



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

FABIANE SOARES DOS SANTOS

**FLUXO REDUTOR DE CURVAS E SOLUÇÕES
AUTOSSIMILARES**

Belém

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

FABIANE SOARES DOS SANTOS

FLUXO REDUTOR DE CURVAS E SOLUÇÕES AUTOSSIMILARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Júnior.

Belém

2022

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

FABIANE SOARES DOS SANTOS

FLUXO REDUTOR DE CURVAS E SOLUÇÕES AUTOSSIMILARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado pleno em Matemática, avaliado pela seguinte banca examinadora:

Valter Borges.

Prof. Dr^a. Valter Borges Sampaio Júnior (orientador)

Faculdade de Matemática, UFPA

Adam Oliveira da Silva.

Prof. Dr^a. Adam Oliveira da Silva (Membro)

Faculdade de Matemática, UFPA

José Antônio M. Vilhena

Prof. Dr. José Antônio de Moraes Vilhena (Membro)

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA DEFESA: 16/12/22

Conceito: Excelente

Dedico esse trabalho à minha família, em especial a minha mãe Damáres e ao meu pai Abdias, e ao meu orientador Valter Borges.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio durante toda a minha trajetória. Em especial à minha mãe, que mesmo morando em outra cidade no período da graduação sempre me apoiou nos momentos mais difíceis e esteve ao meu lado quando precisei.

Agradeço imensamente meu professor e orientador Valter Borges por aceitar conduzir o meu projeto de pesquisa. Foi um grande amigo acima de tudo, me motivou e acreditou em mim quando eu mesma não acreditei, e é uma grande inspiração.

Agradeço a todos os meus amigos da graduação por todo o companheirismo e cooperação mútua durante esses anos. Compartilhamos inúmeros desafios, sempre com o espírito colaborativo. Amigos são luz nos momentos difíceis da vida.

Agradeço a UFPA pela oportunidade de formação e estrutura oferecida. Em especial, a todos os professores da Faculdade de Matemática da UFPA, que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional e pavimentaram meu caminho para chegar até aqui.

Por fim, a todos que participaram desta minha trajetória, quero que saibam que sem vocês eu não seria quem sou hoje. Todos têm minha eterna gratidão.

*"Até mesmo a maior das caminhadas começa
com primeiro passo"*

Gandhi.

RESUMO

Neste trabalho faremos um estudo básico do chamado *Fluxo Redutor de Curvas* (FRC). Tal fluxo deforma uma curva na direção do seu vetor normal, por uma quantidade proporcional à sua curvatura. Procuraremos construir uma visão panorâmica do fluxo e entender os conceitos básicos para, em seguida, adentrar nas technicalidades de tal objeto. Veremos alguns exemplos importantes, a saber, as *soluções autossimilares*. Descreveremos como quantidades geométricas de uma curva plana fechada simples, como o seu comprimento, a área delimitada por ela e a sua curvatura, evoluem ao longo do fluxo. Também, veremos aspectos gerais de resultados estruturais da teoria, como o *Teorema de Gage-Hamilton* e o *Teorema de Grayson*. As *Soluções Autossimilares* receberão um destaque especial por sua importância. Assim, adentraremos na parte técnica e de formalização dos resultados importantes relacionados à classificação dessas soluções. Por fim, será apresentado um estudo de um caso específico de soluções autossimilares: Aquelas que apenas rotacionam ou rotacionam e expandem pelo FRC.

PALAVRAS-CHAVE:

Fluxo encolhedor de curvas. Curvatura. Vetor normal. Quantidades geométricas. Soluções autossimilares. Rotação. Expansão.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A variação de uma curva X_0 regular, fechada e de classe C^∞	21
Figura 2 – A variação de um círculo pelo FRC.	23
Figura 3 – Grim Reaper	26
Figura 4 – Curva convexa evoluindo pela curvatura.	35
Figura 5 – Curva fechada evoluindo pela curvatura.	36
Figura 6 – Curva com loops evoluindo pelo FRC	43
Figura 7 – Curvas com parâmetros $A = 1, B = 0$ e $A = 1, B = 0,25$, respectivamente. . .	44

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Geometria de Curvas	12
1.2 Análise	16
1.3 Equações diferenciais ordinárias	19
2 Aspectos gerais do Fluxo Redutor de Curvas	20
2.1 Fluxo Redutor de Curvas: Definição e exemplos	20
2.2 Propriedades básicas do fluxo	26
2.3 Curvas convexas contraindo pela curvatura	31
2.4 Os teoremas de Gage-Hamilton e Grayson	34
3 Soluções Autossimilares do Fluxo Redutor de Curvas	37
3.1 Caracterização das Soluções Autossimilares.	37
3.2 Curvas que rotacionam ou rotacionam e expandem	43
Considerações Finais	53
Referências	54

Introdução

A grosso modo, fluxos geométricos são equações de evolução de objetos geométricos, tópico que se situa na interseção da Geometria Diferencial com Equações Diferenciais. Essas equações têm extensas aplicações na indústria, ciência dos materiais, teoria computacional e processamento de imagens, física e matemática pura. Tais fluxos vêm sendo investigados intensivamente nos últimos anos. Eles receberam maior visibilidade devido ao sucesso na utilização do *fluxo de Ricci* para a prova da Conjectura de Poincaré, um problema que permaneceu sem solução por quase 100 anos.

Aqui, nos ocuparemos do chamado *Fluxo Redutor de Curvas (FRC)* que, segundo [4], teve sua origem em problemas relacionados à ciências dos materiais. Este é um análogo do fluxo de Ricci para curvas e também tem servido como ferramenta para entender objetos topológicos e geométricos. Tal fluxo deforma uma curva na direção do seu vetor normal, por uma quantidade proporcional à sua curvatura ao longo do tempo t . A família de curvas $\hat{X}(\cdot, t)$ obtida a partir da deformação de uma curva inicial X sob o FRC é chamada de uma *solução* deste Fluxo.

Assim, dado X , uma das questões centrais é entender como a sua geometria muda ao longo deste fluxo, à medida que t varia. No caso em que X é uma curva regular fechada e simples, os trabalhos de Gage [10], Gage e Hamilton [11] e Grayson [12] mostram que a curva se torna convexa e diminui sob o fluxo, assumindo uma forma cada vez mais arredondada, até desaparecer em tempo finito. Esse resultado justifica o nome dado a este fluxo. Caso X não possua alguma das propriedades citadas, a descrição do comportamento da curva à medida que t muda fica mais complicada, pois a curva pode se tornar singular em tempo finito. Para que possamos entender as singularidades que podem se formar com o passar do tempo se faz necessário um estudo aprofundado das chamadas *Soluções Autossimilares* do FRC, objetivando uma completa classificação das mesmas.

Uma solução do FRC é chamada *autossimilar* se para qualquer t em que o fluxo está definido, a curva $\hat{X}(\cdot, t)$ pode ser obtida a partir de X por uma translação, uma rotação, uma homotetia ou uma combinação destas. Uma classificação completa de *soluções autossimilares* do FRC foi obtida em 2012, por Halldorsson [13]. Em seu trabalho, o autor descreve o comportamento de tais soluções à medida que t varia e as caracteriza por uma condição estática, isto

é, que não depende do parâmetro t . Esta, por sua vez, permite a classificação das possíveis condições iniciais X dessas soluções. Tal caracterização simplifica sobremaneira o estudo do comportamento dessas soluções. Isto se dá pois, agora, a análise necessária passa a ser centrada em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) e não em uma Equação Diferencial Parcial (EDP) como inicialmente.

De acordo com a referida classificação, as soluções autossimilares mudam através do *fluxo redutor de curvas* das seguintes formas: por translação, por expansão, por contração, por rotação, por rotação e expansão simultaneamente e por rotação e contração simultaneamente. Nenhuma das outras combinações acontece. A classificação das curvas iniciais X é governada por dois parâmetros reais e para cada escolha desse par de parâmetros é feita uma análise da EDO correspondente, o que permite descrever propriedades geométricas da curva X e o seu comportamento sob o fluxo.

A presente pesquisa será dividida em 3 capítulos. O primeiro capítulo se trata de um apanhado geral de resultados preliminares que serão úteis ao longo do trabalho. O segundo aborda aspectos gerais do Fluxo Redutor de Curvas. Nele, vimos exemplos representativos e calculamos a evolução de algumas grandezas geométricas relacionadas às curvas, como a curvatura e os campos tangente e normal. Também, vimos vários resultados estruturais da teoria, focando em seus aspectos geométricos e evitando aprofundamento em detalhes técnicos, uma vez que estes se utilizavam de ferramentas avançadas de análise. Por fim, no terceiro e último capítulo, focaremos nas chamadas Soluções Autossimilares devido a sua importância no estudo do fluxo. Estudaremos o processo de classificação dessas soluções e nos aprofundaremos no estudo das soluções autossimilares que apenas rotacionam ou rotacionam e expandem pelo FRC.

1 Preliminares

O presente capítulo tem como objetivo coletar definições e resultados que serão utilizados ao longo do trabalho. Ele será dividido em três partes, que focam em resultados de Geometria de Curvas, Análise Real e Equações Diferenciais Ordinárias. A maioria dos resultados apresentados aqui serão sem demonstração, pois se trata apenas de uma recapitulação e muitos deles são bem conhecidos de matérias da graduação. Uma exceção é o *Teorema de Barbalat*, que será importante no Capítulo 3. Iremos demonstrá-lo pois ele não é tão comumente abordado na bibliografia em português.

As definições e resultados deste capítulo, estão principalmente nas referências [14, 15, 16, 18], onde informações adicionais podem ser encontradas.

1.1 Geometria de Curvas

No contexto de geometria diferencial, vamos tomar a ideia intuitiva de que uma curva X deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterá várias informações sobre como o ponto percorre o conjunto X , e o sentido que o ponto “anda” sobre X permite definir sua velocidade, sua aceleração etc. Inspirados no movimento de uma partícula, vamos introduzir a definição formal de curva

Definição 1. *Uma curva contínua no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. A aplicação X , dada por $X(t) = (x(t), y(t))$, é contínua se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

Definição 2. *O conjunto imagem ou traço \mathcal{C} da aplicação X é dado por*

$$\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)); t \in I\},$$

Assim, X é dita uma parametrização de \mathcal{C} e denominamos t o parâmetro da curva X . Se a curva X está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $X(a)$ e $X(b)$ são chamados de ponto inicial de X e ponto final de X , respectivamente.

Definição 3. *Se a aplicação X está definida num intervalo $I = [a, b]$, tal que $X(a) = X(b)$, dizemos que X é uma curva fechada.*

Definição 4. Uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *simples* se a aplicação X for injetiva.

Quando temos que $X(t_1) = X(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que X possui um ponto duplo (ou múltiplo) em t_1 e t_2 .

Definição 5. Uma curva $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *fechada e simples* se $X(a) = X(b)$ e para quaisquer $t, s \in [a, b]$ tais que $t \neq s$, temos $X(t) \neq X(s)$, isto é, se o único ponto duplo de X ocorre nos seus pontos inicial e final. Uma curva X fechada e simples é denominada *curva de Jordan*.

Quando não há prejuízo no entendimento, é comum identificarmos a curva com o seu traço.

Definição 6. Se cada função coordenada é uma função de classe \mathcal{C}^∞ , isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I , então dizemos que X é uma curva suave ou diferenciável.

Definição 7. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $X(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente (ou vetor velocidade) de X em $t_0 \in I$ é dado por

$$X'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Definição 8. A velocidade escalar de X em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo ou norma do vetor velocidade $X'(t_0)$, isto é,

$$\|X'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Definição 9. Dizemos que uma curva parametrizada $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $X'(t_0) \neq (0, 0)$ ou, equivalentemente, se $\|X'(t_0)\| \neq 0$. A curva X é regular em I , se for regular para todo $t \in I$. Se $\|X'(t_0)\| = 0$, dizemos que X é singular em t_0 .

Definição 10. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, de classe \mathcal{C}^1 , dada por $X(t) = (x(t), y(t))$. A função $\mathcal{L}_X : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{L}_X(t) = \int_{t_0}^t \|X'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi,$$

$t_0 \in I$, é denominada *função comprimento de arco*.

Como $\|X'(t)\|$ é uma função contínua, a função \mathcal{L}_X é de classe \mathcal{C}^1 e, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\mathcal{L}'_X(t) = \|X'(t)\|.$$

Proposição 1. *Uma curva $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,*

$$\|X'(t)\| = 1,$$

para todo $t \in I$.

Definição 11. *Seja X uma curva parametrizada de classe \mathcal{C}^∞ e regular, dada por $X(t) = (x(t), y(t))$. O campo de vetores $T : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por*

$$T(t) = \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}(x'(t), y'(t)),$$

é um campo de classe \mathcal{C}^∞ ao longo de X , chamado campo tangente unitário ou indicatriz tangente. Cada um dos vetores $T(t)$ é chamado de vetor tangente unitário à curva X em $t \in I$.

Definição 12. *Seja X uma curva parametrizada de classe \mathcal{C}^∞ e regular, dada por $X(t) = (x(t), y(t))$. O campo de vetores $N : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por*

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}(x'(t), y'(t)),$$

é um campo de classe \mathcal{C}^∞ ao longo de X , chamado campo normal unitário ou indicatriz normal. Cada um dos vetores $N(t)$ é chamado de vetor normal unitário à curva X em $t \in I$.

Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe \mathcal{C}^r ($r \geq 2$) e parametrizada pelo comprimento de arco. Visto que $\|T\| = 1$, temos que $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$. Como T e N geram o espaço \mathbb{R}^2 , temos que, para cada $s \in I$, $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$. Isso significa que existe uma função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), s \in I \tag{1.1}$$

Definição 13. *A função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela equação (1.1), é chamada curvatura de X em $s \in I$.*

Observe que a curvatura $k(s)$ é dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Proposição 2. *A curvatura de uma curva regular X é identicamente nula, se, e somente se, o traço de X está contido em uma reta.*

Definição 14. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Os campos tangentes T e normal N satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.2)$$

As equações desse sistema são denominadas equações de Frenet da curva X .

Definição 15. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial $\{T(s), N(s)\}$ é chamado referencial de Frenet de X .

Teorema 1. Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $X(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de X em $t \in I$ é dada pela expressão

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

A função curvatura de uma curva é invariante por translação e invariante por rotação no plano, isto é, a função curvatura é invariante por um movimento rígido de X .

Proposição 3. Sejam $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, dada por

$$X(t) = (x(t), y(t)),$$

e $k_X : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura da curva X .

(i) Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação translação do plano segundo o vetor (a, b) , isto é,

$$T(x, y) = (x + a, y + b),$$

então k_X é invariante por T ;

(ii) Se $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação rotação de um ângulo θ , ou seja,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$$

então k_X é invariante por R_θ

O teorema a seguir mostra que, de certa forma, a função curvatura determina a curva.

Teorema 2 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). *Seja $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^2 . Então, dados $s_0 \in I$, $P_0 = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $V_0 = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, com $\|V_0\| = 1$, existe uma única*

curva parametrizada pelo comprimento de arco $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{R}^2 , tal que a função curvatura de $X(s)$ em $s \in I$ é dada por k , $X(s_0) = P_0$ e $X'(s_0) = V_0$. Além disso, a curva X é dada por $X(s) = (x(s), y(s))$, onde

$$\begin{aligned} x(s) &= p_1 + \int_{s_0}^s \cos\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + \theta_0\right) d\tau, \\ y(s) &= p_2 + \int_{s_0}^s \sin\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + \theta_0\right) d\tau. \end{aligned}$$

e $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ é o único ângulo tal que $V_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

Uma classe muito importante de curvas segue abaixo:

Definição 16. Uma curva regular, fechada e simples $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa, se, e somente se, sua função curvatura k não muda de sinal.

Segue abaixo a definição intuitiva de uma subclasse das curvas convexas.

Definição 17. Uma curva estritamente convexa é uma curva convexa que não contém nenhum segmento de reta. Elas são as curvas para as quais cada interseção da curva com uma reta consiste em no máximo dois pontos.

Por fim, temos uma desigualdade que será utilizada para demonstrar um resultado sobre o conjunto limite do fluxo.

Teorema 3 (Desigualdade Isoperimétrica de Gage). Se X é uma curva fechada, convexa e de classe \mathcal{C}^2 , então

$$\pi \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{A}} \leq \int_X k^2 ds,$$

onde \mathcal{L} , \mathcal{A} , k e s denotam o comprimento, a área, a curvatura e o comprimento de arco da curva X .

1.2 Análise

Seguem abaixo os principais resultados de análise necessários para a pesquisa.

Definição 18. Uma função $g(t)$ é dita contínua em $[0, \infty)$ se $\forall t_1 \geq 0$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon, t_1) > 0$ de modo que

$$\forall t \geq 0, |t - t_1| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < \epsilon$$

Definição 19. Uma função $g(t)$ é uniformemente contínua em $[0, \infty)$ se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, de modo que

$$\forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < \epsilon$$

Em outras palavras, g é uniformemente contínua se sempre é possível encontrar um δ que não depende do ponto específico t_1 .

Lema 1 (Lema de Barbalat). Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito para $t \rightarrow \infty$, e se f' é uniformemente contínua, então $f'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Assuma que $f'(t)$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Então, dado $\epsilon_0 > 0$, para todo $T > 0$, existe $t > T$, tal que $|f'(t)| \geq \epsilon_0$. Portanto, podemos tomar uma sequência infinita de t'_i s (com $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$) de modo que $|f'(t)| \geq \epsilon_0$. Como assumimos $f'(t)$ uniformemente contínua, $\exists \delta > 0$, de modo que para quaisquer t' e t'' satisfazendo $|t' - t''| < \delta$

$$|f'(t') - f'(t'')| < \frac{\epsilon_0}{2}$$

Isso implica que para qualquer t que satisfaça $|t - t_i| < \delta$, temos:

$$|f'(t)| > \frac{\epsilon_0}{2}$$

Portanto, para todo t_i ,

$$\left| \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} f'(t) dt \right| = \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} |f'(t)| dt \geq \frac{\epsilon_0}{2} 2\delta = \epsilon_0 \delta$$

Onde o lado esquerdo da igualdade vem do fato de que f' mantém o sinal no intervalo de integração, devido à continuidade de f' e à limitação $|f'(t)| > \frac{\epsilon_0}{2} > 0$.

Isto contradiz o fato de que a integral $\int_0^t f'(r) dr$ tem um limite (igual a $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0)$). □

Teorema 4 (Teorema do Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Proposição 4 (Propriedade da Conservação do Sinal). Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, temos $f(x) > 0$.

Teorema 5 (Teorema do Valor Médio). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 6 (Regra de Leibniz). *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) *Para todo $x \in U$, a função $f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.*

(ii) *A i -ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua*

Então a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, possui i -ésima derivada parcial contínua em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt$$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Vejamos agora duas definições necessárias para introduzirmos então o famoso Teorema de Green.

Definição 20. *Seja $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. X é uma curva C_1 por partes se existir uma partição finita de I em subintervalos tal que a restrição de X a cada subintervalo seja de classe C_1 , isto é, tenha derivada contínua.*

Definição 21. *Dada uma curva contínua $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, a sua orientação é, a grosso modo, a escolha de um dos dois sentidos possíveis de "andar" sobre ela. No caso de curva plana de Jordan, diz-se que ela tem orientação positiva ou no sentido anti-horário, se sempre ao caminhar sobre ela temos o interior da curva à esquerda (e, conseqüentemente, o exterior à direita). Caso contrário, a curva será orientada negativamente ou no sentido horário.*

Teorema 7 (Teorema de Green). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, com interior não vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechada, simples, \mathcal{C}^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe \mathcal{C}^1 num aberto contendo K . Nestas condições,*

$$\oint_X P dx + Q dy = \int \int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \quad (1.4)$$

O teorema de Green nos afirma que se P e Q forem de classe \mathcal{C}^1 no aberto Ω e se K estiver contido em Ω , então (1.4) se verifica.

1.3 Equações diferenciais ordinárias

Os resultados de EDO abaixo são utilizados principalmente no capítulo 3.

Definição 22. Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ chama-se Lipschitziana se existe uma constante K tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$; Chamamos K de constante de Lipschitz de f .

Teorema 8 (Teorema de Picard). Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Seja M alguma cota superior qualquer de $|f|$ em Ω . Então, existe uma e única solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

em I_a , onde $a = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Corolário 1. Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times E^n$ e seja $f : \Omega \rightarrow E$ contínua com $\frac{\partial f}{\partial x}$ contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I_a \times B_b$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tem uma única solução em I_a .

2 Aspectos gerais do Fluxo Redutor de Curvas

O presente capítulo será subdividido em 5 partes. Na seção 4.1 definiremos o Fluxo Redutor de Curvas e daremos alguns exemplos do mesmo. A seguir, em 4.2, serão introduzidos alguns resultados e propriedades básicas do fluxo, incluindo a evolução de grandezas matemáticas relacionadas às curvas. Um estudo rápido das curvas planas fechadas convexas contraindo pela função curvatura, devido a Gage e Hamilton, será apresentado nas seções 4.3 e 4.4. Também na seção 4.4, introduzimos o teorema de Grayson, que determina o comportamento do fluxo para curvas planas fechadas simples no geral.

As definições e resultados desta seção, estão principalmente nas referências [15, 17], onde informações adicionais sobre os diversos tópicos aqui abordados podem ser encontradas.

2.1 Fluxo Redutor de Curvas: Definição e exemplos

Primeiramente, vamos definir o chamado Fluxo Redutor de Curvas (FRC). Tal fluxo deforma uma curva na direção do seu vetor normal, por uma quantidade proporcional à sua curvatura.

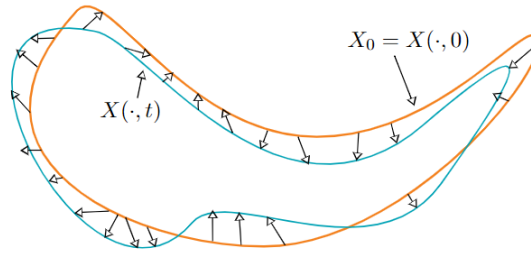
Definição 23. *Seja $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada, regular e suave no plano. Dizemos que uma família de curvas ou variação $\widehat{X} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de X é um Fluxo Redutor de Curvas se para todo $(\cdot, t) \in \mathbb{R} \times I$ valem as igualdades:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t) &= k(\cdot, t)N(\cdot, t) \\ \widehat{X}(\cdot, 0) &= X(\cdot) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Na equação acima, \cdot representa um parâmetro genérico. Já $t \in I$ é o parâmetro que representa o tempo, onde I é um intervalo contendo 0. Também, para cada t fixado, temos que $\widehat{X}(\cdot, t)$ denota uma curva plana, que possui curvatura $k(\cdot, t)$ e normal $N(\cdot, t)$. A equação diferencial parcial (2.1) também é chamada de Fluxo Redutor de Curvas.

Observação 1. *O contradomínio de X e \widehat{X} pode ser tomado como \mathbb{C} em vez de \mathbb{R}^2 nos resultados abaixo, usando a identificação natural entre esses dois conjuntos. Isso nos trará certa comodidade algébrica, facilitando algumas contas.*

Figura 1—A variação de uma curva X_0 regular, fechada e de classe C^∞ .



Fonte: [15].

Assim, $\widehat{X}(\cdot, t)$ representa uma deformação de $X(\cdot)$ segundo (2.1), à medida que o tempo evolui. Epstein e Gage [9] mostraram que o FRC permanece geometricamente inalterado se adicionarmos componentes tangenciais ao segundo membro da equação diferencial (2.1), como podemos ver no resultado a seguir.

Proposição 5. *Seja $\widehat{X} : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a variação de uma curva X plana, parametrizada, regular e suave, tal que $\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t) = fT + kN$, com f sendo uma função suave. Existe uma reparametrização $\widehat{Y}(u, t)$ das curvas $\widehat{X}(\cdot, t)$ tal que*

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial t}(u, t) = k(u, t)N. \tag{2.2}$$

Demonstração. Seja $\widehat{Y}(u, t) = \widehat{X}(x(u, t), t)$ uma reparametrização de \widehat{X} , então, pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial \widehat{X}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t} \\ &= v \frac{\partial x}{\partial t} T + fT + kN \\ &= \left(v \frac{\partial x}{\partial t} + f \right) T + kN, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $v(u, t) = \left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial x}(x(u, t), t) \right\|$ é a velocidade escalar de $\widehat{X}(x, t)$. Se escolhermos $x(u, t)$ tal que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{-f(x(u, t), t)}{v(u, t)}, x(u, 0) = u, \tag{2.4}$$

obtemos, substituindo em (2.3), que

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial t} = k(x(u, t), t)N, \widehat{Y}(u, 0) = X_0(u). \tag{2.5}$$

Observe que a regularidade das curvas $X(\cdot, t)$ garante que $v(x, t) \neq 0$ e, portanto, a equação (2.4) está bem definida. Além disso, ela possui solução pelo Corolário 1. Como a curvatura é invariante por reparametrização, obtivemos o desejado. \square

A partir disso, podemos definir o Fluxo Redutor de Curvas de uma outra maneira.

Definição 24 (Definição alternativa do FRC). *Seja $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, parametrizada, regular e suave no plano. Dizemos que uma família de curvas ou variação $\widehat{X} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de X é um Fluxo Redutor de Curvas se para todo $(\cdot, t) \in \mathbb{R} \times I$ valem as igualdades:*

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t), N(\cdot, t) \right\rangle &= k(\cdot, t), \\ \widehat{X}(\cdot, 0) &= X(\cdot). \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde para cada t fixado, temos que $\widehat{X}(u, t) : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ denota uma curva plana, que possui curvatura $k(u, t)$ e normal $N(u, t)$.

Esta nova definição traz a vantagem de uma maior liberdade na escolha de uma parametrização para \widehat{X} . Agora basta que a componente normal de $\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t)$ seja a curvatura. Não há condição sobre a componente tangente, pois esta não altera a geometria das curvas $\widehat{X}(\cdot, t)$, apenas as parametrizações.

A seguir, vejamos uma classe especial de soluções desse fluxo, que são as *Soluções Autossimilares*. O conhecimento dessas soluções é muito importante no estudo de fluxos de curvatura e retornaremos a elas no capítulo 3.

Definição 25. *Dizemos que uma solução $\widehat{X}(\cdot, t)$ do Fluxo Redutor de Curvas é autossimilar se existem funções diferenciáveis $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : I \rightarrow \mathbb{C}$, tais que*

$$\widehat{X}(\cdot, t) = g(t)e^{if(t)}X(\cdot) + H(t) \tag{2.7}$$

onde I é um intervalo contendo 0, $f(0) = 0$, $H(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Consequentemente $\widehat{X}(\cdot, 0) = X(\cdot)$. A curva $X(\cdot)$ também é chamada de *solução autossimilar do Fluxo Redutor de Curvas*. A função f determina a rotação, g determina a escala e H é o termo de translação de $X(u)$.

Assim, o movimento autossimilar consiste de rotação, translação, mudança de escala (homotetia) ou uma combinação destes. Vejamos agora alguns exemplos desse tipo de solução.

Exemplo 1. *A família de círculos*

$$\widehat{X}(u, t) = (a(t) \cos u, a(t) \sin u) + (p_1, p_2), t \in [0, \Gamma),$$

onde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $a : [0, \Gamma) \rightarrow (0, \infty)$ e $a(0) = a_0 > 0$, é uma Solução Autossimilar que contrai homoteticamente (isto é, o formato da curva inicial não muda, apenas a escala) pelo Fluxo Redutor de Curvas. De fato, substituindo

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t) = (a'(t) \cos u, a'(t) \sin u), k(\cdot, t) = \frac{1}{a(t)} \text{ e } N(\cdot, t) = (-\cos u, \sin u),$$

em (2.1), temos

$$\begin{aligned} (a'(t) \cos u, a'(t) \sin u) &= \left(\frac{-\cos u}{a(t)}, \frac{-\sin u}{a(t)} \right) \\ a'(t) &= -\frac{1}{a(t)} \\ a(t)a'(t) &= -1 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação por 2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(a(t))^2] &= -2 \\ a(t) &= \sqrt{a_0^2 - 2t} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ou seja, encontramos $a(t)$ tal que essa família satisfaz o fluxo.

Figura 2—A variação de um círculo pelo FRC.



Fonte: Autoria própria.

Observe que $a(t)$ é uma função decrescente, assim os raios dos círculos da família vão diminuindo com o tempo e a família contrai para o ponto. Também, por (2.8) o fluxo existe para $t < a_0^2/2 = A(0)/2\pi$, onde $A(0)$ denota a área de $\widehat{X}(u, 0)$. Além disso, o fluxo contrai a um ponto quando $t \rightarrow a_0^2/2$ e, nesse momento, as áreas dos círculos colapsam para zero e as curvaturas tendem para o infinito.

Como acabamos de ver no exemplo acima, um círculo, quando submetido ao Fluxo Redutor de Curvas, permanece um círculo, sendo alterado apenas o seu tamanho. Isso pode nos levar a pensar se outras curvas planas fechadas clássicas, como a elipse, também teriam o mesmo comportamento quando submetidas ao fluxo estudado, no sentido de permanecer na mesma classe de curvas. Sendo assim, nos pomos a pergunta: será que uma elipse permanece sendo uma elipse ao longo do Fluxo Redutor de Curvas? Pelos resultados de [6], os quais não

descreveremos aqui, somos levados a entender que a evolução da elipse não é trivial como a do círculo. No exemplo a seguir verificamos que uma certa família de elipses satisfaz o Fluxo Redutor de Curvas se e somente se essa família for uma família de círculos.

Exemplo 2 (Família de Elipses.). *Seja $\alpha(t, \theta) = (a(t) \cos \theta + P_1, b(t) \sin \theta + P_2)$ uma família de elipses, tal que $\alpha(0, \theta) = (a_0 \cos \theta + P_1, b_0 \sin \theta + P_2)$. Daí, temos que:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, \theta) &= (a' \cos \theta, b' \sin \theta) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(t, \theta) &= (-a(t) \sin \theta, b(t) \cos \theta) \\ N(t, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} (-b(t) \cos \theta, -a(t) \sin \theta) \\ K(t, \theta) &= \frac{(-a \sin \theta)(-b \sin \theta) - (-a \cos \theta)(b \cos \theta)}{\left((a \sin \theta)^2 + (-b \cos \theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{\left((a \sin \theta)^2 + (-b \cos \theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Se α satisfaz o FRC, teremos: $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = kN$. Substituindo as informações acima na equação do fluxo obtemos:

$$(a' \cos \theta, b' \sin \theta) = \frac{-ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} (b \cos \theta, a \sin \theta)$$

Assim,

$$\begin{aligned} a' &= -\frac{ab^2}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} \quad \text{e} \quad b' = -\frac{a^2 b}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} \\ \frac{a'}{b} &= -\frac{ab}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} = \frac{b'}{a} \end{aligned}$$

Logo, $(a^2)' = (b^2)'$, o que implica que $a^2 = b^2 + c_0$. Daí temos:

$$a' = -\frac{a(a^2 - c_0)}{(a^2 \sin^2 \theta + (a^2 - c_0) \cos^2 \theta)^2} = -\frac{a^3 - c_0 a}{(a^2 - c_0 \cos^2 \theta)^2} \quad (2.9)$$

$$b' = -\frac{(b^2 + c_0)b}{((b^2 + c_0) \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} = -\frac{b^3 + c_0 b}{(b^2 + c_0 \sin^2 \theta)^2} \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10) concluímos que $c_0 = 0$, caso contrário, θ seria constante. Então $a^2 = b^2$. Como $a > 0$ e $b > 0$ concluímos que $a = b$. Portanto, a família de elipses que satisfaz o Fluxo Redutor de Curvas é uma família de círculos.

□

Segundo Abresch e Langer [1], o círculo é a única curva plana fechada simples que encolhe homoteticamente sob o fluxo, mas também existem curvas planas fechadas não simples com a mesma propriedade. Elas foram classificadas também em [1]. Também temos curvas que não alteram sua forma sob o fluxo, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3. *Seja $X(u) = (x(u), y(u))$ uma curva que não altera sua forma ao longo do fluxo, ou seja, a família $\widehat{X}(u, t) = (x(u), y(u))$ satisfaz o FRC. Uma vez que*

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(u, t) = (0, 0),$$

a equação (2.6) implica que $K(u, t) = 0, \forall (u, t)$. Como se sabe, as únicas curvas planas que possuem curvatura zero em todos os pontos são as retas e, portanto, as retas são as únicas curvas planas que não se alteram sob o Fluxo Redutor de Curvas.

Um outro exemplo em que obtemos solução autossimilar explícita é caso em que a curva sofre apenas translação ao longo do fluxo, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 4 (Solução por translação). *Considere a curva $X(x) = (x, y(x))$ dada como o gráfico de uma função, e assuma que ela translada sob a ação do Fluxo Redutor de Curvas na direção do eixo das abscissas da forma $\widehat{X}(x, t) = (x, y(x) + t)$. Note que nesse caso $X(x)$ será uma solução autossimilar do Fluxo. Para tal solução,*

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(x, t) = (0, 1), \quad N = \frac{(-y', 1)}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad k = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3} = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^3}.$$

Substituindo em (2.6), temos:

$$\left\langle (0, 1), \frac{(-y', 1)}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right\rangle = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^3},$$

de onde

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^3} \Rightarrow \frac{y''}{1 + (y')^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + (y')^2} \frac{dy'}{dx} = 1.$$

Integrando a última igualdade, obtemos

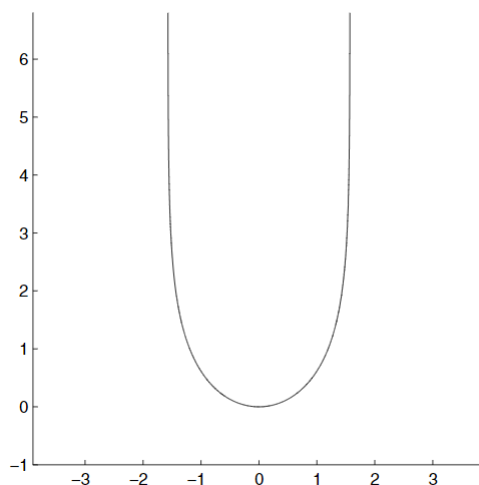
$$\arctan(y') = \int \frac{1}{1 + (y')^2} dy' = \int dx = x$$

Invertendo, obtemos que $y' = \tan(x)$. Assim,

$$y = \int \tan(x) dx = -\ln(\cos(x))$$

Portanto, a menos de constantes e reescala, a única curva tipo gráfico que sofre apenas translação pelo FRC é a curva $X(x) = (x, -\ln(\cos(x)))$. Essa curva é conhecida como Grim Reaper. Foi provado em [8] que ela é também a única curva plana que apenas translada pelo fluxo.

Figura 3—Grim Reaper



Fonte: [13]

2.2 Propriedades básicas do fluxo

Na seção anterior vimos que uma curva quando submetida ao FRC não necessariamente permanece na mesma classe de curvas, como no exemplo da elipse. Porém, ao longo das próximas seções, vamos mostrar que se a curva inicial de (2.1) é uma curva de Jordan regular e suave, então, o fluxo comporta-se da mesma forma que se comportou no caso do círculo: a área e o comprimento das curvas colapsam para zero em um tempo finito, a curva contrai a um ponto nesse mesmo tempo e, além disso, a forma da curva vai se tornando circular à medida que contrai.

Nosso primeiro passo será calcular a evolução de algumas quantidades geométricas relacionadas às curvas, a saber, comprimento, o campo tangente, o campo normal, a função ângulo do campo tangente, a função curvatura e a área.

Proposição 6. *Seja $\hat{X} : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma solução da equação (2.1). Se $\mathcal{L}(t)$ denota o comprimento da curva $\hat{X}(\cdot, t)$, então*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \int_0^{\mathcal{L}(t)} k^2 ds_t, \quad (2.11)$$

onde s_t é o comprimento de arco de $X(\cdot, t)$.

Demonstração. Por definição, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\mathcal{L}(t)} \left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u}(u, t) \right\| du$$

Pela regra de Leibniz (6) e propriedades da norma segue que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \int_0^{\mathcal{L}(t)} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\|} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u}, \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\rangle du$$

Como X é de classe \mathcal{C}^∞ , pelas fórmulas de Frenet e a equação (2.1) do fluxo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= \int_0^{\mathcal{L}(t)} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\|} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}, \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\rangle du = \int_0^{\mathcal{L}(t)} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} (kN), T \right\rangle du \\ &= \int_0^{\mathcal{L}(t)} k \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, T \right\rangle du = \int_0^{\mathcal{L}(t)} k \left\langle \frac{\partial N}{\partial s_t} \frac{ds_t}{du}, T \right\rangle du \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável de u para s_t e usando as fórmulas de Frenet mais uma vez, obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = - \int_0^{\mathcal{L}(t)} k^2 ds_t$$

□

Observe que, de acordo com (2.11), o comprimento de curvas de Jordan contrai pelo Fluxo Redutor de Curvas. Assim, poderia surgir o seguinte questionamento: Será que o comprimento eventualmente tende a zero ao longo do fluxo? Note que este comportamento foi observado na família de círculos do Exemplo 1. Esse ponto será abordado mais adiante.

Agora, considere uma curva de Jordan parametrizada pelo comprimento de arco. Observe que o comprimento de arco $s_t = s(\cdot, t)$ de cada curva $X(\cdot, t)$ varia com o parâmetro t . Dessa forma, as derivadas com relação a t e s não comutam. Apesar disso, ainda existe uma relação útil entre as derivadas parciais mistas de segunda ordem com relação a s e a t como segue.

Lema 2. *Seja $\widehat{X} : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ um Fluxo Redutor de Curvas contraindo pela função curvatura e $s = s_t = s(\cdot, t)$ o comprimento de arco da curva $\widehat{X}(\cdot, t)$. Então:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s} \tag{2.12}$$

Demonstração. Visto que $\frac{\partial s}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\| = \nu(u, t)$, temos $\frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} = \frac{\partial \widehat{X}}{\partial s} \nu$. Como isso é válido para todo $\widehat{X}(u, t)$, temos a identidade entre os operadores abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial u} \tag{2.13}$$

Além disso:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\| = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u}, \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\rangle^{1/2}$$

Pela regra da cadeia, as fórmulas de frenet em (1.2) e o fato da função ser de classe C^∞ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u}, \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\|} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial t}, T \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} (kN), T \right\rangle = k \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, T \right\rangle \\ &= kv \left\langle \frac{\partial N}{\partial s}, T \right\rangle = -k^2 v \end{aligned} \tag{2.14}$$

Usando a regra do produto e as equações (2.13) e (2.14), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{-\frac{\partial v}{\partial t}}{v^2} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \frac{k^2}{v} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

□

Lema 3. *Sejam θ uma função ângulo do campo tangente unitário T , N o campo normal unitário e k a função curvatura. Temos:*

$$(i) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N; \quad (ii) \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} T \quad (iii) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}; \quad (iv) \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

Demonstração. Visto que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t} + k^2 \frac{\partial \widehat{X}}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (kN) + k^2 T \\ &= \frac{\partial k}{\partial s} N + k \frac{\partial N}{\partial s} + k^2 T \\ &= \frac{\partial k}{\partial s} N \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde, na última igualdade de (2.15), usamos a equação de Frenet $\frac{\partial N}{\partial s} = -kT$. Isso prova o item

(i). Derivando a igualdade $\langle T, N \rangle = 0$ com relação a t , temos

$$0 = \left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, N \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial k}{\partial s} + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle$$

isto é,

$$\left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = -\frac{\partial k}{\partial s}$$

Por outro lado, visto que $\langle N, N \rangle = 1$, temos $\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N \right\rangle = 0$. Assim,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, T \right\rangle T + \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N \right\rangle N = -\frac{\partial k}{\partial s} T$$

o que prova o item (ii).

Como podemos escrever $T = (\cos \theta, \sin \theta)$, vemos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (-\sin \theta, \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} N$$

A expressão (iii) decorre, portanto, do item (i). Sabemos que $k = \frac{\partial \theta}{\partial s}$. Então:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial t} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3$$

o que demonstra o item (iv)

□

A proposição a seguir mostra que uma curva de Jordan contraindo pela função curvatura colapsa em algum momento, ou seja, a área tende pra zero ao longo do fluxo. Dessa forma, este não pode existir por um tempo infinito.

Proposição 7. *A derivada da área $A(t)$ da região delimitada pelas curvas de Jordan $\widehat{X}(\cdot, t)$ do fluxo de curvas contraindo pela função curvatura satisfaz*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -2\pi.$$

Demonstração. Seja $\widehat{X} : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ o fluxo de de uma curva $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ contraindo pela função curvatura $k(\cdot, t)$. usando o teorema de Green em (1.4), temos

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x \frac{dy}{du} - y \frac{dx}{du} \right) du = -\frac{1}{2} \int_a^b \langle X, vN \rangle du,$$

onde $N = N(\cdot, t)$ é o vetor normal a $\widehat{X}(\cdot, t)$. Derivando com relação a t , e denotando por $v = \left\| \frac{\partial \widehat{X}}{\partial u} \right\|$, obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_a^b \left[\left\langle \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}, vN \right\rangle + \left\langle \widehat{X}, \frac{\partial v}{\partial t} N \right\rangle + v \left\langle \widehat{X}, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle \right] du$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_a^b \left[-kv + k^2 v \langle \widehat{X}, N \rangle + v \frac{\partial k}{\partial s} \langle \widehat{X}, T \rangle \right] du, \quad (2.16)$$

onde $T = \frac{\partial \hat{X}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \hat{X}}{\partial u} \right\|$. Integrando o último termo de (2.16) por partes e usando o fato de a curva ser fechada, temos

$$\begin{aligned}
 \int_a^b v \frac{\partial k}{\partial s} \langle \hat{X}, T \rangle du &= \int_a^b v \frac{\partial k}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} \langle \hat{X}, T \rangle du = \int_a^b \frac{\partial k}{\partial u} \langle \hat{X}, T \rangle du \\
 &= - \int_a^b k \frac{\partial}{\partial u} \langle \hat{X}, T \rangle du + [k \langle \hat{X}, T \rangle]_a^b \\
 &= - \int_a^b k \left[\left\langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial u}, T \right\rangle + \left\langle \hat{X}, \frac{\partial T}{\partial u} \right\rangle \right] du \\
 &= - \int_a^b k \frac{\partial s}{\partial u} \left[\left\langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial s}, T \right\rangle + \left\langle \hat{X}, \frac{\partial T}{\partial s} \right\rangle \right] du \\
 &= - \int_a^b kv [1 + k \langle \hat{X}, N \rangle] du,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_a^b v \frac{\partial k}{\partial s} \langle \hat{X}, T \rangle du = - \int_a^b kv + k^2 v \langle \hat{X}, N \rangle du. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.16), obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \int_a^b kv du = - \int_0^L k ds = - \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial s} ds = \theta(0) - \theta(L) = -2\pi.$$

□

Por fim, temos o seguinte corolário que mostra que a duração Γ do fluxo não pode ser maior que $\frac{\mathcal{A}(0)}{2\pi}$, instante em que a área se torna zero.

Corolário 2. *Se o fluxo de uma curva X fechada, regular e simples, contraindo pela função curvatura, está definido para um intervalo $[0, \Gamma)$, então, $\Gamma \leq \frac{\mathcal{A}(0)}{2\pi}$, onde $\mathcal{A}(0)$ é a área da região delimitada por X .*

Demonstração. Integrando a equação $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -2\pi$ com relação a t ; obtemos:

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(0) = \int_0^t \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} d\tau = -2\pi t,$$

isto é,

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) - 2\pi t.$$

Assim, a área é positiva apenas para $t < \frac{\mathcal{A}(0)}{2\pi}$ e anula-se para $t = \frac{\mathcal{A}(0)}{2\pi}$

□

2.3 Curvas convexas contraindo pela curvatura

Nesta seção iremos apresentar o fluxo de uma curva contraindo pela função curvatura quando a curva inicial é (estritamente) convexa.

Iremos parametrizar uma curva convexa pelo ângulo θ que o campo tangente unitário à curva faz com o eixo x . Nessa parametrização, θ percorre uma única vez o círculo unitário e, portanto, $X(\theta)$ está bem definida no intervalo $[0, 2\pi]$. A seguir, vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para uma função positiva $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ser a curvatura de alguma curva convexa.

Proposição 8. *Uma função $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva e periódica de período 2π é a curvatura de uma curva estritamente convexa, regular, fechada e simples, se, e somente se,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{k(\theta)} d\theta = 0. \quad (2.18)$$

Além disso, dada uma função k com essas propriedades, a expressão da única curva estritamente convexa é dada, a menos de um movimento rígido, por

$$X(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (a, b) + \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha, \sin \alpha)}{k(\alpha)} d\alpha, \quad (2.19)$$

onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor fixo qualquer.

Demonstração. Seja k a curvatura de uma curva estritamente convexa dada, sabemos que $\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{k(\theta)}$. Isso implica

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{T(\theta)}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{\mathcal{L}} T(s) ds = T(\mathcal{L}) - T(0) = 0,$$

pois a curva é fechada. Reciprocamente, dada uma função $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, positiva, periódica de período 2π e que satisfaz (2.18), defina

$$\widehat{X}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (a, b) + \int_0^\theta \frac{(\cos \alpha, \sin \alpha)}{k(\alpha)} d\alpha.$$

Temos que $X(0) = X(2\pi) = (a, b)$ e, portanto, X é uma curva fechada. Além disso,

$$X'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = \left(\frac{\cos \theta}{k(\theta)}, \frac{\sin \theta}{k(\theta)} \right)$$

o que implica

$$X''(\theta) = (x''(\theta), y''(\theta)) = \left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{k(\theta)}, \frac{\cos\theta}{k(\theta)} \right) - k'(\theta) \left(\frac{\cos\theta}{k(\theta)^2}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{k(\theta)^2} \right).$$

A curvatura da curva é, da forma:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{((x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2)^{3/2}} \\ &= k^3 \left[\frac{\cos\theta}{k(\theta)} \left(\frac{\cos\theta}{k(\theta)} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{(k(\theta))^2} k'(\theta) \right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{k(\theta)} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{k(\theta)} + \frac{\cos\theta}{(k(\theta))^2} k'(\theta) \right) \right] \\ &= k(\theta). \end{aligned}$$

Para mostrar que a curva é simples, basta observar que o vetor normal é $N = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ que percorre todo o círculo unitário injetivamente uma única vez quando $\theta \in [0, 2\pi]$.

Para concluir a unicidade da expressão (2.19) a menos de um movimento rígido (isto é, rotações e translações), observe que pelo *teorema fundamental das curvas planas* (2), existe uma única curva, a menos de um movimento rígido, para uma dada função curvatura k . Visto que (2.19) contém as translações (a adição com o vetor constante (a, b)), obtemos a expressão geral de uma curva convexa multiplicando (2.19) pela matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\tilde{X}(\theta) = (\tilde{a}, \tilde{b}) + \int_0^\theta \frac{(\cos(\alpha - \theta_0), \operatorname{sen}(\alpha - \theta_0))}{k(\alpha)} d\alpha,$$

que, por sua vez, é apenas uma reparametrização de (2.19).

□

Visto que a função curvatura determina a curva a menos de um movimento rígido, será fundamental determinarmos como a curvatura evolui com o tempo relativo ao parâmetro θ . No resultado a seguir, denotamos por τ a variável temporal quando a variável espacial for θ e por t a variável temporal quando a variável espacial for u .

Proposição 9. *A função curvatura $k : [0, 2\pi] \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ das curvas contraindo função pela curvatura satisfaz a equação de evolução*

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3,$$

onde θ é o ângulo que o campo tangente faz com o eixo x .

Demonstração. Usando o Lema 3 e $\frac{\partial}{\partial s} = k \frac{\partial}{\partial \theta}$, temos

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2$$

e

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial s} = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}.$$

O resultado, então, segue do item (iv) do Lema 3.

□

A próxima proposição, cuja demonstração omitiremos, afirma que o problema de existência de solução para a equação (2.1) é equivalente a um problema de Cauchy para a função curvatura. Uma das vantagens desta equivalência está no fato de que lidar com uma equação escalar é, à princípio, menos complicado.

Proposição 10. *Se $X_0 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva estritamente convexa, então, o problema de existência de soluções suaves $X : [0, 2\pi] \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}^2$ para o problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN \\ X(\cdot, 0) = X_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

é equivalente a encontrar uma função suave $k : [0, 2\pi] \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3 \\ k(\theta, 0) = \psi(\theta), \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, positiva e tal que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\psi(\theta)} d\theta = 0.$$

Para concluir a seção, temos o seguinte resultado, que não será demonstrado.

Teorema 9. *A solução para o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN, \\ X(\cdot, 0) = X_0 \end{cases}$$

existe em t até que a área das regiões delimitadas pelas curvas $X(\cdot, t)$ se anule.

A partir do Corolário 2 e do teorema acima, podemos concluir que o tempo máximo de duração do Fluxo Redutor de Curvas é $\frac{\mathcal{A}(0)}{2\pi}$.

A demonstração da maioria dos teoremas e proposições enunciados na próxima seção são muito extensos e necessitam de resultados avançados de EDP e Análise, tais como Princípio do Máximo Parabólico, Desigualdade de Sobolev, Teorema de Arzelá-Ascoli. Sendo assim, não os demonstraremos.

2.4 Os teoremas de Gage-Hamilton e Grayson

Na seção anterior, mostramos que fluxo de curvas convexas contraído pela função curvatura não se extingue até que as áreas das regiões delimitadas por essas curvas anulem-se. Entretanto, não sabemos nada sobre o conjunto limite do fluxo, além de que área delimitada por esse conjunto é zero. A princípio, esse conjunto poderia ser qualquer objeto matemático, como um segmento de reta, união de segmentos, alguma outra curva plana, um conjunto discreto ou até estruturas mais estranhas como o conjunto de Cantor. Nesta seção, iremos enunciar resultados que mostram que nenhuma dessas possibilidades ocorre, mas que, na realidade, o conjunto final do fluxo é sempre um único ponto. Mais ainda: as curvas vão se tornando circulares à medida que contraem, de tal forma que, se reescalarmos a curva para que sua área ou seu comprimento sejam constantes, a curva limite é um círculo.

Proposição 11. *O conjunto limite de uma curva plana fechada convexa deformada pelo Fluxo Redutor de Curvas tem comprimento nulo.*

Demonstração. Inicialmente observe que, por uma consequência da Desigualdade Isoperimétrica de Gage, em 3, e da proposição (7) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L(t)^2}{A(t)} \right) &= \frac{2L(t)A(t)\frac{\partial L}{\partial t} - L(t)^2\frac{\partial A}{\partial t}}{(A(t))^2} \\ &= -\frac{2L(t)}{A(t)} \left(\int_{X(\cdot, t)} k^2 ds - \frac{\pi L(t)}{A(t)} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Assim, $L(t)^2/A(t)$ é decrescente e, visto que $\lim_{t \rightarrow \Gamma} A(t) = 0$, deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow \Gamma} L(t) = 0.$$

Dessa forma, o conjunto limite deve ter comprimento nulo.

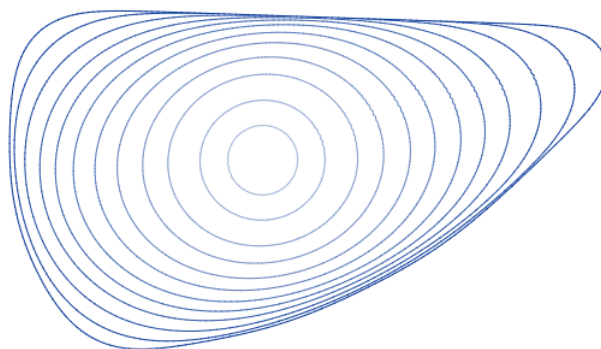
O resultado mais importante dessa seção é o que se segue.

Teorema 10 (Gage-Hamilton). *Uma família de curvas estritamente convexas $X(\cdot, t)$ de classe C^2 , contraindo pela função curvatura no intervalo $[0, \Gamma)$ e tal que $\lim_{t \rightarrow \Gamma} A(t) = 0$, vai também satisfazer*

$$\lim_{t \rightarrow \Gamma} \frac{L(t)^2}{A(t)} = 4\pi.$$

Além disso, as curvas normalizadas $Y(\cdot, t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}} X(\cdot, t)$, de área constante igual a π , limitam regiões que convergem, em um certo sentido, para o círculo unitário.

Figura 4—Curva convexa evoluindo pela curvatura.



Fonte: [5].

O próximo resultado mostra que as curvaturas de curvas contraindo pela função curvatura convergem uniformemente para 1: Isso garante uma espécie de “convergência de classe C^2 ” para um círculo unitário das curvas contraindo pelo fluxo (curvaturas são, de certa forma, derivadas de segunda ordem das curvas), em contraste com a convergência apenas contínua para o círculo unitário demonstrada no teorema anterior.

Teorema 11. *Se $k_{max}(t)$ e $k_{min}(t)$ denotam as curvaturas máxima e mínima de $X(\cdot, t)$, então*

$$\frac{k_{max}(t)}{k_{min}(t)} \rightarrow 1$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Como consequência do Teorema 11, obtemos a velocidade de convergência da curvatura

Corolário 3. *$k(\theta, t)\sqrt{2\Gamma - 2t}$ converge uniformemente a 1 quando $t \rightarrow \Gamma$.*

Até agora, mostramos a convergência do fluxo para curvas convexas, resultados obtidos por Michael Gage e Richard Hamilton. No que se segue, concluiremos os resultados do FRC enunciando o Teorema de Grayson, que confirma a convergência do fluxo de curvas

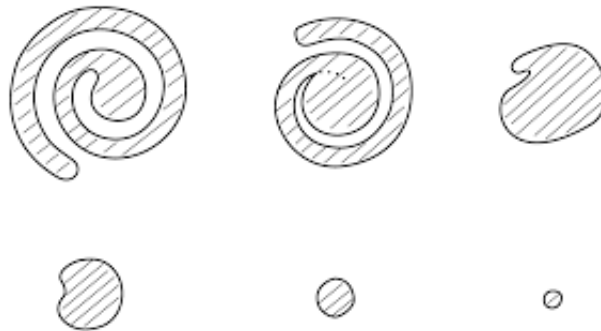
contraindo pela função curvatura assumindo que a curva inicial é apenas fechada e simples. Isso acontece pois o Fluxo Redutor de Curvas transforma uma curva plana, fechada e simples em uma curva convexa em algum momento antes de $t = \frac{A(0)}{2\pi}$.

Teorema 12 (Grayson). *Se $X_0 : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada, suave e simples, então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN, \\ X(\cdot, 0) = X_0, \end{cases}$$

possui solução $X(\cdot, t)$ definida para todo $t \in [0, \Gamma)$ que converge para um ponto quando $t \rightarrow \Gamma$. Além disso, as curvas normalizadas convergem uniformemente para um círculo unitário na norma C^∞ .

Figura 5—Curva fechada evoluindo pela curvatura.



Fonte: [2]

3 Soluções Autossimilares do Fluxo Redutor de Curvas

Do capítulo anterior, fica a questão de como o fluxo se comporta quando a curva não é de Jordan. Nesse caso, a descrição do comportamento da curva à medida que t muda fica mais complicada, pois a curva pode desenvolver singularidades. Nesse aspecto, as soluções autossimilares ganham destaque, pois a partir delas é possível modelar as singularidades do fluxo em questão. Elas foram definidas anteriormente e no que se segue adentraremos nesse importante categoria de solução do FRC, objetivando uma completa classificação das mesmas.

O presente capítulo será dividido em duas partes. Na seção 3.1, será abordado o importante teorema que permite obter a classificação de todas as Soluções Autossimilares do Fluxo Redutor de Curvas no plano. Já em 3.2 veremos a descrição matemática do comportamento das curvas que apenas rotacionam ou rotacionam e expandem sob o Fluxo Redutor de Curvas.

As definições e resultados desta seção principalmente estão majoritariamente nas referências [13, 15].

3.1 Caracterização das Soluções Autossimilares.

Mostraremos como o problema de encontrar todas as soluções autossimilares para o fluxo pode ser reduzido ao estudo de um sistema bidimensional não-linear de EDOs. O sistema possui dois parâmetros, A e B , que determinam o tipo de movimento autossimilar. Começemos pelo seguinte lema:

Lema 4. $X(\cdot)$ é uma solução autossimilar do Fluxo Redutor de Curvas se, e somente se, existem constantes A , B e C tais que:

$$A\langle X(u), T(u) \rangle + B\langle X(u), N(u) \rangle + \langle C, N(u) \rangle = k(u). \quad (3.1)$$

Demonstração. Suponha que X é uma solução autossimilar do fluxo. Desta forma, valem as equações (2.6) e (2.7). De (2.7) concluímos que

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial t} = X(u)g'(t)e^{if(t)} + iX(u)g(t)e^{if(t)}f'(t) + H'(t),$$

Também, podemos calcular o normal e a curvatura de \widehat{X} :

$$\begin{aligned} N(u, t) &= i e^{-if(t)} T(u), \\ k(u, t) &= \frac{k(u)}{g(t)}. \end{aligned}$$

Substituindo as informações acima na equação (2.6) do fluxo e fazendo as manipulações necessárias, obtemos que X é uma solução autossimilar se, e somente se, vale a equação

$$g(t)^2 f'(t) \langle X(u), T(u) \rangle + g(t) g'(t) \langle X(u), N(u) \rangle + g(t) \langle e^{-if(t)} H'(t), N(u) \rangle = k(u), \quad (3.2)$$

para todo $(u, t) \in \mathbb{R} \times I$. Em particular, quando $t = 0$ concluímos que a curva X deve satisfazer a equação

$$f'(0) \langle X(u), T(u) \rangle + g'(0) \langle X(u), N(u) \rangle + \langle H'(0), N(u) \rangle = k(u). \quad (3.3)$$

Assim, tomamos $A = f'(0)$, $B = g'(0)$ e $C = H'(0)$ e temos que X satisfaz a equação desejada.

Agora, seja X uma curva satisfazendo (3.1). Primeiro vamos considerar o caso em que $C = 0$.

Para que X seja uma solução autossimilar do FRC, é necessário que existam funções diferenciáveis $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : I \rightarrow \mathbb{C}$ tais que X satisfaça a equação (3.2). Comparando as equações (3.1) e (3.2), temos que as funções f, g e H que procuramos devem satisfazer as equações diferenciais ordinárias

$$g(t)^2 f'(t) = A, \quad g(t) g'(t) = B \quad \text{e} \quad g(t) e^{-if(t)} H'(t) = 0,$$

para todo $t \in I$. Assim, uma escolha válida para f, g e H é

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{2B} \ln(2Bt + 1), & B \neq 0 \\ At, & B = 0 \end{cases}, \quad g(t) = \sqrt{2Bt + 1} \quad \text{e} \quad H(t) = 0, \quad (3.4)$$

Desse modo, mostramos que a curva X evolui de maneira autossimilar pelo Fluxo Redutor de Curvas, governada por f e g como mostrado na equação (2.7) aut. Em outras palavras, ela rotaciona ao redor da origem (exceto quando $A = 0$) e/ou expande se $B > 0$ e contrai se $B < 0$. Esse movimento será chamado de dilatação espiral.

A seguir, vamos considerar que a curva X satisfaz a equação (3.1) com $C \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Se A e B não são ambos nulos, tomamos $\tilde{X}(u) = \frac{C}{B+Ai} + X(u)$, e cálculos diretos nos dão que a curva \tilde{X} satisfaz a equação (3.1) com $C = 0$. Mas como vimos antes, isto significa que \tilde{X}

faz uma dilatação espiral em torno de 0 e, portanto, X faz uma dilatação espiral em torno de $\frac{-C}{B+Ai}$. Logo, se temos $A \neq 0$ e/ou $B \neq 0$, introduzir o termo C não nos dará nenhuma solução nova geometricamente.

Entretanto, se $A = B = 0$, a equação (2.7) é satisfeita se tomarmos as funções $f(t) = 0$, $g(t) = 1$ e $H(t) = Ct$. Com isso, a curva X move-se por translação na direção C pelo Fluxo Redutor de Curvas. Desse modo, ou a curva é uma reta com C como vetor diretor (assim a reta translada sobre ela mesma) ou parte da curva pode ser escrita como o gráfico de uma função definida em uma reta perpendicular ao vetor C . No exemplo 4, vimos que nesse caso a curva é $X(x) = (x, -\ln(\cos(x)))$ (a menos de constantes e reescala), denominada *Grim Reaper*.

□

De acordo com a demonstração do lema anterior, o problema de encontrar todas as soluções autossimilares no plano foi reduzido ao problema de encontrar todas as curvas $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo a equação (3.1) com $C = 0$. Neste caso, destacamos no resultado a seguir um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que terá papel de destaque em futuras análises.

Lema 5. *Se uma curva X satisfaz*

$$A\langle X(u), T(u) \rangle + B\langle X(u), N(u) \rangle = k(u), \quad (3.5)$$

então as funções

$$x = A\langle X, T \rangle + B\langle X, N \rangle, \quad (3.6)$$

$$y = -B\langle X, T \rangle + A\langle X, N \rangle. \quad (3.7)$$

satisfazem o sistema de equações diferenciais não linear de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = xy + A, \\ y' = -x^2 - B. \end{cases} \quad (3.8)$$

Reciprocamente, se x e y satisfazem o sistema de equações diferenciais (3.8) e se θ é uma primitiva de x , então a curva $X = e^{i\theta} \frac{x+iy}{A-Bi}$ satisfaz (3.5). Em particular, x e y são dadas exatamente como nas identidades (3.6) e (3.7) para esta curva X .

Observação 2. *O teor geométrico das funções x e y definidas em (3.6) e (3.7) pode ser visto a partir da seguinte igualdade*

$$x + iy = (A - iB)(\langle X, T \rangle + i\langle X, N \rangle),$$

que independe do sistema (3.8). De fato, uma vez que $N = iT$, temos que

$$X = \langle X, T \rangle T + \langle X, N \rangle N = T(\langle X, T \rangle + i\langle X, N \rangle) = \frac{x + iy}{A - iB} T, \quad (3.9)$$

de onde concluímos que x e y descrevem a curva X no referencial de Frenet $\{T, N\}$.

Passemos à demonstração do Lema 5.

Demonstração. Seja $X(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Sabemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle X, T \rangle &= 1 + k \langle X, N \rangle, \\ \frac{d}{ds} \langle X, N \rangle &= -k \langle X, T \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, as funções definidas em (3.6) e (3.7) satisfazem

$$\begin{aligned} x' &= ky + A, \\ y' &= -kx - B. \end{aligned}$$

Segue de (3.1) com $C = 0$ que $x = k$. Substituindo esta informação no sistema acima obtemos (3.8).

Agora suponha que x e y satisfaçam o sistema (3.8), e, inspirados por (3.9), considere a curva $X = e^{i\theta} \frac{x+iy}{A-iB}$, onde $\theta(s) = \int^s x(\xi) d\xi$ é uma primitiva de $x(s)$. Note que

$$\begin{aligned} X' &= e^{i\theta} \frac{i\theta'(x+iy) + x' + iy'}{A-iB} \\ &= e^{i\theta} \frac{ix(x+iy) + xy + A + i(-x^2 - B)}{A-iB} \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

de forma que X é parametrizada por comprimento de arco com tangente $T = e^{i\theta}$ e, portanto, a curvatura de X é dada por $k = \theta' = x$ e, pela definição de X , temos

$$X = T \frac{x + iy}{A - Bi}.$$

Usando a identidade geral (3.9) da Observação (2) concluímos que as soluções x e y da equação diferencial (3.8) satisfaz (3.6) e (3.7), como afirmado.

□

Os Lemas (4) e (5) junto com resultados da teoria geral de equações diferenciais ordinárias nos permitem mostrar que qualquer escolha dos parâmetros A e B resulta na existência de uma curva $X(u)$ satisfazendo (3.5). Este é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 13. *Para cada valor de A e de B existe uma única curva $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação (3.5).*

Demonstração. Sejam A e B dados. Pelo Lema (5), sabemos que uma curva X satisfaz (3.1) com $C = 0$ se, e somente se, as funções x e y definidas como em (3.6) e (3.7), respectivamente, satisfazem (3.8). Assim, basta mostrarmos que tal sistema tem uma única solução e que esta está definida em toda a reta \mathbb{R} . Mostraremos tais resultados no que segue.

Primeiro observe que (3.8) é um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\frac{d}{ds}(x, y) = \phi(x, y),$$

em que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a função diferenciável dada por $\phi(x, y) = (xy + A, -x^2 - B)$. Assim, de acordo com o corolário 1, para qualquer condição inicial (x_0, y_0) , existirá uma única solução $(x(s), y(s))$ tal que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Para uma demonstração deste resultado, recomendamos [16]. Por outro lado,

$$\frac{d}{ds} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{A^2 + B^2},$$

mostrando que $\sqrt{x(s)^2 + y(s)^2} \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{A^2 + B^2}s$, o que garante que os valores de x e y não podem explodir em tempo finito. Desse modo, a solução está definida em \mathbb{R} .

□

Observação 3. *Há bastante simetria no problema. Cada curva é determinada pelas condições iniciais x_0 e y_0 e pela escolha da primitiva $\theta + \theta_0$ de x , no Lema 5. Contudo, modificar θ_0 apenas rotaciona a curva. Então, para evitar curvas idênticas iremos a partir de agora assumir $\theta_0 = 0$. Ainda, note que reescalar o valor de (A, B) por c corresponde a reescalar a curva por X por $c^{-\frac{1}{2}}$.*

Observação 4. *Considere as funções $F(x, y) = xy + A$ e $G(x, y) = -x^2 - B$. Assim, temos*

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y). \end{cases}$$

Note que $F(-x, -y) = F(x, y)$ e $G(-x, -y) = G(x, y)$, portanto $s \mapsto (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$, onde $\tilde{x}(s) = -x(-s)$ e $\tilde{y}(s) = -y(-s)$, também é uma solução do sistema de EDO's que, como se pode facilmente ver, corresponde apenas a uma mudança de orientação da curva X . Essa simetria será usada posteriormente para simplificar alguns argumentos.

Será conveniente trabalhar também com as funções $\langle X, T \rangle$ e $\langle X, N \rangle$. A partir de agora, elas serão denotadas por τ e ν , respectivamente. Com isso temos a seguinte proposição

Proposição 12. *Seja X uma solução da equação (3.5). Se $\tau = \langle X, T \rangle$ e $\nu = \langle X, N \rangle$, então*

$$\begin{cases} \tau' = 1 + A\tau\nu + B\nu^2 \\ \nu' = -A\tau^2 - B\tau\nu \end{cases} \quad (3.10)$$

Demonstração. Relembre que $x + iy = (A - Bi)(\tau + i\nu)$ e que a curvatura k é igual a x . Calculemos então as derivadas de τ e ν :

$$\tau' = \langle X', T \rangle + \langle X, T' \rangle = \langle T, T \rangle + x\langle X, N \rangle$$

$$\tau' = 1 + x\nu$$

$$\nu' = \langle X', N \rangle + \langle X, N' \rangle = \langle T, N \rangle - x\langle X, T \rangle$$

$$\nu' = -x\tau$$

Substituindo $A\tau + B\nu = x$ em τ' e ν' obtemos o desejado.

□

Assim, τ e ν são a solução do sistema de equações (3.10) e seus valores iniciais satisfazem a equação $x_0 + iy_0 = (A - iB)(\tau_0 + i\nu_0)$. Também, a curva X pode ser escrita como

$$X = e^{i\theta} \frac{x + iy}{A - Bi} = e^{i\theta} (\tau + i\nu) = e^{i\phi} r \quad (3.11)$$

onde

$$r = |X| = \sqrt{\tau^2 + \nu^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

e

$$\phi = \theta + \arg(\tau + i\nu) = \theta + \arg(x + iy) + \arg(A + Bi)$$

Quanto à classificação das soluções autossimilares, todos os valores possíveis de A e de B serão divididos em 4 casos onde a curva possui propriedades e comportamento significativamente diferentes através do fluxo. São eles:

1. $A \neq 0$ e $B \geq 0$: Curvas que rotacionam ou rotacionam e expandem.
2. $A \neq 0$ e $B < 0$: Curvas que rotacionam e contraem.
3. $A = 0$ e $B < 0$: Curvas que contraem.

4. $A = 0$ e $B > 0$: Curvas que expandem.

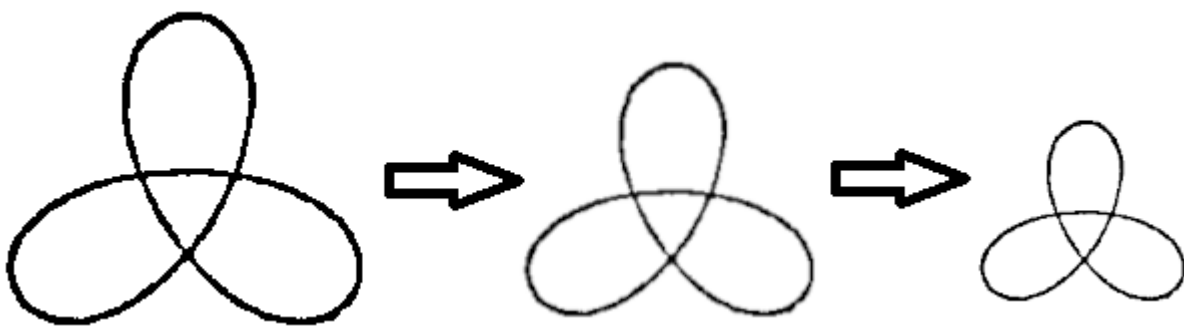
O caso $A = B = 0$ produz apenas linhas retas e, portanto, é omitido. Nesse PIBIC estudamos o primeiro caso ($A \neq 0$ e $B \geq 0$) que será exposto na próxima seção. Antes disso, faremos uma breve discussão sobre pontos duplos, tópico com o qual fechamos a esta seção.

A pergunta sobre a qual refletiremos neste parágrafo é simples: a curva X dada pelo Teorema 13 pode ter pontos duplos? Note que um ponto duplo teria que ser transversal pela unicidade do nosso sistema de EDOs. Agora, assuma X sendo uma curva com um ponto duplo transversal. Então X possui um loop, isto é, uma restrição de X que é uma curva fechada, denotada por Γ . Considere a curva parametrizada tal que a região delimitada pelo loop está no lado esquerdo da curva, e seja $\alpha \in (0, 2\pi)$ o ângulo interno do loop no ponto duplo. Se deixarmos a curva X se deformar através do Fluxo Redutor de Curvas, então a derivada temporal no instante 0 da área delimitada pelo loop é

$$-\int_{\Gamma} k ds = -(\pi + \alpha) < 0 \tag{3.12}$$

Portanto, a área delimitada por qualquer loop é sempre estritamente decrescente sob Fluxo Redutor de Curvas. Isso significa que se uma curva se expande através do fluxo (corresponde ao caso $B \geq 0$), então ela não pode ter quaisquer pontos duplos pois as áreas limitadas pelos loops correspondentes estariam aumentando.

Figura 6—Curva com loops evoluindo pelo FRC



Fonte: Autoria própria.

3.2 Curvas que rotacionam ou rotacionam e expandem

No que segue vamos apresentar um estudo detalhado do comportamento das soluções autossimilares do Fluxo Redutor de Curvas correspondentes ao caso em que $A \neq 0$ e $B \geq 0$, mediante a descrição dada pelo Lema (4). Lembramos que estamos assumindo $C = 0$ e

que, neste caso, as curvas consideradas devem satisfazer (3.5). Ademais, estaremos a todo momento usando as equivalências dadas pelo Lema (4) e pelo Lema (5).

O teorema abaixo resume o estudo desenvolvido ao longo desta seção.

Teorema 14. *Para cada $A \neq 0$ e $B \geq 0$, temos a seguinte descrição das curvas que satisfazem a Equação (3.5): As curvas são propriamente mergulhadas, têm um ponto mais próximo da origem e consistem em dois braços que saem deste ponto e que se afastam estritamente da origem ao infinito. Cada braço tem curvatura total infinita e espirala infinitas vezes ao redor da origem. A curvatura vai para 0 ao longo de cada braço, e sua direção de crescimento limitante é $B + iA$ vezes a localização.*

As curvas formam uma família unidimensional parametrizada pela distância à origem, que pode assumir qualquer valor em $[0, \infty)$.

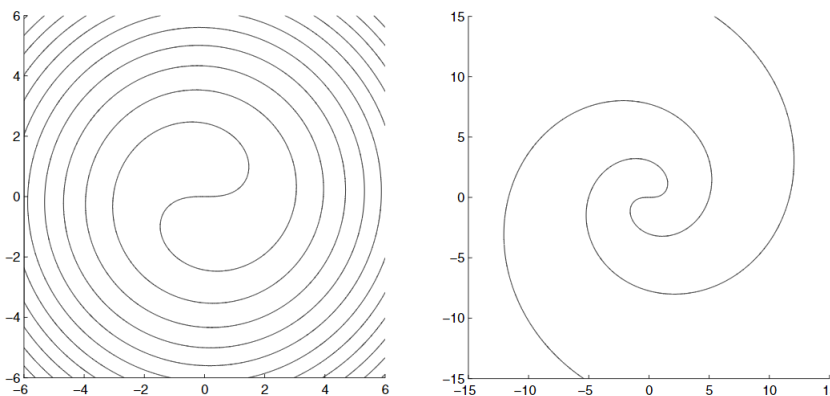
Se $B = 0$, então, sob o FRC, as curvas giram para sempre com velocidade angular constante A .

Se $B > 0$, então, sob o FRC, as curvas giram e se expandem para sempre com função angular $\frac{A}{2B} \log(2Bt + 1)$ e função escala $\sqrt{2Bt + 1}$.

Observação 5. *A grosso modo, uma curva propriamente mergulhada é uma curva contínua que não se auto intersecta e nem se acumula próximo a um conjunto não unitário e limitado. Essa definição intuitiva é suficiente para os propósitos dessa seção e não adentraremos na definição formal.*

Curvas desse tipo podem ser vistas na figura abaixo.

Figura 7—Curvas com parâmetros $A = 1, B = 0$ e $A = 1, B = 0,25$, respectivamente.



Fonte: [13]

A prova do teorema será consequência de uma série de lemas expostos a seguir. Refletindo a curva se necessário, podemos supor $A > 0$.

Lema 6. *A função x tem no máximo uma raiz, é negativa antes dela e positiva depois dela.*

Demonstração. Suponha que s_0 e s_1 sejam duas raízes de x , com $s_0 < s_1$. Então $x(s_0) = x(s_1) = 0$, o que implica que $x'(s_0) = x'(s_1) = 0y + A = A > 0$. Como a derivada é positiva em s_0 e s_1 , pela propriedade da conservação de sinal (Proposição 4) sabemos que existem intervalos abertos I_0 e I_1 , com $s_0 \in I_0$ e $s_1 \in I_1$, onde x' é positiva e, conseqüentemente, x é crescente. Agora, sejam $s_2 \in I_0$ e $s_3 \in I_1$, tais que $s_2 > s_0$ e $s_3 < s_1$. Então $x(s_2) > 0$ e $x(s_3) < 0$. Como x é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4) existe pelo menos um $c \in (s_2, s_3)$ tal que $x(c) = 0$. Tome o menor c tal que isso acontece. Daí, x é positiva em (s_2, c) . De fato, se x fosse negativa em algum ponto de (s_2, c) , teríamos pelo TVI que existiria uma raiz nesse intervalo, pois x é positiva em $s_2 + \epsilon$ para ϵ suficientemente pequeno, o que contradiz o fato de c ser a menor raiz. Além disso, como c é uma raiz, temos $x'(c) = A > 0$. Então, novamente, existe um intervalo aberto I_3 com $c \in I_3$, onde x é crescente. Assim, para todo $s \in (s_2, c) \cap I_3$, temos que $x(s) < x(c) = 0$. Contradição, já que x deveria ser positiva em s . Logo x não pode ter mais de uma raiz.

□

Lema 7. *A função x tem no máximo dois extremos, um mínimo abaixo de $x = 0$ e um máximo acima de $x = 0$.*

Demonstração. Se $x'(s) = 0$ então $x''(s) = x'y + xy' = -x(s)(x^2(s) + B)$. Como $x(s) \neq 0$ e $B \geq 0$, temos que x e x'' sempre têm sinais contrários pela equação anterior. Então, se tivermos um ponto crítico com $x(s) < 0$, teremos um ponto de mínimo, pois $x''(s) > 0$. Enquanto que se $x(s) > 0$ para um ponto crítico, teremos um ponto de máximo, pois $x''(s) < 0$. Assim, todo extremo acima de $x = 0$ é máximo e todo extremo abaixo de $x = 0$ é mínimo.

Precisamos mostrar agora que x não pode ter mais que um mínimo ou um máximo. Suponha que x tenha máximo local em s_0 e s_1 , $s_0 < s_1$, ou seja, $x'(s_0) = x'(s_1) = 0$, $x(s_0) > 0$ e $x(s_1) > 0$. Pela propriedade da conservação de sinal e pela definição de máximo temos que existe δ tal que $x > 0, x' < 0$ em $I_0 = (s_0, s_0 + \delta)$ e $x > 0, x' > 0$ em $I_1 = (s_1 - \delta, s_1)$. Sejam $s_2 \in I_0$ e $s_3 \in I_1$. Como x' é contínua, pelo TVI existe pelo menos um $c \in (s_2, s_3)$ tal que $x'(c) = 0$. Tome o menor c tal que isso acontece. Por um lado, $x(c)$ não pode ser máximo, pois senão teríamos outro ponto crítico entre s_1 e c . Por outro lado, $x(c)$ não pode ser de inflexão, pois nesse caso teríamos $x''(c) = 0$, o que implicaria $x(c) = 0$, o que, como vimos na demonstração do Lema (6), acarretaria em $x'(c) \neq 0$, o que é uma contradição. Além disso, $x(c)$ não pode ser

mínimo, pois teríamos $x(c) < 0$ pela primeira parte deste lema e pelo TVI teríamos $c_0 \in (s_1, c)$ e $c_1 \in (c, s_2)$ tais que $x(c_0) = x(c_1) = 0$, o que contraria o lema anterior. Assim, x não possui ponto crítico em (s_2, s_3) , o que é uma contradição. Portanto, x não pode ter mais de um máximo local.

Por um argumento análogo podemos concluir que x não pode ter mais de um ponto de mínimo local. De fato, se x possuísse mais de um mínimo, então \tilde{x} , definida na Observação (4), possuiria mais de um máximo, o que contrariaria o que acabamos de provar.

□

Antes de começar o próximo lema, façamos algumas observações que serão usadas na sequência.

Observação 6. *Sejam x e y satisfazendo (3.8). Não existe um s_0 tal que para todo $s \geq s_0$ tenhamos $x(s) > 0$ e $x'(s) > 0$. De fato, suponha que isso aconteça. Então $y'(s) \leq -(x(s))^2 \leq -(x(s_0))^2$, para $s \geq s_0$. Daí, tomando $k = (x(s_0))^2$, temos $y' \leq -k$. Assim, para $s \geq s_0$*

$$y - y(s_0) = \int_{s_0}^s y' ds \leq \int_{s_0}^s -k ds = -k(s - s_0). \quad (3.13)$$

Tomando $c = y(s_0)$ e multiplicando a desigualdade acima por $x > 0$, concluímos que

$$yx \leq -k(s - s_0)x + cx.$$

Agora, somando A em ambos os lados da desigualdade acima e usando o sistema (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} x' &\leq A - x[k(s - s_0) - c] \\ &\leq A - x(s_0)[k(s - s_0) - c] \\ &= A - x(s_0)[ks - k(s_0) - c] \\ &= A - x(s_0)ks + x(s_0)k(s_0) + x(s_0)c \\ &= Ds + E, \end{aligned}$$

onde $D = -x(s_0)k < 0$, $E \in \mathbb{R}$ e $s \geq \frac{c}{k} + s_0$. Note que $f(s) = Ds + E$ é uma função afim decrescente e $f(s) \leq 0$ para todo $s \geq -\frac{E}{D}$. Assim, teremos $x'(s) \leq 0$ para todo $s \geq \max\{s_0, \frac{c}{k} + s_0, -\frac{E}{D}\}$, o que contraria a hipótese. Portanto, para todo s_0 , existe $s_1 \geq s_0$ tal que $x(s_1) \leq 0$ ou $x'(s_1) \leq 0$.

Observação 7. *Considere novamente x e y satisfazendo (3.8). De modo similar ao que foi feito na Observação (6), podemos mostrar que não existe um s_0 tal que para todo $s \leq s_0$ tenhamos*

$x(s) > 0$ e $x'(s) < 0$. Suponha que exista s_0 satisfazendo a condição acima. Dessa vez temos $y'(s) \leq -(x(s_0))^2$, para $s \leq s_0$. Tomando $k = (x(s_0))^2$, temos $y' \leq -k$. Assim, para $s \leq s_0$

$$\int_s^{s_0} y' ds \leq \int_s^{s_0} -k ds \Rightarrow \int_{s_0}^s y' ds \geq \int_{s_0}^s -k ds \quad (3.14)$$

o que é igual a inequação (3.13), a menos da desigualdade utilizada. Logo ao desenvolvermos (3.14) de maneira análoga, obtemos:

$$x' \geq Ds + E,$$

onde $D = -x(s_0)k < 0$, $E \in \mathbb{R}$ e $s \leq \frac{c}{k} + s_0$. Como $f(s) = Ds + E$ é estritamente decrescente, temos $f(s) \geq 0$ para todo $s \leq -\frac{E}{D}$. Assim, teremos $x'(s) \geq 0$ para todo $s \leq \min\{s_0, \frac{c}{k} + s_0, -\frac{E}{D}\}$, o que contraria a hipótese. Logo, para todo s_0 , existe $s_2 \leq s_0$ tal que $x(s_2) \leq 0$ ou $x'(s_2) \geq 0$.

Lema 8. A função x é limitada. Além disso, se ela assumir valores positivos (resp., negativos), então assumirá um máximo (resp., mínimo) global

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que x é limitada superiormente para todo $s \in \mathbb{R}$. Observe que se $x(s) < 0, \forall s \in \mathbb{R}$, x já é limitada superiormente por 0. Dessa forma, suponhamos que exista $s_0 \in \mathbb{R}$, tal que $x(s_0) > 0$. O argumento será dividido em duas partes.

Mostremos que x restrita a $[s_0, +\infty)$ tem um máximo global. Temos 3 possibilidades para $x'(s_0)$. Se $x'(s_0) < 0$, então $x'(s) < 0, \forall s \geq s_0$. De fato, se tivéssemos $x'(s_3) > 0$ para um $s_3 > s_0$ teríamos um mínimo em $c \in (s_0, s_3)$, o que contraria o Lema 7, se $x(c) > 0$, ou o Lema 6, se $x(c) < 0$. Assim, temos que x restrita a $[s_0, +\infty)$ atinge máximo global em s_0 , nesse caso. Já se $x'(s_0) > 0$, temos pela Observação 6 que existe $s_1 > s_0$ tal que $x'(s_1) \leq 0$, uma vez que $x(s) > 0, \forall s \geq s_0$ (caso contrário teríamos uma raiz com x positivo antes dela, o que contraria o Lema 6). Se $x'(s_1) < 0$, teremos $x'(s) < 0, \forall s > s_1$, como já foi mostrado. Assim, x restrita ao intervalo $[s_1, +\infty)$ assume máximo global em s_1 . Como x restrita a $[s_0, s_1]$ também possui máximo global, em virtude do Teorema de Weierstrass, temos novamente que x restrita a $[s_0, +\infty)$ tem máximo global. Finalmente, se $x'(s_1) = 0$ (ou $x'(s_0) = 0$), x terá um máximo em s_1 (ou s_0) e esse máximo será global para x restrita a $[s_0, +\infty)$ pois $x' < 0$ imediatamente após esse máximo e assim permanece.

Agora vamos mostrar que x restrita a $(-\infty, s_0]$ tem um máximo global. Da Observação 7, existe $s_2 \leq s_0$ tal que $x(s_2) \leq 0$ ou $x'(s_2) \geq 0$. Caso ocorra $x(s_2) \leq 0$, temos que $x(s) \leq 0, \forall s \leq s_2$, pois do contrário teríamos duas raízes, o que contraia o Lema 6. Além disso, pelo Teorema

de Weierstrass, x restrita a $[s_2, s_0]$ assume máximo global. Assim, x restrita a $(-\infty, s_0]$ assume máximo global, que é atingido em $[s_2, s_0]$. Suponha agora que $x(s_2) > 0$. Neste caso, $x'(s_2) \geq 0$. Se $x'(s_2) = 0$, temos que s_2 é um máximo, pelo Lema 7, e este será máximo global de x restrita a $(-\infty, s_0]$ pois, para $s < s_2$, se $x(s) > 0$ temos $x'(s) > 0$, e para $s \in (s_2, s_0]$ temos $x'(s) < 0$. Por fim, suponha $x'(s_2) > 0$. Se existir $s < s_2$ tal que $x'(s) \leq 0$, então x tem máximo em $(-\infty, s_0]$ e este será global pelo argumento anterior. Consideremos o caso em que $x'(s) > 0, \forall s \leq s_2$. Neste caso $x(s) \leq x(s_2), \forall s \leq s_2$. Então x restrita a $(-\infty, s_0]$ tem máximo global também neste caso. Assim provamos que se x assume um valor positivo, então necessariamente ela tem um máximo global. Por um argumento análogo podemos concluir que se x assume um valor negativo, então ela tem um mínimo global. De fato, se isso não ocorresse, então \tilde{x} , definida na Observação 4, assumiria um valor positivo mas não teria um máximo global, contrariando o que acabamos de provar. Portanto x será limitada.

□

Lema 9. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$

Demonstração. Se $B > 0$, então $y' \leq -B < 0$. Daí, temos $\int_{s_0}^s y' ds \leq \int_{s_0}^s -B ds$, o que implica que $y(s) \leq -Bs + k$, onde $k = Bs_0 + y(s_0)$. Então, $\lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} -Bs + k = -\infty$. Assim, pelo critério de divergência temos $\lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) = -\infty$. Procedendo de maneira análoga, obtemos $\lim_{s \rightarrow -\infty} y(s) \geq \lim_{s \rightarrow -\infty} -Bs + k = +\infty$ e, pelo critério de divergência, temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} y = +\infty$. Agora, olhemos para o caso $B = 0$. Já que $y' = -x^2 \leq 0$, y é decrescente. Suponha que $\lim_{s \rightarrow \infty} y$ seja finito, ou seja, que y é limitada a partir de um s_0 . Daí, $y'' = -2x^2 y - 2Ax$ é limitada, pois tanto x quanto y são limitados, o que implica que y' é uniformemente contínua. Assim, pelo lema de Barbalat (1), temos $\lim_{s \rightarrow \infty} y' = 0$. Mas $y' = -x^2$, então $\lim_{s \rightarrow \infty} x = 0$. No entanto, $x' = xy + A$, então $\lim_{s \rightarrow \infty} x' = A$. Contradição. Portanto, $\lim_{s \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Pela simetria da observação 4, $\lim_{s \rightarrow -\infty} y = +\infty$. Com efeito, se isso não ocorresse, teríamos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{y} \neq -\infty$, o que é uma contradição.

□

Lema 10. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$ e r tem exatamente um extremo, que é um mínimo global.

Demonstração. Temos que $r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \geq \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Logo $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r \geq \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = +\infty$, pelo lema 9. Assim, pelo critério de divergência, $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = +\infty$.

Agora mostremos que r possui mínimo global. De fato, pelo limite anterior, temos por definição que $\forall M > 0, \exists k > 0$ tal que $|s| > k$ implica $r(s) > M$. Tome $M = r(s_0)$ para algum s_0 fixo. Daí, temos $s_0 \in [-k, k]$, pois caso contrário teríamos $r(s_0) > r(s_0)$ pela definição anterior. Como r é contínua e $[-k, k]$ é compacto, $r([-k, k])$ também vai ser compacto e pelo teorema de Weierstrass terá um valor mínimo global. Seja $r(m)$ esse mínimo. Então $r(m) \leq r(s)$ para todo $s \in [-k, k]$. Em especial temos $r(m) \leq r(s_0) = M$. Mas $M < r(s)$ para $|s| > k$. Logo, $r(m) \leq r(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Portanto, a função r possui mínimo global.

Por fim, temos que esse mínimo será único. Com efeito, note que $\frac{d}{ds}(r^2) = 2\tau\tau' + 2\nu\nu' = 2\tau$. Em um ponto crítico temos $\tau(s) = 0$. Nesse caso, temos que $\frac{d^2}{ds^2}(r^2) = 2\tau'(s) = 2(B\nu^2(s) + 1) > 0$, ou seja, todo ponto crítico de r é de mínimo. Caso r tivesse 2 mínimos, teríamos um máximo entre eles pelo TVI, contrariando o que acabamos de mostrar. Portanto, r tem exatamente um mínimo, que é global.

□

Este lema implica que a curva X tem exatamente um ponto mais próximo da origem, que ocorre no mínimo global de r . A curva consiste em dois braços saindo deste ponto, onde cada braço está indo estritamente de sua origem ao infinito, já que r tende a $+\infty$ quando s tende a $\pm\infty$. Assim, cada braço é propriamente mergulhado, pois não se auto intersectam e nem se acumulam próximo a um conjunto não unitário e limitado. Como já sabemos que X não possui pontos duplos (porque $B \geq 0$), temos que os dois braços não se intersectam e, com isso, temos o seguinte resultado:

Corolário 4. *A curva X é propriamente mergulhada.*

Nosso próximo objetivo é mostrar que a curvatura x vai para 0 ao longo de cada braço.

Lema 11. *A função x tem um mínimo global negativo, um máximo global positivo e nenhum outro extremo além destes.*

Demonstração. Se $x < 0$ para todo s , então existe s_0 tal que $x' = xy + A \geq A > 0$ para todo $s \geq s_0$, pois teremos $xy \geq 0$ (pelo Lema 9). Daí, obtemos $\int_{s_0}^s x' ds \geq \int_{s_0}^s A ds$ e isso implica que $x(s) \geq As + k$, onde $k = x(s_0) - As_0$. Assim temos $x(s) \geq 0$ para todo $s \geq \max\{s_0, \frac{As_0 - x(s_0)}{A}\}$, o que contraria a hipótese. Similarmente, $x > 0$ não vale para todo s . De fato, caso isso ocorresse teríamos que existiria s_0 tal que $x' = xy + A > 0$ para todo $s \leq s_0$ (pelo lema 9) e então $\int_s^{s_0} x' ds \geq \int_s^{s_0} A ds$. Daí, $x(s) \leq As + k$, e teríamos $x(s) \leq 0$ para todo $s \leq \min\{s_0, \frac{As_0 - x(s_0)}{A}\}$.

Contradição. Portanto, x assume tanto valores positivos quanto negativos e o argumento da prova do Lema 8 mostra que x tem um mínimo e um máximo globais. Pelo Lema 7, esses são os únicos extremos.

□

Lema 12. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} v = \mp\infty$

Demonstração. Temos que $v = \langle X, N \rangle = \left\langle e^{i\theta} \frac{x+iy}{A-iB}, i e^{i\theta} \right\rangle$. Como $e^{i\theta}$ se trata de uma rotação (isometria) temos $v = \left\langle \frac{x+iy}{A-iB}, i \right\rangle$. Daí, temos que v é a parte imaginária de $\frac{x+iy}{A-iB}$, ou seja, $v = \frac{Bx+Ay}{A^2+B^2}$. Assim, temos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{Bx+Ay}{A^2+B^2}$. Pelos Lemas 8 e 9 temos $\lim_{s \rightarrow +\infty} v \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{k_1+Ay}{A^2+B^2} = -\infty$. Assim, pelo critério de comparação temos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = -\infty$. De maneira análoga, temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{Bx+Ay}{A^2+B^2} \geq \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{k_2+Ay}{A^2+B^2} = +\infty$. Assim, pelo critério de comparação temos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} v = +\infty$.

□

Lema 13. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} x = 0$

Demonstração. Pelo Lema 11, sabemos que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} x$ é finito, pois x é decrescente e limitada para $s > s_1$ e $s < s_2$, onde s_1 e s_2 são o máximo e o mínimo global respectivamente. Se o limite de x quando $s \rightarrow +\infty$ não é 0, então $x > \delta > 0$ para todo $s \geq s_0$. Pelo Lema 12, podemos escolher s_0 tal que $v < -\frac{2}{\delta}$ para todo $s \geq s_0$. Mas então $\tau' = 1 + xv < 1 - x\frac{2}{\delta} < -1$ para todo $s \geq s_0$. Daí, $\tau < -s + k$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tau < \lim_{s \rightarrow +\infty} -s + k$. Logo $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau = -\infty$. Mas, $x = A\tau + Bv$, então isso implica que $\lim_{s \rightarrow \infty} x = -\infty$, uma contradição. O outro caso segue pela simetria da observação 4. Se $\lim_{s \rightarrow -\infty} x = L \neq 0$, teríamos $\lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{x} = -L \neq 0$, o que contraria o que acabamos de provar. Portanto, $\lim_{s \rightarrow -\infty} x = 0$.

□

Agora podemos determinar o comportamento dos dois braços longe da origem. Primeiro vamos enunciar um resultado de limite básico.

Lema 14. a) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{v} = -\frac{B}{A}$

b) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{r} = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

c) $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{v}{r} = \pm \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Demonstração. Lembremos que $v = \frac{Bx+Ay}{A^2+B^2}$ e que $\tau = \langle X, T \rangle = \left\langle e^{i\theta} \frac{x+iy}{A-iB}, e^{i\theta} \right\rangle$. Como $e^{i\theta}$ é uma isometria temos $\tau = \left\langle \frac{x+iy}{A-iB}, 1 \right\rangle$. Daí, τ é a parte real de $\frac{x+iy}{A-iB}$, ou seja, $\tau = \frac{Ax-By}{A^2+B^2}$. Com essas informações, calculemos os limites acima.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{v} &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{Ax-By}{A^2+B^2} \cdot \frac{A^2+B^2}{Bx+Ay} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{Ax-By}{Bx+Ay} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{y \frac{Ax}{y} - B}{y \frac{Bx}{y} + A} = -\frac{B}{A} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{r} &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{Ax-By}{A^2+B^2} \right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{y \left(\frac{Ax}{y} - B \right)}{|y| \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}} \\ &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{v}{r} &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{Bx+Ay}{A^2+B^2} \right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{Bx+Ay}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{y \cdot \frac{Bx}{y} + A}{|y| \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}} \\ &= \pm \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}$$

□

Pela equação (3.11) e o lema anterior, temos imediatamente o seguinte corolário que mostra a direção de crescimento limitante dos braços.

Corolário 5. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{rT}{X} = \pm \frac{B+iA}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{rT}{X} &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{r e^{i\theta}}{e^{i\theta}(\tau + i\nu)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{r}{\tau + i\nu} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{\tau}{r} + i\frac{\nu}{r}} \frac{\frac{\tau}{r} - i\frac{\nu}{r}}{\frac{\tau}{r} - i\frac{\nu}{r}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\tau}{r} - i\frac{\nu}{r}}{(\frac{\tau}{r})^2 + (\frac{\nu}{r})^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau}{r} - i\frac{\nu}{r} \\ &= \pm \frac{B + iA}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

□

Lema 15. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \phi = +\infty$

Demonstração. Cálculos simples nos dão que $\frac{d\phi}{d \ln r} = -\frac{\nu}{\tau}$. Daí, temos $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} -\frac{\nu}{\tau} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} -\frac{\frac{\nu}{r}}{\frac{\tau}{r}} = -\frac{\pm \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}} = -(-\frac{A}{B}) = \frac{A}{B}$, se $B \neq 0$. Caso $B = 0$, temos que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} -\frac{\nu}{\tau} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} -\frac{Ay}{A^2} \cdot \frac{A^2}{Ax} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} -y \cdot \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$. Portanto, o resultado segue do Lema 10. □

Os resultados acima mostram que cada braço espirala infinitamente vários círculos saindo da origem, pois ϕ tende a $+\infty$ em ambos os braços, e que a direção de crescimento limitante é $B + iA$ vezes a localização. Como $\phi = \theta + \arg(\tau + i\nu)$ e $\arg(\tau + i\nu)$ tem limites finitos quando $s \rightarrow \pm\infty$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 6. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \theta = +\infty$ Em outras palavras, $\int_{s_0}^{+\infty} k ds = +\infty$ e $\int_{-\infty}^{s_0} k ds = -\infty$, então cada braço tem curvatura total infinita.

Esse resultado conclui a prova do teorema 14.

□

Um estudo do comportamento das soluções autossimilares do Fluxo Redutor de Curvas correspondentes aos casos que as curvas rotacionam e contraem, apenas contraem ou apenas expandem pode ser encontrado em [13].

Considerações Finais

Nesse trabalho de conclusão de curso, foi realizado um estudo teórico do chamado *Fluxo Redutor de Curvas* e de suas *Soluções Autossimilares*. A partir do estudo do FRC, concluímos que ao deformarmos uma curva plana de Jordan na direção do seu vetor normal, por uma quantidade proporcional à sua curvatura, ou seja, por meio da equação 2.6, tal curva se tornará e/ou se manterá convexa e encolherá até desaparecer em tempo finito, aproximando-se cada vez mais de um círculo. Além disso, reparametrizando uma solução de 2.1 de forma que o seu comprimento não mude ao longo da deformação, vimos que uma curva plana, fechada e simples converge, em um sentido que pode ser precisado, para um círculo.

Pudemos concluir a importância do estudo das chamadas *Soluções Autossimilares* no contexto do *Fluxo Redutor de Curvas*, visto que se prova, de uma forma geral, que o fluxo converge para esse tipo de solução. Uma compreensão profunda de tais soluções nos permite entender as possíveis singularidades formadas quando curvas não-simples evoluem sob o fluxo. Além disso, demonstramos que o problema de encontrar todas as soluções autossimilares para o fluxo pode ser reduzido ao estudo de um sistema bidimensional não-linear de EDOs, com parâmetros A e B , que determinam o comportamento das curvas e permitem a classificação de todas as soluções autossimilares.

Por fim, a partir do estudo da classe dessas soluções correspondente aos parâmetros $A \neq 0$ e $B \geq 0$ vimos que estas apenas rotacionam ou rotacionam e expandem sobre o fluxo. As curvas são propriamente mergulhadas, têm um ponto mais próximo da origem e consistem de dois braços que saem desse ponto e se afastam estritamente da origem ao infinito. Cada braço tem curvatura total infinita e espirala infinitamente vários círculos ao redor da origem. A curvatura vai a zero ao longo de cada braço e sua direção de crescimento limitante é $B + iA$ vezes a posição.

Esperamos que este trabalho possa servir como leitura inicial para estudantes que interessem pelo tópico em questão. Além de ser uma alternativa em português para uma parte do artigo [13], temos que as demonstrações dos resultados estão mais detalhadas, o que deve facilitar o entendimento do leitor. Desse modo, a pesquisa pode avançar para um estudo e detalhamento das demonstrações das outras classes de soluções autossimilares de [13] não estudadas nesse trabalho.

Referências

- [1] ABRESCH, U.; LANGER, J., *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J. Differential Geom. 23 (1986), no. 2, 175–196. MR845704 (88d:53001)
- [2] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. II. *Level set flow*. arXiv.org, 2016.
- [3] CHOU, Kai-Seng; ZHU, Xi-Ping. *The curve shortening problem*. CRC Press, 2001.
- [4] CHOW, Bennett; GUENTHER, Christine; LANGFORD, Mat. *Extrinsic Geometric Flows*. Vol. 206. American Mathematical Soc., 2020.
- [5] Curve Shortening Flow. Wikipedia, the free encyclopedia. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Curve-shortening_flow>. Acesso em: 07/03/2022
- [6] DAMASCENO, Josué; CARNEIRO, Mario Dias; RAMÍREZ-ROS, Rafael . *The billiard inside an ellipse deformed by the curvature flow*. Proceedings of the American Mathematical Society 145, no. 2, 705-719, 2017.
- [7] DO CARMO, Manfredo Perdigão. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [8] ECKER, K., *Regularity theory for mean curvature flow*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 57, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 200.
- [9] EPSTEIN, C. L.; GAGE, M., *The curve shortening flow*. Wave motion: theory, modelling, and computation. Springer, New York, 1987, 15–59.
- [10] GAGE, M. E., *Curve shortening makes convex curves circular*. Invent. Math., 76(2) (1984), 357–364.
- [11] GAGE, M. E., HAMILTON, R. S. *The heat equation shrinking convex plane curves*. J. Differential Geom., 23(1) (1986), 69–96.
- [12] GRAYSON, M. A., *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*. J. Differential Geom., 26(2) (1987), 285-314.
- [13] HALLDORSSON, Hoeskuldur P., *Self-similar solutions to the curve shortening flow*, Transactions of the American Mathematical Society. 364 (2012), no. 10, 5285–5309.

-
- [14] LIMA, E. L. *Um curso de Análise - Volume I*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
- [15] SANTOS, Walcy; HILÁRIO, Alencar; NETO, Gregório. *Geometria diferencial das curvas no \mathbb{R}^2* . SBM , 2020.
- [16] SOTOMAYOR, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [17] TENENBLAT, Ketí. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008.
- [18] URBAS, J., Complete noncompact self-similar solutions of Gauss curvature flows. I. Positive powers, *Math. Ann.* 311 (1998), no. 2, 251–274.