UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ALINE AYAKO OHASHI

Modelagem do Método Magnetotelúrico 2D usando elementos finitos em C++

Belém

2015

ALINE AYAKO OHASHI

Modelagem do Método Magnetotelúrico 2D usando elementos finitos em C++

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará – UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Victor Cezar Tocantins de Souza

Belém

2015

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA

Ohashi, Aline Ayako, 1993-
Modelagem do Método Magnetotelúrico 2D usando elementos finitos em C++ / Aline Ayako Ohashi. – 2015.
56 f : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Victor Cezar Tocantins de Souza
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Faculdade de Geofísica, Belém, 2015.

1. Geofísica. 2. Prospecção - Métodos geofísicos. 3. Prospecção magnetotelúrica. 4. Eletromagnetismo - Simulação (Computadores). 5. C++ (Linguagem de programação de computador). I. Título.

CDD 22 ed. 550

ALINE AYAKO OHASHI

MODELAGEM DO MÉTODO MAGNETOTELÚRICO 2D USANDO ELEMENTOS FINITOS EM C++

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção de grau de Bacharel em Geofísica.

Data da defesa: 25 de fevereiro de 2015.
Conceito: EXC
Banca Examinadora:

Prof. Victor Cezar Tocantins de Souza - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Prof. Marcos Welby Correa Silva - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Dedico este trabalho à minha família: meu pai, sr. Pedro Keissaku Ohashi, minha mãe, srs. Marlene Shimada Ohashi, que me apoiaram e forneceram o devido suporte emocional e material para que eu cumprisse mais esta etapa em minha vida. Aos meus familiares e amigos pelo apoio direto e indireto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por tornar mais esta etapa da minha vida um evento concretizado, por me dar forças, porque somente ele sabe as tantas dificuldades que enfrentei para enfim estar neste momento podendo concluir minha graduação.

Aos meus pais, Pedro e Marlene Ohashi, e minha avó paterna Chiyoko Ohashi, por me incentivarem e apoiarem em cada escolha da minha vida. Por compreenderem a minha ausência e falta de convivência com eles, durante o período de graduação.

Ao Profº e Orientador Victor Tocantins, por acreditar na minha capacidade e assim possibilitar a realização deste trabalho. Por ter ensinado e me instruído no campo da pesquisa científica.

Aos demais professores da Faculdade de Geofísica por terem ensinado e repassado conhecimento da maneira mais adequada.Tenho muito à agradecer a Profª Ellen Gomes e ao Profº Alberto de Melo por terem ajudado em vários momentos, auxiliado e ensinado durante o tempo em que eu participei do Grupo PET de Geofísica. Ao Profº Marcos Welby Correa Silva por ter me instruído e pelas discussões acerca do trabalho.

Aos funcionários e secretários da Faculdade de Geofísica, principalmente à Maria do Socorro Silva, que sempre se prontificou a ajudar os alunos nos problemas referentes à faculdade. Aos secretários bolsistas Hugo Souza, João Paulo e Jéssica Lia por também terem feitos da melhor forma possível suas funções. Não me esquecendo também da secretária Maria Elaine Santos que me ajudou muito em questões da faculdade.

Agradeço aos meus colegas e amigos de profissão que fiz durante estes 4 anos de graduação, que além dos momentos mais tensos próximos da prova, pudemos ter também momentos de descontração e conversas jogadas enquanto esperávamos a aula começar, e que levarei-os para além desta etapa da minha vida: Fabrício da Silva, Ivaldevingles Rodrigues, Desirreé vieira, Celina Monteiro, Caio Perdigão (e Heverlyn Miranda), Thales Almeida, Jéssica Lia, Bruno Santos, Elen Monteiro, Glauter Akira, David Rocha, Walber Tavares.

À todos os colegas e amigos da Turma de 2009, 2010, 2011, 2012 e 2013, além do pessoal da pós-graduação, os colegas do PROEM Hilton Silva, Mateus Barriga Nunes, Rosi Lopes e Anderson Almeida.

Às instituições PETROBRAS e Ministério da Educação (MEC) pelo suporte financeiro enquanto bolsista.

“ Quando perguntado sobre qual era a sua maior peça, a resposta de Charles Chaplin era sempre a mesma: “A próxima!” Não há impasse quando se está imbuído de desafio. Não se anda porque existe um caminho; por andar é que se abre o caminho."
(Daisuke Ikeda)

RESUMO

A modelagem de dados eletromagnéticos (EM) apresenta grande importância na localização de alvos de interesse à geofísica, seja com corpos condutivos ou resistivos, como por exemplo a base de domos salinos. Um dos principais métodos em geomagnetismo é o método Magnetotelúrico (MT), no qual se utiliza fontes eletromagnéticas não controladas (naturais) com o intuito de identificar grandes estruturas por meio das medidas dos campos elétricos e magnéticos obtidos na subsuperfície ou no substrato oceânico. A resposta obtida com o Método MT pode ser descrita pela modelagem numérica dos dados EM, construindo modelos geoelétricos que representam estruturas geológicas da subsuperfície. No referido trabalho é usada a técnica dos elementos finitos na solução da equação de Helmholtz que rege o fenômeno do método, através de um código em C++. Modelos representativos de estruturas minerais simples são analisadas, além da interpretação das respostas obtidas (resistividade aparente e fase) a partir do código desenvolvido. Para validação do código comparar-se-á os resultados com dados obtidos a partir do programa de Key e Weiss (2006).

Palavras-chave: Geofísica aplicada. Métodos eletromagnéticos. Método Magnetotelúrico. Modelagem eletromagnética. C++.

ABSTRACT

The data modeling electromagnetic (EM) has great importance in locating targets of interest to the geophysical with either resistive or conductive bodies, such as salt domes base. One of the main methods in geo-magnetism is the Magnetotelluric (MT) method, which uses electromagnetic sources not controlled (natural) in order to identify major structures through measurements of electric and magnetic fields obtained in the subsurface or in ocean substrate. The response to the MT method can be described by numerical modeling of EM data, building geoelectric models that represent the subsurface geological structures. In the referred work is used the technique of the finite element solution for the Helmholtz equation that governs the phenomenon of the method through a C++ code. Representative models of simple mineral structures are analyzed, in addition to interpret the responses obtained (apparent resistivity and phase) from the developed code. For code validation compare yourself to the results with data obtained from the Key e Weiss (2006) program.

Keywords: Applied geophysics. Electromagnetic methods. Magnetotelluric method. Electromagnetic modeling. C++.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do modelo 1 (semi-espaço) de Rijo (2008) (Adaptado pela Autora). 35
Figura 2 – Malha gerada para o modelo 1 proposto, modo TM. (a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. (b) Ampliação na malha da região que contém o alvo. 36
Figura 3 – Campo Total Ex para frequência de $0.001\ Hz$ - Modelo 1, modo TM. 37
Figura 4 – Campo Total Ex para frequência de $0.1\ Hz$ - Modelo 1, modo TM. . 37
Figura 5 – Campo Total Ex para frequência de $10.0\ Hz$ - Modelo 1, modo TM. . 38
Figura 6 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curvas com marcadores) para o modo TM. a) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta da resistividade aparente para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo). 39
Figura 7 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curva com marcadores) para o modo TM. a) Resposta de fase para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta de fase para as frequências $0.1\,Hz$ e $1\,Hz$ (direita). c) Resposta de fase para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo). 41
Figura 8 – Malha gerada para o modelo 1 proposto, modo TE. a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. b) Ampliação na malha da região que contém o alvo. 42
Figura 9 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curvas com marcadores) para o modo TE. a) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta da resistividade aparente para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo). 43

Figura 10 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curva com marcadores) para o modo TE. a) Resposta de fase para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta de fase para as frequências $0.1\,Hz$ e $1\,Hz$ (direita). c) Resposta de fase para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo). 44
Figura 11 – Representação do modelo 2 (meio estratificado de três camadas) de (RIJO, 2008) (Adaptado pela Autora). 45
Figura 12 – Malha gerada para o modelo 2 proposto, modo TM. a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. b) Ampliação na malha da região que contém o alvo. 46
Figura 13 – Campo Total Ex para frequência de $0.001\ Hz$ - Modelo 2, modo TM. 47
Figura 14 – Campo Total Ex para frequência de $0.1\ Hz$ - Modelo 2, modo TM. . 47
Figura 15 – Campo Total Ex para frequência de $10.0\ Hz$ - Modelo 2, modo TM. 48
Figura 16 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente para as frequências variando de $0.001Hz$ até $10Hz$, cujo valor de uma frequência para outra é da ordem de 10, para o modo TM - modelo 2. . . . 48
Figura 17 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase para as frequências variando de $0.001\ Hz$ até $10\ Hz$, cujo valor de uma frequência para outra é da ordem de 10, para o modo TM - modelo 2. 49

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**12**
1.1	OBJETIVOS	12
1.2	METODOLOGIA	13
2	**MÉTODO ELETROMAGNÉTICO (EM) ….....**	**14**
2.1	MÉTODO ELETROMAGNÉTICO DE FONTE NATURAL (MÉTODO MAGNETOTELÚRICAO – MT) ….....	14
2.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O MÉTODO MT 2D ….....	17
2.2.1	**Modo Transversal Magnético (TM) ….....**	**20**
2.2.2	**Modo Transversal Elétrico (TE) ….....**	**26**
3	**A LINGUAGEM C++ ….....**	**31**
3.1	NTRODUÇÃO À LINGUAGEM C++ ….....	31
4	**RESULTADOS ….....**	**34**
4.1	MODELO 1 ….....	34
4.2	MODELO 2 ….....	43
5	**CONCLUSÕES ….....**	**50**
	REFERÊNCIAS ….....	**51**

1 INTRODUÇÃO

Devido a maior complexidade de áreas de exploração de recursos minerais, atualmente existe uma necessidade crescente de integração dos métodos geofísicos na interpretação e análise de dados. Neste contexto, os métodos eletromagnéticos tornaram-se importantes ferramentas na localização de alvos de prospecção de petróleo e gás, destacando-se, por exemplo, o Método Magnetotelúrico e o Método Eletromagnético de Fonte Controlada Marinho (MCSEM).

O Método Magnetotelúrico utiliza fontes naturais (passivas) e baseia-se nas medidas das variações temporais dos campos elétricos e magnéticos com o objetivo de estimar a distribuição da resistividade elétrica da subsuperfície. Com tais dados é possível inferir a localização de estruturas associadas a formação de prováveis reservatórios de hidrocarbonetos, trapas estratigráficas e feições geológicas de interesse à indústria petrolífera.

Para o método magnetotelúrico o campo externo gerado pelas variações geomagnéticas é a fonte natural da investigação em subsuperfície, quando esta fonte primária atinge a superfície, parte de sua energia retorna ao meio de propagação e outra parte é transmitida as camadas inferiores da Terra. Esta energia que penetra no interior da Terra interage com o mesmo através de correntes elétricas induzidas produzindo como consequência um campo magnético secundário (NAIDU, 2012). Como o fenômeno é regido por uma equação de difusão, para determinada frequência existe um limite de profundidade de investigação referente ao campo eletromagnético, este limite é determinado pelo efeito pelicular ou *skin depth* da propagação da onda eletromagnética.

1.1 OBJETIVOS

A ampliação do conhecimento sob novas linguagens de programação para solucionar problemas de maneira prática e em menor tempo são questões e objetivos de qualquer área de estudo, na geofísica e mais precisamente com relação aos métodos Eletromagnéticos, tais objetivos não são diferentes.

Este trabalho busca tratar de um problema sob uma perspectiva alternativa as linguagens de programações científicas usuais na geofísica aplicada (FORTRAN) ao modelar numericamente dados Magnetotelúricos bidimensional (MT 2D) utilizando a linguagem de programação C++. Analisando sua implementação, vantagens e limitações.

Assim, objetiva-se desenvolver um código na linguagem C++, com o intuito de modelar os campos e/ou as componentes elétrica e magnética do campo eletromagnético. Atualmente os programas desenvolvidos neste âmbito carecem metodologias de incorporação de solvers também conhecidos como bibliotecas numéricas. Assim, devido tais solvers encontrarem-se na linguagem C ou C++, o desenvolvimento do código nesta linguagem pode ser promissora.

1.2 METODOLOGIA

Trabalhos intensivos em modelagem de dados MT 2D utilizando a metodologia de Elementos Finitos são relativamente recentes devido ao menor custo computacional nos dias atuais, citando-se trabalhos expressivos como os desenvolvidos por Rijo (2008).

A metodologia deste trabalho pauta-se inicialmente na formulação do problema a ser solucionado. Os campos elétrico e magnético serão obtidos pelo método de Elementos Finitos (E.F.) para a concernente dimensão utilizada. Este método corresponde a uma técnica numérica para solucionar problemas de valor de fronteira, discretizando o domínio da equação diferencial governante do problema em pequenos elementos finitos, que neste trabalho serão elementos triangulares. Modelos geoelétricos sintéticos serão utilizados na construção do programa e suas respostas serão comparadas com resultados obtidos em metodologia já consagrada na literatura (KEY; WEISS, 2006).

Assim, no próximo capítulo, será feito um apanhado geral sobre o Método Magnetotelúrico e o desenvolvimento matemático do problema. No capítulo 3 será feita uma breve introdução a linguagem C++, abordado alguns aspectos do programa desenvolvido por este trabalho na modelagem eletromagnética. No capítulo 4 modelos sintéticos e seus resultados serão apresentados, comparando as respostas obtidas em C++ com os resultados obtidos por Key e Weiss (2006) usando um código em FORTRAN 90. No último capítulo serão extraídas as conclusões mais pertinentes ao trabalho, com base nos dados modelados obtidos. Além de comprovar se realmente as vantagens na linguagem C++ poderão futuramente diminuir o foco na utilização da linguagem FORTRAN.

2 MÉTODO ELETROMAGNÉTICO (EM)

O Método Eletromagnético (EM) é um método geofísico que possui como resposta o mapeamento das propriedades életricas em subsuperfície. O principal fenômeno físico nos métodos eletromágneticos é o da indução eletromagnética, que pode ser simplificada do seguinte modo. Uma corrente elétrica percorrendo uma bobina gera um campo magnético nas proximidades da mesma. Esta corrente, que é alternada, cria um campo eletromagnético primário nos arredores da bobina, gerando um fluxo de correntes secundárias quando um condutor encontra-se presente. As correntes secundárias ao interagirem com o condutor geram um novo campo, o campo magnético secundário. O qual é utilizado para se obter informações do condutor (GOUVÊIA; SILVA, 1983).

2.1 MÉTODO ELETROMAGNÉTICO DE FONTE NATURAL (MÉTODO MAGNETOTELÚRICO - MT)

O Método Magnetotelúrico (MT) foi desenvolvido a partir de estudos realizados por Tikhonov (1950 apud SIMPSON; BAHR, 2005, p. 13) e Cagniard (1953 apud SIMPSON; BAHR, 2005, p. 13), ao perceberem que o campo eletromagnético que se propaga pela Terra corresponde as medidas dos campos magnéticos e elétricos registrados simultaneamente, fornecendo os valores de impedância nas interfaces de incidência da onda eletromagnética (SIMPSON; BAHR, 2005).

Este método apresenta a teoria baseada na propagação de um campo eletromagnético naturalmente gerado por fontes não controladas, decorrentes de variações geomagnéticas. Tais variações podem ser resultado de interações Terra-ionosfera (atividade atmosférica), ou pelas interações vento solar - magnetosfera (micropulsações). Tal que, a utilização de uma fonte natural possui uma vantagem com relação aos outros métodos eletromagnéticos no que tange a máxima profundidade à ser investigada, pois que não apresenta dependência com relação à geometria fonte-receptor da sondagem realizada.

O Método Magnetotelúrico trabalha em uma faixa de frequência que varia desde aproximadamente 0.0001 Hz até 1000 Hz. Tal faixa de frequência pode ser dividida em sub-faixas que determinam o MT com banda larga, o qual varia de 1000 Hz - 0.001 Hz, e o MT com longo período, variando de 1 Hz - 0.000025 Hz, aproximadamente (SIMPSON; BAHR, 2005; FONTES, 2014). Devido a baixa frequência de investigação, o que implica em grande comprimento de onda, para que se obtenha uma boa resposta das medidas é necessário um alto contraste de resistividade entre o alvo e o

meio encaixante, além de uma espessura consideravelmente grande.

O embasamento da sua teoria pressupõe que dois fatores são significantes para indicar a máxima profundidade de penetração da onda eletromagnética, um está relacionado à condutividade das feições da Terra e o outro corresponde ao período do levantamento eletromagnético.

Os campos eletromagnéticos decaem pelo espalhamento geométrico e principalmente pela distância que o sinal atravessa o condutor uniforme, conhecido como *skin depth*. O *skin depth* corresponde a distância pelo qual a amplitude do campo se reduz a 1/e no meio, que é aproximadamente 37% na amplitude e com relação à fase uma redução de 57° (CONSTABLE, 2010; CONSTABLE; SRNKA, 2007). Em termos matemáticos, o *skin depth* δ é representado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \approx \frac{500}{\sqrt{\sigma f}}$$

onde : μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo; σ é a condutividade do meio, ω é a frequência em rad/s e f é a frequência em Hz.

A equação que governa a propagação no método MT é a equação de onda amortecida que para o campo elétrico, por exemplo, é dada, segundo Constable (2010), por:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\, \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Em um meio onde a condutividade seja aproximadamente nula, como na atmosfera ou no espaço livre, a equação que rege o fenômeno, equação acima torna-se a equação da onda sem perdas familiar à sísmica. No caso em que a formação apresenta condutividade da ordem bem maior que a permissividade elétrica, o termo de perda torna-se dominante ao termo da segunda derivada associada a permissividade elétrica e a equação da onda se torna uma equação de difusão (CONSTABLE, 2010).

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\, \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

que para uma excitação harmônica e uniforme na frequência angular ω tem soluções na forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\beta z} e^{\alpha z}$$

onde α e β são os termos de atenuação e atraso de fase sobre uma distância z. A mesma analise é feita para a equação que rege a propagação do campo magnético.

De acordo com Berdichevsky e Dmitriev (2008) as impedâncias Z para o método Magnetotelúrico 2D podem ser representados por,

$$|Z| = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}$$

e partindo de,

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \end{vmatrix} ,$$

obtêm-se as relações da impedância com os campos elétrico e magnético:

$$E_x = Z_{xx}\ H_x + Z_{xy}\ Hy$$
$$E_y = Z_{yx}\ H_x + Z_{yy}\ H_y$$

Como o problema é bidimensional, os tensores de impedância Z_{xx} e Z_{yy} são nulos dependendo da direção de orientação do corpo no eixo x ou y (NEVES, 2014).

As impedâncias restantes resultam nas seguintes equações,

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \qquad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x}$$

Neste trabalho será adotada a direção do eixo x como direção de *strike* do corpo.

No método Magnetotelúrico existem dois modos de propagação eletromagnética dependendo da direção do campo incidente. Estes modos são o modo TM (transversal magnético) e o modo TE (transversal elétrico). O modo TM é aquele no qual a componente do campo magnético incidente H é paralelo as interfaces e portanto perpendicular ao eixo de propagação da onda na direção z. Enquanto no modo TE a componente do campo elétrico incidente é paralelo as interfaces e perpendicular ao eixo de propagação da onda na direção z (NEVES, 2014; RIJO, 2004).

No modo TM a componente do tensor de impedâncias é Z_{xy}, e obtemos os valores da resistividade aparente $\rho_{a_{TM}}$ e fase $\phi_{a_{TM}}$ através de:

$$\begin{aligned} \rho_{a_{TM}} &= \frac{1}{\omega\mu} |Z_{xy}|^2 , \\ \phi_{a_{TM}} &= arctg\left(\frac{Im(Z_{xy})}{Re(Z_{xy})}\right) , \end{aligned}$$

No modo TE a componente do tensor de impedâncias é Z_{yx}, e obtemos os valores da resistividade aparente $\rho_{a_{TE}}$ e fase $\phi_{a_{TE}}$ através de:

$$\begin{aligned} \rho_{a_{TE}} &= \frac{1}{\omega\mu} |Z_{yx}|^2 , \\ \phi_{a_{TE}} &= arctg\left(\frac{Im(Z_{yx})}{Re(Z_{yx})}\right) , \end{aligned}$$

2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O MÉTODO MT 2D

O problema a ser tratado é solucionar os campos elétrico e magnético para dados magnetotelúricos. Tentar solucioná-lo analiticamente torna o problema não corriqueiro. Assim se faz necessário recorrer a soluções numéricas. Uma técnica bastante utilizada é a dos elementos finitos, o qual proporciona uma maior liberdade quando a preocupação encontra-se em modelar a geometria do problema. Logo a solução será obtida via elementos finitos 2D (RIJO, 2008).

As equações de Maxwell são a base inicial para o desenvolvimento da formulação matemática do MT. Estas equações também são estudadas no domínio temporal, mas para este problema serão adotadas as equações de Maxwell no domínio da frequência, as quais são definidas da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho; \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} = \mathbf{J}; \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0; \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}; \tag{2.4}$$

Para o meio homogêneo observa-se que as equações (2.1) e (2.3) são consequentes, respectivamente, das equações (2.2) e (2.4). Tal prova pode ser obtida através do uso do operador divergência nos dois lados das expressões (2.2) e (2.4), fazendo uso também da propriedade vetorial $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$. Assim, levando em consideração somente as leis de Faraday e Ampère; respectivamente (2.2) e (2.4), as equações regentes em cada parte homogênea reduzem-se a:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \eta\mathbf{E} = \mathbf{J}; \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathfrak{z}\mathbf{H} = \mathbf{0}; \tag{2.6}$$

Em que $\eta = (\sigma + i\omega\epsilon)$ corresponde a admitividade, $\mathfrak{z} = i\omega\mu$ corresponde a impeditividade, $\mathbf{H}$ representa o campo magnético, $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, σ a condutividade elétrica, μ a permeabilidade magnética e $\mathbf{J}$ a densidade de corrente elétrica.

Partindo do modelo estratificado com a heterogeneidade, considera-se, em geral, somente o modelo estratificado como sendo o modelo primário e a heterogeneidade como sendo o fator do campo secundário.

Para o modelo estratificado (primário) as equações de Maxwell são:

$$\nabla \times \mathbf{H}^P - \eta^P\mathbf{E}^P = \mathbf{J}; \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^P + \mathfrak{z}^P\mathbf{H}^P = \mathbf{0}; \tag{2.8}$$

Em que $\eta^P = (\sigma^P + i\omega\epsilon^P)$ e $\mathfrak{z}^P = i\omega\mu^P$.

Desta forma é necessária a separação dos campos elétrico e magnético em duas partes: o campo primário e o campo secundário, os quais estão representados nas seguintes expressões:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^P + \mathbf{E}^S \tag{2.9}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^P + \mathbf{H}^S \tag{2.10}$$

De forma similar, as propriedades elétricas do modelo primário e suas variações devido ao campo secundário devem ser consideradas. Assim:

$$\sigma = \sigma^P + \Delta\sigma, \tag{2.11}$$

$$\epsilon = \epsilon^P + \Delta\epsilon, \tag{2.12}$$

$$\mu = \mu^P + \Delta\mu. \tag{2.13}$$

onde $\Delta\sigma$, $\Delta\epsilon$ e $\Delta\mu$ são as variações das propriedades elétricas devido a heterogeneidade.

Aplicando as equações (2.9 - 2.10) e as condições (2.11- 2.13) nas equações (2.5) e (2.6), obtemos:

$$\nabla \times (\mathbf{H}^P + \mathbf{H}^S) - (\eta^P + \Delta\eta)(\mathbf{E}^P + \mathbf{E}^S) = \mathbf{J}, \tag{2.14}$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}^P + \mathbf{E}^S) + (\mathfrak{z}^P + \Delta\mathfrak{z})(\mathbf{H}^P + \mathbf{H}^S) = \mathbf{0}. \tag{2.15}$$

onde: $\Delta\eta = \Delta\sigma + i\omega\Delta\epsilon$ e $\Delta\mathfrak{z} = i\omega\Delta\mu$. E reescrevendo (2.14) e (2.15), resulta em:

$$\nabla \times \mathbf{H}^S - \eta\mathbf{E}^S = \Delta\eta\mathbf{E}^P, \tag{2.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^S + \mathfrak{z}\mathbf{H}^S = -\Delta\mathfrak{z}\mathbf{H}^P. \tag{2.17}$$

ou também, decorrente de outra manipulação, temos:

$$\nabla \times \mathbf{H}^S - \eta^P\mathbf{E}^S = \Delta\eta\mathbf{E}, \tag{2.18}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^S + \mathfrak{z}^P\mathbf{H}^S = -\Delta\mathfrak{z}\mathbf{H}. \tag{2.19}$$

No primeiro par de equações (2.16 - 2.17) observa-se que o termo da fonte depende dos campos primários que na heterogeneidade geram as variações de propriedades elétricas do campo secundário. No segundo par de equações (2.18 - 2.19) observa-se que o termo da fonte, neste caso, depende dos campos totais e das variações das propriedades elétricas (campo secundário).

A formulação matemática para o problema do método Magnetotelúrico 2D parte da formulação para ondas planas 2D, e requerem a utilização e desenvolvimento do par de equações de Maxwell representadas pelas expressões (2.16) e (2.17), respectivamente:

$$\nabla \times \mathbf{H}^S - \eta\mathbf{E}^S = \Delta\eta\mathbf{E}^P,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^S + \mathfrak{z}\mathbf{H}^S = -\Delta\mathfrak{z}\mathbf{H}^P.$$

onde:

$$\begin{aligned}
\Delta\eta &= \eta - \eta^P; \\
\Delta\eta &= (\sigma - \sigma^P) + i\omega(\epsilon - \epsilon^P); \\
\Delta\mathfrak{z} &= \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^P; \\
\Delta\mathfrak{z} &= i\omega(\mu - \mu^P).
\end{aligned}$$

Considerando que o modelo em questão seja infinito na direção y, esta torna-se a direção invariante à propriedade elétrica. Assim o modelo apresentará variação de propriedades somente no plano $x - z$ .Desta forma teremos um corpo bidimensional limitado nas direções x (em extensão ou comprimento) e z (em profundidade). Logo, decorrente da simetria de translação bidimensional temos que ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$) e as equações se reduzem a:

$$-\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z} - \eta E_x^S = \Delta\eta E_x^P, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial {H_x}^S}{\partial z} - \frac{\partial {H_z}^S}{\partial x} - \eta E_y^S = \Delta\eta E_y^P, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x} - \eta E_z^S = \Delta\eta E_z^P, \tag{2.22}$$

e

$$-\frac{\partial {E_y}^S}{\partial z} + \mathfrak{z} H_x^S = -\Delta\mathfrak{z} H_x^P, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial {E_x}^S}{\partial z} - \frac{\partial E_z^S}{\partial x} + \mathfrak{z} H_y^S = -\Delta\mathfrak{z} H_y^P, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial {E_y}^S}{\partial x} + \mathfrak{z} H_z^S = -\Delta\mathfrak{z} H_z^P, \tag{2.25}$$

respectivamente. As equações acima obtidas: equações (2.20 - 2.22) e as equações (2.23 - 2.25) se desmembram em dois sistemas independentes de equações diferenciais.

Neste trabalho, a orientação dos eixos cartesianos (x, y, z) apresentam a seguinte configuração: o eixo z é vertical, e está orientado para baixo; o eixo y é horizontal, e orientado saindo do plano que o contêm; e o eixo x é horizontal, e orientado ortogonalmente ao eixo y.

Explicitando as componentes E_x^S e E_z^S nas expressões (2.20) e (2.22) e posteriormente, substituindo-as em (2.24), temos:

$$E_x^S = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z} - \frac{\Delta\eta}{\eta} E_x^P, \tag{2.26}$$

$$
\begin{aligned}
E_z^S &= \frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x} - \frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^P, && (2.27)\\
&- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right) + \mathfrak{z}H_y^S \\
&= -\Delta\mathfrak{z}H_y^P - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^P\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_x^P\right). && (2.28)
\end{aligned}
$$

A equação (2.28) representa o modo TM (transversal magnético), o qual apresenta derivadas parciais da componente transversal H_y^S do campo magnético $\mathbf{H}$.

Explicitando as componentes H_x^S e H_z^S nas expressões (2.23) e (2.25) e posteriormente, substituindo-as em (2.21), temos:

$$
\begin{aligned}
H_x^S &= \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial z} - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}H_x^P, && (2.29)\\
H_z^S &= -\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial x} - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}H_z^P, && (2.30)\\
&- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial z}\right) + \eta E_y^S \\
&= -\Delta\eta E_y^P + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}H_z^P\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}H_z^P\right). && (2.31)
\end{aligned}
$$

A equação (2.31) representa o modo TE (transversal elétrico), o qual possui derivadas parciais da componente transversal E_y^S do campo elétrico $\mathbf{E}$.

Para solucionar as expressões (2.28) e (2.31) recorre-se à métodos numéricos, com a finalidade de obter soluções aproximadas. Normalmente são utilizados algoritmos de elementos finitos ou métodos de equações integrais.

2.2.1 Modo Transversal Magnético (TM)

Ao tratar da formulação de elementos finitos para o modo transversal magnético (TM), devemos analisar primeiramente o comportamento do campo magnético no ar (z < 0), o qual é constante na direção de propagação da onda, ou seja, na direção z.

Seja

$$E_x = \frac{1}{\sigma_{ar}}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

de antemão, sabemos que o termo $\sigma_{ar} \to \infty$, do qual conclui-se que o outro termo $\partial H_y/\partial z \to 0$, pois que a componente do campo elétrico na direção x é limitada. Como a componente do campo magnético H_y é constante acima da superfície, igualmente o campo magnético secundário na direção y é nula. Assim, a formulação deve ser feita somente na região abaixo da subsuperfície.

A técnica numérica de elementos finitos consiste em dividir o domínio da solução em um número finito n de elementos, nos quais os nós ou pontos nodais serão enumerados. Os elementos apresentam forma triangular, e localmente os nós são enumerados de 1 a 3, globalmente sua numeração é feita de acordo com a numeração da malha (BECKER; CAREY; ODEN, 1981).

A solução será obtida inicialmente considerando o elemento unitário, para posteriormente através da somatória das soluções locais dos elementos obter a solução global do problema.

Da malha de elementos finitos, tomando apenas um elemento genérico Ω_e para ser desenvolvido pelo método de Galerkin, sendo aplicado à expressão (2.28), temos:

$$\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)\right] dxdz + \int_{\Omega e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz$$
$$= -\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^P\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_x^P\right)\right] dxdz - \int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz$$

em que m = 1, 2, 3.

Usando as identidades a seguir:

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y^S}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right) - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}, \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_z^P\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_z^P\right) - \frac{\Delta\eta}{\eta}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}E_z^P,
\end{aligned}$$

juntamente com

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right) - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}, \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}E_x^P\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m {E_x}^P\right) - \frac{\Delta\eta}{\eta}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}E_x^P.
\end{aligned}$$

podemos reescrever a expressão acima, de forma que:

$$\int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right) dxdz + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz$$
$$-\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)\right] dxdz$$
$$= -\int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}E_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}E_x^P\right) dxdz$$
$$-\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_z^P\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m E_x^P\right)\right] dxdz$$

Fazendo-se as substituições pelas seguintes expressões:

$$E_x^P = -\frac{1}{\eta^P}\frac{\partial {H_y}^P}{\partial z} \qquad e \qquad E_z^P = \frac{1}{\eta^P}\frac{\partial {H_y}^P}{\partial x}\,. \tag{2.32}$$

na terceira integral do lado direito e passando a terceira integral do lado esquerdo para o lado direito, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)dxdz+\int_{\Omega_e}\mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz\\
&=\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)\right]dxdz\\
&-\int_{\Omega_e}\Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz+\int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^P-\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}E_x^P\right)dxdz\\
&-\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m\frac{1}{\eta^P}\frac{\partial {H_y}^P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\varphi_m\frac{1}{\eta^P}\frac{\partial {H_y}^P}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned}$$

Reescrevendo o fator $\Delta\eta/(\eta^P\eta)$ em $1/\eta^P - 1/\eta$ na quarta integral do lado direito, e reorganizando, teremos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)dxdz+\int_{\Omega_e}\mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz\\
&=-\int_{\Omega_e}\Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz+\int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^P-\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}E_x^P\right)dxdz\\
&-\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta^P}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta^P}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^P}{\partial z}\right)\right]dxdz\\
&+\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^P}{\partial z}\right)\right]dxdz\\
&+\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\varphi_m\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)\right]dxdz
\end{aligned}$$

Adicionando-se as duas últimas integrais do lado direito e fazendo uso da identidade $H_y = H_y^P + H_y^S$, considerando também as seguintes expressões de substituição

$$E_x = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y}{\partial z} \qquad e \qquad E_z = \frac{1}{\eta}\frac{\partial H_y}{\partial x},$$

e utilizando também as expressões definidas em (2.32), teremos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)dxdz+\int_{\Omega_e}\mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz\\
&=-\int_{\Omega_e}\Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz+\int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^P-\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}E_x^P\right)dxdz
\end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m E_z^S\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_m E_x^S\right)\right]dxdz$$

Em seguida realizando as substituições: $E_x^S = E_x - E_x^P$ e $E_z^S = E_z - E_z^P$.

Por fim, aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdz = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdz = \int_{\partial\Omega}(P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{k}}).\hat{\mathbf{t}}dl$$

na última integral do lado direito, temos a formulação matemática adequada ao uso no algoritmo de elementos finitos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {H_y}^S}{\partial z}\right)dxdz + \int_{\Omega_e}\mathfrak{z}\varphi_m H_y^S dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e}\Delta\mathfrak{z}\varphi_m H_y^P dxdz + \int_{\Omega_e}\frac{\Delta\eta}{\eta}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}E_z^P - \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}E_x^P\right)dxdz \\
&+\int_{\partial\Omega_e}\varphi_m\mathbf{E}^S\,.\,\hat{\mathbf{t}}dl
\end{aligned} \tag{2.33}$$

onde: $\mathbf{E}^S = E_x^S\hat{\mathbf{i}} + E_z^S\hat{\mathbf{k}}$.

Definida a equação para aplicação em elementos finitos faz-se necessário definir as funções base. Para um elemento qualquer Ω_e da malha de elementos finitos, a solução do sistema de equações diferenciais, H_y^S, pode ser aproximada por uma solução bidimensional (função linear no elemento) $\tilde{H}_e$ representada por

$$\tilde{H}_e(x,z) = \alpha + \beta x + \gamma z \tag{2.34}$$

no qual a equação acima representa o plano que contêm os três valores nodais ($\tilde{H}_1^e$, $\tilde{H}_2^e$, $\tilde{H}_3^e$) de $\tilde{H}_e(x,z)$.

Em cada nó, os valores nodais de $\tilde{H}_e$ são representados por:

$$\tilde{H}_1^e = \alpha + \beta x_1 + \gamma z_1\ , \tag{2.35}$$

$$\tilde{H}_2^e = \alpha + \beta x_2 + \gamma z_2\ , \tag{2.36}$$

$$\tilde{H}_3^e = \alpha + \beta x_3 + \gamma z_3\ . \tag{2.37}$$

O conjunto de equações (2.35), (2.36) e (2.37) formam um sistema de equações lineares que resolvidos para os termos α, β e γ resultam na seguinte solução:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\tilde{H}_1^e(x_2z_3 - x_3z_2) + \tilde{H}_2^e(x_3z_1 - x_1z_3) + \tilde{H}_3^e(x_1z_2 - x_2z_1)}{2\Delta}\ , \\
\beta &= \frac{\tilde{H}_1^e(z_2 - z_3) + \tilde{H}_2^e(z_3 - z_1) + \tilde{H}_3^e(z_1 - z_2)}{2\Delta}\ , \\
\gamma &= \frac{\tilde{H}_1^e(x_3 - x_2) + \tilde{H}_2^e(x_1 - x_3) + \tilde{H}_3^e(x_2 - x_1)}{2\Delta}\ ,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

em que

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

corresponde a área do elemento triangular formada pelos vértices (x_1, z_1), (x_2, z_2) e (x_3, z_3).

Substituindo a expressão (2.38) em (2.24) e reorganizando os termos, obtêm-se:

$$\tilde{H}_e(x,z) = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 z}{2\Delta}\tilde{H}_1^e + \frac{a_2 + b_2 x + c_2 z}{2\Delta}\tilde{H}_2^e + \frac{a_3 + b_3 x + c_3 z}{2\Delta}\tilde{H}_3^e \ , \tag{2.39}$$

em que as variáveis a, b e c são representadas por:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2, & b_1 &= z_2 - z_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \ , \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3, & b_2 &= z_3 - z_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \ , \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1, & b_3 &= z_1 - z_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \ , \end{aligned} \tag{2.40}$$

Definindo as funções bases φ_1, φ_2, φ_3 pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1 x + c_1 z) \ , \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2 x + c_2 z) \ , \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3 x + c_3 z) \ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Substituindo as funções base definidas em (2.41) na expressão (2.39), temos:

$$\tilde{H}_y^S(x,z) = \ \tilde{H}_1^e\varphi_1 + \tilde{H}_2^e\varphi_2 + \tilde{H}_3^e\varphi_3 \tag{2.42}$$

Da expressão acima notamos que as funções base φ_1, φ_2 e φ_3 são funções lineares e desta forma obedecem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, z_1) = 1, \qquad \varphi_1(x_2, z_2) = 0, \qquad \varphi_1(x_3, z_3) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, z_1) = 0, \qquad \varphi_2(x_2, z_2) = 1, \qquad \varphi_2(x_3, z_3) = 0 \\ &\varphi_3(x_1, z_1) = 0, \qquad \varphi_3(x_2, z_2) = 0, \qquad \varphi_3(x_3, z_3) = 1 \end{aligned}$$

Analisando individualmente cada elemento, considerar-se-á que as propriedades elétricas (σ, μ, ϵ) são constantes no elemento. Substituindo $\tilde{H}_e(x,z) = \tilde{H}_1^e\varphi_1 + \tilde{H}_2^e\varphi_2 + \tilde{H}_3^e\varphi_3$ em (2.33), podemos expressar a matriz e o vetor associados ao elemento genérico Ω_e da seguinte forma:

$$K_{mn}^e \tilde{H}_n^e = f_m^e \qquad\qquad m = 1,2,3, \quad n = 1,2,3. \tag{2.43}$$

em que

$$K^e_{mn} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{\eta_e}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right)dxdx + \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}_e\varphi_m\varphi_n dxdz \tag{2.44}$$

e

$$\begin{aligned} f^e_m = & - \int_{\Omega_e} \Delta\mathfrak{z}_e\varphi_m(H^P_{y1}\varphi_1 + H^P_{y2}\varphi_2 + H^P_{y3}\varphi_3)dxdz \\ & + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}(E^P_{z1}\varphi_1 + E^P_{z2}\varphi_2 + E^P_{z3}\varphi_3)dxdz \\ & - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\eta_e}{\eta_e}\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}(E^P_{x1}\varphi_1 + E^P_{x2}\varphi_2 + E^P_{x3}\varphi_3)dxdz \\ & + \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m\mathbf{E}^S\,.\,\hat{\mathbf{t}}dl \end{aligned} \tag{2.45}$$

Aplicando as funções base (2.41) na expressão (2.44) e fazendo uso da seguinte identidade

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^j\varphi_2^k\varphi_3^l\,dxdz = 2A_e\frac{j!\,k!\,l!}{(j+k+l+2)!} \tag{2.46}$$

obtêm-se:

$$\begin{aligned} K^e_{mn} &= \frac{1}{4A_e\eta_e}\begin{pmatrix} b_1^2+c_1^2 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_1+c_2c_1 & b_2^2+c_2^2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_1+c_3c_1 & b_3b_2+c_3c_2 & b_3^2+c_3^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\mathfrak{z}_eA_e}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Para o vetor f^e_m, da mesma maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} f^e_m = & - \frac{\Delta\mathfrak{z}_eA_e}{12}\begin{pmatrix} 2\,H^P_{y1} & H^P_{y2} & H^P_{y3} \\ H^P_{y1} & 2\,H^P_{y2} & H^P_{y3} \\ H^P_{y1} & H^P_{y2} & 2\,H^P_{y3} \end{pmatrix} \\ & + \frac{\Delta\eta_e}{6\eta_e}(E^P_{z1}+E^P_{z2}+E^P_{z3})\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ & - \frac{\Delta\eta_e}{6\eta_e}(E^P_{x1}+E^P_{x2}+E^P_{x3})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Tendo obtido as matrizes K^e_{mn} e os vetores f^e_m dos elementos Ω_e, é necessário construir a matriz global, o qual é o somatório da influência que cada elemento contribui no valor do campo.

Como no método magnetotelúrico, o fenômeno de propagação da onda eletromagnética é regido pela equação quasi-estacionário, no qual $\sigma >> \omega\epsilon_0$, os termos da admitividade e impeditividade reduzem-se a: $\eta_e = \sigma_e$ e $\mathfrak{z}_e = i\omega\mu_e$. Considerando que a permeabilidade magnética assumida será a do ar, μ_0. Em que para a propagação de uma onda plana na direção z, a componente vertical do campo elétrico primário é nulo.

2.2.2 Modo Transversal Elétrico (TE)

Ao tratar da formulação de Elementos Finitos para o modo Transversal Elétrico (TE), devemos analisar primeiramente o comportamento do campo elétrico na camada do ar $(z < 0)$, o qual é variante na direção de propagação da onda, ou seja, na direção z.

Seja

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

conclui-se, a partir da prerrogativa acima, que o termo $\partial E_y/\partial Z \neq 0$, devido a componente do campo magnético na direção x ser limitada. Neste caso, torna-se essencial considerar o efeito e a presença do ar.

Semelhantemente ao modo TM, aplica-se a formulação de Galerkin, neste modo, à equação (2.31)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \varphi_m \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^S}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^S}{\partial z}\right)\right] dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^S dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^P dxdz + \int_{\Omega_e} \varphi_m \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^P\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^P\right)\right] dxdz
\end{aligned}$$

em que $m = 1,\, 2,\, 3$.

Usando as identidades:

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y^S}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m \frac{\partial {E_y}^S}{\partial x}\right) - \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial x}, \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_z^P\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m H_z^P\right) - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_z^P,
\end{aligned}$$

juntamente com

$$\begin{aligned}
\varphi_m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}\varphi_m \frac{\partial {E_y}^S}{\partial z}\right) - \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial {E_y}^S}{\partial z}, \\
\varphi_m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} H_x^P\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\varphi_m H_x^P\right) - \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} H_x^P.
\end{aligned}$$

podemos reescrever a equação acima, tal que:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial E_y^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta \varphi_m E_y^S dxdz \\
- & \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) \right] dxdz \\
= - & \int_{\Omega_e} \Delta \eta \varphi_m E_y^P dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} H_x^P \right) dxdz \\
+ & \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \varphi_m H_z^P \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \varphi_m H_x^P \right) \right] dxdz
\end{aligned}
$$

Fazendo-se as seguintes substituições:

$$
H_x^P = \frac{1}{\mathfrak{z}^P} \frac{\partial E_y^P}{\partial z} \qquad e \qquad H_z^P = -\frac{1}{\mathfrak{z}^P} \frac{\partial E_y^P}{\partial x} \tag{2.49}
$$

na terceira integral do lado direito e passando a terceira integral do lado esquerdo para o lado direito, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial E_y^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta \varphi_m E_y^S dxdz \\
& = - \int_{\Omega_e} \Delta \eta \varphi_m E_y^P dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} H_x^P \right) dxdz \\
& - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{1}{\mathfrak{z}^P} \frac{\partial E_y^P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{1}{\mathfrak{z}^P} \frac{\partial E_y^P}{\partial z} \right) \right] dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) \right] dxdz
\end{aligned}
$$

Reescrevendo o fator $\Delta \mathfrak{z} / \mathfrak{z} \mathfrak{z}^P$ em $1/\mathfrak{z}^P - 1/\mathfrak{z}$ na terceira integral do lado direito, teremos:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial E_y^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta \varphi_m E_y^S dxdz \\
& = - \int_{\Omega_e} \Delta \eta \varphi_m E_y^P dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} H_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} H_x^P \right) dxdz \\
& - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}^P} \varphi_m \frac{\partial E_y^P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}^P} \varphi_m \frac{\partial E_y^P}{\partial z} \right) \right] dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^P}{\partial z} \right) \right] dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \varphi_m \frac{\partial E_y^S}{\partial z} \right) \right] dxdz
\end{aligned}
$$

Adicionando-se as duas últimas integrais do lado direito e fazendo uso da identidade $E_y = E_y^P + E_y^S$, considerando também as seguintes expressões de substituição

$$H_x = -\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad e \qquad H_z = \frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

e utilizando também (2.49), teremos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^S}{\partial z}\right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^S dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^P dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}H_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}H_x^P\right) dxdz \\
&+ \int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi_m H_z^S\big) - \frac{\partial}{\partial z}\big(\varphi_m H_x^S\big)\right] dxdz
\end{aligned}$$

Em seguida realizando as substituições: $H_x^S = H_x - H_x^P$ e $H_z^S = H_z - H_z^P$.

Por fim, aplicando o teorema de Green,

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dxdz = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdz = \int_{\partial\Omega}(P\hat{\mathbf{i}} + Q\hat{\mathbf{k}}).\hat{\mathbf{t}}dl$$

na última integral do lado direito, temos a formulação matemática adequada ao uso do algoritmo de elementos finitos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial E_y^S}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial E_y^S}{\partial z}\right) dxdz + \int_{\Omega_e} \eta\varphi_m E_y^S dxdz \\
&= -\int_{\Omega_e} \Delta\eta\varphi_m E_y^P dxdz - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}H_z^P - \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}H_x^P\right) dxdz \\
&+ \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{H}^S\,.\,\hat{\mathbf{t}}dl
\end{aligned} \tag{2.50}$$

em que $\mathbf{H}^S = H_x^S\,\hat{\mathbf{i}} + H_z^S\,\hat{\mathbf{k}}$.

Analisando individualmente cada elemento, considerar-se-á que as propriedades elétricas (σ, μ, ϵ) são constantes no elemento. Substituindo $\tilde{E}_y^S(x,z) = \tilde{E}_1^e\varphi_1 + \tilde{E}_2^e\varphi_2 + \tilde{E}_3^e\varphi_3$ em (2.50), podemos expressar a matriz e o vetor associados ao elemento genérico Ω_e da seguinte forma:

$$K_{mn}^e \tilde{E}_n^e = f_m^e \qquad\qquad m = 1,2,3, \quad n = 1,2,3. \tag{2.51}$$

em que

$$K_{mn}^e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{\mathfrak{z}_e}\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right) dxdx + \int_{\Omega_e} \eta_e\varphi_m\varphi_n dxdz \tag{2.52}$$

e

$$
\begin{aligned}
f_m^e = & - \int_{\Omega_e} \Delta\eta_e \varphi_m (E_{y1}^P \varphi_1 + E_{y2}^P \varphi_2 + E_{y3}^P \varphi_3) dxdz \\
& - \int_{\Omega_e} \frac{\Delta_{\mathfrak{z}_e}}{\mathfrak{z}_e} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} (H_{z1}^P \varphi_1 + H_{z2}^P \varphi_2 + H_{z3}^P \varphi_3) dxdz \\
& + \int_{\Omega_e} \frac{\Delta_{\mathfrak{z}_e}}{\mathfrak{z}_e} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} (H_{x1}^P \varphi_1 + H_{x2}^P \varphi_2 + H_{x3}^P \varphi_3) dxdz \\
& + \int_{\partial\Omega_e} \varphi_m \mathbf{H}^S . \hat{\mathbf{t}} dl
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

Aplicando as funções base (2.41) na expressão (2.52) e fazendo uso da seguinte identidade:

$$
\int_{\Omega_e} \varphi_1^j \varphi_2^k \varphi_3^l \, dxdz = 2A_e \frac{j!\, k!\, l!}{(j+k+l+2)!}
$$

obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
K_{mn}^e = & \frac{1}{4A_e \mathfrak{z}_e} \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\eta_e A_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Para o vetor f_m^e, da mesma maneira, obtemos:

$$
\begin{aligned}
f_m^e = & - \frac{\Delta\eta_e A_e}{12} \begin{pmatrix} 2\, E_{y1}^P & E_{y2}^P & E_{y3}^P \\ E_{y1}^P & 2\, E_{y2}^P & E_{y3}^P \\ E_{y1}^P & E_{y2}^P & 2\, E_{y3}^P \end{pmatrix} \\
& - \frac{\Delta_{\mathfrak{z}_e}}{6\mathfrak{z}_e} (H_{z1}^P + H_{z2}^P + H_{z3}^P) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\Delta_{\mathfrak{z}_e}}{6\mathfrak{z}_e} (H_{x1}^P + H_{x2}^P + H_{x3}^P) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

Em que para um meio estratificado, a componente vertical do campo magnético primário é nulo.

Em ambos os modos TM e TE, a construção da matriz global e do vetor global são igualmente desenvolvidas como nas construções locais da matriz e do vetor no elemento. É importante ressaltar que as propriedades concernentes à matriz global: esparsidade (presença de muitos zeros), simetria e bandeamento; tornam a

implementação do problema mais otimizado. Por bandeamento considera-se que os elementos com valores não nulos encontram-se próximos à diagonal principal delimitando uma espessura de banda, e que por simetria é possível armazenar somente a semi-banda, partindo da propriedade de simetria da matriz global.

Ainda com todas estas propriedades, a memória necessária para armazenamento de dados do problema é muito grande, assim uma renumeração dos nós para diminuição da semi-banda torna-se necessária.

3 A LINGUAGEM C++

3.1 INTRODUÇÃO À LINGUAGEM C++

A linguagem C++ foi desenvolvida por Bjarne Stroustrup no início de 1980. Considerada uma linguagem de alto nível por apresentar semelhanças com o raciocínio humano na solução de problemas e desenvolvimento de algoritmos, herdou muitas características de seu antecessor, a linguagem C (MALIK, 2013).

Existem basicamente duas maneiras de se trabalhar com a programação: a chamada programação estruturada (associadas as linguagens procedimentais) e a programação orientada à objetos. A primeira busca desmembrar o problema a ser resolvido em pequenos subproblemas, dividindo-os em módulos e funções, cujas soluções individuais se reúnem para solucionar o problema maior. O segundo está relacionada a manipulação dos objetos. Um objeto é a representação da entidade física do mundo real, ou seja, corresponde ao dado em conjunto com todas os procedimentos relacionados a este (MALIK, 2013; SILVA FILHO, 2010).

A compatibilidade de C com C++ é comprovada pela possibilidade de inserção de bibliotecas C nos programas escritos em C++, porém o contrário não se aplica. Da evolução de linguagem C para o C++ novos atributos foram incorporados: objetos, classes e a programação orientada à objetos.

As principais características da linguagem C++ em relação a programação orientada à objetos são: o encapsulamento e a ocultação, abstração de dados, polimorfismo e herança.

O encapsulamento e a ocultação de dados estão intimamente ligados. As classes (estruturas de que reúnem objetos similares) não permitem o acesso direto de seus membros, assim estes estarão protegidos e ocultados de eventuais manipulações indesejadas. As unidades elementares da programação orientada à objetos: os dados e as funções associadas a estas, são então encapsuladas dentro de uma classe e seu acesso é realizado pelo mecanismo de abstração de dados. Tal procedimento é possível, pois que cada objeto na classe só é acessada pela chamada de funções-membros. Cada função-membro é associada à um objeto específico (SILVA FILHO, 2010).

O procedimento de abstração de dados é uma técnica que retorna somente a tarefa ou dado final, o que contribui para a ocultação de dados. Assim, o importante não é saber como a implementação da função-membro é feita, mas sim o dado ou tarefa que é retornado desta função-membro (MALIK, 2013).

O polimorfismo é uma característica relacionada a maneira como o programa pode reconhecer funções de uma classe a partir de variáveis de entrada diferentes, e que são específicos a cada objeto (SILVA FILHO, 2010).

A herança consiste na propriedade de criar uma classe de outra classe existente, tal operação permite que classes derivadas possam herdar funções-membros da classe maior, além de poder conter novas atribuições e operações específicas para a classe-filha (SILVA FILHO, 2010).

Uma forma de tornar a implementação de um software mais organizado é fazer o uso de funções, o qual não é restrito à programação orientada a objetos, mas proporciona uma organização diferente as linguagens orientadas a objeto. O conjunto de funções e variáveis operantes são reunidas em uma entidade maior: a classe. Nas chamadas em funções e classes a passagem dos parâmetros pode ocorrer por valor ou por referência. Na primeira passagem parte do dado é passado à função que chama e é a forma mais utilizada. A passagem por referência cria uma variável associada ao dado referenciado (alias), neste caso, o valor repassado à função é em si o próprio endereço da variável (MALIK, 2013; SILVA FILHO, 2010).

A organização diferenciada do código em termos da programação orientada a objetos recaí em estruturar o código baseado em objetos e não em funções (como ocorre na programação estruturada). O objeto é a unidade menor na constituição de uma classe. A relação dos objetos e funções-membro em uma classe é que todas as funções-membros são acessadas por todos os objetos. Funções-membro essenciais na definição de uma classe são os construtores e destrutores, os quais estão associados, respectivamente, a criação de um objeto específico e a destruição deste mesmo. Cada construtor e destrutor atua sob um objeto específico. O nome do construtor e destrutor possuem o mesmo nome da classe, exceto pelo símbolo til (˜) no início da definição do destrutor. Tal especificidade decorre da associação direta do seu reconhecimento pelo compilador (SILVA FILHO, 2010).

Basicamente na implementação do programa em C++ utilizou-se as seguintes bibliotecas ou diretivas de pré processador (tipo de comando voltada ao compilador) em C e C++: <iostream>, <fstream>, <iomanip>, <cmath>, <math.h>, <stdlib.h>, <complex.h> e <stdio.h>. As quatro primeiras são bibliotecas padrão do C++ e as quatro últimas, bibliotecas padrão do C. Tal possibilidade de mesclagem entre as bibliotecas C e C++, decorre do C++ ser um desenvolvimento do C, desde que sejam utilizadas as suas declarações de maneira correta.

Para maior entendimento das classes <iostream> e <fstream> devemos definir a stream. Uma stream é um objeto que pertence a uma hierarquia relacionada ao fluxo de caracteres estabelecido entre objetos, os quais permitem a saída e entrada de dados em C++ (BUENO, 2002).

Logo, <iostream> é uma classe maior, cujas classes herdeiras são <stringstream>, <fstream>, <istream> e <ostream>. Como a primeira classe herdeira não foi utilizada, esta será apenas definida: corresponde ao fluxo de dados (saída e entrada) atuando sob variáveis do tipo string. As classes herdeiras <istream> e <ostream> são, respectivamente, associadas aos dados de entrada do teclado e saída na tela. A classe <istream> possui como padrão o objeto cin, o qual manipula a leitura de dados do teclado, atuando conjuntamente com o operador de extração (»). Enquanto, a classe <ostream> apresenta como objeto de manipulação, o cout, o qual realiza a saída de dados para a tela com o uso do operador de inserção («). A classe <fstream> atua sobre a entrada e saída de dados com arquivos de disco, ou seja, ao invés de trabalhar com entrada do teclado e a saída na tela, todo o fluxo de caracteres atua sobre arquivos (BUENO, 2002).

Outra classe muito importante é a <iomanip> que realiza a formatação na saída dos dados, a partir de manipuladores. Esta classe possui uma infinidade de manipuladores dos quais a presente programação se ateve apenas ao uso das funções scientific, endl e setw. O primeiro fornece precisão de n casas decimais estabelecidas na inicialização da mesma. O segundo fornece uma nova linha e termina o fluxo de caracteres. O último estabelece o tamanho de campos para conter a variável de saída (BUENO, 2002).

O <cmath> é uma biblioteca para operações matemáticas que apresenta uma vasta variedade de funções como operações trigonométricas (seno e cosseno) até operações de raiz quadrada e logaritmos, das quais foi utilizada o valor absoluto (abs), a raiz quadrada (sqrt) e a exponencial na base qualquer (pow)(MALIK, 2013).

O <cmath> e o <math.h> são ambas bibliotecas matemáticas, e apresentam pequenas diferenças, a biblioteca em C (math.h) tem suporte para maior número de funções como o fmode, o qual retorna o valor em ponto flutuante do resto da operação x/y, mantendo o sinal de x (KERNIGHAN; RITCHIE, 1989).

A biblioteca <stdlib.h> fornece suporte as operações de alocação de memória (alocação e desalocação dinâmica), além de tarefas relacionada a este. Outras funções desta biblioteca esta relacionada a conversão de números (KERNIGHAN; RITCHIE, 1989).

Operações matemáticas com números complexos são suportadas pela biblioteca <complex.h>. A biblioteca <stdio.h> é uma biblioteca do C relacionada ao fluxo de caracteres (entrada e saída de dados).

4 RESULTADOS

No presente capítulo será abordada a validação do método por meio da comparação com dados obtidos pela modelagem utilizando o código desenvolvido por Key e Weiss (2006), e os presentes dados resultantes da modelagem em linguagem C++.

Assim, será abordada dois modelos propostos por Rijo (2008). O primeiro modelo corresponde ao semi-espaço, e o segundo modelo ao meio estratificado de três camadas incluindo o ar. Para os dois modelos serão utilizadas frequências que variam de 0.001 Hz até 100.00 Hz, cujo variação estabelecida é de um fator de 10 para cada frequência analisada. No presente código desenvolvido não fora utilizado normalizações na modelagem de dados 2D, e a malha utilizada em todos os modelos é estruturada e não regular. Para a presente modelagem, os resultados foram gerados em um computador pessoal com processador intel Core i5 , com 4 Gb de memória RAM.

4.1 MODELO 1

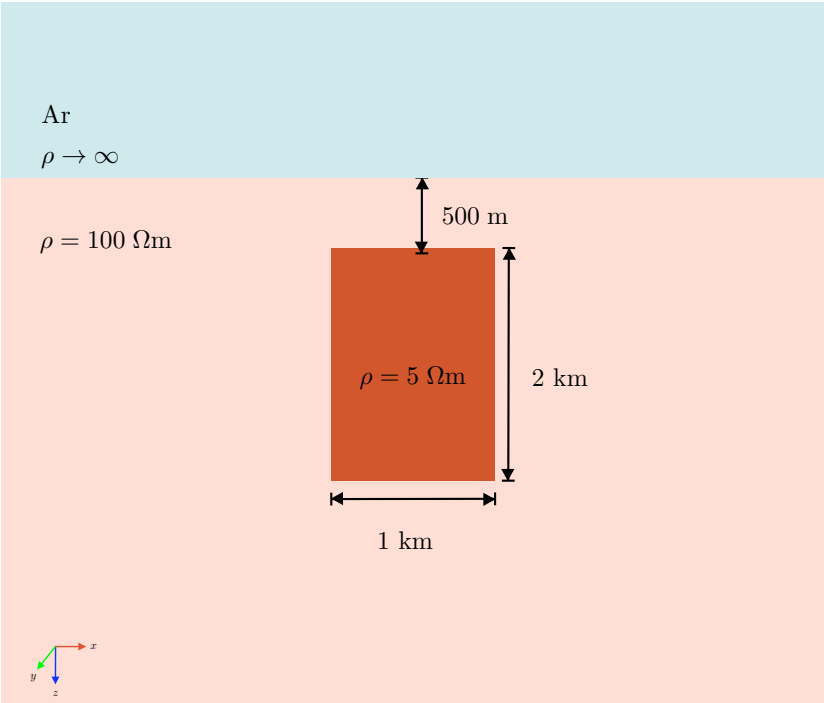
O modelo 1 corresponde a um semi-espaço, cuja resistividade do ar adotada é de 1.10^{12} Ωm, e o substrato apresenta resistividade de $100\,\Omega$m. O alvo da prospecção tem forma geométrica bem definida, cujas dimensões são 1 km de largura por 2 km de altura, enterrado à uma profundidade de 500 m da superfície de medidas, estabelecida em 0.0 m.

A Figura 1 representa o modelo acima descrito. Sendo a resistividade do corpo $5\,\Omega$m. Dimensionalmente ele está posicionado simetricamente em relação ao eixo x, varrendo em extensão de -500 m à 500 m.

Para estabelecer um bom resultado dos campos obtidos para o modo TM, o grid da malha utilizada percorre dimensões de -40 km à 40 km, na direção x, e 0.0 km à 40 km na direção z. Com esta malha a condição para decaimento do campo nas bordas fica estabelecido. As Figuras 2a e 2b mostram a extensão geral da malha com refinamento maior nas posições de localização do corpo, para o modo TM. Para a modelagem deste modelo foi dispendido 1.840 s, utilizando malha com 5244 nós e 10200 elementos

Pela relação fundamental da frequência com o comprimento de onda, tem-se que para as menores frequências o comprimento de onda é maior, e consequentemente maior é a profundidade de investigação. Para as maiores frequências o comprimento de onda é menor, e sua profundidade de investigação é menor.

Figura 1 – Representação do modelo 1 (semi-espaço) de Rijo (2008) (Adaptado pela Autora).

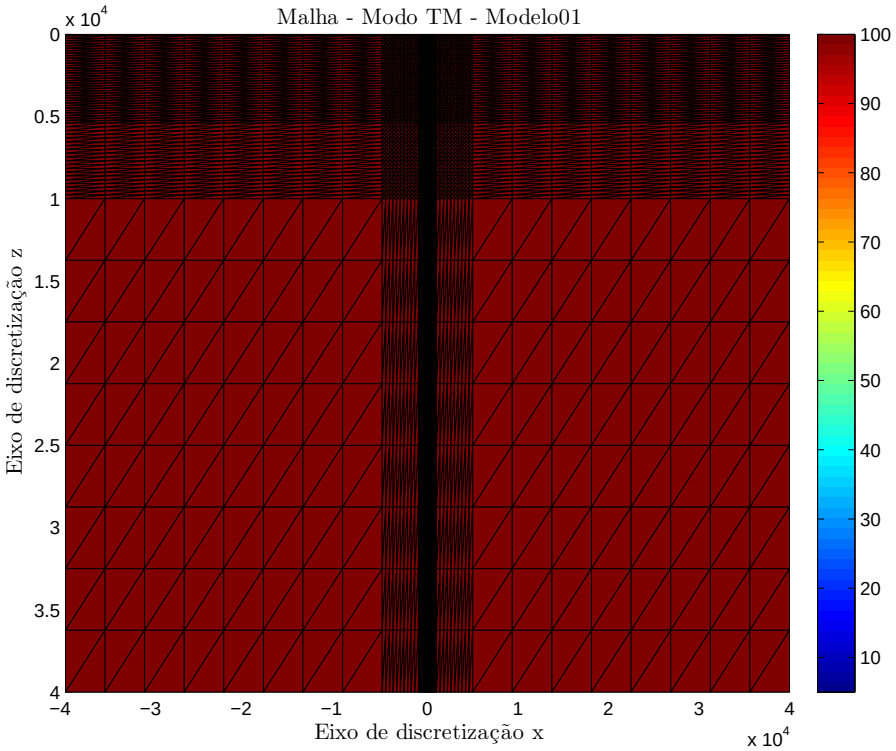


Fonte: Elaborado pela Autora

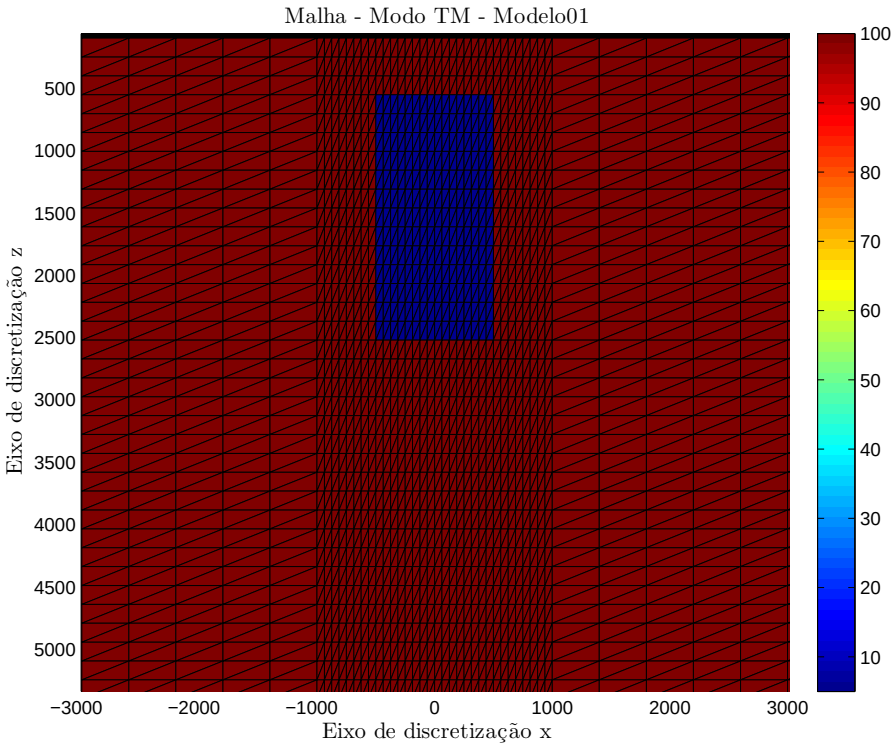
Por exemplo, para a frequência de 0.001 Hz, tem-se que o campo total Ex é bem suave, saindo de uma amplitude um pouco acima de $6.10^{-4}\ V/m$ atingindo na posição central do corpo um valor um pouco abaixo de $3.10^{-4}\ V/m$. As curvas das partes real e imaginária do campo Ex coincidem e suas inflexões próximas as dimensões do corpo são bem mapeadas, como ilustrado na Figura 3.

Figura 2 – Malha gerada para o modelo 1 proposto, modo TM. (a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. (b) Ampliação na malha da região que contém o alvo.

(a) Malha para o modelo 1. Modo TM.

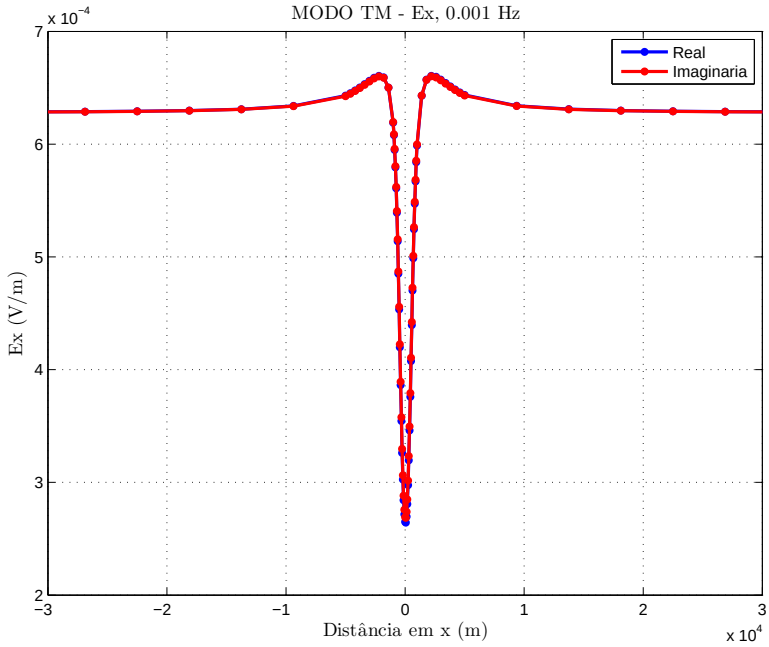


(b) Ampliação da região da anomalia para o modelo 1.



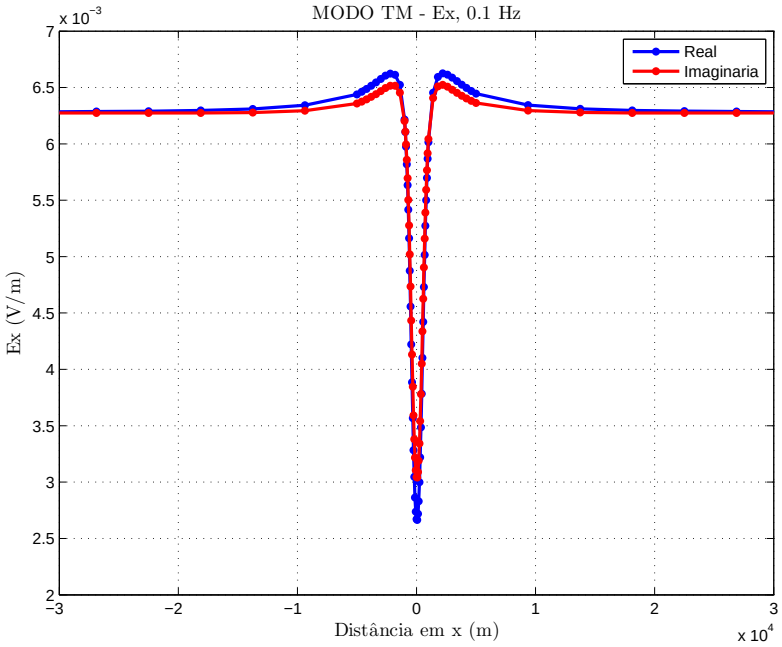
Fonte: Elaborado pela Autora

Figura 3 – Campo Total Ex para frequência de $0.001\ Hz$ - Modelo 1, modo TM.



Fonte: Elaborado pela Autora

Figura 4 – Campo Total Ex para frequência de $0.1\ Hz$ - Modelo 1, modo TM.



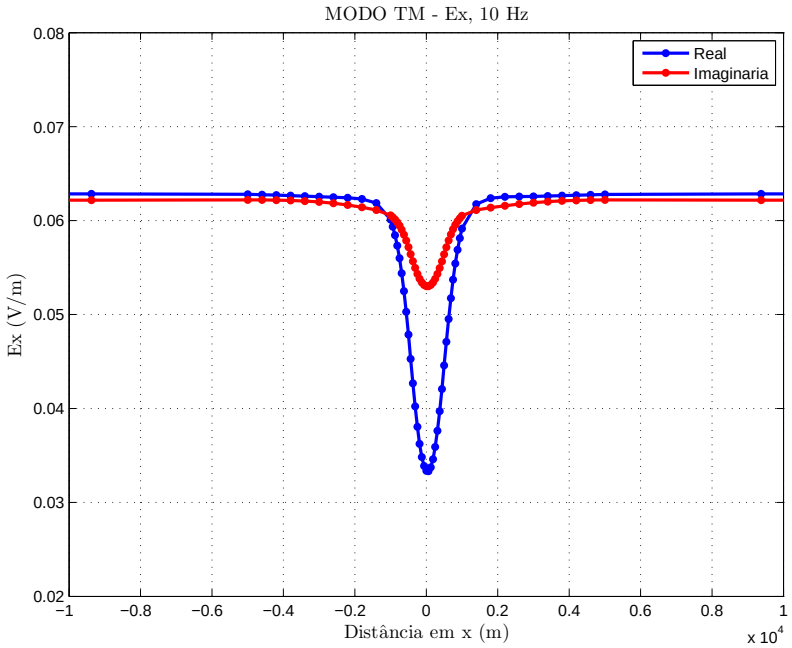
Fonte: Elaborado pela Autora

Para uma frequência de 0.1 Hz, tem-se também o campo total Ex bem suave, com amplitude saindo acima de $6.10^{-3}\ V/m$ atingindo na posição central entre $3.10^{-3}\ V/m$ e $2.5\ .10^{-3}\ V/m$. As curvas são suaves, e coincidem em grande parte, somente se distanciando próximo da laterais do alvo, entre -500 e 500 m, como ilustrado

na Figura 4.

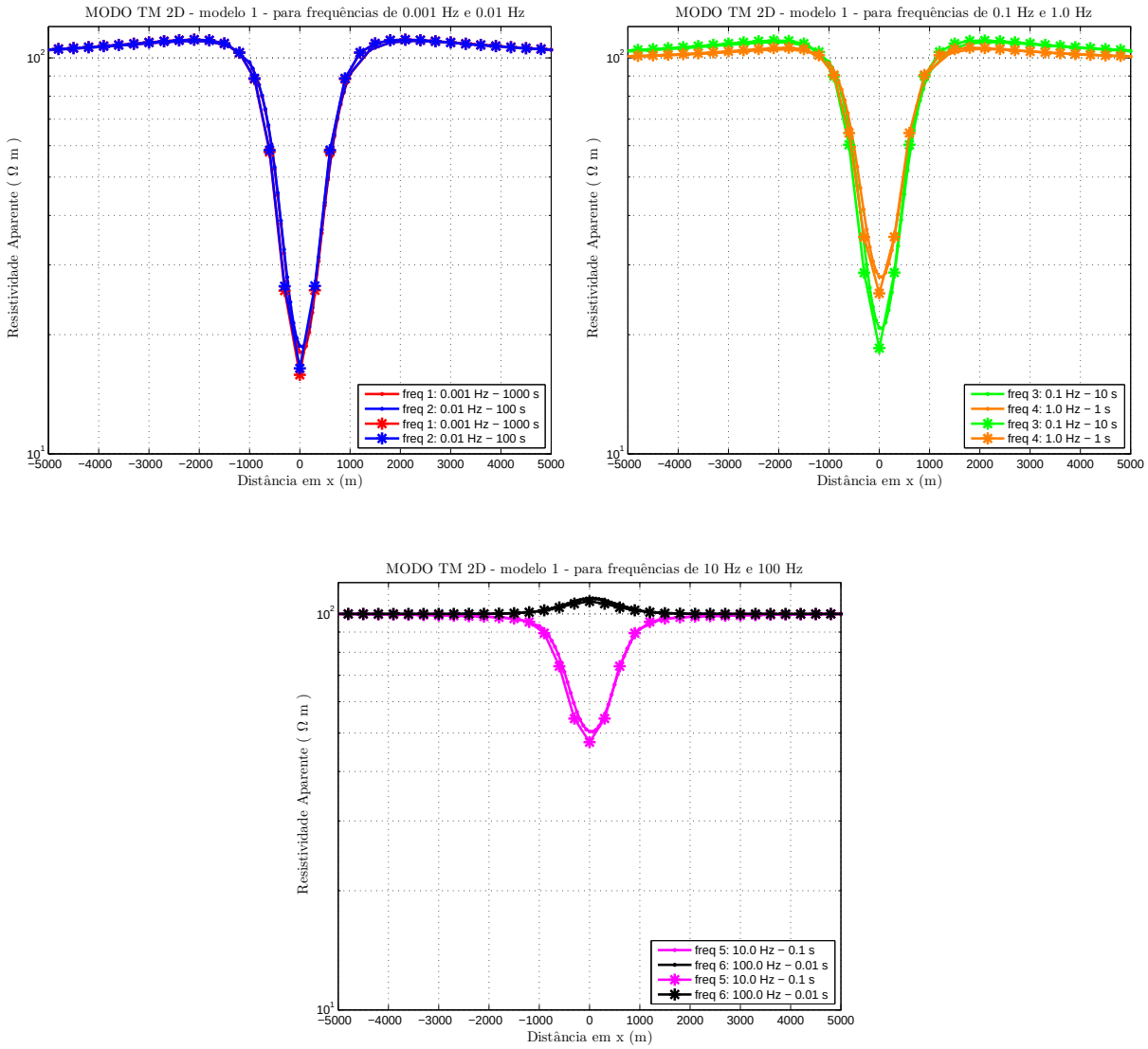
Para frequência de 10 Hz as curvas do campo total são suaves, e as partes real e imaginária são próximas, mas próxima ao corpo sofrem inflexão da curva. No geral as curvas tem amplitude de aproximadamente $0.063\ V/m$ e no centro do corpo, as partes real e imaginária alcançam, respectivamente, $0.033\,V/m$ e $0.053\,V/m$. Sendo que a parte real apresenta maior variação de amplitude que a parte imaginária, como ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Campo Total Ex para frequência de $10.0\ Hz$ - Modelo 1, modo TM.



Fonte: Elaborado pela Autora

Figura 6 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curvas com marcadores) para o modo TM. a) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta da resistividade aparente para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo).



Fonte: Elaborado pela Autora

Analisando as curvas da resistividade aparente para cada frequência, ilustrada na Figura 6, observa-se que nas frequências mais baixas (0.001 Hz - 0.1 Hz), mostrada na Figura 6 a), a estimativa da resistividade da heterogeneidade é mais acurada do que as curvas de resistividade aparente para as maiores frequências (Figura 6c)). Nos períodos maiores a resistividade aparente alcança $8\ \Omega\ m$, muito próximo da resistividade do corpo que é de $5\ \Omega\ m$.

Quando se aumenta a frequência, o comprimento de onda diminui como já citado anteriormente, por isso o poder de penetração da investigação diminui. Ainda

que nestas frequências a resistividade aparente não alcance o valor da resistividade do corpo, suas curvas de resistividade aparente são influenciadas pelo corpo em profundidade. As inflexões destas curvas indicam aproximadamente os limites laterais do corpo em torno de x igual -500 e 500 m.

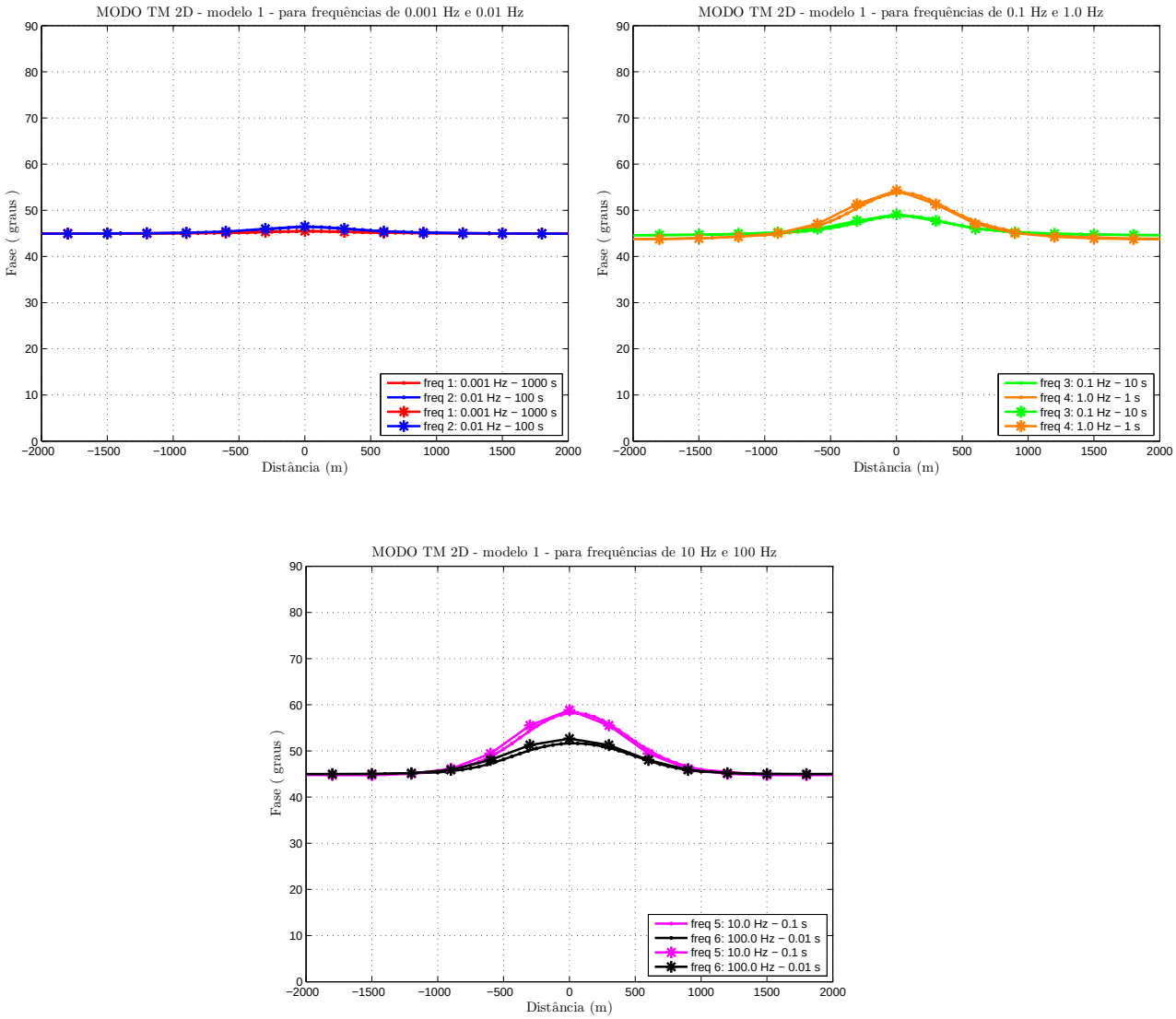
Comparando as curvas de resistividade aparente das Figuras 6 a), 6 b) e 6 c), que sobrepõem as respostas das resistividade aparente resultante da modelagem C++ e do código de Key e Weiss (2006) (curvas com marcadores), observamos que estas apresentam boa semelhança, e que ao menos qualitativamente as curvas dos dois métodos convergem para a mesma resposta. Pela analise qualitativa das curvas é possível validar a resposta obtida pela modelagem C++.

Ao contrário da analise realizada para resistividade aparente, a fase apresenta comportamento diferente com relação a frequência utilizada. Para frequências de 0.001 Hz à 0.1 Hz (as mais baixas), mostrada na Figura 7 a), a presença do corpo influência muito pouco no sinal obtido, enquanto para as frequências mais altas, a influência do corpo é mais perceptível, sendo que na maior frequência (100 Hz), fase alcança aproximadamente $58°$, como ilustrado na Figura 7 c).

As curvas obtidas são coerentes com o modelo proposto por Rijo (2008) que foi obtido pelo programa desenvolvido porKey e Weiss (2006), e validam a resposta obtida pela modelagem C++.

Para o modo TE utilizou-se uma malha com grid percorrendo dimensões de -40 km à 40 km, na direção z, e -40 km à 40 Km na direção z. Com esta malha a condição para decaimento do campo nas bordas fica estabelecido. As Figuras 8 a) e 8 b) mostram a extensão geral da malha com refinamento maior nas posições de localização do corpo, para o modo TE. Para a modelagem deste modelo foi dispendido 11 m e 28.141 s, utilizando malha com 59670 nós e 118256 elementos. Na figura 8 b) observamos a maior densidade de nós próximo a profundidade de 0.0 m, devido a obtenção do campo Hx para o modo TE ser obtido como a derivada do campo Ey, e neste modo o ar deve ser discretizado. A uma profundidade pouco abaixo de 0.0 m (em 5 m) foi obtida as medidas dos campos.

Figura 7 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curva com marcadores) para o modo TM. a) Resposta de fase para as frequências $0.001\,Hz$ e $0.01\,Hz$ (esquerda). b) Resposta de fase para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta de fase para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo).

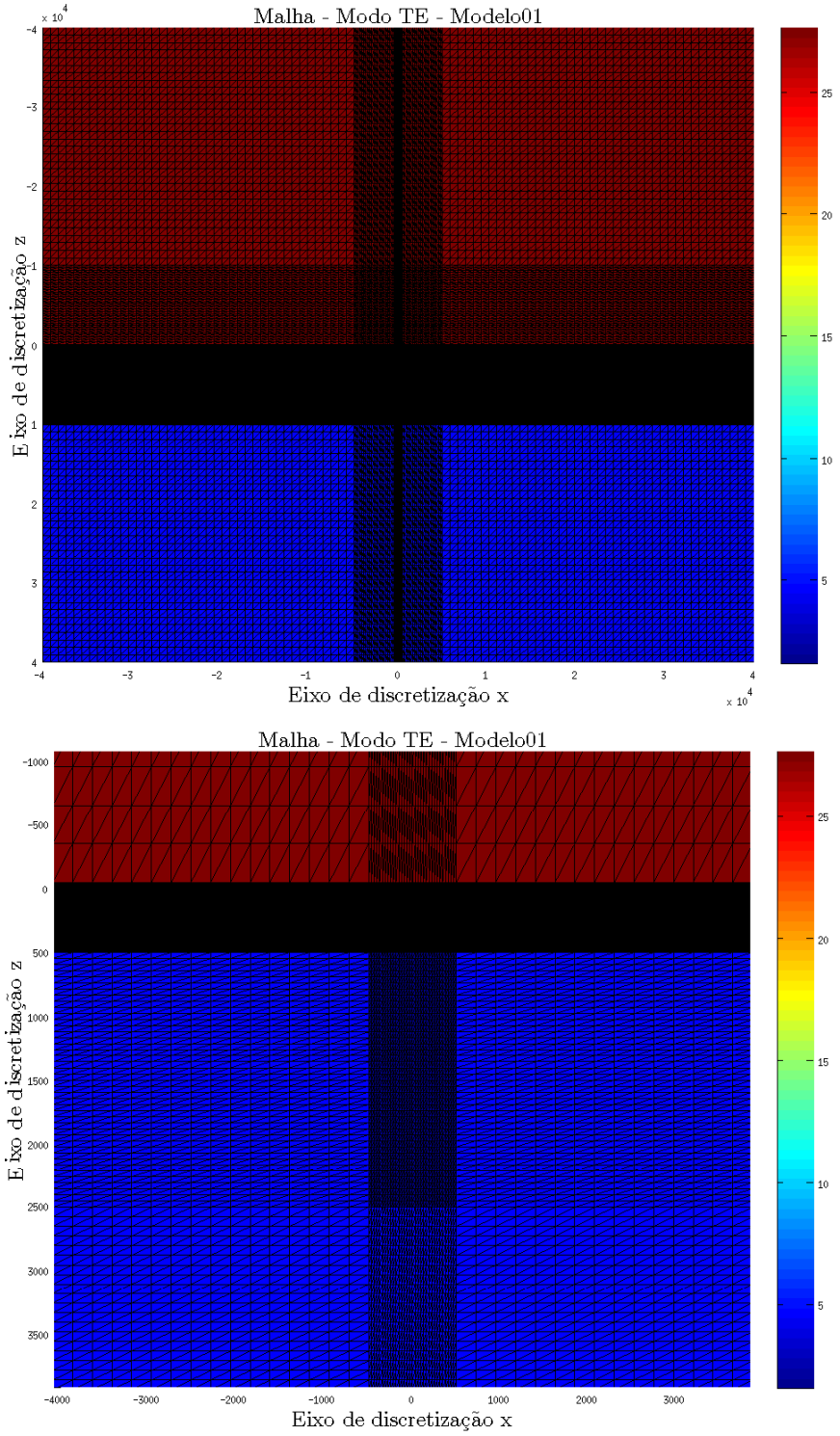


Fonte: Elaborado pela Autora

As curvas de resistividade aparente para o modo TE são mais marcantes, porém devido suas correntes encontrarem-se paralelas ao eixo principal do corpo, suas respostas não são as melhores ferramentas para mapear os limites laterais dos corpos, como ilustrado na Figura 9. As curvas obtidas pelos diferentes ferramentas de modelagem, C++ e Fortran, como ilustrado nas Figuras 9 a), 9 b) e 9 c), apresentam respostas muito semelhantes e por uma analise qualitativa as presentes respostas de resistividade aparente obtidas pela modelagem C++ são validadas.

Para a resposta da fase obtida pelas duas metodologias já citadas, as curvas de

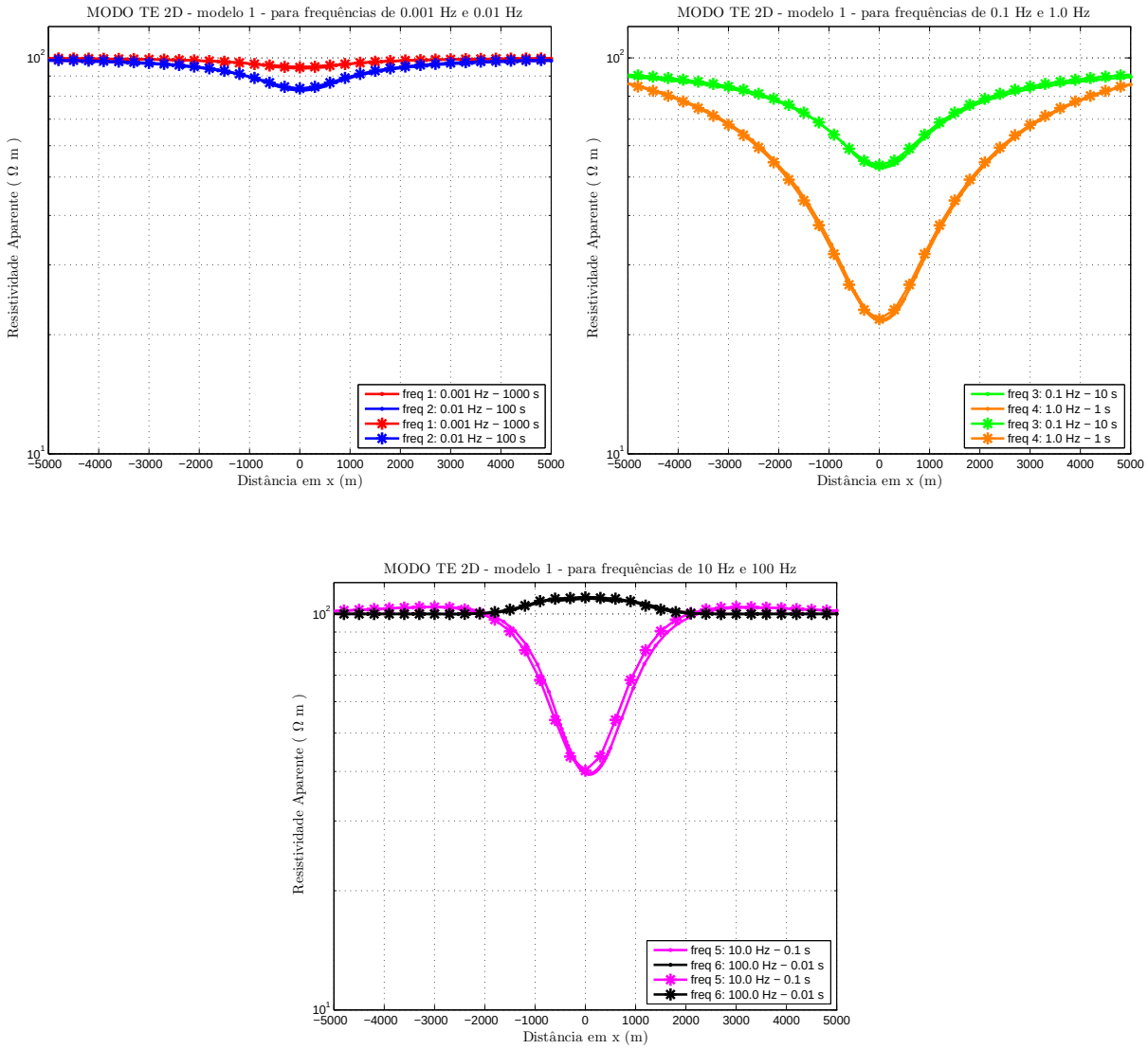
Figura 8 – Malha gerada para o modelo 1 proposto, modo TE. a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. b) Ampliação na malha da região que contém o alvo.



Fonte: Elaborado pela Autora

fase são bem semelhantes e tendem a convergir para mesma resposta, com ilustrado na Figura 10.

Figura 9 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curvas com marcadores) para o modo TE. a) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta da resistividade aparente para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta da resistividade aparente para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo).

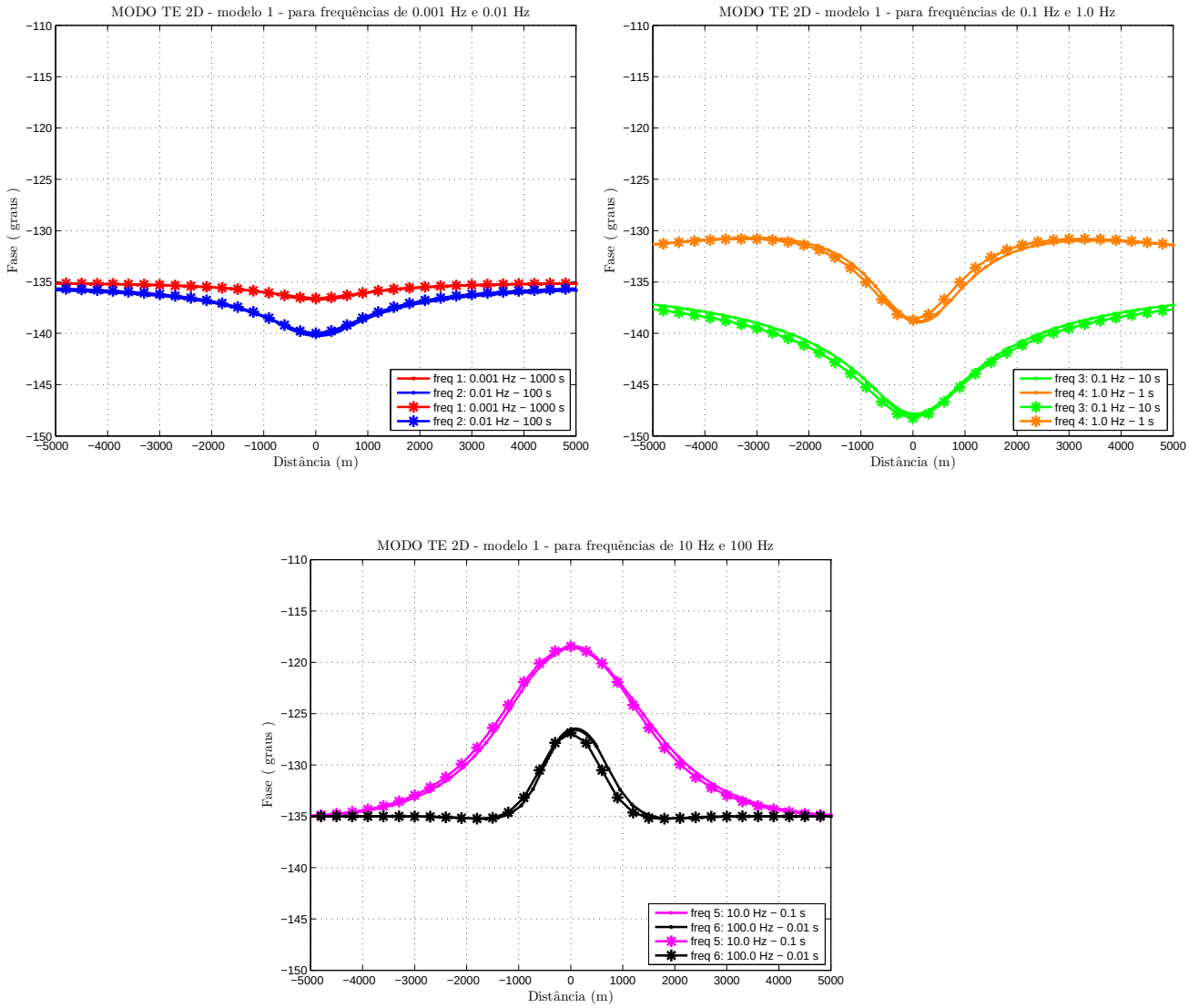


Fonte: Elaborado pela Autora

4.2 MODELO 2

O modelo 2 corresponde ao meio estratificado de três camadas, incluindo o ar, cuja resistividade do ar adotada é de $1.10^{12}\,\Omega m$, a resistividade da camada hospedeira é de $10\,\Omega\,m$, com espessura de 10 km e o substrato apresenta resistividade de $1\,\Omega\,m$. O alvo da prospecção tem forma geométrica bem definida, cujas dimensões são 1 km de largura por 1 km de altura, enterrado à uma profundidade de 250 m da superfície de medidas, estabelecida em 0.0 m.

Figura 10 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase obtida pela modelagem C++ e pela modelagem em Fortran desenvolvida por Key e Weiss (2006) (curva com marcadores) para o modo TE. a) Resposta de fase para as frequências $0.001\ Hz$ e $0.01\ Hz$ (esquerda). b) Resposta de fase para as frequências $0.1\ Hz$ e $1\ Hz$ (direita). c) Resposta de fase para as frequências $10\ Hz$ e $100\ Hz$ (abaixo).

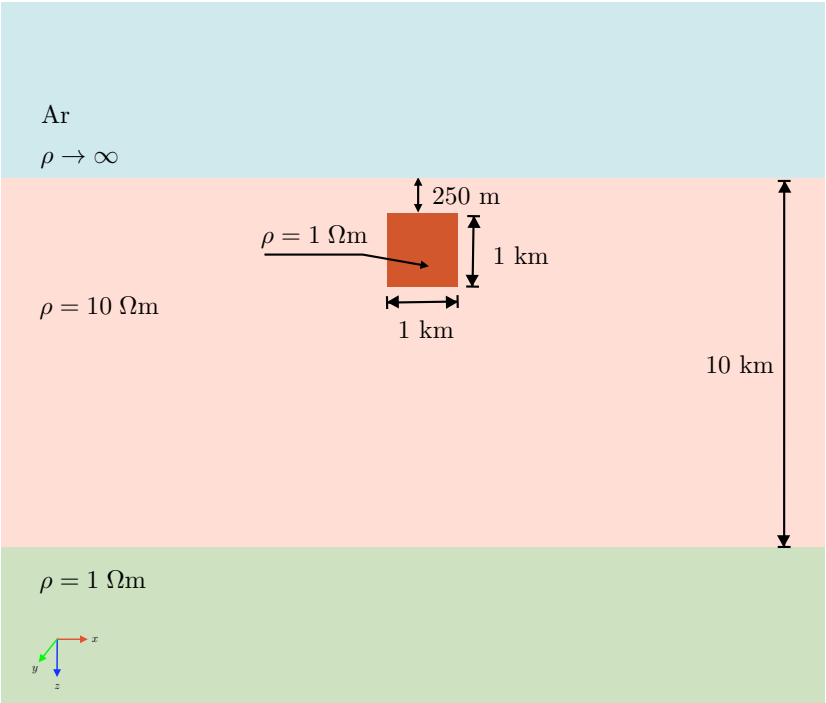


Fonte: Elaborado pela Autora

A Figura 11 representa o modelo acima descrito. Sendo a resistividade do corpo, $1\ \Omega\ m$. Dimensionalmente ele está posicionado simetricamente em relação ao eixo x, varrendo em extensão de -500 m à 500 m.

Para estabelecer um bom resultado dos campos obtidos para o modo TM, o grid da malha utilizada percorre dimensões de -40 km à 40 km, na direção x, e 0.0 km à 40 km na direção z. Com esta malha a condição para decaimento do campo nas bordas fica estabelecido. As Figuras 12 a) e 12 b) mostram a extensão geral da malha com refinamento maior nas posições de localização do corpo, para o modo TM. Para

Figura 11 – Representação do modelo 2 (meio estratificado de três camadas) de (RIJO, 2008) (Adaptado pela Autora).



Fonte: Elaborado pela Autora

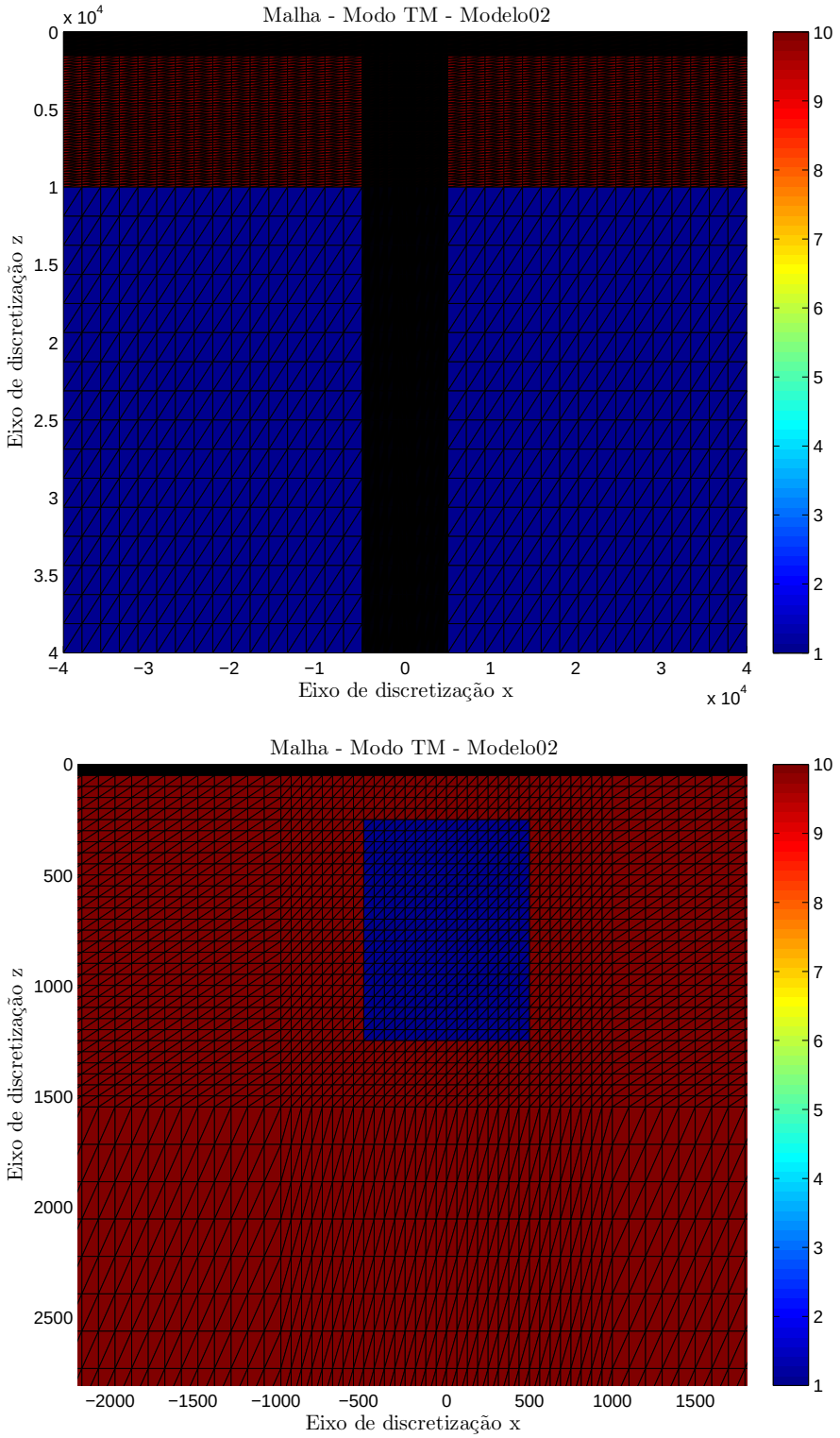
a modelagem deste modelo foi dispendido 34.009 s, utilizando malha com 21315 nós e 42048 elementos.

Para a frequência de 0.001 Hz, observa-se que o campo Ex é bem suave. As curvas das partes real e imaginária apresentam a mesma forma, mas estão deslocadas uma em relação a outra por $0.6\ .10^{-4}\ V/m$. Suas inflexões são bem marcantes e possibilitam fazer inferência dos limites laterias do alvo em profundidade. A parte imaginária sofre maior variação na amplitude do campo Ex, como ilustrado na Figura 13.

As curvas das partes real e imaginária do campo total Ex para frequência de 0.1 Hz são suaves, como ilustrada na Figura 14. As curvas são semelhantes e alcançam no centro em x = 0 m, o valor de $0.5\ .10^{-3}\ V/m$. É possível inferir que suas inflexões mapeiam aproximadamente as bordas da heterogeneidade.

Para frequência de 10 Hz, nota-se que nas partes distantes da localização do corpo, as curvas de parte real e imaginária do campo total Ex são próximas, cujo valor encontra-se um pouco abaixo de $0.02\ V/m$. Aproximando-se do corpo a parte real e imaginária se distanciam, e a primeira sofre maior variação de amplitude, como pode ser observado na Figura 15.

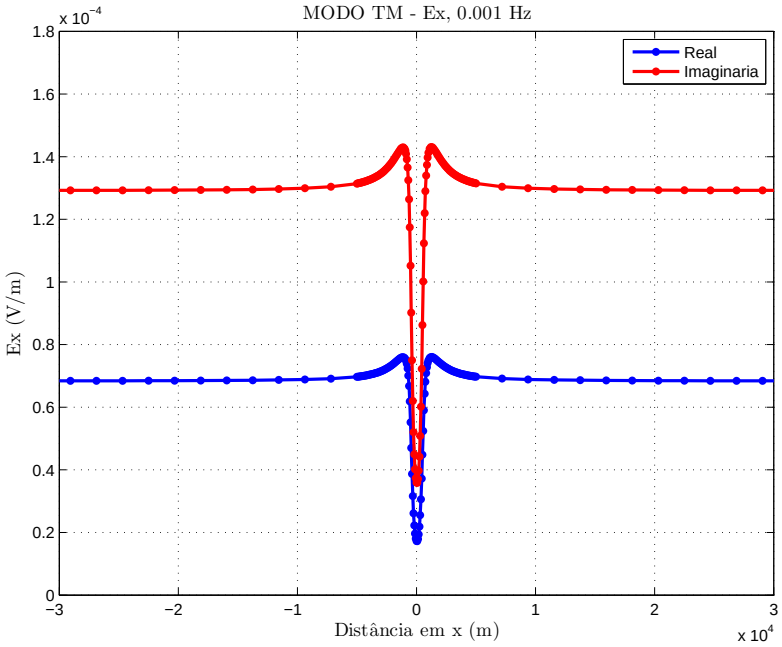
Figura 12 – Malha gerada para o modelo 2 proposto, modo TM. a) Estabelecendo visualmente as extensões da malha. b) Ampliação na malha da região que contém o alvo.



Fonte: Elaborado pela Autora

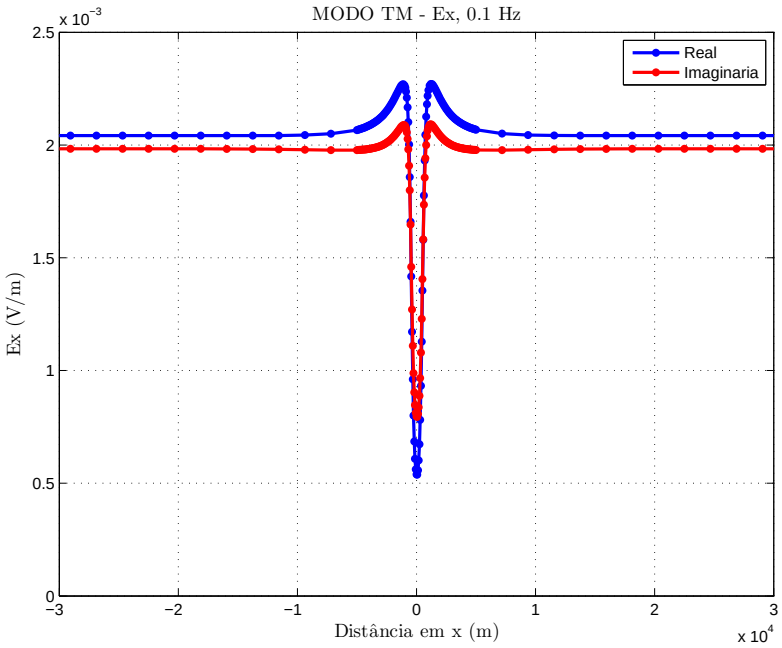
Para o modelo proposto, observa-se que as curvas de resistividade aparente para as frequências mais altas começam próximos à $10\ \Omega\ m$, resistividade da rocha

Figura 13 – Campo Total Ex para frequência de $0.001\ Hz$ - Modelo 2, modo TM.



Fonte: Elaborado pela Autora

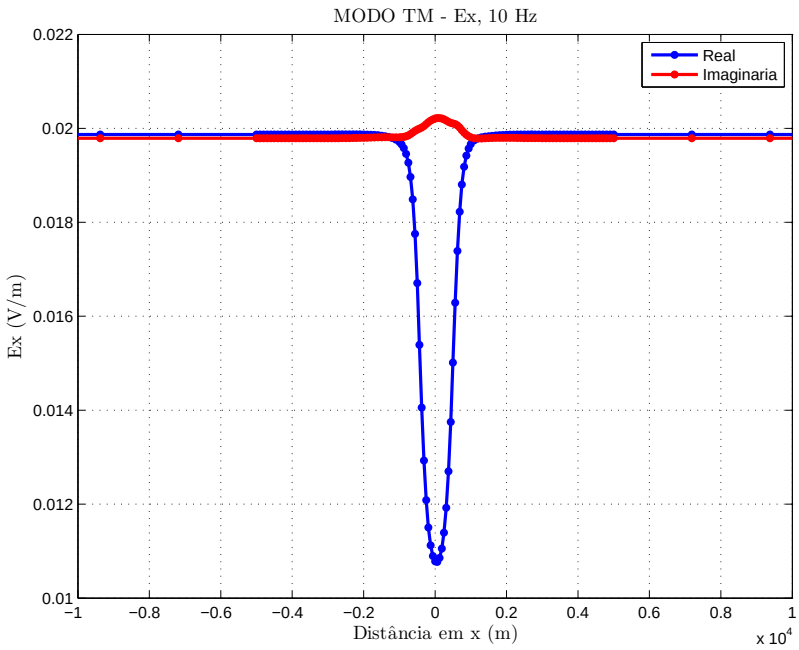
Figura 14 – Campo Total Ex para frequência de $0.1\ Hz$ - Modelo 2, modo TM.



Fonte: Elaborado pela Autora

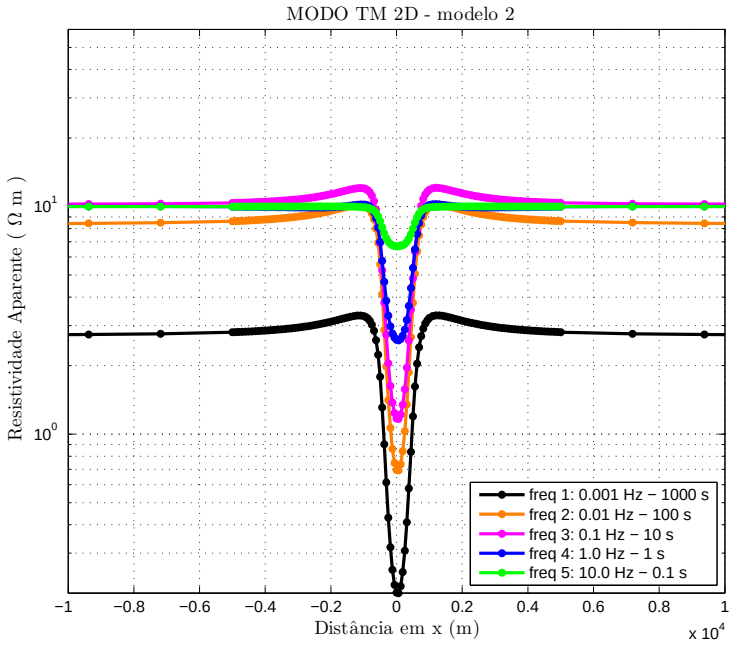
encaixante, e tendem a atingir a resistividade do corpo, o qual possui $1\ \Omega\ m$. Porém nas frequências mais baixas (0.001 Hz e 0.01 Hz) observa-se que a estimativa da resistividade do corpo ultrapassa o valor real, atingindo valor de até $0.69\ \Omega\ m$ (para 0.01

Figura 15 – Campo Total Ex para frequência de $10.0\ Hz$ - Modelo 2, modo TM.



Fonte: Elaborado pela Autora

Figura 16 – Posições de medida em $x(m)$ pela resistividade aparente para as frequências variando de $0.001\ Hz$ até $10\ Hz$, cujo valor de uma frequência para outra é da ordem de 10, para o modo TM - modelo 2.



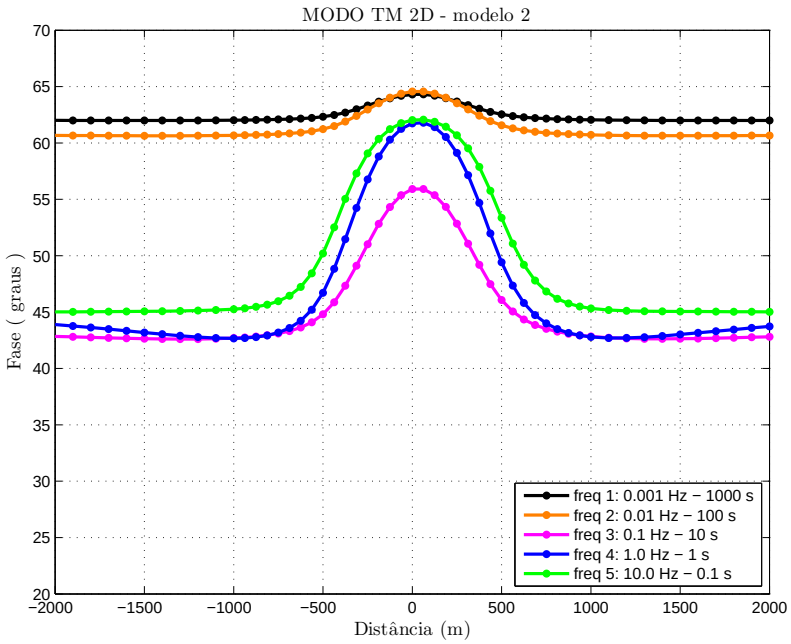
Fonte: Elaborado pela Autora

Hz) e $0.2\ \Omega\ m$ (para 0.001 Hz). Tal resultado advém do modelo possuir um substrato abaixo do meio que contém o alvo da prospecção. Logo estas curvas sofrem influen-

ciam do substrato, que mascara a estimativa da resistividade do corpo, como ilustrado na Figura 16.

Na Figura 17, observa-se que para as frequências mais baixas, a fase inicia-se próximo à $60°$,e nas proximidades do corpo varia levemente até atingir $65°$. Tais resultados decorrem da maior profundidade de investigação nestas frequências que passa a sofrer influência do substrato. As suas inflexões nas curvas de fase estimam aproximadamente os limites laterais do corpo. Ainda que respostas de fase sejam estimativas qualitativas.

Figura 17 – Posições de medida em $x(m)$ pela fase para as frequências variando de $0.001\ Hz$ até $10\,Hz$, cujo valor de uma frequência para outra é da ordem de 10, para o modo TM - modelo 2.



Fonte: Elaborado pela Autora

5 CONCLUSÕES

Do referido trabalho proposto, foi possível obter respostas contundentes que foram validadas por metodologias de modelagem bem estabelecidas (KEY; WEISS, 2006). Ao modelar o problema do Método Magnetotelúrico 2D em linguagem C++ buscou-se uma nova alternativa dentro do leque de linguagens de programação disponíveis para tentar solucionar a problemática proposta.

As diferenças observadas nas duas respostas modeladas em códigos diferentes pode ser resultado do programa de Key e Weiss (2006) ter maior precisão, pois que possui malha adaptativa e não estruturada possibilitando um erro mínimo na geração das respostas. Além disso, o seu programa fornece maneiras de manter a forma dos triângulos da malha mais regulares, utilizando para tanto interpolações do tipo spline na obtenção da derivada dos campos. Outra vantagem do código de Key e Weiss (2006) está no tempo de processamento bem curto em relação ao referido código desenvolvido em C++, pois que o primeiro utiliza o solver de sistema sistemas lineares Super LU.

Como sugestões para próximos trabalhos nesta linha de modelagem, sugere-se uma abordagem para verificar o tempo de processamento do código, comparando dados de Fortran e C++ diretamente, com relação as suas funcionalidades e otimização, utilizando um mesmo gerador de malha.

REFERÊNCIAS

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite elements - an introduction*. New Jersey: Prentice-Hall, 1981. 258 p.

BERDICHEVSKY, M. N.; DMITRIEV, V. I. *Models and Methods of Magnetotellurics*. Berlin: Springer, 2008. 559 p.

BUENO, A. D. *Apostila de programação orientada a objeto em C++*. [S.l.], 2002.

CAGNIARD, L. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, v. 18, n. 3, p. 605–635, 1953. Disponível em: <http://geophysics-.geoscienceworld.org/content/18/3/605.abstract>. Acesso em: 19 ago. 2014.

CONSTABLE, S. Ten years of marine csem for hydrocarbon exploration. *Geophysics*, v. 75, n. 5, p. 75A67–75A81, 2010. Disponível em: <http://geophysics-.geoscienceworld.org/content/75/5/75A67.abstract>. Acesso em: 21 jul. 2014.

CONSTABLE, S.; SRNKA, L. J. An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration. *Geophysics*, v. 72, n. 2, p. WA3–WA12, 2007. Disponível em: <http://geophysics.geoscienceworld.org/content/72/2-/WA3.abstract>. Acesso em: 21 jul. 2014.

FONTES, S. L. O método magnetotelúrico: fundamentos, resultados e simulações na bacia do paraná. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <http://www.anp.gov.br-/?dw=4450>. Acesso em: 15 ago. 2014.

GOUVÊIA, J. L.; SILVA, M. L. C. *Curso de Geofísica de Prospecção*. Belém: [s.n], 1983.

KERNIGHAN, B. W.; RITCHIE, D. M. *A linguagem de programação padrão ANSI*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

KEY, K.; WEISS, C. Adaptive finite-element modeling using unstructured grids: The 2d magnetotelluric example. *Geophysics*, v. 71, n. 6, p. G291–G299, 2006. Disponível em: <http://geophysics.geoscienceworld.org/content/71/6/G291.abstract>. Acesso em: 15 ago. 2014.

MALIK, D. S. *C++ Programming: From Problem Analysis to Program Design*. 6. ed. United States of America: Cengage Learning, 2013.

NAIDU, G. D. Magnetotellurics: Basic theoretical concepts. In: NAIDU, G. D. (Ed.). *Deep Crustal Structure of the Son-Narmada-Tapti Lineament, Central India*. Berlin: Springer, 2012, (Springer Theses). cap. 2, p. 13–35.

NEVES, F. dos A. *Modelagem direta bidimensional do método magnetotelúrico com o método dos elementos finitos de arestas*. Dissertação (Mestrado em Geofísica) - Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

RIJO, L. *Eletrical Geophysics 1-D Earth direct modeling*. Belém: [s.n], 2004.

RIJO, L. *Electrical Geophysics 2D-3D Earth Modeling*. Belém: [s.n.], 2008.

SILVA FILHO, A. M. da. *Introdução à programação orientada a objetos com C++*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

SIMPSON, F.; BAHR, K. *Practical Magnetotellurics*. Cambridge UK: Cambridge University Press, 2005.

TIKHONOV, A. N. *The determination of the electrical properties of deep layers of the Earth's crust*. Moscow: Dokl. Acad. Nauk, 1950.