

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

CAIO MORENO LISBOA MENDES

Equações de Friedmann e a Expansão do Universo

Belém
2023

CAIO MORENO LISBOA MENDES

Equações de Friedmann e a Expansão do Universo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
colegiado da Faculdade de Física da Universidade
Federal do Pará como requisito parcial para a ob-
tenção do grau de Licenciado em Física

Orientador: Prof. Dr. Isaac Torres Sales

Belém
2023

Dedico à Maria do Carmo, minha avó.

*Tropeçavas nos astros desastrada
mas pra mim foste a estrela entre as estrelas.*

Caetano Veloso

Agradecimentos

Agradeço ao professor Isaac Torres Sales pela orientação e compreensão, à Camila, minha companheira, à Katiane, minha mãe, a Reversion Carlos, meu pai, e aos amigos.

Resumo

A cosmologia relativística nasceu como forma de explicar a dinâmica do universo através da Relatividade Geral, teoria desenvolvida por Albert Einstein em 1915 para a gravitação, que é o ponto de partida para explorarmos esta dinâmica, além de outros problemas encontrados ao longo do estudo. A primeira solução de Einstein para um modelo de universo sugeria um universo estático. No entanto, dados observacionais feitos pelo astrônomo Edwin Hubble e as soluções obtidas pelo matemático Aleksandr Friedmann sugeriam um cenário de expansão do universo. Ao longo da história, outros cientistas desenvolveram diversos modelos considerando diferentes parâmetros contidos nas soluções. Neste trabalho, revisamos as soluções mais importantes das Equações de Friedmann para a descrição da expansão do universo, sem levar em consideração as perturbações cosmológicas.

Palavras-chave: Cosmologia, Relatividade Geral, Equações de Friedmann, Soluções Cosmológicas.

Abstract

Relativistic cosmology emerged as a way to explain the dynamics of the universe through General Relativity, a theory developed by Albert Einstein in 1915 to describe gravity, which serves as a starting point to explore this dynamics, along with other problems encountered during the study. Einstein's initial solution for a model of the universe suggested a static universe. However, observational data by astronomer Edwin Hubble and solutions obtained by mathematician Aleksandr Friedmann suggested a scenario of an expanding universe. Throughout history, other scientists have developed various models considering different parameters contained within the solutions. In this work, we review the most important solutions of the Friedmann Equations for describing the expansion of the universe, without taking into account cosmological perturbations.

Keywords: Cosmology, General Relativity, Friedmann Equations, Cosmological Solutions.

Abreviações

FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
RG	Relatividade Geral
GN	Gravitação Newtoniana

Sumário

1	Introdução	1
2	Equações de campo de Einstein	4
2.1	Tensor Métrico	4
2.2	Tensor de Curvatura	5
2.3	Identidade de Bianchi	6
2.4	Tensor Energia-Momento	6
2.5	Equações de Einstein	7
2.6	A constante cosmológica Λ	7
2.7	Tensor energia-momento de um fluido perfeito	8
3	Elementos de cosmologia	10
3.1	Métrica de FLRW	10
3.2	Equações de Friedmann e Raychaudhuri	11
3.3	Equação da continuidade	14
3.4	Universo de De Sitter	15
3.5	Universo dominado por radiação	16
3.5.1	Universo fechado	16
3.5.2	Universo plano	17
3.5.3	Universo aberto	17
3.6	Universo dominado por poeira	17
3.7	Fluido perfeito	18

Sumário	xv
4 Conclusão	21
Referências Bibliográficas	22

Capítulo 1

Introdução

Os estudos e ideias sobre a origem e a evolução do universo estão presentes há muito tempo entre os estudiosos, que ao longo da história propuseram diversos modelos para explicar como tudo começou [1]. Dentre os modelos mais conhecidos, temos a hipótese de Kant-Laplace, que propunha que o sistema solar teria sido formado pela rotação de uma grande nebulosa, ou o modelo do matemático Inglês W. F. Sedgwick que sugere que uma forte maré causada pela passagem de uma estrela próxima ao Sol teria dado início à formação dos planetas a partir do resíduo solar extraído dessa interação. Todos esses modelos eram baseados na Gravitação Newtoniana (GN).

Atualmente, nossos estudos sobre a formação e evolução do universo são baseados nas soluções das equações de Einstein para a gravitação, a chamada Relatividade Geral (RG), que é descrita por uma geometria não-euclidiana, através de entidades algébricas chamadas de tensores. A partir dessas equações, que consistem de Equações Diferenciais Parciais (EDP) não lineares, vários físicos obtiveram as mais diversas soluções. A primeira solução foi a do alemão Karl Schwarzschild em 1916 [2].

Já em 1917, Einstein, buscando seu modelo de universo estático, insere um termo Λ em sua equação, conhecido como **constante cosmológica**, que provoca uma repulsão para contrabalançar a tendência atrativa da gravidade, como forma de encontrar uma solução estática [3]. No mesmo ano, Willem de Sitter obtém as primeiras soluções dinâmicas [4]. Em 1922, o matemático russo Aleksandr Friedmann apresenta duas soluções não-estáticas [5], baseadas na hipótese de distribuição uniforme de matéria no universo, em que o universo

observável possui uma distribuição de matéria e energia homogênea e isotrópica em larga escala, o chamado princípio cosmológico. Uma delas descrevia um universo em expansão e a outra, um universo em contração. Em 1927, Lemaître obteve uma solução utilizando o modelo de de Sitter conjuntamente com o de Einstein, encontrando uma solução de transição entre ambas [6]. Suas equações sugeriam que o universo em seu início se reduzia a um “ovo cósmico”, e que teve início a partir do que conhecemos popularmente como “Big-Bang”.

Em 1929, o astrônomo Edwin Hubble, através de observações [7], obteve um gráfico das distribuições das galáxias, como vemos ao lado esquerdo da Figura 1.1.

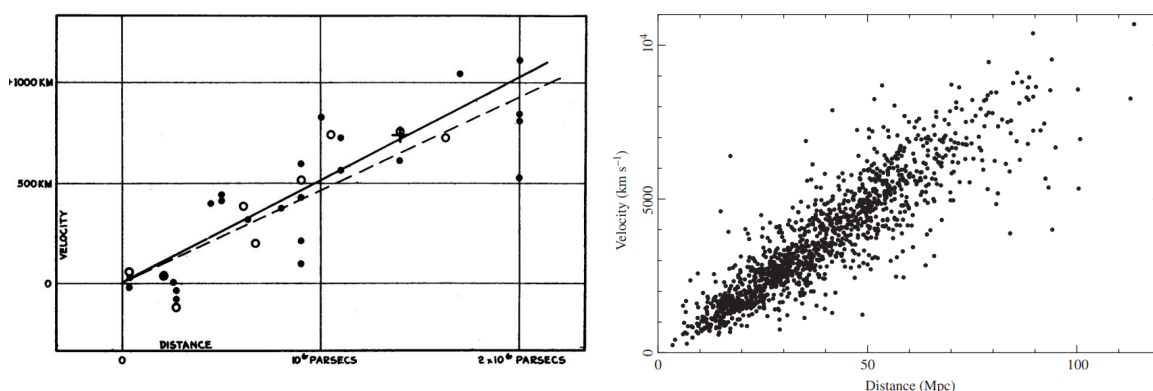


Figura 1.1: Gráficos da velocidade de recessão em função da distância, onde o gráfico da esquerda foi obtido por Hubble [7] e o da direita apresenta dados mais recentes, extraídos de [8].

Ao calcular as distâncias entre essas galáxias, Hubble afirmou que elas se afastavam umas das outras com uma velocidade v diretamente proporcional à distância d entre elas: $v = H_0 d$. Percebemos que, de acordo com as observações acima, a natureza linear da lei de Hubble se torna mais evidente de acordo com o aumento da escala de observação. Isso se deve à homogeneidade do universo para grandes escalas. Hubble, limitado pelos telescópios da época, obteve uma escala de 2Mpc [7], enquanto dados mais atuais abrangendo um conjunto em torno de 1355 galáxias, alcançam os 100Mpc [8], apresentados no gráfico à direita da Figura 1.1. Os pontos (galáxias) mais próximos do perfil linear movem-se de acordo com a velocidade de recessão; as que estão mais dispersas movem-se com a chamada velocidade peculiar.

A velocidade de recessão mede o aumento da seção espacial causado pela expansão.

Em resumo, vimos neste Capítulo um breve histórico sobre as principais ideias e observações que contribuíram para o nascimento da cosmologia moderna. No Capítulo 2, revisitaremos a

equação de campo de Einstein, a partir da qual se obtém as soluções, a partir de uma dada métrica para um universo homogêneo e isotrópico. No Capítulo 3, introduziremos a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [9] para obter as equações de Friedmann e de aceleração, o que nos permite descrever os primeiros modelos cosmológicos de expansão.

Capítulo 2

Equações de campo de Einstein

Neste Capítulo, revisamos a descrição matemática da Relatividade Geral, para que possamos discutir a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e as equações de Friedmann e Raychaudhuri. Antes de abordarmos a gravitação einsteniana, que descreve a cosmologia moderna, vejamos alguns elementos da geometria diferencial [10].

2.1 Tensor Métrico

Consideremos uma variedade diferenciável e que podemos calcular a distância espaço-temporal entre dois eventos através do elemento de linha ds . Nela definimos um tensor métrico covariante de ordem dois $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Com os índices $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$. O tensor métrico, ou métrica, possui informações importantes a respeito do espaço-tempo, a partir dela podemos extrair componentes do tensor de curvatura, por exemplo, do qual estudaremos os espaços curvos e suas propriedades.

Podemos representa-la de forma matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Nós a utilizamos para extrair componetes dos demais tensores.

2.2 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura ou **tensor de Riemann**, cujas componentes são representadas por $R^\lambda_{\mu\beta\nu}$, é definido em uma variedade diferenciável. Através dele podemos definir se estamos diante de um campo gravitacional. Caso ele seja nulo, significa que estamos diante de um espaço plano, ou seja, sem gravidade. O definimos como:

$$R^\lambda_{\mu\beta\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad (2.2)$$

sendo o termo $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ acima conhecido como conexão. Suas componentes são definidas a partir da métrica da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) . \quad (2.3)$$

A partir de uma contração do tensor de Riemann resulta o **tensor de Ricci**:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} . \quad (2.4)$$

Como veremos, a partir de uma dada métrica, o cálculo do tensor de Ricci é um passo fundamental para determinar as equações de Einstein de um sistema físico.

Por sua vez, contraindo o tensor de Ricci, obtemos o chamado **escalar de Ricci**:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.5)$$

Este escalar é fundamental na RG, aparecendo nas equações de Einstein e também na formu-

lação lagrangeana da RG.

2.3 Identidade de Bianchi

A **Identidade de Bianchi** é uma propriedade do tensor de Riemann:

$$R^{\lambda\mu}{}_{\nu\alpha;\beta} + R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta;\nu} + R^{\lambda\mu}{}_{\beta\nu;\alpha} = 0 \quad (2.6)$$

em que $R^{\lambda\mu}{}_{\nu\alpha;\beta}$ é a **derivada covariante** do tensor de Riemann. Ao contrairmos duplamente (2.6), obtemos:

$$(R^{\lambda}{}_{\beta} - \frac{1}{2}g^{\lambda}_{\beta}R)_{;\lambda} = 0, \quad (2.7)$$

a qual definimos o **tensor de Einstein**:

$$G^{\lambda}{}_{\beta} = R^{\lambda}{}_{\beta} - \frac{1}{2}g^{\lambda}_{\beta}R, \quad (2.8)$$

que pela identidade de Bianchi, temos:

$$G^{\lambda}{}_{\beta;\lambda} = 0. \quad (2.9)$$

A equação acima está associada a uma **lei de conservação** no contexto da RG, como pode-se concluir após a equação de Einstein.

2.4 Tensor Energia-Momento

O **Tensor Energia-Momento** $T_{\mu\nu}$ é um tensor que representa conteúdo de matéria e energia do espaço-tempo, ou seja, ele representa a fonte de gravitação, uma vez que a presença de matéria no espaço induz a sua curvatura. Podemos obter a lei de conservação referida acima no contexto da RG, aplicando a derivada covariante no tensor, então:

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0, \quad (2.10)$$

este é o critério para o **princípio do acoplamento mínimo** [10], a partir deste princípio chegamos ao **princípio da relatividade geral**.

2.5 Equações de Einstein

Em 1915, Einstein propõe a equação abaixo, conhecida hoje como equação de Einstein da Relatividade Geral:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} , \quad (2.11)$$

em que k é uma constante. A equação acima significa que a presença de matéria no espaço-tempo induz a sua curvatura e, reciprocamente, a curvatura do espaço-tempo determina o seu movimento.

Para determinar o valor de k , aplicamos a Eq. (2.11) no chamado limite Newtoniano, o que fornece o valor:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} . \quad (2.12)$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação de Einstein como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.13)$$

2.6 A constante cosmológica Λ

Em 1917, Einstein reformula sua equação de campo adicionando a **constante cosmológica** Λ à sua equação. Ele considerou que em escalas cosmológicas a gravidade comportava-se de maneira diferente, havendo um efeito parcialmente repulsivo [11], e que com a (2.13) o universo colapsaria em razão de ser um fluido autogravitante.

Na época, para contornar este problema, Einstein adicionou uma constante Λ à sua equação, da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} . \quad (2.14)$$

O efeito desta constante é equivalente a uma força repulsiva, com o intuito de contrabalançar o caráter atrativo da gravidade, evitando assim o colapso gravitacional [12].

Podemos entender melhor o significado de Λ tomando, por exemplo, o limite newtoniano, o que conduz a:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho - c^2\Lambda r^2, \quad (2.15)$$

cuja solução para uma distribuição esférica de matéria M com densidade constante é dada por, segundo [12]:

$$\phi = -\frac{GM}{r} - \frac{c^2\Lambda r^2}{6}. \quad (2.16)$$

Dessa forma, concluímos que

$$\nabla\phi = \frac{GM}{r^2} - \frac{c^2\Lambda r}{3}. \quad (2.17)$$

Então, como estamos considerando o limite newtoniano, podemos aplicar a segunda lei de Newton na forma

$$F = -m\nabla\phi \quad (2.18)$$

para concluir que a força total sobre uma partícula de massa m é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} + \frac{mc^2\Lambda r}{3}\hat{r}. \quad (2.19)$$

Vemos, então, que o segundo termo da equação tem sentido contrário em relação ao primeiro, e que equivale a uma força de repulsão.

2.7 Tensor energia-momento de um fluido perfeito

O tensor energia-momento é um tensor de segunda ordem, cujas componentes podem ser escritas como:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

O elemento T_{00} representa uma densidade de energia, os elementos T_{i0} , T_{0j} e T_{ij} representam: a densidade de fluxo de momento, a densidade de fluxo de energia e a pressão e as tensões internas do fluido, respectivamente.

Tendo isso em vista, e considerando que, na cosmologia, o universo é **homogêneo** e **isotrópico** em largas escalas, o que implica no **princípio cosmológico**, sendo modelado como um **fluido perfeito**. O tensor energia-momento de um fluido perfeito relativístico pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = [\rho(t) + p(t)]u_{\mu}u_{\nu} - g_{\mu\nu}p(t) , \quad (2.21)$$

em que $\rho(t)$ é a densidade de matéria-energia, $p(t)$ é a pressão do fluido e u_{μ} é sua 4-velocidade. Este tipo de fluido possui viscosidade nula, tensão de cisalhamento e não conduz calor. Apesar de ser um modelo simples, descreve bem o universo em grandes escalas.

Capítulo 3

Elementos de cosmologia

Neste Capítulo, introduziremos os elementos da cosmologia moderna no espaço de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

3.1 Métrica de FLRW

Em 1929, Robertson em seu artigo [9] apresenta a métrica para um universo representado por uma hipersuperfície quadri-dimensional:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{a^2}{k^2}, \quad (3.1)$$

Aplicando as devidas manipulações algébricas [8] para a expressão acima obtemos a métrica de FLRW para um espaço homogêneo e isotrópico que é dada por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.2)$$

utilizaremos esta métrica que satisfaz o chamado **princípio cosmológico**, que diz que diferentes observadores presentes no universo em expansão devem ter a mesma interpretação sobre as propriedades do universo, que ele seja homogêneo em grandes escalas, e que possua isotropia, ou seja, sem direções privilegiadas para quaisquer observadores.

Portanto, temos que, $a(t)$ é o **fator de escala** e é uma função em que o valor exato depende do conteúdo material predominante. O parâmetro K é a chamada curvatura da seção

espacial e pode assumir os valores $+1$, 0 ou -1 .

Para valores de K podemos ter: um universo esférico, plano ou hiperbólico, respectivamente. A (3.2) aplica-se a todos os três tipos de universo acima, bastando fixar o valor de K para cada um.

3.2 Equações de Friedmann e Raychaudhuri

Vejamos agora como obter as equações de Friedmann e Raychaudhuri a partir da métrica de FLRW [5]. Estas equações são fundamentais para obtermos as soluções que descrevem os modelos de universo que abordaremos ao final do capítulo. Primeiramente devemos resolver a equação de Einstein (2.13), obtendo o tensor métrico e calculando as componentes dos tensores de Ricci e escalar de Ricci.

Considerando $c = 1$, temos que o tensor métrico de (3.2) é dado por:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \frac{1}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Devido à propriedade de simetria da métrica, calculamos sua inversa:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-Kr^2)}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Dada a métrica, podemos calcular (2.13). Obtendo as componentes da conexão(2.3):

Para o índice $\alpha = 0$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2},$$

$$\Gamma_{22}^0 = r^2 \alpha \dot{\alpha},$$

$$\Gamma_{33}^0 = r^2 \alpha \dot{\alpha} \text{sen}^2 \theta,$$

Para $\alpha = 1$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Kr}{1 - Kr^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - Kr^2),$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1 - Kr^2) \text{sen}^2 \theta,$$

Para $\alpha = 2$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha},$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen} \theta \cos \theta,$$

Para $\alpha = 3$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg \theta,$$

As demais conexões:

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha},$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r},$$

Calculando o tensor de Ricci:

$$R_{00} = -3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \tag{3.5}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2K)g_{ij}, \quad (3.6)$$

Calculando o escalar de Ricci:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right), \quad (3.7)$$

Dada as expressões acima escrevemos o tensor de Einstein:

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right), \quad (3.8)$$

$$G_{ij} = - \left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} \right) g_{ij}, \quad (3.9)$$

Escrevemos o tensor energia-momento:

$$T_{00} = \rho, \quad (3.10)$$

$$T_{ij} = -pg_{ij}; \quad (3.11)$$

Portanto, reunindo todas as componetes de $T_{\mu\nu}$, assim:

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Calculamos agora as componentes do tensor de Einstein, então:

Para G_{00} :

$$\frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{K}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho, \quad (3.13)$$

Para $G_{11} = G_{22} = G_{33}$

$$\frac{2}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} p, \quad (3.14)$$

Considerando $\Lambda = 0$, temos:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{K}{a^2} = \pi G \rho, \quad (3.15)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p, \quad (3.16)$$

Combinando (3.13) e (3.14), obtemos a equação abaixo:

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3c^2} - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{3p}{c^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.18)$$

Estas são as equações de Einstein para a cosmologia. A (3.17) é uma equação de vínculo chamada **equação de Friedmann**, e (3.18) é chamada de **equação de Raychaudhuri**, ou **equação de aceleração**, através dela podemos definir se o universo está expandindo aceleradamente [13]. De acordo com o modelo padrão da cosmologia, há duas épocas da expansão acelerada: a **inflação** que ocorreu nos primeiros momentos após o **big bang** e a **expansão acelerada tardia** que ocorre no período presente, causada pela **energia escura** [14].

3.3 Equação da continuidade

A partir das equações de Friedmann podemos obter a equação de continuidade, que será importante para algumas soluções futuras. Escrevendo a (3.17) da seguinte maneira:

$$\dot{a}^2 = -\frac{4\pi G \rho a^2}{3} + \frac{3p a^2}{c^2}, \quad (3.19)$$

tomando sua derivada temporal,

$$2\dot{a}\ddot{a} = -\frac{8\pi G a \dot{a}}{3} + \frac{d}{dt}[\rho a^2], \quad (3.20)$$

substituindo a (3.18) na equação acima:

$$-\dot{a}(\rho + 3p) = \frac{d\rho}{dt}a + \rho(2\dot{a}), \quad (3.21)$$

dividindo por a em ambos os lados, temos a **equação da continuidade**

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (3.22)$$

podemos multiplicar por a^3 a fim de estabelecer uma relação de proporção com o elemento devolume dv , e uma densidade de energia dE temos, após alguns cálculos:

$$\frac{d}{dt}[\rho a^3] + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0, \quad (3.23)$$

em termo de diferenciais:

$$dE + p dV = 0. \quad (3.24)$$

Um fato interessante é que podemos obter a equação (3.24) a partir das equações de Friedmann. Esta é a primeira lei da termodinâmica para processos adiabáticos. Na cosmologia ela sugere que a energia total do universo é constante.

3.4 Universo de De Sitter

A partir de agora, veremos algumas soluções de expansão obtidas das equações (3.17) e (3.18). Primeiramente considerando uma solução para um universo vazio $\rho = 0$, homogêneo e isotrópico, temos a partir da (3.14)

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda c^2}{3}a, \quad (3.25)$$

sendo uma EDO de segunda ordem com coeficientes constantes, fazendo a substituição por

$e^{\lambda t}$ [15], e após alguns cálculos obtemos a seguinte solução geral:

$$a(t) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) + \frac{3k}{4\Lambda c_1} \exp\left(-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right), \quad (3.26)$$

para um universo espacialmente plano $k = 0$, temos:

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right). \quad (3.27)$$

Esta solução apresenta um universo em expansão acelerada.

3.5 Universo dominado por radiação

Vamos considerar agora um universo dominado por radiação, essa configuração pode ser modelada por um fluido perfeito, em que, a relação entre pressão e densidade é dada por:

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r, \quad (3.28)$$

substituindo em (3.22), temos

$$\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} + 4 \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (3.29)$$

encontramos

$$\rho_r = \frac{\rho_{0,r}}{a^4}, \quad (3.30)$$

sendo $\rho_{0,r}$ uma constante, podemos substituir em (3.13), e obtemos:

$$\frac{1}{c^2} \dot{a}^2 + k - \frac{8\pi G \rho_{0,r}}{3a^2} = 0, \quad (3.31)$$

Fazendo $\psi = \frac{8\pi G \rho_{0,r}}{3}$ e resolvendo a equação acima temos três casos:

3.5.1 Universo fechado

$$c^2 \Delta t^2 + a^2 = \psi^2, \quad (3.32)$$

neste caso o universo retornará ao estado inicial, ou seja, após a fase de expansão ele irá colapsar em um tempo finito, o chamado **Big Crunch**.

3.5.2 Universo plano

$$\dot{a}^2 = 2\psi c\Delta t, \quad (3.33)$$

neste caso o universo irá se expandir até um determinado limite ($t \rightarrow \infty$), tendendo a manter-se constante em um tempo infinito.

3.5.3 Universo aberto

$$c^2\Delta t^2 - a^2 = \psi^2, \quad (3.34)$$

a expansão tende a um crescimento assintótico constante, em outras palavras, o universo irá expandir cada vez mais ao longo do tempo.

É importante perceber que para os três casos, o universo tem um início, o **Big Bang**.

3.6 Universo dominado por poeira

Agora vejamos um cenário em que o universo é dominado por poeira. De forma qualitativa o comportamento das soluções será semelhante ao caso de um universo dominado por radiação, com exceção dos limites assintóticos. Seja $p = \Lambda = 0$, temos

$$\frac{\dot{\rho}_p}{\rho_p} + 3\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (3.35)$$

resolvendo a equação acima obtemos:

$$\rho_p = \frac{\rho_{0,p}}{a^3}, \quad (3.36)$$

substituindo em (3.13)

$$\frac{1}{c^2}\dot{a}^2 + k - \frac{8\pi G\rho_{0,p}}{3a} = 0, \quad (3.37)$$

fazendo $\beta = \frac{8\pi G\rho_{0,p}}{3}$, temos os seguintes casos:

i Para $K = 1$, caso fechado, teremos um Big Crunch

$$\frac{1}{2}\text{sen}(2\zeta) + \zeta = \frac{c\delta t}{\beta^2}, \quad (3.38)$$

ii Para $K = 0$, caso plano, a expansão cessará ao longo do tempo

$$a(t) = \left(\frac{3\beta c\delta t}{2}\right)^{2/3} \quad (3.39)$$

iii Para $K = -1$, caso aberto, a expansão continuará uniformemente

$$\frac{1}{2}\text{senh}(2\zeta) - \zeta = \frac{c\delta t}{\beta^2}, \quad (3.40)$$

nestes três cenários também há evidência de que o universo teve um início, uma singularidade inicial.

3.7 Fluido perfeito

Podemos também considerar as fontes de energia como fluidos ideais [16], dada a equação de estado:

$$p = w\rho, \quad (3.41)$$

em que w é uma constante conhecida como parâmetro de estado, que caracteriza os tipos de fluidos a depender de seu valor fixado.

Primeiramente, resolveremos (3.41) na equação da continuidade (3.22):

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w) = 0, \quad (3.42)$$

integrando a equação acima, obtemos a solução:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (3.43)$$

obtido o resultado acima, fixaremos os seguintes valores de w seguidos dos seus respectivos gráficos que mostram o comportamento de ρ em função do fator de escala:

i Para radiação $w = \frac{1}{3}$, temos:

$$\rho = \rho_{r0} a^{-4}, \quad (3.44)$$

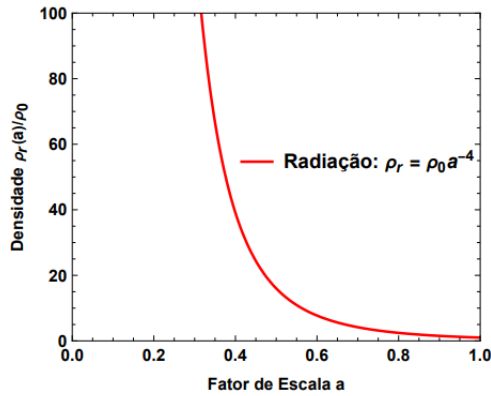


Figura 3.1: Gráfico para ρ_r .

ii Para matéria $w = 0$, temos:

$$\rho = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (3.45)$$

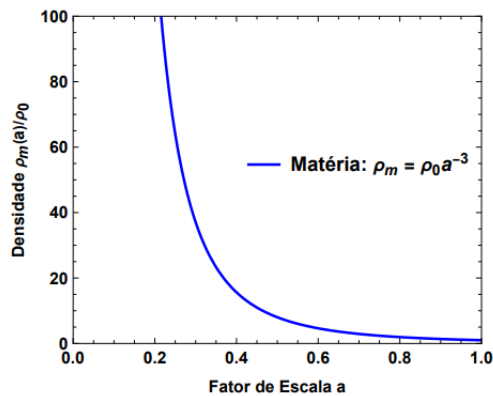


Figura 3.2: Gráfico para ρ_m .

iii Para a constante cosmológica $w = -1$, temos:

$$\rho = \rho_\Lambda. \quad (3.46)$$

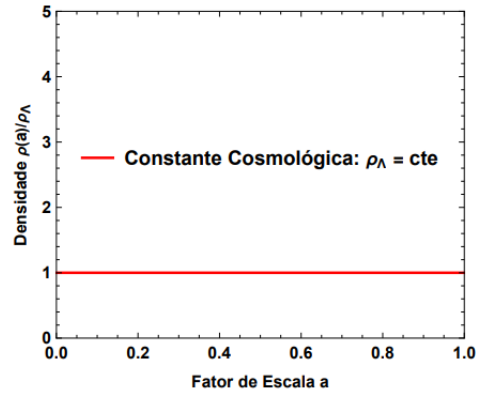


Figura 3.3: Gráfico para ρ_Λ .

Podemos, então, dividir a história do universo em várias eras, que se baseiam nas soluções que apresentamos anteriormente. Isto está ilustrado na Figura 3.4.

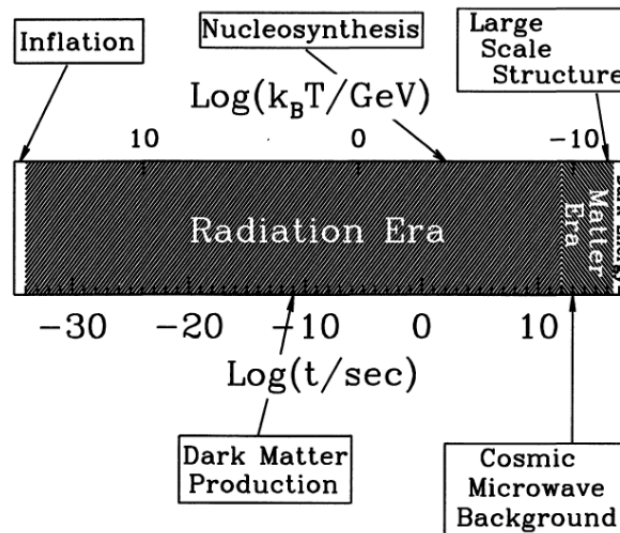


Figura 3.4: Eras de evolução do universo [14]. Na parte superior do esquema temos o período da Inflação, Nucleogênese e Estrutura em Larga Escala, respectivamente. No centro temos a Era da Radiação, Era da Matéria e Era da Energia Escura, respectivamente. Na parte inferior temos Produção de Matéria Escura e Microondas Cósmiticas de Fundo, respectivamente.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho abordamos uma breve revisão da relatividade aplicando-a à cosmologia. Resolvemos a equação de Einstein para a métrica de FLRW, obtendo as equações de Friedmann e de aceleração. A partir delas comentamos a equação de continuidade, ponto importante para as demais soluções ao longo deste trabalho. Entre elas, obtemos a solução para o Universo de De Sitter, cenários de um universo dominado por radiação, Universo dominado por poeira e a solução para o Universo cujo conteúdo material é descrito por um fluido perfeito.

Esperamos com este trabalho contribuir para um primeiro contato dos estudantes de graduação com a cosmologia.

Referências Bibliográficas

- [1] José Maria Bassalo. *Nascimentos da física*. Editora Universitaria UFPA, 1996.
- [2] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 424–434, 1916.
- [3] Albert Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 142–152, 1917.
- [4] Willem De Sitter. Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78:3–28, 1917.
- [5] Aleksandr Friedmann. On the curvature of space. In *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*, pages 838–843. Harvard University Press, 1979.
- [6] Georges Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47, p. 49-59*, 47:49–59, 1927.
- [7] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [8] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [9] Howard P Robertson. On the foundations of relativistic cosmology. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(11):822–829, 1929.
- [10] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] Marcelo Costa de Lima. *Anotações de Cosmologia*. Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

- [12] José Ademir Sales de Lima and RC Santos. 100 anos da cosmologia relativística (1917–2017). parte i: Das origens à descoberta da expansão universal (1929). *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40, 2017.
- [13] Oliver Piattella. *Lecture notes in cosmology*. Springer, 2018.
- [14] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern cosmology*. Academic press, 2020.
- [15] JMF Bassalo and MSD Cattani. Elementos de física matemática. *Livraria da Física, Sao Paulo*, 1, 2010.
- [16] Jardél Lucena da SILVA et al. Soluções escalares em cosmologia de branas. 2011.