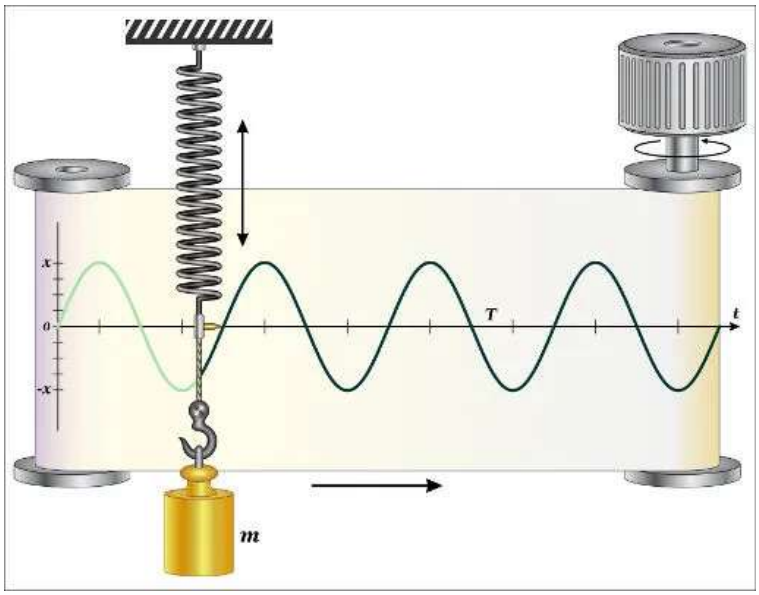
Um sistema físico denominado oscilador massa-mola (OMM) é constituído por uma mola ideal com constante elástica k, conectada a um corpo de massa m. Ao ser esticada ou comprimida, a mola armazena energia potencial elástica, que, ao ser liberada, é transformada periodicamente em energia cinética.

O MHS é o tipo mais comum de oscilador harmônico, onde seu resultado é o efeito gerado por uma força que busca manter uma partícula ou um sistema de partículas em uma posição de equilíbrio, assemelhando-se ao caso de uma mola esticada ou comprimida, que fica sujeita à influência de uma força elástica.

> "Dentre todos os movimentos oscilatórios, o mais importante é o movimento harmônico simples (MHS), porque além de ser o movimento mais simples de descrever matematicamente, constitui uma descrição bastante precisa de muitas oscilaçoes encontradas na natureza." (FINN, 1972)

A combinação da segunda lei de Newton para o movimento com a lei de Hooke permite derivar uma equação diferencial que governa o movimento de uma massa ligada a uma mola (ZILL, 2010).

Figura 7: Ilustração de um MHS



Autor: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm

4.1.1 Exemplo de Movimento Harmônico Simples

Para calcular o deslocamento vertical $x(t)$ de uma massa atada a uma mola, é usada duas leis impíricas: segunda lei de Newton do movimento e a lei de Hooke. A primeira delas diz que é resultante das forças que atuam sobre um sistema em movimento $F = ma$, em que m é a massa e a, a aceleração. A lei de Hooke diz que a força restauradora de uma mola esticada é proporcional ao deslocamento $s + x$; isto é, a força restauradora é $k(s + x)$, em que $k > 0$ é uma constante, s é o deslocamento da mola quando uma massa é atada em sua extremidade e o sistema está em posição de equilíbrio (a massa está pendurada em uma mola e não há movimento). Quando o sistema está em movimento, a variável xx representa o deslocamento da massa em relação à posição de equilíbrio. Nesse caso, a força resultante atuando na massa é simplesmente dada pela segunda lei de Newton, sendo proporcional ao deslocamento e de sentido oposto, ou seja, $F = -kx$, onde k é a constante elástica do sistema, caracterizando um movimento harmônico simples. A força resultante nessa dinâmica é dada pela segunda Lei de Newton, sendo assim, na ausência de amortecimento ou outras forças externas quaisquer que poderiam atuar no sistema, a equação diferencial do movimento vertical do centro de gravidade da massa é:

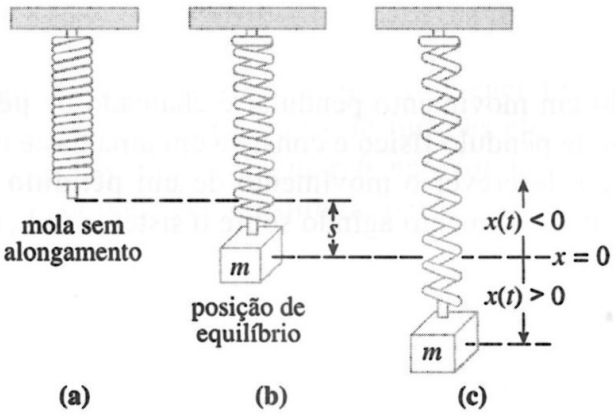
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{21}$$

Aqui, o sinal de subtração indica que a força restauradora da mola atua em direção oposta ao movimento, isto é, na direção de posição de equilíbrio. Na prática, essa equação diferencial de segunda ordem é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{22}$$

em que $\omega^2 = k/m$.

Figura 8: Movimento Harmônico Simples

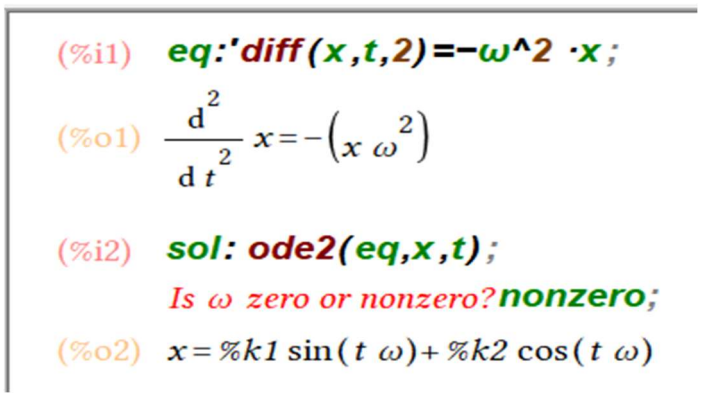


Autor: Zill, 2010

Como a abordagem deste trabalho é o uso do software wxMaxima, agora será demonstrado a resolução deste problema no software.

É possível afirmar por substituição que as funções trigonométricas $sen(ct)$ e $cos(ct)$ satisfazem a equação, desde que $c = \omega$. a utilização do software demonstra essa afirmação.

Figura 9: Solução no software Wxmaxima



Fonte: Autoria Própria

Para solucionar através do software wxmaxima é necessário expressar a EDO utilizando o comando ‘diff(x,t,2), gerar a EDO utilizando o comando avaliar célula(s), expressar

a solução utilizando o comando sol: ode2(eq,x,t), utiliza-se novamente o comando avaliar célula(s), logo, o software retorna com uma pergunta distinguindo que tipo de solução é procurada , ao qual responde-se que ω é diferente de zero, utiliza-se novamente o comando avaliar célula(s), sendo assim, o software encontrará a solução exata para a EDO.

Outra forma de solução no software é a seguinte:

Figura 10: Segundo método de solução

```
(%i3) eq: 'diff(x,t,2)=-ω^2 · x;
      sol: ode2(eq,x,t);
```

$$(\%o1)\quad \frac{d^2}{dt^2}x=-\left(x\,\omega^2\right)$$

Is ω zero or nonzero? **nonzero;**

$$(\%o2)\quad x=\%k1\sin(t\,\omega)+\%k2\cos(t\,\omega)$$

$$(\%o3)\quad \omega=nonzero$$

Fonte: Autoria Própria

Na figura 11 é utilizado o comando computacional ‘diff, sol, avaliar célula(s), da mesma forma é necessário determinar para o software que ω é diferente de zero, com isto o software demonstra a solução exata da EDO.

Para efeitos de comprovação da solução gerada pelo software e demonstração que o mesmo facilita a solução de uma EDO de segunda ordem, segue abaixo a solução manual:

A EDO de segunda ordem é : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2.x$

Para solucionar deve-se supor que a equação tem a seguinte forma: $x(t) = e^{(rt)}$, onde r é uma constante. Com isto, é preciso encontrar a equação característica por substituição temos que $r^2e^{(rt)} + \omega^2e^{(rt)} = 0$.

Dividindo: $r^2e^{(rt)} + \omega^2e^{(rt)} = 0$, por $e^{(rt)}$ obtêm-se $r^2 + \omega^2 = 0$.

Solucionando a equação característica:

$r^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow r^2 = -\omega^2 \rightarrow r = \pm i\omega$

onde i é a unidade imaginária.

Como na equação característica temos duas raízes complexas conjugadas a solução geral é dada por: $x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ ■

4.2 Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

O movimento harmônico amortecido é um sistema físico que combina as características de um movimento harmônico simples com a perda de energia devido à resistência ou amortecimento. Esse sistema é amplamente utilizado para modelar fenômenos naturais e tecnológicos, como o movimento de um pêndulo, a vibração de uma mola ou a oscilação de um circuito elétrico.

O movimento harmônico amortecido é caracterizado por três elementos principais: massa (m) que representa a inércia do sistema, constante elástica (k) que representa a força restauradora que tenta retornar o sistema à sua posição de equilíbrio, coeficiente de amortecimento (b) que representa a perda de energia devido à resistência ou atrito.

A equação de movimento do oscilador harmônico amortecido é dada por:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0$$

onde x(t) é a posição do oscilador em função do tempo, x'(t) é a velocidade e x''(t) é a aceleração.

O comportamento do movimento harmônico amortecido depende do valor do coeficiente de amortecimento (b) em relação à constante elástica (k) e à massa (m). Existem três regimes possíveis: subamortecido onde o sistema oscila com uma frequência angular própria, mas a amplitude das oscilações diminui exponencialmente com o tempo, criticamente amortecido onde o sistema não oscila, mas retorna à posição de equilíbrio de forma exponencial, sobreamortecido, onde o sistema não oscila e retorna à posição de equilíbrio de forma exponencial, mas com uma taxa de retorno mais lenta do que no caso criticamente amortecido.

4.2.1 Exemplo de Movimento Harmônico Amortecido

Uma massa m de peso W está suspensa por uma haste de comprimento l. Para determinar o ângulo β, medido a partir da linha vertical, como uma função do tempo t (considera-se β > 0 à direita de OP, e β < 0 à esquerda de OP). Lembrando que um arco s de um círculo de raio l está relacionado com o ângulo central β através da fórmula s=lβ. Logo, a aceleração angular é

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\beta}{dt^2}$$

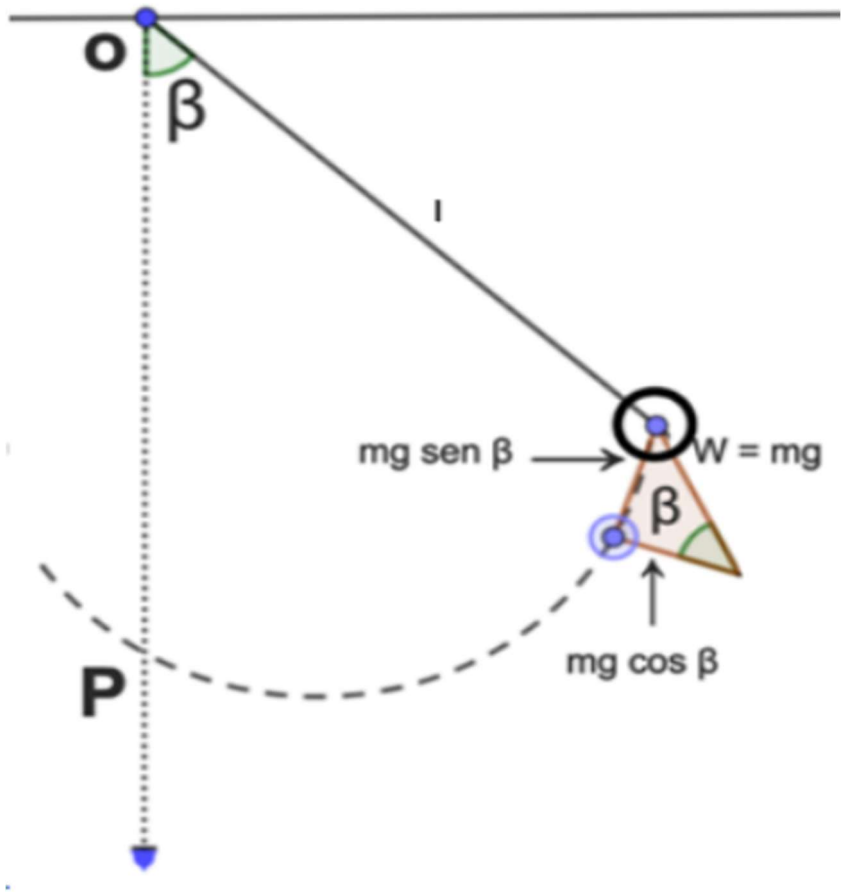
Pela segunda lei de Newton, tem-se

$$F = ma = ml\frac{d^2\beta}{dt^2}$$

Na figura, observa-se que a componente tangencial da força devida ao peso W é mg sen β. Igualando as duas diferentes formulações da força tangencial, é obtida as equações:

$$ml\frac{d^2\beta}{dt^2} = -mgsen\beta \text{ ou } \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\beta = 0. \qquad (23)$$

Figura 11: Representação da força de um pêndulo



Fonte: Autoria Própria

Devido a existência do sen β, a equação diferencial é não linear. É explícito de que essa equação não pode ser resolvida em termos de funções elementares. Então, a equação é mais uma vez simplificada. Se o deslocamento angular β não for muito grande, pode-se usar a aproximação β ≅ β. Sendo assim, (23) pode-se ser substituída pela EDO linear de segunda ordem

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{g}{l}\beta = 0 \qquad (24)$$

Colocando ω =g\l, (24) possui exatamente a mesma estrutura da equação (22) que governa vibrações livres de um peso em uma mola.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa do tema destacou que o wxMaxima facilita a resolução de EDOs de segunda ordem, tornando o processo mais rápido e acessível. A escassez de materiais acadêmicos sobre EDOs de segunda ordem reforça a relevância do trabalho para a comunidade matemática.

Foi evidenciada a importância das EDOs na modelagem de um fenômeno físico, como o exemplo do sistema massa mola, enfatizando o uso do wxMaxima como ferramenta computacional para facilitar a resolução dessas equações. A pesquisa pode apresentar que o software não apenas agiliza os cálculos, mas também proporciona precisão e acessibilidade, permitindo a resolução desses problemas de forma simplificada.

Além disso, a implementação prática de um modelo matemático baseado no Movimento Harmônico Simples demonstrou a aplicabilidade do wxMaxima na resolução de equações diferenciais, evidenciando sua eficácia no auxílio ao ensino e aprendizado de matemática ou qualquer área de ciências exatas, que precise trabalhar essas equações.

Por fim, este trabalho contribui para demonstrar que a adição do uso de ferramentas tecnológicas no ensino de matemática é por sua vez viável, assim, promovendo uma abordagem mais intuitiva e interativa no estudo das EDOs. O wxMaxima se mostrou uma alternativa eficiente e acessível para acadêmicos e profissionais que lidam com equações diferenciais, tornando-se um recurso valioso para futuras pesquisas e aplicações matemáticas.

Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: uma abordagem didático-pedagógica.** 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRONSON, Richard. **Differential Equations.** New York: McGraw-Hill, 1977.

CULLEN, Charles G. **Mathematics for Computer Graphics Applications.** 2. ed. New York: Ellis Horwood, 2001.

FINN, R. **Equilibrium Capillary Surfaces.** New York: Springer, 1972.

FLORES, Marlos et al. **Uso do software wxMaxima para ensino de equações diferenciais.** Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2013.

SANTOS, J. **Introdução às Equações Diferenciais.** 2. ed. São Paulo: Edusp, 2007.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações e Modelagem.** 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.