UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Thiago Alex Santos Bentes

Estrelas negras e Buracos negros

SALINÓPOLIS
2024

Thiago Alex Santos Bentes

Estrelas negras e Buracos negros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de grau de Licenciado Pleno em Matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Profa. Dra. Carolina Loureiro Benone.

SALINÓPOLIS

2024

Thiago Alex Santos Bentes

Estrelas negras e Buracos negros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de grau de Licenciado Pleno em Matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Profa. Dra. Carolina Loureiro Benone.

Data de Aprovação: ____ de _____ de _____

BANCA EXAMINADORA

_____

Profa. Dra. Carolina Loureiro Benone

Universidade Federal do Pará

_____

Prof. Dr. Caio Filipe Bezerra Macedo

Universidade Federal do Pará

_____

Prof. Dr. Leandro Amador de Oliveira

Universidade Federal do Pará

AGRADECIMENTOS

Com profunda gratidão, expresso meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

- A Deus, por ter me dado força, inspiração e saúde para concluir cada etapa deste caminho.
- À Ana Julia dos Santos Morais, por estar ao meu lado em cada passo desta jornada. Sua presença, amor e apoio incondicional foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.
- À minha orientadora, Prof. Dra. Carolina Loureiro Benone, pelos valiosos ensinamentos e pela paciência na correção deste trabalho.
- Aos meus pais, Jofre Bentes e Kátia Cilene, minha eterna gratidão por todo amor, apoio e sacrifício.
- À Universidade Federal do Pará, pelo ambiente acadêmico enriquecedor e pelos recursos disponibilizados.
- A todos os professores e colegas de curso, pelo compartilhamento de conhecimento e experiências que enriqueceram minha jornada acadêmica.
- E a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta etapa da minha vida, meu mais sincero obrigado.

RESUMO

As Estrelas negras de Michell são objetos astrofísicos previstos inicialmente a partir da Gravitação Newtoniana. A principal característica destes corpos compactos é que estes exercem uma força gravitacional tão forte que nem mesmo a luz poderia escapar de sua ação. Na atualidade, é sabido que a Teoria da Relatividade Geral é a teoria de Gravitação que melhor descreve o cosmos. A partir desses conhecimentos, é prevista a existência de Buracos Negros, objetos que distorcem o tecido do espaço-tempo de maneira tão forte que nada consegue escapar do interior de uma região no espaço-tempo cujo limite é denominado de horizonte de eventos. Neste trabalho iremos estudar as Estrelas Negras e os Buracos Negros estáticos, em conjunto com a Gravitação Newtoniana e o formalismo Tensorial.

Palavras-Chaves: Buracos Negros; Estrelas Negras; Relatividade Geral.

ABSTRACT

The Black Stars proposed by Michell are astrophysical objects initially predicted based on Newtonian Gravitation. The main characteristic of these compact bodies is that they exert a gravitational force so strong that not even light could escape their influence. In the present day, it is known that Einstein's General Theory of Relativity provides the best description of the cosmos. From this understanding, the existence of Black Holes is predicted—objects that warp the fabric of spacetime so intensely that nothing can escape from within a region whose boundary is known as the event horizon. In this study, we will explore Static Black Holes and Black Stars, alongside Newtonian Gravitation and Tensorial Formalism.

Keywords: Black Holes; Black Stars; General Relativity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1 Força gravitacional 13

2.1 Diagramas referentes ao movimento da Terra ao redor do Sol 19

3.1 Esfera unitária com um ponto de tangência ao plano z=1 22

4.1 Trajetória radial de fótons 39

4.2 Cones de luz no espaço-tempo de Schwarzschild 40

5.1 Buraco Negro de Kerr 42

5.2 Geodésicas de fótons para diversos parâmetros de rotação 44

5.3 Órbitas de estrelas ao redor de um objeto compacto central 45

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9

1 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA 11

1.1 Leis de Kepler 11

1.2 Força e Potencial Gravitacional 12

2 ESTRELAS NEGRAS 15

3 O FORMALISMO TENSORIAL 21

3.1 Equações de Euler-Lagrange 30

4 BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD 33

4.1 Geodésicas de fótons em um plano equatorial 36

4.1.1 Movimento radial de fótons 38

4.1.2 Movimento circular de fótons 40

5 BURACOS NEGROS DE KERR 42

5.1 Órbitas esféricas de fótons 43

5.2 Sombras de Buracos Negros 43

5.3 Formas de Detecção 44

CONCLUSÃO 46

REFERÊNCIAS 48

INTRODUÇÃO

A Lei da Gravitação Universal foi apresentada inicialmente pelo físico inglês Isaac Newton no ano de 1687, lei esta que é central para a Teoria da Gravitação Newtoniana. De acordo com a mesma, a força gravitacional entre dois corpos será uma quantidade proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os seus respectivos centros (1).

Essa teoria foi amplamente aceita e se mostrou muito precisa em descrever o movimento dos planetas, a ação da gravidade sobre o movimento de corpos em queda livre, dentre outros fenômenos físicos. No entanto, existem alguns fatos observados por cientistas, os quais não estão previstos quando usamos as equações provenientes da Gravitação Newtoniana. Como exemplo temos o desvio da trajetória da luz ao passar próximo a um objeto massivo, efeito conhecido como lente gravitacional (2).

No ano de 1905 o físico Albert Einstein publicou um artigo, em que neste trabalho são apresentados pela primeira vez os postulados que embasam a Teoria da Relatividade Restrita (3). Esta Teoria nos fornece uma nova interpretação para os conceitos de espaço e tempo, em que estes são vistos como tendo uma dependência entre si, ao contrário do que descrevia a Mecânica Galileana (4).

Dez anos depois de Einstein revolucionar o conceito de espaço-tempo com a Teoria da Relatividade Especial (TRE), ele apresenta à academia prussiana de ciências seu trabalho que versa sobre a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Esta é uma Teoria de gravitação que nos fornece uma generalização dos conceitos introduzidos na TRE para vinculá-los ao novo conceito de gravidade, que é considerada agora como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

Dentre as previsões da TRG podemos destacar os buracos negros, que são objetos estelares caracterizados por possuir uma região de campo gravitacional tão intenso que toda matéria existente no interior dessa região não consegue escapar da atração gerada pela distorção extrema do tecido do espaço-tempo (5). Estes objetos podem ser formados a partir do colapso gravitacional de estrelas massivas.

Em uma estrela, existe um equilíbrio entre a força gerada pela pressão da radiação, que age radialmente no sentido de dentro para fora da estrela, e a força gravitacional que age no sentido oposto, essas são as principais forças atuando na estrela, porém não são as únicas, podendo haver efeitos elétricos ou magnéticos na mesma. Com o passar de milhões de anos,

os átomos que compõem a estrela perdem energia, fazendo aumentar sua densidade até um ponto em que a estrela irá colapsar sob sua própria gravidade. Esse efeito poderá gerar uma supernova, que é uma explosão rápida e violenta que libera uma quantidade muito grande de energia. Após isto, podemos ter a formação de estrelas de nêutrons ou buracos negros. Caso a estrela não seja tão massiva, teremos a formação de uma anã branca (6). Usando a TRG O físico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar calculou o limite para a máxima massa possível para uma estrela do tipo anã branca, sendo também análogo para estrelas de nêutrons essa relação entre densidade e colapso gravitacional. Em seus cálculos, ele mostrou que se uma anã branca tem massa superior a 1,44 vezes a massa do Sol, ela entraria em colapso.

O trio TOV, composto por Tolman, Oppenheimer e seu estudante de doutorado George Volkoff, desenvolveu as equações que descrevem a estrutura interna das estrelas de nêutrons. Eles descobriram que há um limite máximo para a massa dessas estrelas, inicialmente estimado em 0,7 massas solares, na ausência de forças nucleares. Entretanto, reconheceram que uma equação de estado mais realista poderia aumentar esse valor. Com o avanço dos cálculos de física nuclear, hoje se estima que o limite máximo da massa das estrelas de nêutrons é de cerca de 3 massas solares, e há muitas equações de estado que consideram as complexidades das interações nucleares. Caso o colapso gravitacional continue, teremos a formação de um buraco negro (7).

Neste trabalho iremos estudar os aspectos introdutórios da Gravitação newtoniana, como as equações que descrevem a força e o potencial gravitacional associados ao movimento de corpos celestes. Em seguida, abordaremos o conceito de estrelas negras, que são objetos dos quais toda luz emitida de sua superfície não consegue escapar do campo gravitacional. Além disso, vamos analisar os aspectos matemáticos ligados ao desenvolvimento da TRG para em seguida apresentar os resultados decorrentes desta Teoria. Ao final, iremos descrever o movimento de partículas na presença de um Buraco Negro.

1 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

1.1 Leis de Kepler

Foi no século XVII que um matemático e astrônomo alemão chamado Johannes Kepler, estabeleceu leis gravitacionais que descrevem o movimento de translação ao redor do Sol, conhecidas como “Leis de Kepler", essas três leis fundamentais fornecem uma descrição dos movimentos planetários, considerando o Sol como o centro do sistema solar em um modelo heliocêntrico.

Podemos enunciar as leis de Kepler da seguinte forma:

- Lei das Órbitas: A primeira lei de Kepler afirma que cada planeta viaja em uma trajetória elíptica com o Sol posicionado em um dos focos da elipse.
- Lei das Áreas: A segunda lei de Kepler afirma que a linha imaginária que conecta o Sol a um planeta cobre áreas iguais em tempos iguais. Isso significa que a velocidade de um planeta varia ao longo de sua órbita, sendo mais rápida quando o planeta está mais próximo do Sol (periélio) e mais lenta quando está mais distante (afélio).
- Lei dos Períodos: A terceira lei de Kepler estabelece uma relação entre o tempo que um planeta leva para orbitar o Sol (seu período) e a distância média do planeta ao Sol. Especificamente, o quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Isso pode ser expresso matematicamente como:

$$T^2 = Kr^3, \tag{1.1}$$

em que T é o período orbital do planeta, K é uma constante que é a mesma para todos os planetas no sistema solar e r representa a distância média do planeta ao Sol.

O valor de K para o nosso sistema solar é

$$K = 2,98 \times 10^{-34} anos^2/m^3. \tag{1.2}$$

O aprendizado das Leis de Kepler é crucial para a ciência, particularmente a astronomia. Elas permitem aos astrônomos uma melhor compreensão do sistema solar. Além disso, as Leis de Kepler tiveram um impacto significativo nas descobertas posteriores de Isaac Newton.

Portanto, vimos que essas Leis descrevem o movimento dos planetas em torno do Sol, e estão intrinsecamente ligadas à gravidade. A primeira lei, conhecida como Lei das Órbitas, estabelece que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. Isso implica que a interação gravitacional não só mantém os planetas em suas órbitas, mas também determina a forma dessas órbitas. A segunda lei, a Lei das Áreas, e a terceira lei, a Lei dos Períodos, também são consequências da interação gravitacional, que governa a velocidade orbital dos planetas e o período de suas órbitas, respectivamente. Essas leis fornecem uma compreensão abrangente da mecânica celeste e da dinâmica dos corpos celestes.

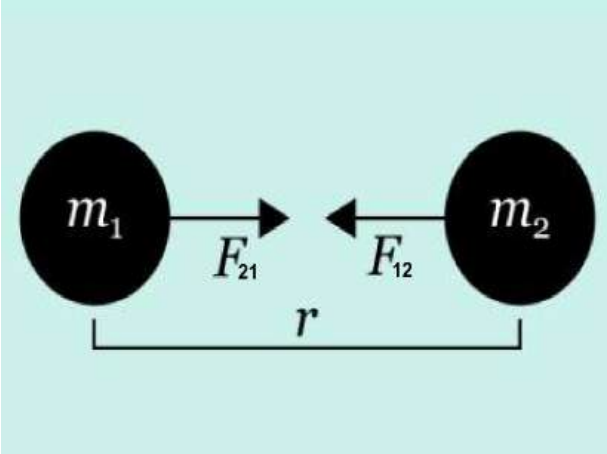
1.2 Força e Potencial Gravitacional

A Força gravitacional descrita pela Teoria da Gravitação Newtoniana é a interação fundamental mais fraca dentre todas as quatro interações existentes. Ao analisar a atuação dessa força entre dois corpos massivos, temos que a mesma irá depender de apenas três fatores: as massas m_1 e m_2 de cada um dos corpos e a distância r entre seus centros. Portanto, temos que a equação para o módulo da força gravitacional pode ser escrita como

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1.3}$$

em que G é a constante gravitacional ou constante de Newton. A força descrita acima é uma quantidade vetorial que atua de modo radial na direção de um eixo imaginário que liga os dois corpos, em que F_{12} representa a força atrativa que o objeto de massa m_1 exerce sob o corpo de massa m_2. O termo r^2 presente no denominador da expressão nos informa que a medida em que os corpos se aproximam a força existente entre eles aumenta. A figura abaixo ilustra a atuação dessa força.

Figura 1.1 – Força gravitacional



Essa força também é conservativa, ou seja, o trabalho realizado por essa força para deslocar uma partícula de um ponto A para outro ponto B independe da trajetória percorrida pela partícula. Portanto, a partir desse conceito de força conservativa podemos deduzir uma equação referente à energia potencial gravitacional.

O potencial gravitacional é um conceito que foi introduzido por Isaac Newton. Esta é uma quantidade física escalar que está ligada à elevação de um objeto em uma região com campo gravitacional. A equação para determinar a energia potencial gravitacional U em um sistema em que temos duas partículas de massa m_1 e m_2 é:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \tag{1.4}$$

Considerando a interação entre um corpo e a terra, observamos que conforme a distância do solo aumenta, sua energia potencial gravitacional cresce, pois o valor da razão em (1.4) se torna menor em módulo, mas o sinal negativo faz com que U seja crescente. A interpretação dada à equação anterior é de que a mesma representa o trabalho necessário para deslocar uma partícula de massa m_2 situada em um ponto P, com distância r da partícula de massa m_1, até uma distância infinita. Novamente, pelo fato da gravidade ser uma força conservativa, podemos expressa-lá em termos da energia potencial gravitacional. A fórmula obtida é:

$$F_{12} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right), \tag{1.5}$$

onde aplicando a derivada, obtemos novamente a equação (1.3). Portanto, estão apresentados

os conceitos introdutórios necessários para a compreensão do universo.

2 ESTRELAS NEGRAS

As estrelas negras são objetos astrofísicos previstos inicialmente a partir de análises da gravitação newtoniana. Sabe-se que entre dois corpos massivos a equação (1.3) é válida e que, mesmo considerando a natureza corpuscular da luz, sabemos atualmente que os fótons não possuem massa. Portanto, a princípio a luz não teria seu movimento afetado pela força de Newton. Entretanto veremos que até mesmo esses corpos podem ter sua trajetória alterada em função da interação gravitacional. Essa alteração é explicada corretamente pela Relatividade Geral. Mas, se atribuirmos uma certa massa ao fóton, a teoria newtoniana também nos fornecerá um resultado que permite obter as estrelas negras.

Para encontrar essas soluções precisamos considerar a velocidade de escape. Esta corresponde à velocidade mínima com a qual um corpo deve ser lançado, seja da Terra ou de qualquer outro corpo celeste, para que ele possa escapar integralmente da atração gravitacional. Os cálculos mostram que esse tipo de velocidade não depende da massa do corpo que está escapando. Dessa forma, se a velocidade de escape associada a uma estrela fosse maior que a velocidade da luz, todos os fótons emitidos pela estrela ficariam aprisionados em seu interior. Sendo assim, temos ainda que rusticamente a primeira menção ao que na atualidade denota-se por buraco negro, em que este é formado a partir do colapso gravitacional de estrelas e previsto matematicamente pela Teoria da Relatividade Geral, a qual abordaremos mais a frente neste trabalho.

Foi o reverendo inglês John Michell (1724-1793) quem propôs pela primeira vez acerca da existência de objetos astrofísicos os quais denominou de estrelas Negras (8). Seu trabalho foi apresentado pelo físico e químico franco-britânico Henry Cavendish no ano de 1783 perante a Royal Society, que é uma sociedade científica e a academia nacional de ciências do Reino Unido. No ano de 1799, temos publicada pelo matemático, astrônomo e físico francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827) uma demonstração alternativa para a existência das estrelas negras, a qual vamos explicar a seguir:

Considere que um fóton está escapando da atração gravitacional de uma estrela através de um movimento radial. Ao atribuirmos a massa m para o fóton, a segunda lei de Newton nos dará a seguinte equação:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}. \tag{2.1}$$

Quando se aplica a regra da cadeia, obtêm-se

$$F = m\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dr}. \tag{2.2}$$

Substituindo a equação (1.3) no lado esquerdo da equação acima, obtemos

$$-\frac{GmM}{r^2} = m\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dr} = mv\frac{dv}{dr}, \tag{2.3}$$

onde M indica a massa da estrela e o sinal de menos indica que a força atua no sentido contrário ao vetor unitário de deslocamento. Como o corpúsculo está em movimento radial, a razão dr/dt é sua velocidade v. Analisando o lado esquerdo e direito da equação anterior e aplicando o cálculo integral, chega-se a

$$\int -\frac{GM}{r^2}dr = \int vdv. \tag{2.4}$$

A solução dessa equação é

$$\frac{2GM}{r} + 2C = v^2, \tag{2.5}$$

em que o valor de C é constante e está associado à posição e velocidade final do fóton.

Dessa forma, vamos determinar o valor dessa constante em termos da velocidade do fóton na superfície da estrela e do raio estelar. Considerando estes como c e R, respectivamente, obtém-se o resultado

$$2C = c^2 - \frac{2GM}{R}. \tag{2.6}$$

Substituindo esta expressão em (2.5), chega-se ao resultado

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + c^2 - \frac{2GM}{R}. \tag{2.7}$$

Nessa equação, estão presentes dois valores para a velocidade do fóton, v e c. O primeiro valor é referente à velocidade do fóton durante sua trajetória, o qual é função do raio r. Visto que $r > R$, v será sempre menor que a velocidade inicial do fóton na superfície c. Na atualidade sabe-se que a velocidade da luz no vácuo é sempre constante em todos os sistemas de referenciais inerciais, mas como estamos interessados em buscar um resultado histórico para esta problemática, estamos supondo que a força gravitacional consegue agir no sentido de modificar a velocidade de fótons.

A partir de agora vamos considerar a existência de uma outra estrela com massa maior que M, em que seja válida a seguinte relação

$$\alpha = \frac{M'}{M}, \tag{2.8}$$

em que M' é a massa dessa segunda estrela. Tem-se, logicamente, que $\alpha > 1$. Isolando M' na equação anterior e calculando a expressão (2.7) para essa segunda estrela, obtém-se

$$v'^2 = \frac{2G\alpha M}{r'} + c^2 - \frac{2G\alpha M}{R'}. \tag{2.9}$$

Considerando que o fóton escapa para o infinito, ou seja, que $r' \to \infty$, chega-se a

$$v'^2 = c^2 - \frac{2G\alpha M}{R'}. \tag{2.10}$$

Além disso, supondo que a força de interação gravitacional seja tão forte que $v' \to 0$ quando $r' \to \infty$, obtém-se da última expressão que

$$c^2 = \frac{2G\alpha M}{R'}. \tag{2.11}$$

Ao isolarmos R' na expressão anterior, encontramos uma equação análoga à que descreve o Raio de Schwarzschild, que é a superfície de não-retorno de um buraco negro. Portanto, resta agora determinar o valor da constante α. Para esta tarefa, tem-se que considerar os dois corpos como sendo esféricos e tendo densidades uniformes. Disso resulta que

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \tag{2.12}$$

$$\rho' = \frac{3M'}{4\pi R'^3}. \tag{2.13}$$

Tomando a razão entre os termos da equação (2.12) pelos termos de (2.13), obtém-se

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho R^3}{\rho' R'^3}. \tag{2.14}$$

Agora vamos supor que $R' = 250R$, ou seja, que o raio da primeira estrela seja 250 vezes menor que o raio da segunda estrela. Este valor foi escolhido tendo em vista ser o tamanho

mínimo com o qual corpos com densidade igual ou maior a da Terra vão conseguir aprisionar os fótons emitidos em sua superfície. Aplicando a equação (2.8) em conjunto com essa suposição chega-se ao resultado

$$\alpha = 250^3 \frac{\rho'}{\rho}. \tag{2.15}$$

Substituindo esta expressão e o valor de R' na equação (2.11), tem-se o seguinte

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{c^2 R}{2(250)^2 GM}. \tag{2.16}$$

Deve-se considerar para a determinação da densidade relativa descrita acima algum corpo celeste cujos resultados observacionais das medidas de aberração da luz sejam conhecidos. Este efeito está relacionado à posição aparente do Sol em relação à Terra, e é devido ao movimento relativo entre esses corpos, fazendo com que um observador no planeta verifique a posição dessa estrela ligeiramente deslocada. Portanto, o Sol foi escolhido para esta análise. Assim, considerando um movimento circular da Terra em torno do Sol, tem-se

$$\frac{GM_{Sol}M_{Ter}}{D^2} = \frac{M_{Ter}V^2}{D}, \tag{2.17}$$

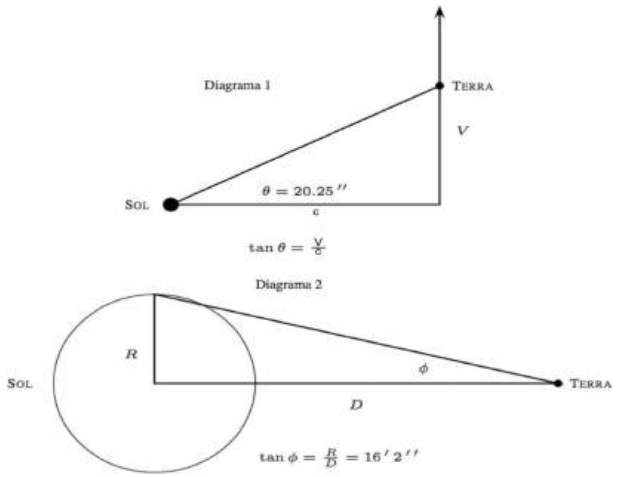
em que igualamos a força de atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra, expressa do lado esquerdo, com a força centrípeta associada a este movimento de rotação. Nessa equação, M_{Sol} e M_{Ter} são as massas do Sol e da Terra, respectivamente. Tem-se também que o lado direito representa a força centrípeta da Terra em relação ao Sol, com V sendo a velocidade tangencial do movimento e D é a distância média entre esses dois corpos. Isolando a massa do Sol na última equação, observa-se que

$$M_{Sol} = \frac{V^2 D}{G}. \tag{2.18}$$

Substituindo esse valor na equação (2.16) e tendo em vista os diagramas da figura 2.1, chega-se ao resultado à seguir

$$\frac{\rho'}{\rho_{Sol}} = \frac{8}{1000^2}\left(\frac{c}{V}\right)^2\left(\frac{R_{Sol}}{D}\right). \tag{2.19}$$

Figura 2.1 – Diagramas referentes ao movimento da Terra ao redor do Sol



Fonte: Retirado de (8).

Usando as informações constantes nos diagramas acima, e tendo em vista os valores observacionais da época, chega-se às seguintes razões

$$\frac{c}{V} = \frac{1}{\tan(20,25'')}, \tag{2.20}$$

$$\frac{R_{Sol}}{D} = \tan(16'2''), \tag{2.21}$$

as quais, quando utilizadas em (2.19), nos informam que a densidade da estrela escura relativa ao Sol é

$$\frac{\rho'}{\rho_{Sol}} \approx 4. \tag{2.22}$$

Sendo assim, conclui-se que se um objeto celeste tivesse o quádruplo da densidade que o sol tem, o que corresponde a $4 \times 1,41 g/cm^3 = 5,6 g/cm^3$ e raio 250 vezes maior, $250 \times 696.342 Km \approx 1,7 \times 10^8 Km$, tem-se que este objeto teria uma força de atração gravitacional tão forte que aprisionaria em seu interior toda luz emitida em sua superfície. Essa densidade encontrada é muito próxima à densidade da Terra, o que permite inferir que a existência de tais

corpos na natureza é de fato possível.

Dito isto, destaca-se a importância histórica que este trabalho tem para a ciência e em específico para o campo da astronomia, visto que essa é a primeira menção ao que hoje conhecemos por Buraco Negro. Ressalta-se também que o trabalho realizado pelo reverendo negro John Michel inicialmente foi alvo de críticas e desacreditado por grande parte da comunidade acadêmica de seu tempo. Somente após o advento da Teoria da Relatividade Geral e com o conceito de Buraco negro decorrente dela já consolidado foi que os cálculos pioneiros de Michel ganharam notoriedade.

3 O FORMALISMO TENSORIAL

Antes de iniciar a análise dos buracos negros, faz-se necessário introduzir todo o ferramental matemático utilizados na TRG (9). Foi visto que o simples entendimento de cálculo com quantidades escalares e vetoriais foi suficiente para compreender as estrelas negras, que decorrem da gravitação newtoniana. Contudo, somente esses conceitos não são capazes de descrever a Teoria Einsteiniana, visto que nela temos que entender espaços curvos quadridimensionais e suas relações com os sistemas de coordenadas que os descrevem (9).

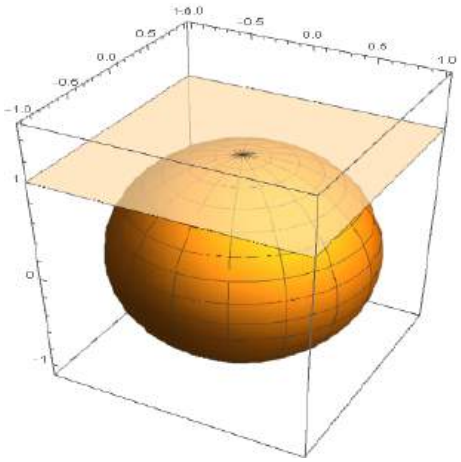
Existem duas abordagens para o aprendizado do formalismo tensorial. A primeira é abstrata e garante maior significado geométrico para as quantidades trabalhadas. Nesse caso dispensa-se o uso de índices para descrever os tensores. Na segunda abordagem, a qual será adotada neste trabalho, embora o significado geométrico não seja tão profundo, tem-se que os cálculos se mostram bem mais práticos. Nessa visão, a utilização de índices nas fórmulas se mostra de suma importância, pois de outro modo as equações seriam tão grandes que se tornariam inviáveis (10).

Portanto, define-se o conceito de Variedade de dimensão N como sendo um objeto geométrico caracterizado por um conjunto de pontos, os quais por sua vez são caracterizados por N coordenadas $(x^1, x^2, ..., x^N)$, em que os números sobrescritos representam índices, não expoentes. Desse modo, é necessário que cada ponto seja descrito por somente um conjunto de coordenadas, caso contrário tem-se um sistema de coordenadas degenerado. Além disso, outra condição para que um objeto geométrico seja uma Variedade é que sua geometria local seja plana, ou seja, se reduza à geometria euclidiana nas proximidades de um ponto.

Como exemplo, considere uma superfície esférica que está incluída em um espaço tridimensional euclidiano plano. A partir de um sistema de coordenadas que se inicia no centro da esfera tem-se que somente dois ângulos (θ, ϕ) são necessários para caracterizar um ponto sobre a superfície. Portanto, tem-se uma variedade de duas dimensões. Analisando um ponto P na superfície dessa esfera e seus pontos vizinhos, observa-se que quanto mais próximo de P, mais a distância entre esses pontos sobre a superfície tende a uma reta. Como exemplo, a figura abaixo ilustra uma situação em que temos uma esfera de raio 1, e um plano definido pela equação $z = 1$ no $\mathbb{R}^3$, o qual é tangente à esfera no ponto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Quanto mais próxima deste ponto, a distância infinitesimal ds tende à forma euclidiana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{3.1}$$

Figura 3.1 – Esfera unitária com um ponto de tangência ao plano z=1



Generalizando o pensamento acima, a esfera n-dimensional é definida como o conjunto de todos os pontos a uma distância fixa da origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. A esfera de dimensão 1 é o círculo S^1, enquanto a esfera de dimensão 2 foi o exemplo anterior. A esfera de dimensão zero S^0 consiste em dois pontos equidistantes do ponto central. Dizemos que S^0 é uma variedade desconectada de dimensão zero. Vale ressaltar que a definição de S^n em termos de sua incorporação em $\mathbb{R}^{n+1}$ é simplesmente um atalho conveniente para a compreensão de sua geometria; todas as variedades que discutiremos podem ser definidas por si mesmas, sem recorrer a espaços planos de dimensão superior.

De fato, todas as informações referentes à geometria da variedade estão inseridas na expressão para ds^2, que costuma ser função das coordenadas e seus diferenciais. Na geometria riemanniana, essa expressão tem a seguinte forma

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \tag{3.2}$$

Nessa equação, faz-se o uso da convenção da soma, em que quando existe a repetição de índices sobrescritos e subscritos, assume-se que há uma soma implícita de 1 até N na equação. Os coeficientes métricos g_{ab} darão as características da geometria em análise, e assim a métrica riemanniana é uma função das coordenadas utilizadas para mapear a variedade que associa um produto interno sobre o espaço tangente em cada ponto dessa variedade de Riemann, que varia continuamente (ou suavemente) de ponto a ponto.

De fato, a partir da análise da equação (3.1) observa-se que o elemento de linha ds^2 se torna euclidiano quando os coeficientes métricos de índices iguais assumem valor 1 e todos os

outros coeficientes são nulos, $g_{aa} = 1$ e $g_{ab} = 0$, onde $a \neq b$. Portanto, generalizando o pensamento exposto, na vizinhança de qualquer ponto P na variedade sempre é possível encontrar coordenadas na qual o elemento de linha se torna

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^N)^2, \tag{3.3}$$

em que o número sobrescrito fora dos parênteses são de fato expoentes, ao contrário dos índices internos. Dito isto, pode-se também utilizar esta métrica para construir o espaço tangente à variedade em um certo ponto P. Por exemplo, em uma superfície esférica, que é uma variedade bidimensional, na qual trabalhou-se anteriormente, o espaço tangente será representado por um plano, que apresenta somente o ponto P em comum com S^2. Assim, a partir dos conceitos referentes à álgebra linear, podemos tomar dois vetores linearmente independentes contidos nesse plano e a partir deles construir uma base para este espaço tangente e, desse modo, qualquer vetor **v** associado ao ponto P, é descrito por uma combinação linear dos vetores de base do espaço tangente a P, de forma que se tenha

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2, \tag{3.4}$$

em que as quantidades v^a, com os índices $a = 1, 2$, são chamadas de componentes contravariantes do vetor **v** na base $\mathbf{e}_a$.

De modo análogo, o espaço tangente possui a propriedade de ser construído a partir de um segundo conjunto de vetores, os quais serão denotados por $\mathbf{e}^a = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$. De tal forma que, seguindo o exemplo da superfície esférica, um vetor **v** no ponto P também pode ser denotado por

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2, \tag{3.5}$$

em que $v_a = v_1, v_2$ são os componentes covariantes de **v**. A regra que relaciona os dois conjuntos de vetores é a seguinte

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}^b = \delta_a^b, \tag{3.6}$$

em que temos o delta de Kronecker, denotado como $\delta(a,b) = \delta_a^b$, que é uma função binária que assume o valor 1 quando a e b são iguais e 0 caso contrário. De fato, esse segundo conjunto de vetores também forma uma base.

Tendo-se introduzido estes dois tipos de vetores, pode-se escrever os coeficientes da

métrica g_{ab} em termos do produto interno entre os vetores de base, de modo que

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{ab}. \tag{3.7}$$

Analisando essa expressão em conjunto com a equação (3.2), podemos inferir uma relação similar $\mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b = g^{ab}$. Mais do que isto, os componentes e os vetores de base co e contravariantes também se transformam em função da métrica, de tal forma que as equações a seguir são válidas e extremamente úteis

$$g_{ab} v^b = v_a, \tag{3.8}$$

$$g^{ab} v_b = v^a, \tag{3.9}$$

$$g_{ab} \mathbf{e}^b = \mathbf{e}_a, \tag{3.10}$$

$$g^{ab} \mathbf{e}_b = \mathbf{e}^a, \tag{3.11}$$

em que essas relações podem ser demonstradas usando o produto interno entre dois vetores quaisquer **v** e **u**.

A distinção entre as quantidades covariantes e contravariantes também pode ser explicada em termos da forma como essas quantidades são alteradas quando muda-se o sistema de coordenadas usado para mapear a variedade, de acordo com as seguintes equações usadas para alterar as quantidades do sistema $(x^1, x^2, ..., x^N)$ para o novo sistema $(x'^1, x'^2, ..., x'^N)$

$$v'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} v^b, \tag{3.12}$$

$$v'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} v_b, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{e}'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{e}^b. \tag{3.15}$$

Isto nos indica que, as quantidades contravariantes se modificam tomando a derivada das novas coordenadas em relação as coordenadas antigas, enquanto que as quantidades covariantes mudam a partir de um processo oposto.

Quando analisa-se as derivadas dos vetores de base, algumas sutilezas nos cálculos são necessárias. Visto que dois pontos próximos P e Q de coordenadas x^a e $x^a + \delta x^a$ possuem

espaços tangentes distintos, a taxa de variação dos vetores não será igual ao resultado em espaços euclidianos planos. Em vez disso, faz-se uma projeção do vetor resultante no espaço tangente ao ponto P, de modo que

$$\frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^c} = \Gamma^b_{ac}\mathbf{e}_b. \tag{3.16}$$

Assim, observa-se que esta derivada é tomada como a soma de quantidades proporcionais ao produto dos demais vetores de base. Os coeficientes Γ^b_{ac} são chamados de conexão afim e, como veremos a seguir, podem ser escritos em função dos coeficientes métricos. Para esta tarefa, deve-se primeiro supor que a conexão é simétrica em seus dois índices covariantes[1], ou seja

$$\Gamma^b_{ac} = \Gamma^b_{ca}. \tag{3.17}$$

A partir deste resultado, utiliza-se a equação (3.7) e a derivada em relação às coordenadas x^c, o que vai gerar o seguinte

$$\partial_c g_{ab} = (\partial_c \mathbf{e}_a)\cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \cdot (\partial_c \mathbf{e}_b). \tag{3.18}$$

Em que ∂_c é uma maneira abreviada de escrever a derivada em relação ao sistema de coordenadas x^c, isto é, $\partial_c = \partial/\partial x^c$. Com o uso da equação (3.16), imediatamente tem-se que

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad}. \tag{3.19}$$

Dessa forma, fazendo duas permutações cíclicas nestes índices e combinando-os, chega-se finalmente na seguinte expressão para os termos da conexão

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \tag{3.20}$$

Dada a forma da equação acima, os termos Γ^a_{bc} podem ser chamados também de conexão métrica. Como estes coeficientes são escritos em função das derivadas da métrica, pode-se inferir que em espaços euclidianos, em que $g_{aa} = 1$ e $g_{ab} = 0$ com $a \neq b$, a conexão métrica é nula.

Da mesma forma que a derivada dos vetores de base deu origem aos termos da conexão

[1] No contexto de variedades riemannianas isso nem sempre é verdade, mas no contexto da Relatividade Geral temos que essa suposição é válida para os nossos propósitos. O caso mais geral da origem a um tensor de torção, que é descrito em termos da diferença entre os dois lados da equação (3.17).

métrica, quando se toma a derivação de um vetor $\mathbf{v} = v^a e_a$ em relação às coordenadas x^c tem-se que

$$\partial_c \mathbf{v} = (\partial_c v^a)\mathbf{e}_a + v^a(\partial_c \mathbf{e}_a), \tag{3.21}$$

quando aplicada a equação (3.16) para modificar o último termo do lado direito, tem-se que

$$\partial_c \mathbf{v} = (\partial_c v^a)\mathbf{e}_a + v^a \Gamma^b_{ac}\mathbf{e}_b. \tag{3.22}$$

Alterando o índice de a para b presente no primeiro termo do lado direito desta última equação, chega-se a

$$\partial_c \mathbf{v} = (\partial_c v^b + v^a \Gamma^b_{ac})\mathbf{e}_b. \tag{3.23}$$

Agora se define a derivada covariante dos componentes vetoriais contravariantes como sendo o termo que se encontra entre parênteses na equação anterior, de modo que

$$\nabla_c v^b = \partial_c v^b + v^a \Gamma^b_{ac}. \tag{3.24}$$

Novamente, observa-se que em espaços euclidianos, os termos da conexão métrica somem e a derivada covariante se reduz à derivada parcial de um vetor, o que permite inferir que é um conceito mais amplo que abarca as características de espaços curvos mais complexos. De modo análogo, sabe-se que um vetor presente na variedade pode também ser escrito em termos de seus vetores de base contravariantes, de modo que sua derivada irá gerar

$$\partial_c \mathbf{v} = (\partial_c v_a)\mathbf{e}^a + v_a(\partial_c \mathbf{e}^a). \tag{3.25}$$

Agora, buscaremos uma forma de escrever o termo $\partial_c \mathbf{e}^a$ como função da conexão afim. Para isto, toma-se a equação (3.16) e faz-se uma contração da mesma por $\mathbf{e}^d$, e tendo em vista (3.6), tem-se que

$$\mathbf{e}^d \cdot \partial_c \mathbf{e}_a = \Gamma^d_{ac}. \tag{3.26}$$

Portanto, ao se derivar a equação (3.6) em relação a x^c, tem-se que

$$\partial_c(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}^b) = (\partial_c \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{e}^b + \mathbf{e}_a \cdot \partial_c \mathbf{e}^b,$$

$$\partial_c(\delta^b_a) = (\partial_c \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{e}^b + \mathbf{e}_a \cdot \partial_c \mathbf{e}^b$$

$$\mathbf{e}_a \cdot \partial_c \mathbf{e}^b = -(\partial_c \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{e}^b.$$

Usando a equação (3.16), tem-se

$$\mathbf{e}_a \cdot \partial_c \mathbf{e}^b = -(\Gamma^d_{ac} \mathbf{e}_d) \cdot \mathbf{e}^b$$

$$\mathbf{e}^d \cdot \mathbf{e}_a \partial_c \mathbf{e}^b = -\Gamma^b_{ac} \mathbf{e}^d,$$

$$\delta^d_a \partial_c \mathbf{e}^b = -\Gamma^b_{ac} \mathbf{e}^d.$$

Portanto, se tomarmos $b = a$ e $a = d$ na expressão acima, e substituindo em (3.25), tem-se que

$$\partial_c \mathbf{v} = (\partial_c v_a)\mathbf{e}^a - v_a \Gamma^a_{dc} \mathbf{e}^d. \tag{3.27}$$

Isso nos permite escrever a derivada covariante desses componentes vetoriais da seguinte maneira

$$\nabla_c v_a = \partial_c v_a - v_d \Gamma^d_{ac}. \tag{3.28}$$

Dessa forma, em variedades curvas de várias dimensões, deve-se considerar os coeficientes da conexão afim para o cálculo da taxa de variação de um vetor ao longo de uma trajetória qualquer R através da variedade. Como demonstrado acima, isso pode ser feito de duas maneiras, com o uso das derivadas covariantes.

Vamos agora continuar esta abordagem introduzindo a noção de tensores. Estes são entidades geométricas introduzidas na geometria diferencial para a generalização da noção de escalares, vetores e matrizes. Assim como essas entidades, um tensor é uma forma de representação associada a um conjunto de operações, como a soma e o produto. De fato, todas as ideias trabalhadas até aqui com vetores podem ser discutidas através de uma abordagem com tensores, visto que vetores e escalares também são tensores.

A ordem de um tensor representa a quantidade de vetores usados para construí-lo. Por exemplo, para um tensor de segunda ordem, temos

$$\mathbf{t} = (t^a \mathbf{e}_a) \otimes (t^b \mathbf{e}_b), \tag{3.29}$$

$$\mathbf{t} = t^a t^b (\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b),$$

$$\mathbf{t} = t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b). \tag{3.30}$$

Nessa equação, $\otimes$ representa o produto tensorial entre estes vetores, e t^{ab} são os componentes contravariantes do tensor **t** nas bases $(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$. Portanto, um tensor de ordem n pode ser construído usando o conjunto de vetores de base $(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, ..., \mathbf{e}_n)$, da seguinte maneira

$$\mathbf{t} = t^{ab...n}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b \otimes ... \otimes \mathbf{e}_n). \tag{3.31}$$

Nesse exemplo, usamos somente vetores com componentes contravariantes, mas isso não quer dizer que não possamos escrever um tensor usando um outro conjunto de vetores. De fato, isso daria origem a um tensor misto $n \times m$ que é escrito da seguinte forma

$$\mathbf{t} = (u^{a_1}\mathbf{e}_{a_1}) \otimes ... \otimes (u^{a_n}\mathbf{e}_{a_n}) \otimes (v_{b_1}\mathbf{e}^{b_1}) \otimes ... \otimes (v_{b_m}\mathbf{e}^{b_m}), \tag{3.32}$$

$$\mathbf{t} = (u^{a_1}...u^{a_n}v_{b_1}...v_{b_m})(\mathbf{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{a_n} \otimes \mathbf{e}^{b_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{b_m}), \tag{3.33}$$

$$\mathbf{t} = t^{a_1...a_n}{}_{b_1...b_m}(\mathbf{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{a_n} \otimes \mathbf{e}^{b_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{b_m}). \tag{3.34}$$

Dada a forma encontrada na equação anterior, podemos denotar um tensor de ordem $n \times m$ pelas suas componentes em um dado conjunto de vetores de base, e iremos fazer isso adiante neste tópico.

A simetria de tensores é analisada de acordo com o sinal apresentado quando fazemos uma permutação de quaisquer dois índices deste, de modo que se tivermos

$$t_{ab} = t_{ba}, \tag{3.35}$$

o tensor **t** é simétrico. No caso em que

$$t_{ab} = -t_{ba}, \tag{3.36}$$

temos um tensor antisimétrico nos índices a e b.

Continuando esta análise, veremos agora como um tensor muda de acordo com uma mudança de coordenadas de x^a para x'^a. Como os tensores são entidades associadas à geometria da veriedade em si, estes não irão depender da escolha das coordenadas usadas para mapear a variedade, de modo que, usando como exemplo um tensor de segunda ordem do tipo

0×2, teremos que

$$t_{ab}\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b = t'_{ab}\mathbf{e}'^a \otimes \mathbf{e}'^b, \tag{3.37}$$

em que as quantidades com a linha sobrescrita estão escritas no sistema x'^a e as que estão sem a linha estão no sistema x^a. Usando a equação (3.15) para reescrever os dois vetores de base do lado direito desta última equação, temos

$$t_{ab}\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b = t'_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\mathbf{e}^c \otimes \frac{\partial x'^b}{\partial x^d}\mathbf{e}^d, \tag{3.38}$$

$$t_{ab}\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}t'_{ab}\mathbf{e}^c \otimes \mathbf{e}^d. \tag{3.39}$$

Isso nos permite inferir que a regra que os tensores devem obedecer quando mudam de um sistema de coordenadas para outro será

$$t_{cd} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}t'_{ab}. \tag{3.40}$$

Usando um procedimento análogo, vamos chegar ao resultado seguinte para um tensor contravariante de segunda ordem

$$t^{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^c}\frac{\partial x^b}{\partial x'^d}t'^{cd}. \tag{3.41}$$

De fato, estes dois últimos resultados encontrados podem ser usado para se obter a generalização desta regra. Isso irá descrever que um tensor misto de ordem $n \times m$ se transforma conforme a regra

$$t^{a_1 \ldots a_n}{}_{b_1 \ldots b_m} = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x'^{c_1}} \cdots \frac{\partial x^{a_n}}{\partial x'^{c_n}}\frac{\partial x'^{d_1}}{\partial x^{b_1}} \cdots \frac{\partial x'^{d_m}}{\partial x^{b_m}} t'^{c_1 \ldots c_n}{}_{d_1 \ldots d_m}. \tag{3.42}$$

Portanto, concluímos que para denotar uma quantidade geométrica de tensor, é necessário que esta obedeça a lei de transformação obtida acima. Notamos também deste último resultado que se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas, certamente será nulo em todos os demais sistemas.

A métrica é um tensor de segunda ordem. Para verificar essa afirmação, partimos da equação (3.7) e substituímos os vetores de base usando (3.14). Dessa forma tem-se

$$g_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\frac{\partial x'^d}{\partial x^b}g'_{cd}, \tag{3.43}$$

em que reconhecemos o produto $\mathbf{e}'_c \cdot \mathbf{e}'_d = g'_{cd}$. Entretanto, a conexão métrica Γ^a_{bc}, mesmo

que escrita em termos dos coeficientes métricos, não é um tensor pois não assume a forma deduzida em (3.42).

3.1 Equações de Euler-Lagrange

Vamos agora introduzir um procedimento que vai nos gerar uma forma de obter as equações de movimento para as partículas sob a ação de um campo gravitacional. Para esta tarefa, vamos usar o conceito de ação S na física, que assume uma forma de uma função escrita em termos das coordenadas x^a, sua derivada $\dot{x}^a$ e também em termos do parâmetro que descreve a curva u, de modo que

$$S = \int_{u_i}^{u_f} L(x^a, \dot{x}^a, u) du, \tag{3.44}$$

em que L é chamado de lagrangeano. Portanto, dentre as diversas soluções possíveis para S, vamos encontrar aquela que extremiza o valor de L. Além disso, para encontrar esta função, vamos fazer a seguinte restrição a respeito das condições de contorno para este problema

$$\delta x^a(u_{i,f}) = \delta \dot{x}^a(u_{i,f}) = 0, \tag{3.45}$$

em que os índices i e f estão relacionados às posições inicial e final da trajetória, respectivamente. Sendo assim, tomamos uma variação nula do funcional S, tal que

$$\delta S = \int_{u_i}^{u_f} \delta L du = \int_{u_i}^{u_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) du = 0. \tag{3.46}$$

Pode-se reescrever o termo entre parênteses nessa última equação tendo em vista o resultado seguinte

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \delta x^a \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a + \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \delta x^a. \tag{3.47}$$

Isolando o primeiro termo do lado direito e substituindo o resultado em (3.46), teremos

$$\delta S = \int_{u_i}^{u_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x^a} \delta x^a - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \delta x^a \right) du - \int_{u_i}^{u_f} \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \delta x^a \right) du, \tag{3.48}$$

usando a condição de contorno (3.45), temos que a integral do último termo do lado direito é nula. Já para a outra integral, devemos pôr em evidência o termo comum δx^a e também usar o seguinte teorema:

Se $\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)\eta(x)dx = 0$, em que $\phi(x)$ é contínua e $\eta(x)$ é uma função de classe C^2, ou maior, que é nula em seus pontos de fronteira, então $\phi(x) = 0$.

Dessa forma segue-se a seguinte equação de extrema importância para a mecânica clássica

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = 0. \tag{3.49}$$

Estas equações são denominadas equações de Euler-Lagrange e a partir delas obtemos as equações de movimento para o sistema. Para definir o lagrangeano, devemos ter em mente que este é escrito em termos da diferença entre a energia cinética e a potencial. Entretanto, se considerarmos partículas que estão se movendo somente sob ação da gravidade, o termo de energia potencial é nulo, e daí teremos somente o termo de energia cinética

$$L = m g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b, \tag{3.50}$$

no qual m representa a massa da partícula e desprezamos o termo constante $1/2$. Assim, substituindo isto em (3.49), encontramos o seguinte

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a{}_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \tag{3.51}$$

Essas equações são conhecidas como equações geodésicas e, de acordo com a teoria quadridimensional apresentada, esta relação dá origem à quatro equações que descreverão o movimento de partículas neste sistema. Os fótons, sendo partículas de luz, não possuem massa e, portanto, não têm energia cinética no sentido tradicional que se aplica a objetos com massa. No entanto, eles carregam energia na forma de radiação eletromagnética. Portanto, podemos aplicar a equação (3.50) para fótons desprezando o termo m e o resultado também será (3.51).

A partir desta análise, é possível obter uma importante quantidade na descrição do movimento geodésico de partículas. De fato, se a métrica g_{ab} não depender de uma determinada coordenada x^d, decorre da equação (3.49) o resultado seguinte

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^d} = g_{db} \dot{x}^b = K, \tag{3.52}$$

em que K é constante. Desse modo, usando a relação (3.8) e definindo $t^a = \dot{x}^a$, teremos que

$$t_d = K. \tag{3.53}$$

Ou seja, os coeficientes covariantes do tensor t são constantes durante todo o deslocamento

da partícula. Iremos usar isto mais adiante, quando estivermos estudando o movimento radial e circular de partículas sujeitas a ação do campo gravitacional de objetos compactos, como os buracos negros.

O formalismo lagrangeano tem uma vantagem de permitir uma descrição covariante da dinâmica relativística, que é a teoria da interação da matéria com o campo gravitacional. Nessa descrição, a ação é função das coordenadas e suas derivadas em relação ao parâmetro afim, em que este é um parâmetro que mede o comprimento ao longo da trajetória de uma partícula. Portanto, as equações de movimento das partículas podem ser obtidas a partir da ação usando as equações de Euler-Lagrange.

4 BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

A partir da problemática de resolver as equações de Einstein para a descrição de objetos astro-físicos, tem-se que o astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild foi o primeiro a apresentar uma solução exata para este problema. Para isso, este cientista teve que trabalhar considerando algumas restrições acerca da geometria da variedade a ser estudada. Entretanto, os resultados encontrados quando analisa-se a métrica desta geometria já servem como bons parâmetros para o entendimento de buracos negros. Dessa forma, vamos agora apresentar o caminho percorrido para a descrição da geometria de Schwarzschild, que descreve a região exterior a uma distribuição esfericamente simétrica de massa (9).

Vamos considerar uma variedade quadri-dimensional constituída por uma coordenada tipo tempo x^0 e três coordenadas espaciais (x^1, x^2, x^3). Além disso, também faremos a suposição de que a métrica g_{ab} é estacionária, ou seja, não depende de x^0 e que o elemento de linha ds^2 permanece invariante quando $x^0 \to -x^0$. Estas duas restrições anteriores permitem inferir que estamos trabalhando com uma métrica estática. Além disso, faremos a restrição adicional de que estamos lidando com um espaço-tempo que é isotrópico. Isso significa que as propriedades físicas desse espaço-tempo são as mesmas em todas as direções, não havendo direção preferencial neste espaço-tempo. Assim, seus coeficientes métricos dependem somente dos invariantes rotacionais, que são quantidades na física que permanecem constantes sob transformações de rotação, quais sejam

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \tag{4.1}$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \tag{4.2}$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x}. \tag{4.3}$$

A partir disso, deve-se calcular, portanto, o elemento de linha ds^2 com o uso de coordenadas esféricas polares (t, r, θ, ϕ), em que estas se relacionam com as coordenadas cartesianas (x^0, x^1, x^2, x^3) de acordo com a seguinte lei de transformação

$$x^1 = r \sin\theta \cos\phi, \tag{4.4}$$

$$x^2 = r \sin\theta \sin\phi, \tag{4.5}$$

$$x^3 = r \cos\theta. \tag{4.6}$$

Aplicando isto e fazendo algumas mudanças de variáveis, chega-se à seguinte forma para o elemento de linha

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{4.7}$$

Assim, a fim de encontrar as funções $A(r)$ e $B(r)$, busca-se encontrar primariamente os coeficientes advindos da Equação de Einstein, a qual escreve-se por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Nessa equação, temos no lado esquerdo um tensor de segunda ordem, $R_{\mu\nu}$, que é conhecido como tensor de Ricci, e o escalar de Ricci R. Essas quantidades estão relacionadas à curvatura da geometria em questão. O tensor de Ricci é obtido a partir de um traço do tensor de curvatura, ou seja, é uma contração dos índices do tensor de Riemam $R^d{}_{abc}$. Pode-se escrever o tensor de Ricci em termos dos coeficientes da conexão métrica da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}. \tag{4.9}$$

O escalar de Ricci também é uma quantidade que descreve a curvatura de um espaço-tempo em relatividade geral. Matematicamente, é um escalar obtido pela contração do tensor de Ricci, de modo que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Já no lado direito de (4.8), temos o produto entre κ, que é a constante de acoplamento definida em termos de G e c, com o tensor de momento e energia. Esta quantidade tensorial de energia-momento é uma entidade matemática que descreve como a energia e o momento se distribuem no espaço-tempo. Como o elemento de linha (4.7) descreve a geometria externa à distribuição esfericamente simétrica de massa, teremos que $T_{\mu\nu}$ será nulo. Como consequência direta disto, teremos que $R_{\mu\nu}$ também será nulo. Portanto, reconhecendo os seguintes coeficientes métricos

$$g_{00} = A(r), \tag{4.10}$$

$$g_{11} = -B(r), \tag{4.11}$$

$$g_{22} = -r^2, \tag{4.12}$$

$$g_{33} = -r^2\sin^2\theta, \tag{4.13}$$

aplicando os mesmos em (3.20), e sucessivamente usando os resultados encontrados em (4.9), acharemos as seguintes expressões

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB}, \tag{4.14}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB}, \tag{4.15}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right), \tag{4.16}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta. \tag{4.17}$$

Para determinar as funções $A(r)$ e $B(r)$, igualamos todas as equações a zero, gerando três equações distintas, tendo em vista que a equação (4.17) é múltipla de (4.16). Resolvendo estas e também aplicando o conceito de limite de campo fraco, em que para objetos de massa pequena e distâncias maiores, a métrica de Schwarzschild se reduz à lei de gravitação de Newton. Chega-se ao resultado de que a geometria de Schwarzschild é descrita pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{4.18}$$

Nessa equação, os últimos dois termos do lado direito descrevem a geometria de uma superfície esférica e dessa forma estão relacionados à simetria com relação às coordenadas angulares. De fato, pode-se escrevê-los por

$$d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2). \tag{4.19}$$

Assim, é possível reescrever (4.18), de maneira simplificada, de modo que tenhamos

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - d\Omega^2. \tag{4.20}$$

Note que a equação acima é singular somente em dois valores da coordenada radial. Assim, quando $r \to 2GM/c^2$ temos que $g_{tt} \to 0$ e $g_{rr} \to -\infty$. Inversamente, para $r \to 0$ temos que $g_{tt} \to -\infty$ e $g_{rr} \to 0$. Entretanto, dentre estes valores de r, apenas $r = 0$ é uma singularidade intrínseca, ou seja, representa uma região de curvatura infinita, pois o cálculo da curvatura

escalar $R^{\mu\nu\tau\psi}R_{\mu\nu\tau\psi}$ neste ponto tem valor infinito. O outro raio de interesse, $r = 2GM/c^2$, representa uma singularidade de coordenada, que advém de uma escolha de coordenadas com domínio de validade restrito. Dessa forma, é possível remover essa última singularidade com uma mudança de coordenadas adequada. Este valor define o raio de Schwarzschild, o qual é a superfície de não retorno de um buraco negro estático, agindo portanto como um horizonte de eventos. Outras características ligadas a este raio é que este representa uma superfície de infinito desvio para o vermelho e que também nas proximidades destes os efeitos relativísticos acontecem de maneira mais intensa, conforme será estudado no decorrer deste trabalho.

4.1 Geodésicas de fótons em um plano equatorial

Antes de discutir as características intrínsecas associadas à geometria dos buracos negros, vamos analisar o efeito que este elemento de linha acarreta nas trajetórias de fótons. Para isto, vamos utilizar as equações de Euler-Lagrange em conjunto com o Lagrangeano, os quais são dados pelas equações (3.49) e (3.50) sem o termo de massa.

Aplicando os coeficientes da métrica presentes em (4.18) no lagrangeano, temos o resultado a seguir

$$L = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2). \tag{4.21}$$

Substituindo esse resultado em (3.49), iremos deduzir as quatro equações seguintes

$$\frac{d}{du}\left[2c^2\dot{t}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\right] = 0, \tag{4.22}$$

$$\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\ddot{r} + \frac{GM}{r^2}\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-2}\dot{r}^2 - r(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2) = 0, \tag{4.23}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \tag{4.24}$$

$$\frac{d}{du}\left[r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right] = 0. \tag{4.25}$$

Note que as quantidades entre colchetes nas equações (4.22) e (4.25) são constantes relacionadas ao movimento. A fim de diminuir a complexidade das equações anteriores, restringimos a análise de geodésicas considerando-as contidas em um plano equatorial definido por $\theta = \pi/2$. Essa escolha não diminui a generalidade das equações anteriores, visto que estamos considerando corpos com simetria esférica. Dessa forma temos que (4.24) é imediatamente satisfeita

e as 3 equações remanescentes se transformam em

$$\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\dot{t}=k, \tag{4.26}$$

$$\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\ddot{r}+\frac{GM}{r^2}\dot{t}^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-2}\dot{r}^2-r\dot{\phi}^2=0, \tag{4.27}$$

$$r^2\dot{\phi}=h. \tag{4.28}$$

A constante k em (4.26) está relacionada à energia total dos fótons através da equação $E=km_0c^2$, enquanto que h é igual ao momento angular específico da partícula de luz. A equação (4.27), que mesmo com as restrições impostas ainda continua complicada, pode ser substituída pela primeira integral das equações geodésicas, que é dada por

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=\xi, \tag{4.29}$$

em que ξ pode assumir dois valores, quais sejam: c^2 para partículas massivas e 0 para fótons. Também é útil perceber que o parâmetro u que descreve a trajetória não é igual para estes dois tipos de partículas. Para partículas com massa é mais conveniente parametrizar as geodésicas utilizando o tempo próprio, τ. Para fótons outro parâmetro precisa ser utilizado, uma vez que a sua trajetória é uma curva nula (em que $ds=d\tau=0$). Neste trabalho vamos focar em compreender o movimento de fótons.

Introduzindo os coeficientes métricos na última equação, com $\theta=\pi/2$, encontramos

$$c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2=\xi. \tag{4.30}$$

Dessa forma, obtemos duas equações para a energia em função da coordenada r. Para fótons, substitui-se ξ por 0 e também usamos as equações (4.26) e (4.28) nesta última expressão, obtendo portanto o resultado seguinte

$$k^2c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\dot{r}^2=\frac{h^2}{r^2}. \tag{4.31}$$

Multiplicando ambos os lados por $1-2GM/c^2r$ e reorganizando, temos

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = c^2 k^2. \tag{4.32}$$

Com essa equação será possível abordar o movimento radial e circular destes tipos de partículas.

4.1.1 Movimento radial de fótons

Para analisar um fóton em movimento radial, utiliza-se a equação (4.30), com $\xi = \dot{\phi} = 0$. Temos

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{t}}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2. \tag{4.33}$$

Extraindo a raiz em ambos os lados e usando o fato de que $\dot{r}/\dot{t} = dr/dt$, segue-se

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(c - \frac{2GM}{cr}\right), \tag{4.34}$$

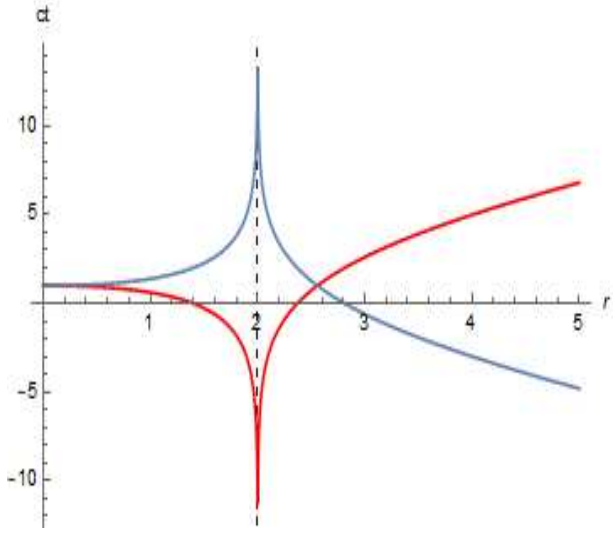
em que o sinal positivo é usado para um fóton se afastando radialmente e o negativo para o caso oposto. Integrando este último resultado, obtemos

$$ct = r + \frac{2GM}{c^2}\ln\left|\frac{rc^2}{2GM} - 1\right| + a, \tag{4.35}$$

$$ct = -r - \frac{2GM}{c^2}\ln\left|\frac{rc^2}{2GM} - 1\right| + a, \tag{4.36}$$

em que a é constante. Note que nestas equações quando $r \to 2GM/c^2$, temos $ct \to \pm\infty$. Portanto, fótons emitidos radialmente próximo do horizonte de eventos tomam um tempo infinito para serem percebidos por observadores distantes. A figura abaixo ilustra os gráficos de (4.35) e (4.36), em que temos a linha azul, a qual representa a trajetória radial de um fóton que se aproxima do buraco negro, e a linha vermelha, a qual representa o caso oposto em que o fóton se afasta, respectivamente. Em que consideramos, por questões de simplicidade, $GM/c^2 = 1$ e $a = 1$.

Figura 4.1 – Trajetória radial de fótons



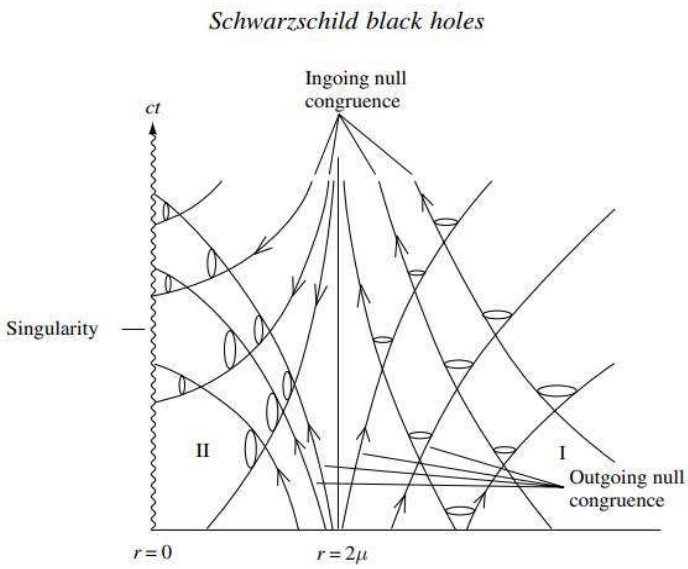
Note que quando $r \to \infty$ o ângulo de inclinação da curva tende a $45°$. Dessa forma, no infinito essas partículas formam o cone de luz no espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, note que quando $r \to 2GM/c^2$, os ângulos de inclinação tendem a $90°$ e $-90°$ para para as trajetórias que estão entrando e saindo do buraco negro, respectivamente. Dessa forma, concluímos que os cones de luz associados à uma partícula fecham-se a medida em que a partícula aproxima-se do horizonte de eventos, limitando o movimento da mesma. Este efeito está sendo ilustrado na figura 4.2, em que temos trajetórias geodésicas e os cones de luz associados.

Embora esteja representado na figura 1, linha azul, que fótons emitidos em direção ao Buraco Negro não conseguem entrar na interior do horizonte de eventos, devemos ter em mente que a coordenada temporal neste caso esta associada ao referencial de um observador distante. De modo que essa assíntota vertical significa que este observador nunca verá a partícula de luz cruzar o horizonte de eventos. A linha vermelha da figura anterior nos informa sobre a dificuldade que existe na visualização de tais objetos, visto que quanto mais próximo do horizonte de eventos a luz for emitida, mais tempo demorará para ser percebida por observadores distantes.

De fato, as trajetórias de fótons definem os cones de luz, estes representam as fronteiras causais no espaço-tempo, indicando quais eventos podem afetar ou ser afetados por outros eventos através de sinais que respeitam a velocidade da luz. Como podemos observar na imagem abaixo, esses cones mudam de orientação em $90°$ no interior do horizonte de eventos. Como a trajetória de partículas massivas devem pertencer ao interior destes cones de luz, concluímos que o horizonte de eventos é a região do espaço-tempo em que toda partícula

presente no seu interior deve chegar à singularidade $r = 0$.

Figura 4.2 – Cones de luz no espaço-tempo de Schwarzschild



Fonte: Retirado de (9)

4.1.2 Movimento circular de fótons

O movimento circular de fótons é abordado a partir de uma equação derivada de (4.32). Note que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}, \tag{4.37}$$

onde na última igualdade se utilizou (4.28) para remover $\dot{\phi}$. Substituindo a equação anterior em (4.32), encontramos

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2k^2 + \frac{2GMh^2}{c^2r^3}. \tag{4.38}$$

Dividindo ambos os lados por h^2 e incorporando $u = 1/r$, o resultado anterior se transforma para

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2k^2}{h^2} + \frac{2GMu^3}{c^2}. \tag{4.39}$$

Derivando ambos os lados em relação à ϕ, temos

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d^2\phi} + 2u\frac{du}{d\phi} = \frac{6GMu^2}{c^2}\frac{du}{d\phi}, \tag{4.40}$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GMu^2}{c^2}. \tag{4.41}$$

Sendo assim, um fóton em movimento circular tem $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, implicando na nulidade do primeiro termo do lado esquerdo. Desse modo teremos a seguinte equação

$$u = \frac{3GMu^2}{c^2}. \tag{4.42}$$

Usando novamente a relação que existe entre r e u, encontramos que fótons só admitem movimento circular na seguinte coordenada radial

$$r = \frac{3GM}{c^2}. \tag{4.43}$$

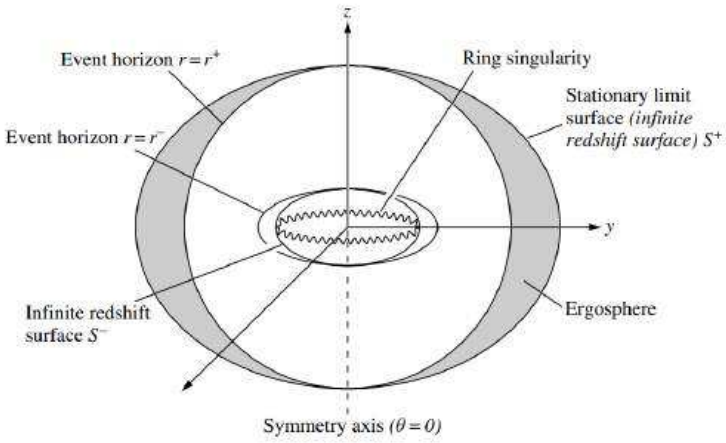
A partir dos cálculos referentes e energia potencial associada a essas trajetórias, é possível demonstrar que tais órbitas serão instáveis (9). Através destes conceitos é possível estudar a forma da sombra que um Buraco Negro apresenta, em que esta é a região escura no céu, vista por um observador distante, onde a luz é capturada pelo objeto compacto. No caso de Schwarzschild, concluímos que um Buraco Negro apresenta sombra circular.

5 BURACOS NEGROS DE KERR

Os buracos negros de Kerr são uma classe fascinante de buracos negros que possuem rotação, diferenciando-se dos buracos negros de Schwarzschild, que são estáticos. A rotação de um buraco negro de Kerr é descrita pelo seu momento angular, e essa característica confere a eles propriedades únicas. Por exemplo, ao redor de um buraco negro de Kerr, existe uma região chamada ergosfera, onde o espaço-tempo é arrastado pela rotação do buraco negro de tal forma que tudo dentro dela é forçado a mover-se na direção da rotação do buraco negro (9).

Essa rotação também afeta a forma como a matéria cai em um buraco negro de Kerr, podendo levar à formação de discos de acreção extremamente eficientes na conversão de massa em energia. Além disso, a rotação permite a extração de energia do buraco negro por meio do processo Penrose, um mecanismo teórico que pode permitir que partículas ganhem energia às custas do momento angular e massa do buraco negro (10). Na figura abaixo temos a representação das características essenciais desses tipos de objetos.

Figura 5.1 – Buraco Negro de Kerr



Fonte: Retirado de (9)

Nessa imagem, S^+ e S^- representam as superfícies de redshift infinito, que é um aumento no comprimento de onda e diminuição da frequência da luz emitida por um objeto em movimento relativo ao observador, ou seja, a luz emitida por objetos próximos a essa superfície sofre um deslocamento extremo para o vermelho, indicando que está se afastando do observador. A superfície r^+ caracteriza a região de não-retorno neste espaço-tempo, onde r^- está contida em seu interior. Portanto, vemos que esse espaço-tempo possui dois horizontes de eventos. Estas superfícies possuem a forma de um elipsóide alongado perpendicularmente ao

eixo de rotação z. A região entre as superfícies r^+ e S^+ é chamada de esgoesfera. Nessa região, devido à rotação do Buraco negro, todas as partículas devem se mover no mesmo sentido de rotação do Buraco Negro. Os resultados mostram que neste caso a singularidade será anelar e estará contida no plano $z = 0$. Esse local na geometria é uma característica fundamental dos buracos negros rotativos, onde a densidade se torna infinita e as leis da natureza colapsam.

5.1 Órbitas esféricas de fótons

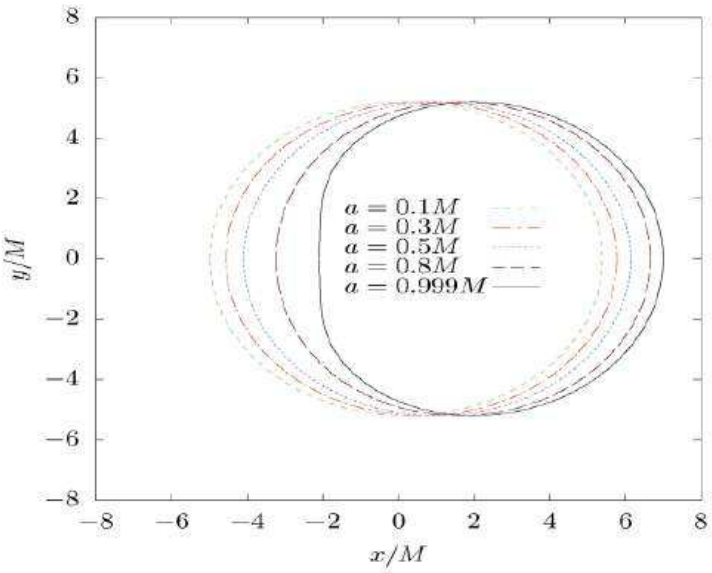
Os buracos negros de Kerr são considerados mais realistas do que os buracos negros de Schwarzschild porque muitos objetos astronômicos, incluindo estrelas e buracos negros, possuem rotação. Portanto, espera-se que a maioria dos buracos negros no universo sejam do tipo Kerr. Nesse sentido, o estudo de geodésicas nulas ou não nulas no espaço-tempo de buracos negros de Kerr se mostra de grande valor científico. É possível obter as equações para estas trajetórias usando a separabilidade da equação de Hamilton-Jacobi e a constante de Carter. Em que a equação permite que, em certos sistemas dinâmicos, as equações de movimento possam ser separadas em equações mais simples que podem ser resolvidas independentemente e a constante surge como consequência dessa separabilidade.

Analisando as geodésicas nulas na geometria de Kerr, podemos mostrar que existem órbitas esféricas de fótons, e o estudo de tais órbitas é crucial para compreender a fenomenologia dos campos gravitacionais de Buracos negros rotativos. As órbitas fundamentais de fótons definem a região de onde a radiação pode ser observada no infinito e influenciam a aparência da sombra de um buraco negro. Fótons próximos a essas órbitas podem ser espalhados em grandes ângulos, resultando em múltiplas imagens desmagnificadas da esfera celeste (11).

5.2 Sombras de Buracos Negros

A sombra de um buraco negro é a região escura vista por um observador em repouso no infinito, onde a luz é capturada pelo buraco negro. Para calcula-la, consideramos os raios de luz que vêm de todas as direções e são capturados pelo horizonte de eventos do buraco negro. A partir do estudo das órbitas esféricas de fótons presentes no espaço-tempo de Buracos Negros Rotativos, é possível obter tais sombras (12). De fato, essas órbitas especiais possuem a característica de ter coordenada radial constante e o conjunto dessas órbitas determina a aparência da sombra do buraco negro. Os resultados mostram que a sombra de um buraco negro de Kerr com baixa rotação é aproximadamente circular. A figura abaixo ilustra estes resultados para parâmetros de rotação variados.

Figura 5.2 – Geodésicas de fótons para diversos parâmetros de rotação



Fonte: Retirado de (12)

Nessa imagem, observamos que a medida que o parâmetro de rotação do buraco negro aumenta, a sombra se torna assimétrica, assemelhando-se ao formato de um “D” quando o parâmetro de rotação a tende ao seu valor extremo igual à M, que é a massa do Buraco Negro.

5.3 Formas de Detecção

Visto que um buraco negro aprisiona tudo que cruza o seu horizonte de eventos, observá-lo claramente se constitui numa tarefa desafiadora, mas os cientistas desenvolveram métodos engenhosos para identificar esses objetos cósmicos. De fato, podemos encontrar formas de detectar um buraco negro a partir da órbita de corpos próximos a este. Vamos estudar como podemos realizar essa tarefa:

- Observação de Oscilações e Variações no Brilho: Astrônomos estudam estrelas ou outros objetos que orbitam esses buracos negros. As oscilações e variações no brilho desses corpos podem revelar a influência gravitacional do buraco negro. Essas observações fornecem pistas sobre a presença do buraco negro e ajudam a mapear sua localização no espaço (6).

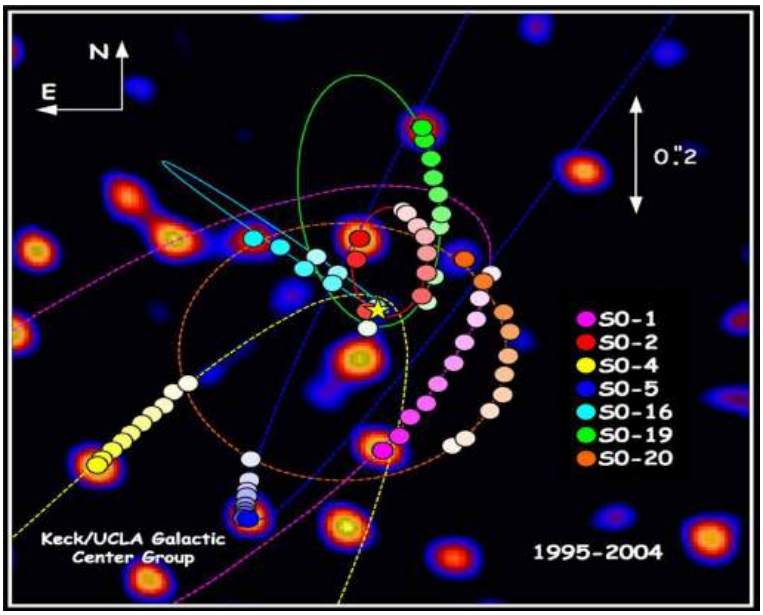
- Desvio Espectral e Radiação Eletromagnética: O desvio para o vermelho (redshift) é outra ferramenta valiosa. Quando uma estrela está em órbita de um buraco negro, seu espectro de luz pode mostrar um desvio para o vermelho característico. Além disso, buracos negros

ativos emitem radiação em raios-X e radiofrequência. Detectar essa radiação é uma maneira eficaz de identificar a presença desses objetos cósmicos (13).

- Simulações Computacionais e Modelagem: Além das observações diretas, os astrônomos usam simulações computacionais para modelar o comportamento de objetos em órbita de buracos negros. Essas simulações preveem padrões de movimento e características observáveis (12). Combinando observações reais e modelagem, podemos mapear a presença e a localização desses buracos negros no vasto cosmo.

Na figura abaixo temos 7 órbitas de estrelas próximas ao centro da Via Láctea, obtidas a partir de observações do Telescópio Keck pertencente ao UCLA Galactic Center Group.

Figura 5.3 – Órbitas de estrelas ao redor de um objeto compacto central



Fonte: Retirado de (8)

De acordo com tais órbitas e tendo em vista as formas de detecção abordadas acima, podemos inferir que existe um Buraco negro no centro da nossa galáxia. Esse objeto está representado pela estrela amarela no centro da figura, e os círculos de mesma cor representam pontos específicos da trajetória de uma estrela.

CONCLUSÃO

As Estrelas Negras de Michel e os Buracos Negros são conceitos fascinantes da astrofísica, ambos relacionados à compreensão da gravidade. Enquanto as Estrelas Negras são corpos teóricos que não colapsam completamente, evitando a formação de uma singularidade, os Buracos Negros são caracterizados por poderem ter uma singularidade central e um horizonte de eventos do qual nada pode escapar. Estrelas Negras estão previstas a partir da Gravitação Newtoniana, enquanto que os Buracos Negros são soluções das equações de campo de Einstein e refletem a complexidade do universo. As estrelas negras propõem uma distribuição de matéria por um volume finito, diferentemente dos Buracos negros, que acumulam toda sua massa na sua singularidade, que possui densidade infinita. Tanto estes quanto aqueles são conhecidos por sua capacidade de capturar até mesmo a luz, tornando-os invisíveis e detectáveis por seus efeitos gravitacionais em objetos vizinhos.

Neste trabalho foi dado ênfase em compreender as características intrínsecas ao movimento de partículas sob ação do campo gravitacional de um buraco negro estático e sem carga elétrica ou magnética, também buscamos encontrar, com o uso do Cálculo diferencial e da gravitação Newtoniana, as soluções que descrevem as Estrelas Negras. Por fim analisamos de maneira breve e qualitativa as características inerentes à geometria de um Buraco Negro rotativo e a forma de detectar tais corpos.

De fato, as soluções para os Buracos Negros nos informam que a superfície $r = 2GM/c^2$ é de fato um horizonte de eventos, ou seja, nada que acontece dentro desta superfície pode ser percebido por observadores distantes (10). Entretanto, mesmo no exterior do horizonte o buraco negro interage com partículas massivas e não massivas e é a partir do estudo destes efeitos gravitacionais causados ao redor do buraco negro que afirmamos sua existência (7).

Sendo assim, a partir das equações de Euler-Lagrange, vimos que um fóton caindo em um buraco negro em movimento radial tomará um tempo próprio finito para chegar à singularidade $r = 0$. Entretanto, devido à dilatação do tempo, um observador distante dos efeitos gravitacionais do buraco negro nunca verá tal partícula adentrar no horizonte de eventos.

Os resultados também indicam que quando os fótons são emitidos para fora da atração gravitacional do Buraco Negro e radialmente próximo do horizonte de eventos, estes tomam um tempo infinito para serem percebidos por observadores distantes. Ademais, neste tipo de geometria, fótons só admitem movimento circular em $r = 3GM/c^2$ (9). Outrossim, o estudo

abordado relacionado às geodésicas pode ser complementado analisando os demais tipos de buracos negros, como os que rotacionam e também os que possuem carga elétrica ou magnética, trazendo novos resultados que podem ser usados para comprovar a validade desta Teoria.

REFERÊNCIAS

1 YOUNG, H.; FREEDMAN, R. A. *Termodinâmica e Ondas*. [S.l.]: Editora Pearson, 2015. v. 2. 01–40 p.

2 LENZI, C. H.; POMPEIA, P. J. da; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De newton a einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, p. 01–15, 2019.

3 EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter korper. *Annalen der Physik*, p. 01–23, 1905.

4 YOUNG, H.; FREEDMAN, R. A. *Ótica e física moderna*. [S.l.]: Editora Pearson, 2015. v. 4. 450–530 p.

5 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press Inc, 1998. 80–170 p.

6 SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 1983. v. 1. 01–72 p.

7 ARANHA, R. F. Sobre a evolução conceitual acerca da formação de buracos negros. *Cadernos de Astronomia*, v. 4, n. 1, p. 35–48, 2023.

8 MACHADO, R. R.; TORT, A. C. Michell, laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, p. 08–15, 2020.

9 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: An introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. 250–400 p.

10 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. 10–80 p.

11 XAVIER, S. V. M. C. B.; LEITE, L. C. S.; BENONE, C. L. Órbitas esféricas de fótons ao redor de um buraco negro de kerr. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, p. 10–20, 2020.

12 JUNIOR, H. C. D. L. et al. Sombras de buracos negros: desvendando a física por detrás da imagem de m87. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, p. 01–10, 2021.

13 NEVES, J. C. S. O buraco negro e sua sombra. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, p. 01–15, 2020.