



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Matheus Valter da Silveira Pereira

UMA ABORDAGEM ELEMENTAR DO FRACTAL *ÁRVORE PITAGÓRICA*

Belém - PA

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Matheus Valter da Silveira Pereira

UMA ABORDAGEM ELEMENTAR DO FRACTAL *ÁRVORE PITAGÓRICA*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

Belém - PA

2023

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Matheus Valter da Silveira Pereira

UMA ABORDAGEM ELEMENTAR DO FRACTAL *ÁRVORE PITAGÓRICA*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz - Orientadora
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Edilson dos Passos Neri Júnior
Escola de Aplicação, UFPA

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 21/12/2023.

CONCEITO: EXCELENTE.

Dedicatória

*Dedico este trabalho a toda minha
família e amigos.*

Epígrafe

"A Matemática é, não só um conjunto de técnicas úteis mas também um conjunto de ideias que fazem parte do patrimônio cultural da humanidade. Se estas notas conseguirem transmitir ao leitor um pouco da beleza e continuidade de uma parte da Matemática, terão valido a pena os feriados e noites perdidas."

Manfredo Perdigão do Carmo

Agradecimentos

Muitas pessoas foram importantes nesse meu processo de aprendizagem, amigos, colegas e professores. Mas antes de tudo, agradeço primeiramente a Deus por ter me concebido a oportunidade de entrar nesta universidade, por ter me dado forças para seguir em meu trajeto acadêmico, e pelo que tenho conquistado até hoje. Pela força e por nunca me deixar abater nos momentos difíceis que as vezes me encontrava, me ajudando a superar barreiras e obstáculos todos os dias, por sempre me proteger e não me abandonar.

Agradeço a minha mãe Ruthlene Farias por eu ser o que sou hoje, me proporcionando muitas alegrias, pelos ensinamentos que lapidaram meu caráter e minha conduta, e por ser um exemplo de mãe, de mulher, de amor personificado em uma única pessoa e por estar ao meu lado durante esta jornada.

Agradeço ao meu pai Haroldo Valter, pois, sem o seu apoio não seria possível eu ter chegado até aqui, me condicionando para realizar meus estudos mesmo após alguns obstáculos parecerem insuperáveis.

Ao meu querido irmão Wendel Valter, por ser minha maior inspiração nos estudos, pelo companheirismo, por alegrar a minha vida, e por sempre estar presente nos momentos felizes e tristes.

Sou eternamente grato aos grandes professores que conheci ao longo do curso que contribuíram sem igual para minha formação, em especial à minha orientadora Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz, por ter me aceitado como seu orientando de TCC, pela paciência, atenção, e por me dar o privilégio de dividir não apenas o conhecimento comigo, mas também conselhos valiosos sobre a vida e os estudos. E ao Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini, pela oportunidade única de ser monitor do Núcleo de Geometria da Faculdade de Matemática, pelo conhecimento compartilhado, pela gentileza e simplicidade.

Assim também agradeço aos diretores do Icen Marcos Monteiro Diniz e José Roberto Zamian, às servidoras Nubiete Maia e Karen Barbosa pelo período de convivência enquanto bolsista da Secretaria Executiva, pelo aprendizado e pelas lições valiosíssimas. Aos servidores Walkiria Lima, Gilvania Guimarães, Thiago Santos, Domingos Santana, Mayara Brandão e Maria Ivete, pela grande contribuição para meu amadurecimento profissional e pessoal enquanto bolsista da Coordenadoria de Gestão.

Aos meus colegas do estágio que me ensinaram sobre convivência e que possibilitaram enorme experiência.

Ao corpo administrativo da Faculdade de Matemática, por ter sido sempre solícita para tirar minhas dúvidas, em especial ao servidor Almir Moreira, por me ajudar e me motivar em nossos longos diálogos.

A todos os meus amigos, de longa data ou mais recentes, pelas conversas animadas, pela troca de experiências, e por tornarem minha passagem no curso de Matemática mais divertida e amena.

A todos que não foram citados aqui, mas que participaram direta ou indiretamente da realização deste TCC, muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho, através de vasta pesquisa bibliográfica, faz-se um estudo sobre alguns aspectos da Geometria Fractal, caracterizada por ser um modo pioneiro de visualizar e conceber o conhecimento geométrico. Especialmente, apresenta-se uma abordagem sobre os fractais desde o seu surgimento, o emprego da terminologia fractal, destacando suas propriedades e características. Mostra-se alguns dos fractais clássicos como o Conjunto de Cantor, Tapete de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e o Floco de Neve de Koch. Além disso, por meio do fractal Árvore Pitagórica busca-se a aplicação da geometria fractal nos conceitos matemáticos referentes ao perímetro, áreas, sequências e progressões geométricas. Este trabalho oferece, ainda, a apresentação de representações artísticas que utilizam o Teorema de Pitágoras e a Árvore Pitagórica.

Palavras-chave: Árvore Pitagórica, Fractais, Geometria Fractal.

Abstract

In this work, through extensive bibliographical research, some aspects of Fractal Geometry are studied. It is characterized as a pioneering way of visualizing and conceiving geometric knowledge. In particular, this study presents an approach to fractals from their emergence, including the use of fractal terminology, highlighting their properties and characteristics. Some of the classic fractals are shown, such as Cantor's Set, Cantor's Carpet, Sierpinski's Triangle, Sierpinski's Carpet, and Koch's Snowflake. In addition, the Pythagorean Tree fractal is used to apply fractal geometry to mathematical concepts relating to perimeter, area, sequences, and geometric progressions. This work also presents artistic representations using the Pythagorean Theorem and the Pythagorean Tree.

Keywords: Pythagorean Tree, Fractals, Fractal Geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Costa da Grã-Bretanha	24
Figura 2 – Conjunto de Cantor	25
Figura 3 – Benoit Mandelbrot	26
Figura 4 – Conjunto de Mandelbrot	27
Figura 5 – Três iterações da Curva de Koch	31
Figura 6 – Autossimilaridade no fractal samambaia	32
Figura 7 – Brócolis romanesco	33
Figura 8 – Ampliação do brócolis romanesco	33
Figura 9 – Triângulo de Sierpinski	33
Figura 10 – Segmento de reta dividido em 4 partes	35
Figura 11 – Divisão do quadrado	35
Figura 12 – Divisão do cubo	36
Figura 13 – Malhas contagem de caixas	37
Figura 14 – Georg Cantor	39
Figura 15 – Construção do conjunto de Cantor	40
Figura 16 – Tapete de Cantor	41
Figura 17 – Wacław Sierpinski	42
Figura 18 – Construção do Triângulo de Sierpinski	43
Figura 19 – Construção do Tapete de Sierpinski	44
Figura 20 – Helge Von Koch	44
Figura 21 – Construção Curva de Koch	45
Figura 22 – Floco de Neve de Koch	46
Figura 23 – Pitágoras de Samos	47
Figura 24 – Plimpton 322	49

Figura 25 – Teorema de Pitágoras	50
Figura 26 – Demonstração de Euclides	51
Figura 27 – Árvore bifurcada simétrica	54
Figura 28 – Árvore bifurcada simétrica	55
Figura 29 – Copa da árvore bifurcada simétrica	56
Figura 30 – Árvore bifurcada simétrica	57
Figura 31 – Árvore bifurcada simétrica	57
Figura 32 – Árvore bifurcada simétrica	58
Figura 33 – Fractal samambaia	59
Figura 34 – Processo iterativo da árvore pitagórica	62
Figura 35 – Processo iterativo da árvore pitagórica	62
Figura 36 – Árvore pitagórica	63
Figura 37 – Árvore pitagórica	63
Figura 38 – Árvore pitagórica	65
Figura 39 – Base para construção da Árvore Pitagórica	66
Figura 40 – Detalhes de uma Árvore Pitagórica. Razão de semelhança entre os triângulos	68
Figura 41 – Triângulos considerados na análise	70
Figura 42 – Quadrados que inicialmente entram na contagem	71
Figura 43 – Mel Bochner	74
Figura 44 – Versão em livro de artista da obra <i>Meditação sobre o Teorema de Pitágoras</i> (1993)	75
Figura 45 – Instalação <i>Pitágoras</i> (1989)	76
Figura 46 – <i>Pitágoras</i> (1990)	76
Figura 47 – <i>Intersecções</i> (1990)	77
Figura 48 – Cartaz da exposição sobre a obra de Max Bill, pintura e escultura	77
Figura 49 – <i>Konstruktion um das thema 3 - 4 - 5</i> (1980)	78

Figura 50 – <i>Pythagoräisches dreieck in quadrat II</i> (1980)	79
Figura 51 – Marion Drennen, <i>Homenaje a Pitágoras</i> , 2006	79
Figura 52 – <i>Quebra-cabeça boom de Pitágoras n°10</i>	80
Figura 53 – Geração fractal n°31	80
Figura 54 – <i>Fractal Pitágoras Tree</i>	81
Figura 55 – Representação artística da <i>Árvore Pitagórica</i> feita por Alfred E. Bosman	81
Figura 56 – <i>Mitered Fractal Tree I</i> (2010)	82
Figura 57 – <i>Koos Fractal Tree</i>	82
Figura 58 – <i>Árvore Pitagórica</i> (2021)	83

Lista de tabelas

Tabela 1 – Cronologia das contribuições para a geometria fractal	28
--	----

Sumário

1	As sementes	17
2	O plano de voo	21
2.1	Metodologia da pesquisa	21
2.2	Objetivos	22
3	As raízes	23
3.1	Benoit B. Mandelbrot	26
3.2	Linha do tempo da Geometria Fractal	28
3.3	Propriedades elementares dos fractais	29
3.3.1	Processo iterativo	31
3.3.2	Autossimilaridade	31
3.3.3	Complexidade infinita	33
3.3.4	Dimensão fractal	34
3.3.4.1	Dimensão por autossimilaridade	34
3.3.4.2	Dimensão por contagem de caixa (box-counting)	36
3.4	Fractais clássicos	38
3.4.1	Conjunto de Cantor	39
3.4.2	Tapete de Cantor	41
3.4.3	Triângulo de Sierpinski	42
3.4.4	Tapete de Sierpinski	43
3.4.5	Curva de Koch	44
3.4.6	Floco de neve de Koch	46
4	O caule: teorema de Pitágoras	47
4.1	Demonstração de Euclides	50
5	Arboreus fractus	53

5.1	Árvore bifurcada simétrica	53
5.2	Fractal Samambaia	58
6	A árvore pitagórica	61
6.1	Processo iterativo	61
6.2	Propriedades matemáticas elementares	65
6.2.1	Número de triângulos e quadrados	66
6.2.2	Perímetro dos triângulos e dos quadrados	67
6.2.3	Área dos triângulos e dos quadrados	69
7	Flores e frutos na arte	73
7.1	Teorema de Pitágoras na arte	73
7.2	Árvore pitagórica na arte	80
8	Ramificações e novas sementes	85
	Referências	87

1 As sementes

Um passarinho pediu para o meu irmão ser uma árvore. Meu irmão aceitou ser árvore daquele passa-rinho. No estágio de ser essa árvore, meu irmão aprendeu de sol, de céu e de lua mais do que na escola.

Manoel de Barros^a

^a <https://www.pensador.com/frase/NjU2NjQ4//>

A geometria fractal é uma geometria não euclidiana que estuda objetos que são muito eficazes para modelar a natureza como nuvens, raios, montanhas e árvores.

Desde os gregos, acreditava-se que geometria euclidiana era a geometria que melhor descrevia os fenômenos e objetos do mundo que vivemos. A descoberta de geometrias não euclidianas veio abalar esta crença e mudou a nossa maneira de entender e descrever o Universo.

Muitos dos conjuntos que hoje são chamados de fractais surgiram em trabalhos de matemáticos como exemplos de suas teorias e foram por muito tempo considerados objetos exóticos sem nenhuma aplicação prática. Por exemplo, em 1872, o matemático Karl Weierstrass apresentou o exemplo de uma função que tem a propriedade de ser contínua, mas não ter derivada em nenhum ponto. Em 1904, Helge von Koch, aperfeiçoou a definição de Weierstrass, e apresentou uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como curva de Koch. No campo da teoria dos conjuntos, o matemático polonês Waclaw Sierpinski, em 1920, trabalhou no que hoje é conhecido como curva de Sierpinski. As curvas de Sierpinski são uma sequência definida recursivamente de curvas fechadas e contínuas que preenchem o espaço. Estes estudos originaram os conjuntos conhecidos como triângulo e tapete de Sierpinski. Outro exemplo, é a curva universal tridimensional, hoje conhecida como

esponga de Menger, apresentada pelo matemático Carl Menger, em 1926 em sua tese de doutorado, com o objetivo de definir o conceito de dimensão topológica.

Nos anos 70 do século 20, o matemático polonês Benoit Mandelbrot membro da IBM e professor da universidade de Harvard começou a estudar objetos matemáticos chamados conjuntos de Julia que eram invariantes sob certas transformações do plano complexo. Com base nos trabalhos de Gaston Julia e Pierre Fatou, Mandelbrot usou um computador para obter imagens dos conjuntos de Julia. Ao investigar a topologia desses conjuntos, ele introduziu, em 1979, o que hoje é conhecido como o conjunto de Mandelbrot. Em 1975, Mandelbrot cunhou o termo *fractal* para descrever essas estruturas e publicou suas ideias pela primeira vez no livro *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*, posteriormente traduzido para o inglês como *Fractals: Form, Chance and Dimension*.¹

Mandelbrot cunhou a palavra “fractal”, que deriva da palavra latina *fractus*, que significa “quebrado” ou “fragmentado”, para batizar estes e outros conjuntos com propriedades similares. Usando os computadores IBM, Mandelbrot foi capaz de criar imagens fractais através da programação gráfica. Embora Mandelbrot tenha cunhado o termo “fractal”, muitos dos objetos matemáticos que ele apresentou no seu livro *The Fractal Geometry of Nature* (MANDELBROT, 1982) já haviam sido descritos anteriormente por outros matemáticos como, por exemplo, o conjunto de Cantor, a curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, entre outros. Porém, antes de Mandelbrot, estes conjuntos eram considerados objetos exóticos e sem aplicação. Foi Mandelbrot quem reuniu pela primeira vez estes objetos e os aplicou em diversos campos da ciência, como economia, biologia, física, engenharia, etc.

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot

Neste trabalho, estamos interessados no fractal chamado *Árvore pitagórica* e queremos, como no poema de Manoel de Barros, *ser um passarinho* que voa pelo universo da geometria fractal e vai pousar na árvore pitagórica para aprender *de céu, de sol, de matemática, de arte*, mais do que poderíamos imaginar. Entendemos que para fazer um voo seguro e proveitoso neste universo e poder pousar no fractal árvore pitagórica era preciso um plano de voo que orientasse os percursos. No capítulo 2, apresentaremos o plano de voo adotado neste trabalho que resumidamente trata-se de responder as seguintes perguntas: qual é nossa motivação? (pergunta da pesquisa), o quê pretendemos alcançar? (nossos objetivos) e como voaremos? (metodologia da pesquisa). Com este plano de voo em mente pousaremos na árvore pitagórica.

Para iniciar o percurso, no capítulo 3, exploraremos as suas raízes através de um estudo sobre os aspectos elementares da geometria fractal para melhor compreender o contexto do fractal árvore pitagórica, especialmente investigando as principais características de um fractal e alguns fractais clássicos. Em seguida, no capítulo 4, vamos explorar a demonstração de Euclides do Teorema de Pitágoras, que é a sustentação (o caule) da árvore pitagórica. No capítulo 5, investigaremos alguns fractais do tipo árvore com a finalidade de introduzir as principais características destes fractais. No capítulo 6, faremos uma abordagem elementar da árvore pitagórica, destacando o seu processo iterativo e suas propriedades matemáticas elementares. Trata-se do detalhamento do artigo intitulado *Uma árvore pitagórica: explorando fractais no ensino médio* (REIS, 2015). No capítulo 7, apresentaremos algumas aplicações do teorema de pitágoras e da árvore pitagórica na arte através das obras de alguns artistas que usam a matemática como linguagem de criação e expressão. Finalmente, no capítulo 8, revisaremos nosso plano de voo para fazer uma síntese dos trajetos percorridos com a intenção de responder a pergunta da pesquisa e verificar se os objetivos foram alcançados. Além disso, apontaremos algumas direções que podem ser futuramente mais exploradas e aprofundadas. Deste modo, ao ser passarinho na árvore pitagórica

esperamos ter voado mais além e aprendido muito *de céu, de sol, de matemática, de arte.*

No estágio de ser árvore meu irmão aprendeu para
santo mais do que os padres lhes ensinavam no
internato. Aprendeu com a natureza o perfume de
Deus. Seu olho no estágio de ser árvore aprendeu
melhor o azul. E descobriu que uma casca vazia
de cigarra esquecida no tronco das árvores só
serve pra poesia.

Manoel de Barros

2 O plano de voo

Olha estas velhas árvores, mais belas.

Do que as árvores moças, mais amigas,

Tanto mais belas quanto mais antigas,

Vencedoras da idade e das procelas.

Ollavo Bilac^a

^a <https://www.pensador.com/frase/NTE3NTIw/>

2.1 Metodologia da pesquisa

Voar exige muito esforço e concentração. Traçar um plano de voo exige um entendimento básico sobre o que significa metodologia de pesquisa. Aqui, não pretendemos fazer um estudo detalhado sobre a temática, mas apenas desejamos escolher um caminho e traçar nossos objetivos para a investigação do fractal árvore pitagórica. Neste trabalho, a metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica com análise dedutiva dos dados. Partimos do pressuposto que,

A pesquisa científica é iniciada por meio da pesquisa bibliográfica, em que o pesquisador busca obras já publicadas relevantes para conhecer e analisar o tema problema da pesquisa a ser realizada. Ela nos auxilia desde o início, pois é feita com o intuito de identificar se já existe um trabalho científico sobre o assunto da pesquisa a ser realizada, colaborando na escolha do problema e de um método adequado, tudo isso é possível baseando-se nos trabalhos já publicados. (SOUSA; OLIVEIRA; ALVES, 2021)

Na realização da pesquisa bibliográfica o pesquisador tem que ler, refletir e escrever o sobre o que estudou, se dedicar ao estudo para reconstruir a teoria e aprimorar os fundamentos teóricos (SOUSA; OLIVEIRA; ALVES, 2021). Deste modo, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre a geometria fractal para reconstruir as propriedades elementares dos fractais e nos apropriarmos das principais ideias, tendo no ênfase os fractais clássicos e os fractais do tipo árvore. Não se trata de um levantamento bibliográfico sobre a geometria fractal, mas um estudo elementar

sobre os seus principais aspectos. Para realização de uma abordagem elementar sobre o fractal árvore pitagórica, estudamos com mais detalhes o artigo intitulado *Uma árvore pitagórica: explorando fractais no ensino médio* (REIS, 2015), que faz uma análise matemática deste fractal. Este artigo é como a *velha árvore* do poema de Olavo Bilac¹, agasalhando aqueles que *começam*. Por fim, para a aplicação do Teorema de pitágoras e da árvore fractal na arte exploramos o artigo *El teorema de Pitágoras en el arte* disponível no site <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>.

2.2 Objetivos

Objetivo geral

Apresentar uma abordagem elementar do fractal árvore pitagórica. Neste sentido, busca-se resposta a seguinte pergunta: Quais são as propriedades elementares do fractal árvore pitagórica?

Objetivos Específicos

1. Descrever aspectos elementares da Geometria fractal;
2. Analisar as propriedades elementares matemáticas do fractal árvore pitagórica;
3. Apresentar aplicações do teorema de pitágoras e da árvore pitagórica na arte.

¹ <https://www.pensador.com/frase/NTE3NTlw/>

3 As raízes

Problemas que envolvem aleatoriedade e irregularidade sempre fascinaram filósofos e cientistas. Pesquisando sobre flutuações financeira¹, Mandelbrot encontrou o que denominou de *aleatoriedade selvagem*. Ele percebeu que tais flutuações apresentavam propriedades semelhantes em diferentes escalas de tempo, confirmando assim sua hipótese sobre a natureza fractal da microestrutura do mercado.

Mandelbrot criou a primeira *teoria da rugosidade ou irregularidade* e viu “rugosidade” nas formas das montanhas, costas e bacias hidrográficas, nas plantas, nos vasos sanguíneos e no pulmões, no agrupamento de galáxias, etc. Sua busca pessoal era criar alguma fórmula matemática para medir a “rugosidade” geral de tais objetos da natureza. Mandelbrot enfatizou o uso de fractais como modelos realistas e úteis para descrever muitos fenômenos “irregulares” no mundo real. Ele concluiu que a rugosidade real é frequentemente fractal e pode ser medida (MANDELBROT, 1982).

Em 1967, Benoit B. Mandelbrot publicou um artigo, no qual formula a pergunta que ficou muito famosa: “Qual o tamanho da costa da Grã Bretanha? A questão parece trivial, mas não é, se optarmos por respondê-la fazendo uso de um mapa e de uma unidade de medida. Padronizando o metro como unidade, obtemos um resultado que cremos estar próximo do verdadeiro. Logo, é natural questionarmos, e se utilizássemos uma unidade menor? Isso possibilitaria o reconhecimento de alguns pontos da costa que não são visualizados na primeira medição. Maior será o valor encontrado, quão menor for a unidade de medida.

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot

Figura 1 – Costa da Grã-Bretanha



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_do_litoral

O que Mandelbrot mostrou em seu artigo foi que podemos definir um número que caracterize esse grau de desordem do litoral. Uma vez que se pode mostrar que esse número tem certas propriedades de dimensão, Mandelbrot o chamou de *dimensão fractal*.

A manipulação de formas que desafiavam o bom senso data entre o final do século XIX e início do século XX. Durante muitos séculos, utilizamos conceitos da geometria euclidiana para representar, não apenas objetos matemáticos, mas também modelar, explicar e exemplificar fenômenos da natureza. A geometria euclidiana, em geral, representa os objetos criados pelo homem, todavia em diversos casos, não nos fornece uma boa representação da natureza, ou ainda, essa representação é muito complexa. As formas dos componentes da natureza não podem ser simplificadas empregando formas da Geometria Euclidiana, como triângulo, círculos, esferas etc. Os objetos que não se encaixavam na Geometria Euclidiana eram conhecidos como “monstros” matemáticos ou patologias, por desafiarem a crença nos modelos clássicos da geometria euclidiana.

Neste contexto, destacamos a descoberta do matemático alemão Georg Cantor,

que chocou o mundo matemático no século XIX por questionar crença e modelos. No seu trabalho, Cantor apresenta um conjunto, atualmente conhecido como conjunto de Cantor, que é um fractal clássico.

Figura 2 – Conjunto de Cantor



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor

Somente com a descoberta das geometrias não euclidianas, em particular a geometria fractal, muda-se o paradigma dos modelos usados para representar o mundo que vivemos. A geometria fractal preocupa-se com a irregularidade e o aleatório, dando ênfase aos padrões que se repetem em diferentes escalas, por esta razão mostrou-se mais eficaz para modelar vários e diferentes aspectos da natureza. Por exemplo, se observarmos uma folha de alguma árvore e uma parte dessa folha, notaremos que essa parte se assemelha à folha toda, e ao considerarmos uma parte ainda menor, surpreendentemente percebemos que esta, se assemelha à folha toda. Essa característica, conhecida como autossimilaridade, é uma das mais importantes propriedades dos fractais.

3.1 Benoit B. Mandelbrot

Figura 3 – Benoit Mandelbrot



Fonte: <https://history.aip.org/phn/11606005.html>

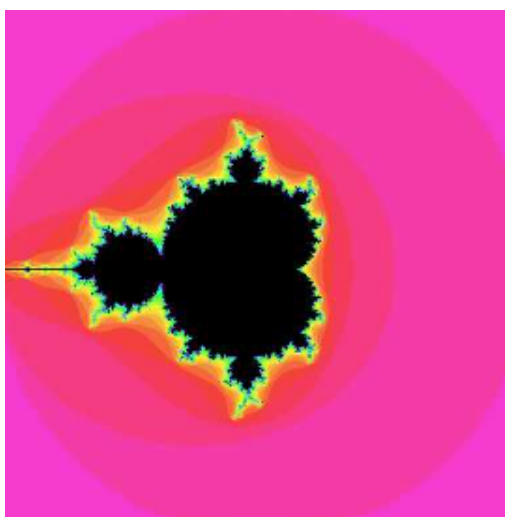
Benoit B. Mandelbrot nasceu em Warsaw, Polônia, no ano de 1924. Tornou-se importante por ser o responsável pelo desenvolvimento da Geometria Fractal, mostrando como elementos dessa geometria podiam se relacionar a outros objetos matemáticos e fenômenos naturais. No ano 1945, seu tio apresentou os conjuntos de Fatou e Julia, porém não despertaram o interesse do jovem matemático. Mudou-se para os Estados Unidos em 1958 quando recebeu um convite da International Business Machines Corporativo (IBM) que recrutava jovens habilidosos com ideias criativas. Mandelbrot denominou como “Fractal” os objetos que apresentavam autossimilaridade e podiam ser dimensionados conforme a definição de Hausdorff. Sua contribuição foi importante para o reconhecimento de padrões na economia, ruídos em linhas de transmissão e objetos encontrados na natureza.

Em 1952, Mandelbrot obteve o título de PHD na Universidade de Paris, e por conta dos seus esforços para ampliar os conhecimentos matemáticos, optou por ir para o Instituto de Estudos Avançados em Princeton, no qual seguiu seus estudos em diversos campos da matemática. Em suas pesquisas começou a analisar e investigar

estruturas da natureza, percebendo que essas estruturas tinham determinados padrões que se repetiam em cada um de seus fragmentos, mas não podiam ser encaixados perfeitamente nas formas da geometria euclidiana. Estudou a estrutura topológica dos conjuntos de Julia, especialmente os conjuntos que atualmente são conhecidos como *conjuntos de Mandelbrot*. Definido pela primeira vez por Fatou, em 1905, o Conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os complexos c no plano complexo tais que a sequência $z_{n+1} = z_n^2 + c$ não tende ao infinito.

O conjunto de Mandelbrot, em sua representação gráfica, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardióide localizado ao centro do plano complexo. Existe uma infinidade (contável) de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardióide) que tangenciam o cardióide e variam de tamanho com raio tendendo assintoticamente a zero (BARNSELY, 1988).

Figura 4 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: VAZ (2016, p. 162).

3.2 Linha do tempo da Geometria Fractal

Diversos matemáticos contribuíram para o avanço e o desenvolvimento da Geometria Fractal, além dos trabalhos de Benoit Mandelbrot. No que segue, apresentaremos uma resumida linha do tempo das contribuições para a geometria fractal.

Tabela 1 – Cronologia das contribuições para a geometria fractal

Ano	Matemático	Contribuições
1883	G. Cantor	Publica o conjunto de Cantor.
1890	G. Peano	Publica a curva de Peano.
1891	D. Hilbert	Publica um método geométrico e prático para construção da curva de Peano; apresenta uma curva que preenche o espaço.
1904	H. von Koch	Publica a curva de Koch como curvas contínuas que não tem derivada em nenhum ponto.
1915	W. Sierpinski	Publica o triângulo de Sierpinski.
1918	F. Hausdorff	Publica resultados topológicos sobre dimensão fracionada, usados por Mandelbrot para definir fractal.
1918	G. Julia	Publica um artigo com 199 páginas sobre conjunto de Julia.
1918	P. Fatou	Publica resultados sobre o conjunto de Fatou.
1921	C. Menger	Apresenta a Esponja de Menger ao explorar conceitos de dimensão topológica em sua tese de doutorado.
1942	A. Bosman	Primeira construção da árvore pitagórica.
1967	B. Mandelbrot	Publica seu artigo sobre a topologia da costa da Grã-Bretanha, criando uma nova geometria.

Fonte: aperfeiçoada de RABAY, 2013.

3.3 Propriedades elementares dos fractais

O termo Fractal é baseado no latim, do adjetivo fractus, correspondente ao verbo *frangere* que significar quebrar, fragmentar, criar fragmentos irregulares. Encontramos tais formas em inúmeros exemplos cujas estruturas geométricas representam um desafio para serem estudados matematicamente, por exemplo quando observamos o contorno de montanhas, a formação de uma nuvem, a superfície pulmonar humana, os vasos sanguíneos, as plantas, os filmes, o mundo da comunicação sem fio entre outros.

Inicialmente, Mandelbrot define fractal do seguinte modo: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff excede estritamente a dimensão topológica”. Porém, com o avanço, os pesquisadores perceberam que esta definição era muito restritiva e excluía conjuntos com as principais característica dos fractais.

Como afirma Mandelbrot (1998, p. 15) no seu livro *Objetos Fractais*:

É necessário justificar a opção, tomada no texto, de caracterizar os objetos fractais de uma forma intuitiva e laboriosa, evitando sempre defini-los matematicamente de forma compacta, através de figuras ou conjuntos. Se assim procedi, foi por receio de me envolver nos pormenores sem obter contrapartida concreta.

Fractais são objetos impossíveis de serem moldados pela geometria tradicional (geometria euclidiana), pois possuem características que os diferenciam das demais formas, a saber: processo iterativo, autossimilaridade em diferentes escalas, complexidade infinita e dimensão fracionada.

Não existe uma definição precisa de fractal, que seja abrangente o suficiente para descrever todos os objetos matemáticos chamados de fractais. Neste trabalho, utilizaremos a definição proposta por Falconer (1990) que define o conjunto X como um fractal se X satisfaz a maioria das seguintes propriedades:

1. Em geral, X está definido de maneira simples, por um processo iterativo. Muitos fractais são gerados através de infinitas iterações de algum procedimento

geométrico simples ou pela aplicação repetida de alguma função simples;

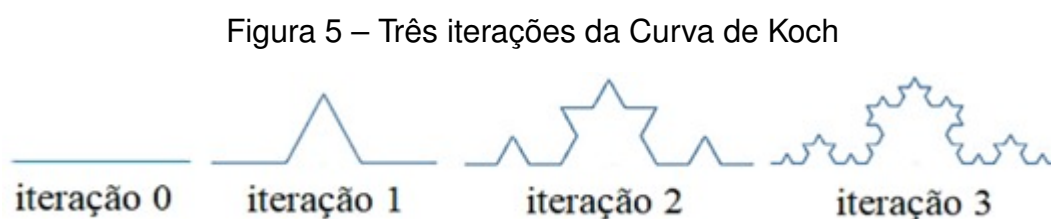
2. X tem uma estrutura fina (ou complexidade infinita) ou seja, é rico em detalhes em escalas cada vez menores. Quanto mais ampliada a figura, mais detalhes serão visíveis. Isto, de fato, não ocorre em figuras geométricas comuns. Por exemplo, quanto menor for a seção de uma circunferência, mais ela se parecerá com um segmento de reta;
3. X é autossimilaridade ou tem autoafinidade, ou seja, o conjunto tem várias cópias dele mesmo (idênticas ou estatisticamente semelhantes). A autossimilaridade é dita estrita quando as partes são uma cópia exata de seu todo. Por outro lado, diz-se que um fractal tem autossimilaridade estatística quando adapta-se o tamanho das variações aleatórias de pequenas partes, apresentando a mesma distribuição estatística que o todo;
4. A dimensão fractal (hausdorff) de X é maior do que a sua dimensão topológica.

Deste modo, podemos classificar um objeto como fractal se o mesmo possuir as seguintes características: processo iterativo, autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionada. Essas estruturas podem modelar objetos da natureza como o brócolis romanesco, o floco de neve e a concha marinha. Tais objetos podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente por processos repetitivos. A seguir, discutiremos um pouco mais sobre essas características.

Embora a geometria fractal possua um forte apelo visual e artístico, há muita matemática por trás dessa beleza visual, o que em nosso entendimento é uma outra forma de beleza.

3.3.1 Processo iterativo

Embora não haja uma definição pronta e exata relacionada aos fractais, em geral são limites de uma sequência de objetos geométricos construídos por um processo iterativo, quanto mais etapas do processo são realizadas teremos uma melhor aproximação do fractal. Neste processo, repete-se alguma lei de formação. Como exemplo, vamos apresentar a construção do fractal Curva de Koch. Para isto, inicia-se com um segmento unitário que é dividido em três partes iguais. Depois, no terço médio do segmento construímos um triângulo equilátero e retiramos a sua base. Este processo é repetido em todos os segmentos restantes e assim sucessivamente. A figura 5 ilustra três iterações deste processo.

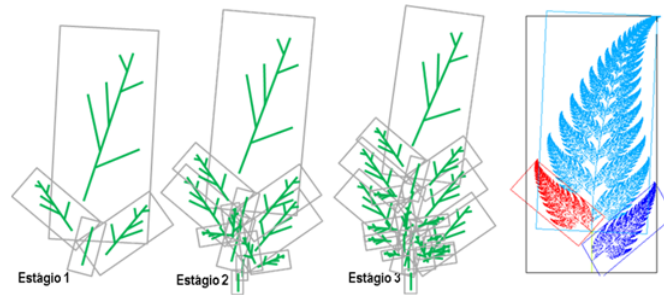


Fonte: MENDES JUNIOR (2017).

3.3.2 Autossimilaridade

É a característica intrínseca mais notória dos Fractais, consistindo na obtenção de réplicas menores da figura por meio de sua divisão ou de sua ampliação. Geralmente, identificamos formas semelhantes a uma figura inicial, em escalas menores, ao nos depararmos com um fractal. A autossimilaridade ou autossemelhança é uma propriedade em que há uma macrocosmização das partes de objetos geométricos, ou de elementos naturais, por meio de repetições sucessivas, em diferentes escalas, de unidades menores. Esta é uma das premissas que norteiam o conceito de Fractal, quando menores elementos similares formam o maior elemento.

Figura 6 – Autossimilaridade no fractal samambaia



Fonte: <https://leiamaisba.com.br/2015/07/01/arvore-pitagorica-samambaias-jurrasic-world-fractais>

O número de repetições infinitas de um mesmo elemento segue escalas diferentes por um fator de redução ou ampliação, ou seja, cada elemento da nova etapa do fractal é formado pelo anterior de acordo com um fator de redução ou ampliação gerando, assim, uma sequência de figuras, que convergirá para o fractal. Existem dois modos distintos de autossimilaridade: a autossimilaridade exata e a autossimilaridade estatística.

A autossimilaridade exata pode ser encontrada nos fractais geométricos ou determinísticos. Observa-se que esta exatidão sempre está presente nas cópias, independente da escala da ampliação ou redução como é o caso do conjunto de Cantor e da curva de Koch. Na autossimilaridade estatística, o objeto possui medidas estatísticas ou numéricas que se mantêm em diferentes escalas, no entanto não apresentam réplicas padronizadas com exatidão.

É possível identificarmos essa característica em vários objetos da natureza. O brócolis romanescos, de nome científico *Brassica Oleracea* “Romanesco” possui, claramente, a característica de autossimilaridade estatística, como ilustram as figuras 7 e 8.

Figura 7 – Brócolis romanesco



Fonte:

<https://depositphotos.com/br/photo/one-romanesco-broccoli-78798866.html>

Figura 8 – Ampliação do brócolis romanesco

Fonte: <https://parade.com/23643/linzlowe/what-the-heck-is-romanesco-and-how-do-you-cook-it/>

3.3.3 Complexidade infinita

Relacionamos a Complexidade Infinita à infinidade de detalhes que obtemos ao ampliarmos um objeto fractal. Ou seja, independente da escala a cada ampliação, um fractal apresentará infinitas rugosidades, o que torna inviável a representação de sua totalidade. Na figura 9, temos um exemplo, o triângulo de Sierpinski ilustra essa propriedade:

Figura 9 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: MOREIRA (2013).

Observe que, na quarta iteração do Triângulo de Sierpinski, temos um número maior de fragmentos, ricos em detalhes e profundidade. Se optarmos por continuar iterando, encontraremos fragmentos cada vez menores e uma figura rica de detalhes.

3.3.4 Dimensão fractal

A Dimensão fractal relaciona-se ao espaço que a figura ocupa no espaço considerado. Trata-se de uma das características fundamentais para classificarmos formas fractais, pois com ela identificamos o conjunto. Porém, é uma propriedade complexa e difícil de calcular. Em geral, dimensão fractal não é um número inteiro, como é o caso da dimensão topológica. Para explicar melhor a ideia de dimensão fractal, Mandelbrot utilizou o seguinte exemplo:

Qual é a dimensão de um novelo de fio? Mandelbrot respondeu que isso depende do ponto de vista. Visto de grande distância, o novelo não é mais do que um ponto, com dimensão zero. Visto mais de perto, o novelo parece ocupar um espaço periférico, assumindo assim três dimensões. Visto ainda mais de perto, o fio torna-se visível, e o objeto torna-se de fato unidimensional, ainda que essa dimensão única se enovele em volta de si mesma de tal forma que ocupa um espaço tridimensional. A noção de quantos números são necessários para especificar um ponto continua a ser útil. De muito longe, não é preciso nenhum - o ponto é a única coisa que existe. Mais perto, são precisos três. Mais perto ainda, um é suficiente - qualquer posição específica ao longo do fio é única, por muito que o fio esteja enovelado. (GLEICK, 1989, p.92)

Existem outras duas dimensões relacionadas com a dimensão Hausdorff: a dimensão por autossimilaridade e a dimensão por contagem de caixas, que são calculadas mais facilmente e permitem obtermos boas estimativas, e em alguns casos, o valor exato da dimensão Hausdorff.

3.3.4.1 Dimensão por autossimilaridade

Estamos habituados a falar sobre dimensão topológica, que foi conceituada por Euclides nos *Elementos*. Neste caso, o ponto possui dimensão 0, segmentos de reta possuem dimensão 1, superfície dimensão 2, e espaço dimensão 3.

A ideia de dimensão por autossimilaridade é aplicada apenas em fractais que apresentam autossimilaridade exata e relaciona o fator de redução e o número de cópias da figura, através de uma lei de potência. Para ilustrar, considere um segmento de reta, um quadrado e um cubo. Em seguida, dividiremos os lados de cada um desses objetos em r partes iguais para obtermos uma relação de potência D entre r e a quantidade de n partes. A potência D é a dimensão fractal do objeto.

- **Segmento de reta**

Dividiremos um segmento de reta em quatro partes iguais com fator de escala $\frac{1}{r} = \frac{1}{4}$ temos $n = 4^1$ segmentos iguais.

Figura 10 – Segmento de reta dividido em 4 partes

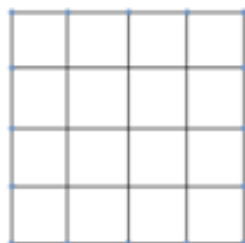


Fonte: OLIVEIRA (2014).

- **Quadrado**

Da mesma maneira, dividindo o quadrado em quatro partes iguais com fator de escala $\frac{1}{r} = \frac{1}{4}$ temos $n = 4^2$ quadrados iguais.

Figura 11 – Divisão do quadrado

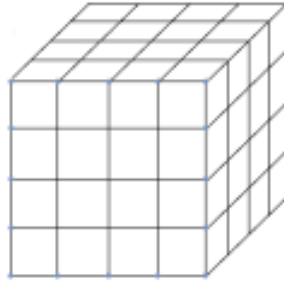


Fonte: OLIVEIRA (2014).

- **Cubo**

Da mesma maneira, dividindo o cubo em quatro partes iguais com fator de escala $\frac{1}{r} = \frac{1}{4}$ temos $n = 4^3$ cubos iguais.

Figura 12 – Divisão do cubo



Fonte: OLIVEIRA (2014).

Observe que, usando o fator de escala $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$, o número de cópias será $n = 2$, $n = 2^2$ e $n = 2^3$ para o segmento de reta, o quadrado e o cubo respectivamente. Para $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$, o número de cópias será $n = 3^1$, $n = 3^2$ e $n = 3^3$ para o segmento de reta, o quadrado e o cubo respectivamente. Para $\frac{1}{r} = \frac{1}{4}$, o número de cópias será $n = 4^1$, $n = 4^2$ e $n = 4^3$ para o segmento de reta, o quadrado e o cubo respectivamente. Deste modo, tem-se uma relação de potência entre o número de cópias e o fator de escala dada por $n = r^{-D}$. Aplicando o logaritmo em ambos os membros da equação, temos $\ln n = \ln r^{-D}$. Assim, a dimensão por similaridade é dada por:

$$D = -\frac{\ln n}{\ln r} \quad (3.1)$$

Vamos aplicar a equação 3.1 para calcular a dimensão fractal do conjunto de Cantor, pois este conjunto apresenta autossimilaridade exata. Note que, o fator de redução do conjunto de Cantor na k -ésima iteração é $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ e o número de cópias é $n = 2^k$. Logo, a dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada por:

$$D = -\frac{\ln 2}{\ln(1/3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$$

3.3.4.2 Dimensão por contagem de caixa (box-counting)

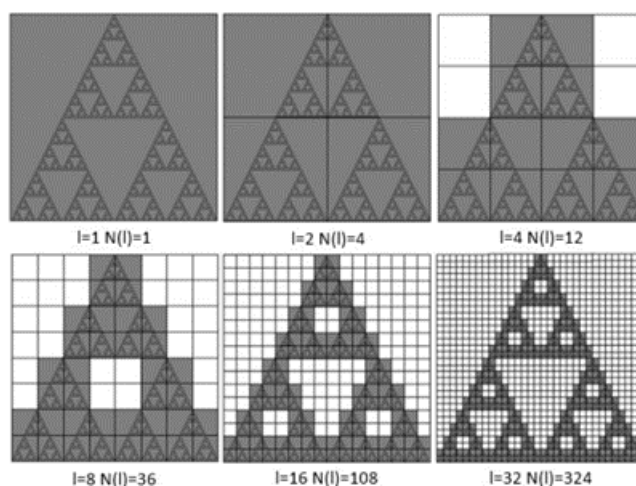
Não é possível calcular a dimensão de um fractal que não apresenta autossimilaridade exata, através do método anterior. Podemos obter uma estimativa de dimensão fractal, calculando a dimensão chamada “contagem de caixas” (box-counting).

Este método consiste em cobrir a figura ou objeto com uma malha de quadrículas de lado r , e contar a quantidade que possui ao menos um ponto da figura. Em outras palavras, para encontrarmos a dimensão fractal de uma figura, por meio da contagem de caixas, cobrimos esta figura com uma grade de caixas e contamos quantas caixas sobrepõem ao objeto de interesse.

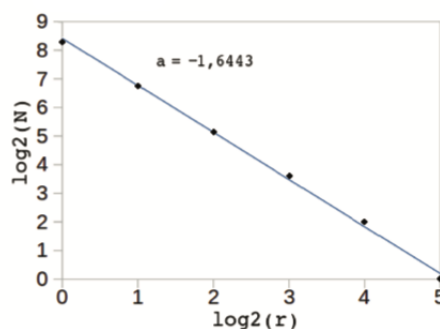
Inicialmente, o método da contagem de caixas consiste em cobrirmos a figura com uma malha de caixa (bolas) de raio $r > 0$ e centro x_0 , ou seja, conjuntos da forma $B(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| \leq r\}$. Observe que, por exemplo, para o caso bidimensional com a norma euclidiana, B é um círculo (BARNSELY, 1988).

O passo seguinte consiste na contagem do número (N_B) de bolas B da malha que contém alguma parte da figura. Em seguida, refinamos as coberturas com raios cada vez menores, ou seja, $r \rightarrow 0$. A figura 13 ilustra a ideia da dimensão por contagem de caixas.

Figura 13 – Malhas contagem de caixas



$\log_2(r)$	$\log_2(N_r)$
0,000	8,340
1,000	6,755
2,000	5,170
3,000	3,585
4,000	2,000
5,000	0,000



Fonte: SILVA (2019, p. 40).

Podemos mostrar que (veja FALCONER, 1990) a dimensão por contagem de caixas é dada por:

$$D_B = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(N_B)}{-\ln(r)} \quad (3.2)$$

Como espera-se uma relação de potência entre n e r do tipo $N_B \sim r^{-D_B}$, e logo, $D_B \sim \frac{\ln(N_B)}{-\ln r}$, podemos obter estimativas da dimensão D_B usando o coeficiente angular da melhor (ajuste de curvas) reta $\ln(N_B) - \ln(r)$ que passa pelos pontos da figura para vários valores r . Para o caso do triângulo de Sierpinski, como mostra o gráfico na figura 13, a dimensão foi aproximada por $D_B \approx 1,6443$, sendo consideradas caixas de lado $r = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Embora caixas de vários tamanhos sejam importantes para o fornecimento de informações referentes às imagens, se o objetivo for simplesmente o cálculo da dimensão fractal D_B , como na equação 3.2 para $r \rightarrow 0$, um resultado possivelmente mais preciso pode ser encontrado, em muitos casos, tomando-se valores menores para r . Para o exemplo dado na figura 13 se consideramos apenas as caixas com raio $r = \{1, 2, 4\}$ podemos obter o valor exato da dimensão, ou seja, $D_B = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849625$.

3.4 Fractais clássicos

Nesta seção, apresentaremos os fractais mais conhecidos, que chamaremos de “fractais clássicos”.

A Matemática, ao longo de seu desenvolvimento sempre foi o foco de grandes estudiosos que deram contribuições fundamentais para a quebra e criação de novos paradigmas. Apesar disso, algumas dessas contribuições não eram bem vistas pelos cientistas, uma vez que destoavam dos conceitos consolidados, apresentando objetos matemáticos considerados “patológicos” para a época. Alguns desses trabalhos, feitos por grandes matemáticos, foram posteriormente aplicados para modelar vários problemas e se tornaram conhecidos devido a criação da geometria fractal por Mandelbrot.

Para uma melhor compreensão das principais ideias, apresentaremos o processo de construção dos fractais clássicos Conjunto de Cantor, Tapete de Sierpinski, Curva de Koch, entre outros.

3.4.1 Conjunto de Cantor

Figura 14 – Georg Cantor



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/cantor.htm>

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu no ano de 1845 em São Petersburgo, na Rússia. Ficou conhecido por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos. Os conceitos matemáticos de Cantor enfrentaram uma resistência por parte da comunidade matemática da época, apesar disso ele é reconhecido atualmente como matemático que teve grande contribuição. Começou sua vida acadêmica em Zurich em 1862, retornando à Universidade de Berlim no ano seguinte, na qual doutorou-se em 1867. Dentre suas contribuições, Cantor provou que, dados conjuntos infinitos, todos eles não têm a mesma potência, diferenciando os conjuntos enumeráveis dos contínuos. Criou o “monstro” matemático denominado Conjunto de Cantor, em 1883, demonstrando que este não era um conjunto enumerável. Georg Cantor publicou um trabalho referente à construção deste conjunto.

Podemos obter o conjunto de Cantor a partir de um segmento de reta através do seguinte processo: começamos com um segmento de reta $C_0 = [0, 1]$. Dividimos esse segmento em três partes e retiramos o terço médio, restando apenas os dois pedaços extremos, ou seja, obtemos o conjunto

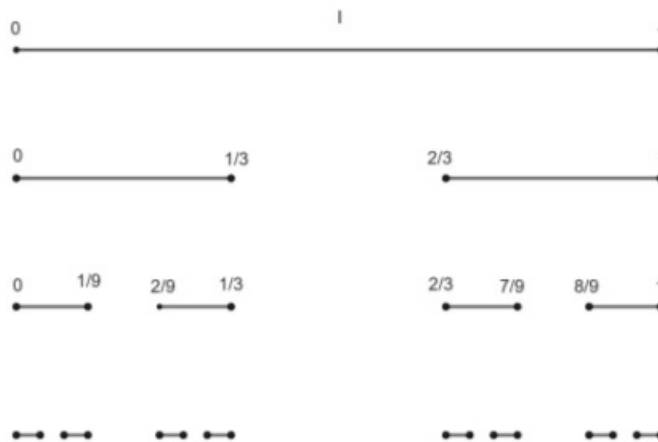
$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Repetimos o mesmo processo com os segmentos restantes para gerar oito segmentos de comprimento $1/3^2$, ou seja, obtemos o conjunto

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Repetimos o processo nos segmentos restantes e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor é o conjunto limite deste processo, A figura 15 ilustra os três primeiros passos da construção do Conjunto de Cantor:

Figura 15 – Construção do conjunto de Cantor



Fonte: ALVES; WHOBEL (2018).

Note que, após replicarmos esse procedimento infinitas vezes geramos uma sequência de conjuntos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \dots$ tais que

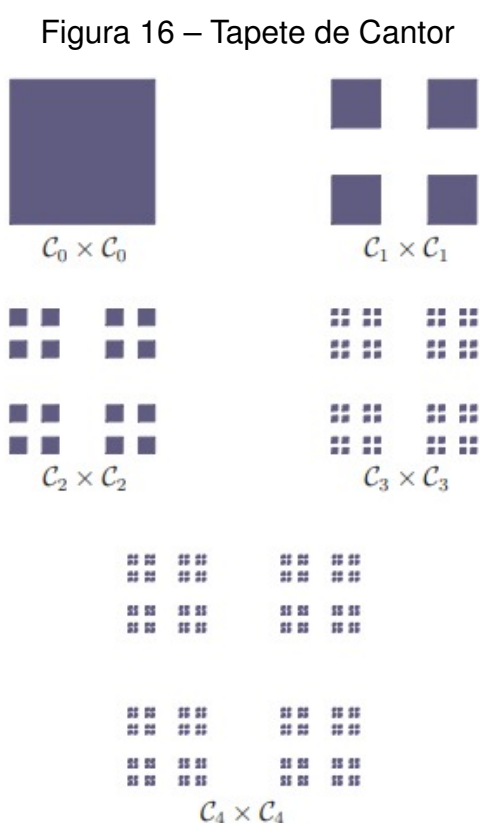
$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \dots$$

sendo C_n constituído pelos intervalos de C_{n-1} eliminando-se seus terços médios. O conjunto de Cantor é o limite desta sequência:

$$C_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

3.4.2 Tapete de Cantor

O fractal Tapete de Cantor é resultado de uma construção similar à do conjunto de Cantor. Começamos de uma região quadrada unitária $C_0 \times C_0$, que é dividida em nove regiões quadradas menores cujos lados medem $1/3$ e removemos o terço médio de cada lado para obter quatro quadrados de lado $1/3$, ou seja, o produto cartesiano do conjunto C_1 . Em seguida, repetimos o processo em cada quadrado restante para obter 4^2 quadrados de comprimento $1/3^2$, ou seja, o produto cartesiano do conjunto C_2 . Repetimos o mesmo processo nos quadrados restantes e assim sucessivamente. O tapete de Cantor é o conjunto limite do processo. A figura 16 ilustra quatro etapas da construção do tapete de Cantor.



Fonte: SILVA (2019, p. 18).

Recursivamente temos a sequência $C_0 \times C_0 \supset C_1 \times C_1 \supset C_2 \times C_2 \supset \dots$ com cada $C_i \times C_i$ formado por 4^i regiões quadradas semelhantes, com lados que medem $1/3^i$.

Assim, o tapete de Cantor é dado por

$$C_\infty \times C_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \times C_i.$$

3.4.3 Triângulo de Sierpinski

Figura 17 – Waclaw Sierpinski



Fonte: <https://www.corbisimages.com/stock-photo/rightsmanaged/4221184288/waclaw-sierpinski>

Waclaw Sierpinski nasceu em 14 de março de 1882 em Varsóvia, Império Russo (atual Polônia). Na escola, era muito talentoso para a matemática, sendo notado rapidamente por seu primeiro professor de matemática. Este período foi marcado pela ocupação da Rússia na Polônia, foi um período difícil para o talentoso Sierpinski. Os russos implantaram medidas restritivas nas escolas, forçando sua língua e cultura. Apesar disso, Sierpinski entrou no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Varsóvia em 1899, no qual concluiu a graduação no ano de 1904 e o doutorado em 1908. Foi o criador dos “monstros matemáticos”: Triângulo e Tapete de Sierpinski.

Para construirmos o triângulo de Sierpinski, iniciamos com um triângulo equilátero S_0 e dividimos este triângulo em quatro triângulos equiláteros considerando os pontos médios de cada lado e retiramos o triângulo central para obter três triângulos de lado $1/2$. Repetimos o processo em cada triângulo restante para obter 3^3 triângulos

de lado $1/2^2$. Repetimos o mesmo processo nos triângulos restantes e assim sucessivamente. O triângulo de Sierpinski é o conjunto limite do processo. A figura 18 ilustra quatro etapas da construção do triângulo de Sierpinski.

Figura 18 – Construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: <https://www.inf.ufsc.br/~aldo.vw/visao/2000/fractais/index.html>

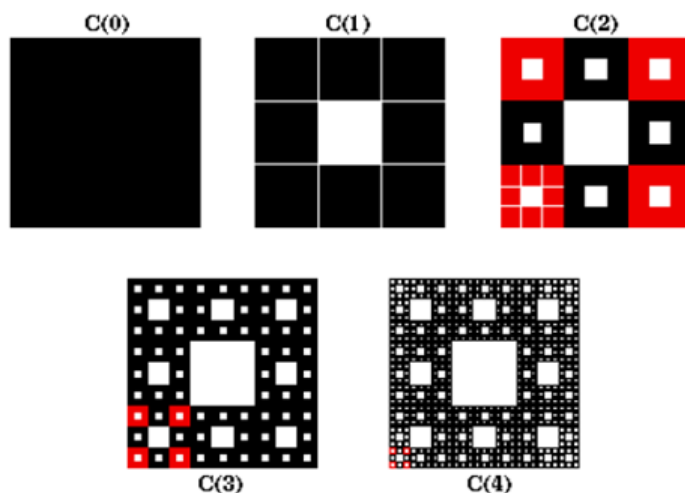
Recursivamente temos a sequência $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$ sendo cada S_i formado por 3^i regiões triangulares, semelhantes ao triângulo inicial, com lados de tamanho $1/2^i$. Assim, o triângulo de Sierpinski é o limite desta sequência:

$$S_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i.$$

3.4.4 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski tem uma construção similar à do triângulo de Sierpinski. Começamos de um quadrado unitário Q_0 e dividimos cada lado deste quadrado em três partes iguais e removemos o quadrado central para obter um conjunto Q_1 formado por 8 quadrados congruentes com lado $1/3$. Repetimos o processo em cada quadrado restante para obter um conjunto Q_2 formado por 8^2 quadrados de lado $1/3^2$. Na i -ésima etapa teremos um conjunto Q_i formado por 8^i quadrados com lado $1/3^i$. Repetimos o mesmo processo nos quadrados restantes e assim sucessivamente. O Tapete de Sierpinski é o conjunto limite do processo. A figura 19 ilustra quatro etapas da construção do tapete de Sierpinski.

Figura 19 – Construção do Tapete de Sierpinski



Fonte: <http://www.gloomy-grim.info/>

Recursivamente temos a sequência $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \cdots \supset Q_{i-1} \supset Q_i \cdots$. Assim, o tapete de Sierpinski é o limite desta sequência:

$$Q_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Q_i.$$

3.4.5 Curva de Koch

Figura 20 – Helge Von Koch



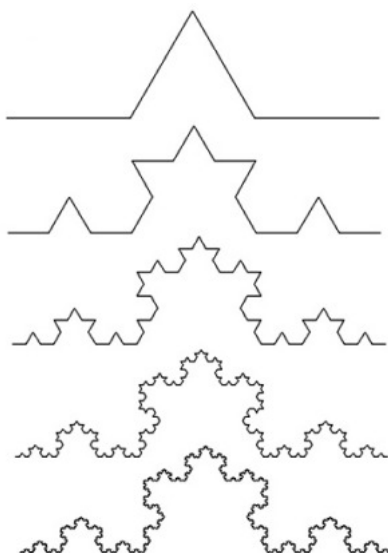
Fonte: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html>

Nascido em Estocolmo, no ano de 1870, Niels Fabian Von Koch estudou na Universidade de Estocolmo, onde obteve sua Graduação e o título de Doutor. Iniciou sua docência na mesma Universidade onde estudou, no ano de 1911. O matemático

desenvolveu diversos trabalhos nas áreas de Teoria dos Números e Equações Diferenciais. Criou o “monstro” matemático Curva de Koch, caracterizada por ser uma curva contínua sem tangentes, obtida por meio de uma construção geométrica elementar. Através desta curva exemplificou uma curva contínua em todo o intervalo, mas não diferenciável em qualquer parte.

A construção da Curva de Koch é feita a partir de um segmento de reta unitário K_0 , dividindo-o em três partes iguais. Na região central, constrói-se um triângulo equilátero e retira-se o intervalo aberto que representa sua base, obtendo assim um conjunto K_1 formado por 4 segmentos de tamanho $1/3$. Repete-se o processo em cada segmento restante para obter um conjunto K_2 formado por 4^2 segmentos de tamanho $1/3^2$. Repetimos o mesmo processo nos segmentos restantes e assim sucessivamente. A curva de Koch é a curva limite deste processo. A figura 21 ilustra cinco etapas da construção da curva de Koch.

Figura 21 – Construção Curva de Koch

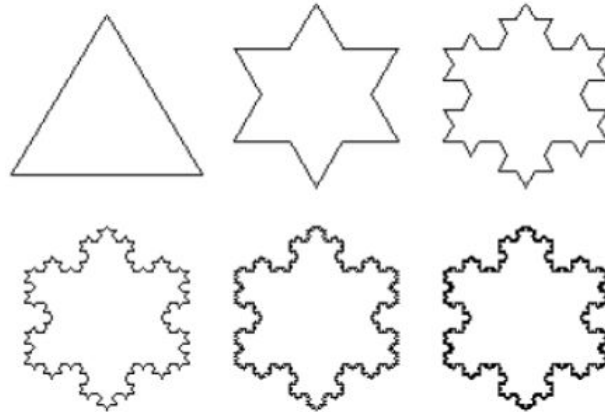


Fonte: <https://codigotranscendente.github.io/livro/livro/capitulo6.html>

3.4.6 Floco de neve de Koch

O processo da construção do Floco de neve de Koch é similar ao da curva de Koch. Iniciamos com um triângulo equilátero e construímos em cada lado uma curva de Koch. A figura 22 ilustra cinco etapas da construção do Floco de neve de Koch.

Figura 22 – Floco de Neve de Koch



Fonte: <https://www.ceticismoaberto.com/ciencia/213/ractaisuma-nova-viso-da-natureza>

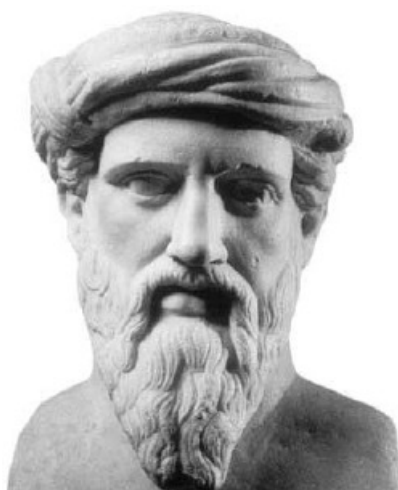
[//www.ceticismoaberto.com/ciencia/213/ractaisuma-nova-viso-da-natureza](https://www.ceticismoaberto.com/ciencia/213/ractaisuma-nova-viso-da-natureza)

4 O caule: teorema de Pitágoras

Neste capítulo, trataremos de um resultado importante que é fundamental para o entendimento do fractal árvore pitagórica: o teorema de Pitágoras.

Pitágoras nasceu em uma ilha grega chamada Samos, na costa marítima do que hoje é a Turquia, por volta de 570 a.C. Por conta da perda de todos os documentos dessa época, a vida de Pitágoras tem muitos mistérios, então nada pode ser afirmado com plena convicção.

Figura 23 – Pitágoras de Samos



Fonte: RIBEIRO (2013)

As informações sobre a vida do matemático vieram por meio de referências de outros autores que vieram alguns séculos depois. Segundo estes autores, sua morte se deu em Crotona, cidade da Itália Meridional, aproximadamente 500 a.C., com o seu provável assassinato e a destruição da Escola Pitagórica. No entanto, não há certeza sobre a data da sua morte, outros autores dizem que Pitágoras fugiu para Metaponto, no sul da Itália, permanecendo até o fim da vida. Todas as referências sobre a vida de Pitágoras dão conta de que ele realizou muitas viagens e peregrinações. Ficou por aproximadamente 25 anos no Egito, local que marcou sua convivência com matemáticos e filósofos que o ajudaram a fundamentar seu conhecimento.

Pitágoras teria retornado para Samos quando tinha 56 anos, com o objetivo de fundar uma escola iniciática. Seus ensinamentos chamaram a atenção de muitos discípulos, mas também incitou a inimizade de um tirano da cidade chamado Policrates. Por conta disso, foi para Crotona, local onde reuniu um grupo de discípulos, para que juntos tivessem domínio da Matemática, Música e Astronomia. Fundou-se então a Escola Pitagórica, uma instituição de cunho religioso e intelectual, alicerçada nos seguintes conceitos:

- Prática de rituais religiosos na crença de que as almas se transmigram de um corpo a outro após a morte;
- Lealdade entre os membros;
- Total entrega da mente ao estudo da Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

Por conta das ideias da Escola Pitagórica, Pitágoras colecionou vários inimigos na época. Um deles começou a perseguí-lo, colocando o povo da cidade de Crotona contra Pitágoras, por meio de falsos testemunhos. A escola foi destruída. Pelo fato de a Escola Pitagórica ser secreta, não foi deixado nenhum registro escrito por Pitágoras, e possivelmente todos os que haviam se perderam com a morte de seus discípulos, culminando na aniquilação dos pitagóricos.

“Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”. Essa famosa relação entre os três lados de um triângulo retângulo ficou conhecida como Teorema de Pitágoras, na Geometria Euclidiana. Porém, de acordo com provas concretas, os babilônicos, egípcios e chineses já conheciam o teorema e utilizavam o seu resultado na resolução de problemas. Diversos tabletas encontrados por volta de 1800 a 1600 a.C., tornam evidente este fato. Um deles, chamado Plimpton 322, contém uma tabela de 15 linhas e 3 colunas, nas quais notamos os ternos pitagóricos, isto é, contendo as medidas dos três lados de um triângulo retângulo.

Figura 24 – Plimpton 322



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras>

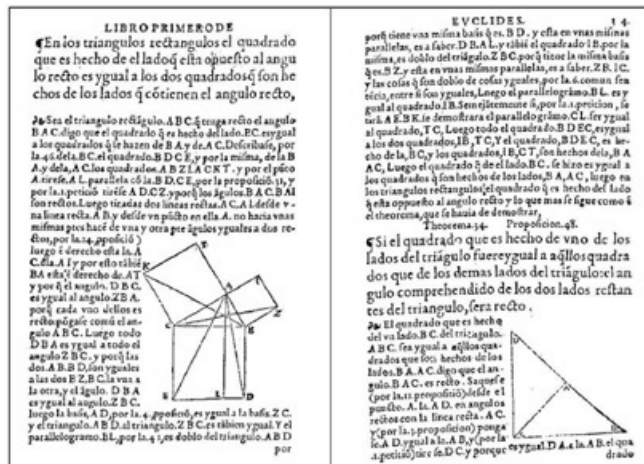
No Egito, o primeiro documento escrito, em grego, que trata do Teorema de Pitágoras são “Os Elementos”, de Euclides (360 – 295 a.C.). O Teorema pode ser encontrado na proposição 47, do Livro I, e sua prova é realizada utilizando a comparação entre áreas.

É válido frisar que, como os escritos originais não perduraram até os nossos dias, não se pode afirmar, com toda certeza, se de fato foi Pitágoras o responsável pela demonstração do Teorema que leva o seu nome. Além de secreta, a Escola Pitagórica era comunitária, por isso todo o conhecimento e descobertas pertenciam a todos, inclusive há a possibilidade de que alguns de seus discípulos tenham dado crédito a Pitágoras em suas demonstrações, seguindo o regimento da Escola. Certamente, Pitágoras não inventou o teorema, mas é provável que leve o seu nome por ter sido ele o primeiro a se preocupar em propor uma demonstração geral. Hoje temos conhecimento de que há mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, seus idealizadores incluem personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci. Neste trabalho estamos interessados na demonstração feita por Euclides, que consta nos Elementos (BOYER, 1974).

4.1 Demonstração de Euclides

Euclides de Alexandria enunciou e apresentou uma demonstração do Teorema de Pitágoras em sua principal obra *Os Elementos*, composta por 13 livros.

Figura 25 – Teorema de Pitágoras



Fonte: <https://jamessimat.blogspot.com/2015/09/elementos-proposicion-i47-y-su-converso.html>

Neste trabalho usamos a demonstração dada no livro de História da Matemática do autor Boyer (1974, p.78).

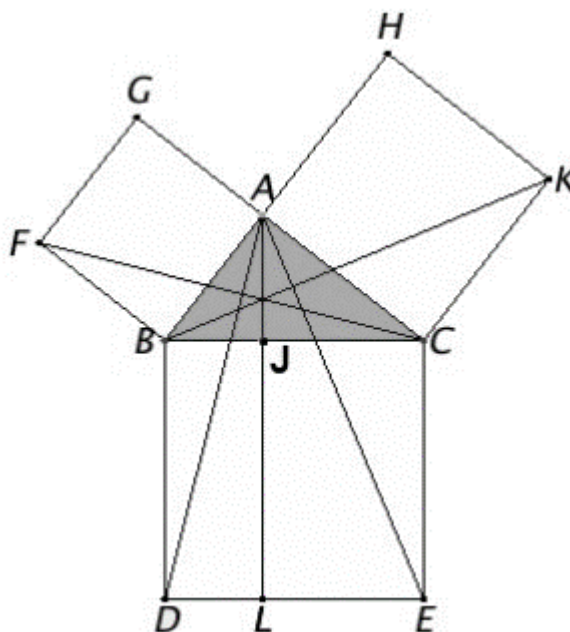
Teorema 4.1 (Proposição I.47). *Nos triângulos retângulos o quadrado do lado que subtende o ângulo reto é equivalente aos quadrados dos lados que compõem o ângulo reto.*

Prova: Constrói-se quadrados exteriores ao triângulo sobre cada um dos lados do triângulo ABC . Dessa forma, tem-se o quadrado $ABFG$ sobre o lado AB , o quadrado $ACKH$ sobre o lado AC e o quadrado $BCED$ sobre o lado BC . Trace os segmentos CF , BK , AD , AE o segmento AL perpendicular a DE no ponto L . Seja J o ponto de interseção de AL com o segmento BC . Observe a figura abaixo: Note que:

$$F\widehat{BC} = F\widehat{BA} + A\widehat{BC} = 90^\circ + A\widehat{BC} = A\widehat{BC} + C\widehat{BD} = A\widehat{BD} \tag{4.1}$$

Temos ainda que $\overline{BC} = \overline{BD}$, $F\widehat{BC} \equiv A\widehat{BD}$ e $\overline{BF} = \overline{AB}$. Portanto, pela congruência LAL , $\triangle CBF \equiv \triangle ABD$.

Figura 26 – Demonstração de Euclides



Fonte: BOYER (1974).

A área do triângulo CBF em relação a base BF e área do triângulo ABD em relação a base BD são, respectivamente:

$$S(CBF) = \frac{1}{2} (\overline{BF} \cdot \overline{BF}) = \frac{1}{2} (\overline{BF})^2 \text{ e } S(ABD) = \frac{1}{2} (\overline{BD} \cdot \overline{DL}) \quad (4.2)$$

e a área do retângulo $BCLJ$ é $S(BDLJ) = (\overline{BD} \cdot \overline{DL})$

Como os triângulos CBF e ABD são congruentes, eles possuem mesma área.

Obtemos, assim:

$$S(BDLJ) = \overline{BD} \cdot \overline{DL} = 2 \cdot S(ABD) = 2 \cdot S(CBF) = (\overline{BF})^2 = (\overline{AB})^2 \quad (4.3)$$

Analogamente, temos que os triângulos CAE e CKB são congruentes, pelo caso de congruência LAL, temos:

$$S(CJLE) = \overline{CE} \cdot \overline{LE} = 2 \cdot S(CAE) = 2 \cdot S(CKB) = (\overline{CK})^2 = (\overline{AC})^2 \quad (4.4)$$

Como

$$S(CBDE) = S(BDLJ) + S(CJLE) \quad (4.5)$$

Temos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{BF})^2 + (\overline{CK})^2 \Rightarrow (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \quad (4.6)$$

provando a validade do Teorema de Pitágoras. □

Neste trabalho, para construção da árvore pitagórica usaremos a imagem da demonstração de Euclides do teorema de Pitágoras.

5 Arboreus fractus

Neste trabalho, cunhamos a palavra *Arboreus fractus* para denominar os fractais do tipo árvore. A palavra *arboreus* é um termo derivado da etimologia da palavra árvore que tem origem no latim com o termo *arbor* e esta raiz origina outros termos, como, por exemplo, arbóreo (em latim como *arboreus*)¹

Os fractais tipo árvore, como o nome sugere, são objetos cujas estruturas são ramificadas, geralmente semelhantes às árvores. Há dois tipos de fractais tipo árvore: as árvores bifurcadas e as árvores pitagóricas. Aqui, apresentaremos as principais ideias dos fractais ramificados e no capítulo 6 detalharemos o fractal árvore pitagórica.

Na construção das árvores que apresentaremos neste capítulo, usaremos um conjunto de funções chamado *Sistemas de funções iteradas-IFS*² que transformam os pontos da figura através de funções afins.

5.1 Árvore bifurcada simétrica

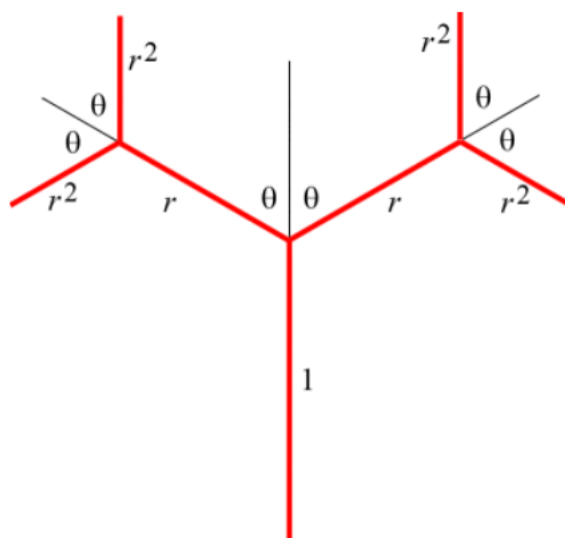
Para construirmos uma árvore binária simétrica, escolhemos um ângulo θ com $0 < \theta < \pi$ e um fator de escala r com $0 < r < 1$. Começamos com um segmento de reta vertical (o tronco) de comprimento unitário. O tronco se divide em dois ramos no topo, cada um formando um ângulo de θ com a extensão linear do tronco, um para a esquerda e outro para a direita. Cada ramificação tem comprimento r . Cada um desses dois ramos forma o tronco de uma subárvore que se divide em mais dois ramos seguindo a mesmo processo. O ângulo é novamente θ e o comprimento de cada um dos quatro novos ramos é r^2 .

¹ <https://etimologia.com.br/arvore/>

² Um Sistema de Funções Iteradas (IFS - do inglês Iterated Function System) é uma técnica para construir fractais através da aplicação de funções que descrevem o processo. Matematicamente, é definido por um conjunto finito de aplicações de contração

A figura 27 ilustra a ideia com $\theta = \pi/3$ e $r = 0.65$. A árvore binária simétrica é obtida adicionando-se sucessivamente mais ramificações, usando o ângulo θ e o fator de escala r para cada conjunto de novos segmentos de ramificação.

Figura 27 – Árvore bifurcada simétrica

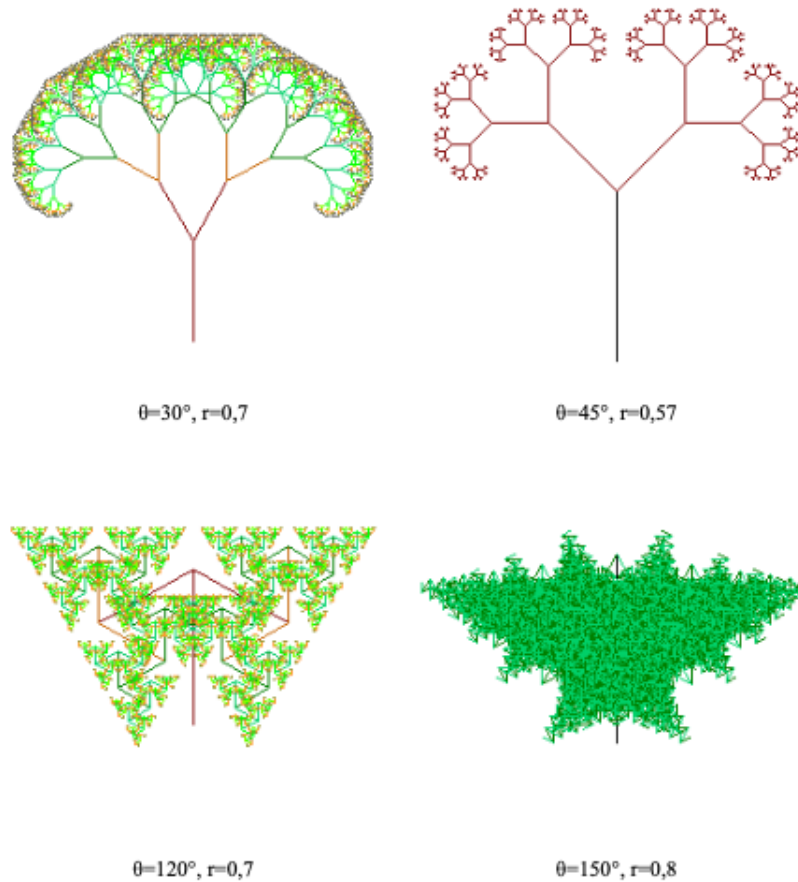


Fonte:

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

Na figura 28 apresentamos alguns exemplos de árvores binárias simétricas depois que 12 iterações foram realizadas. Os pontos limites dos ramos em uma árvore binária são chamados de copas dos ramos.

Figura 28 – Árvore bifurcada simétrica



Fonte:

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

As IFS que realizam este processo são dadas por:

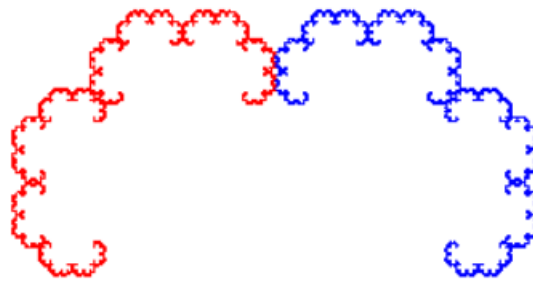
$$f_1(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & r \operatorname{sen}(\theta) \\ -r \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Note que a função $f_1(x, y)$ é uma redução de fator r seguida de uma rotação de um ângulo θ e $f_2(x, y)$ é uma redução de fator r seguida de uma rotação de uma

ângulo $-\theta$. A função $f_3(x, y)$ não é uma contração, e logo $\{f_1, f_2, f_3\}$ não é um sistema de funções iteradas. Portanto, a teoria dos sistemas de funções iteradas não pode ser aplicada, mas, neste caso, podemos provar³ que as iterações do segmento inicial dadas por este sistema de função iterada convergem para um conjunto limite que dependerá do conjunto inicial. Este tipo de sistema de função iterada é frequentemente chamado de IFS com condensação. Se apenas as duas primeiras funções forem usadas como sistema de funções iteradas, o sistema será de similaridade e todos os conjuntos iniciais convergirão para as mesmas copas de ramos. A figura 29 apresenta duas árvores que tem a mesma copa do tipo.

Figura 29 – Copa da árvore bifurcada simétrica



Fonte:

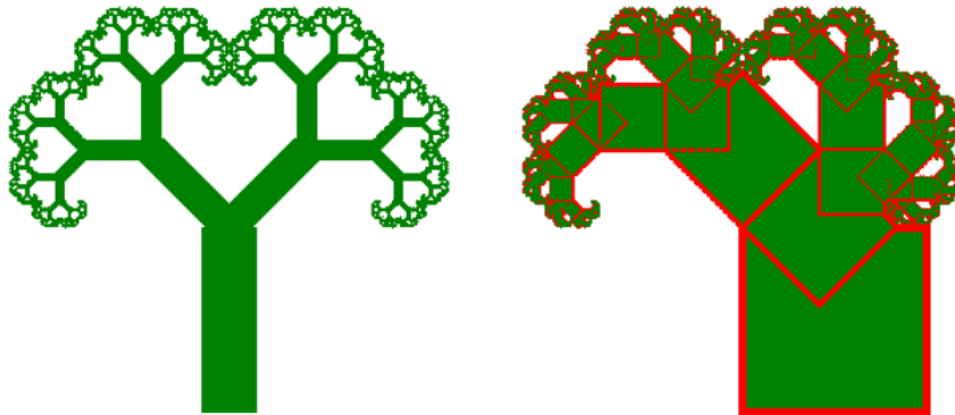
<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

Se o fator de escala r for muito pequeno, os galhos da árvore se cruzarão, enquanto se r for muito grande, os galhos se sobreporão. Mandelbrot e Frame⁴ mostraram que para cada ângulo θ , existe um fator de escala único r_f tal que a árvore binária simétrica com esses θ e r_f os galhos podem tocar em um único ponto, mas não podem se cruzar. Nesse caso, as pontas dos galhos do lado esquerdo coincidirão com as pontas dos galhos de alguns galhos do lado direito, mas nenhuma ponta do galho coincidirá com qualquer ponto sem ponta da árvore. Três exemplos são mostrados na figura 31 para $\theta = \pi/3$.

³ <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/generalconvergence.htm>

⁴ <https://www.math.union.edu/research/fractaltrees/>

Figura 30 – Árvore bifurcada simétrica



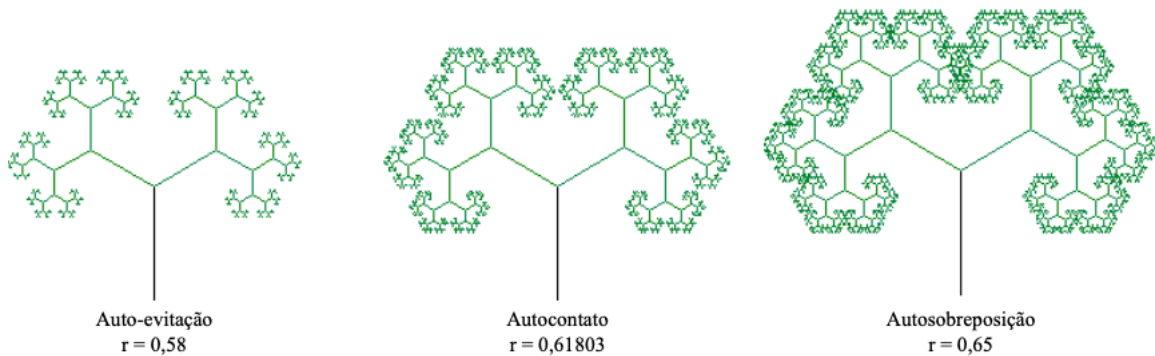
árvore de 45°
retângulo grosso como conjunto inicial

árvore de 45°
quadrado unitário como conjunto inicial

Fonte:

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

Figura 31 – Árvore bifurcada simétrica



Auto-evitação
 $r = 0,58$

Autocontato
 $r = 0,61803$

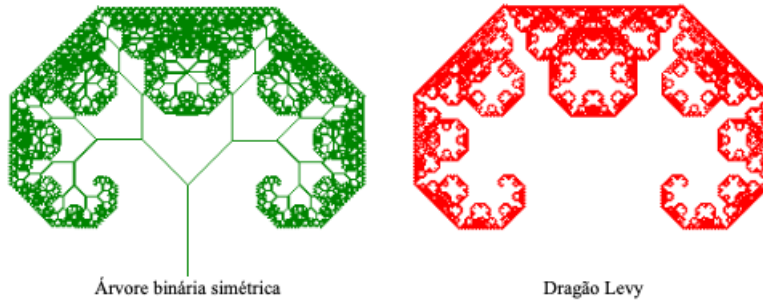
Autosobreposição
 $r = 0,65$

Fonte:

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

As copas dos galhos para uma árvore binária simétrica com $\theta = \pi/4$ e $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ formam um fractal igual ao fractal conhecido como *Dragão Lévy* (figura 32).

Figura 32 – Árvore bifurcada simétrica



Árvore binária simétrica

Dragão Levy

Fonte:

<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/symbinarytree.htm>

5.2 Fractal Samambaia

O fractal *Samambaia de Barnsley* apareceu pela primeira vez no artigo inaugural sobre IFS, de autoria do matemático britânico Michael Barnsley e posteriormente publicado em seu livro intitulado *Fractals Everywhere* (BARNSELY, 1988). Para construirmos o fractal Samambaia de Barnsley usando um sistema de IFS, vamos usar as transformações propostas por Barnsley e dadas por

$$f_1(x, y) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$f_3(x, y) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04 \end{bmatrix}, f_4(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A figura 33 ilustra a aplicação do sistema IFS para implementação da Samambaia.

Figura 33 – Fractal samambaia



Fonte <http://ultradownloads.com.br/papeldeparede/Samambaia/>

Ao observarmos a figura 33, especialmente os ramos que surgem no caule, identificamos que estes ramos são cópias reduzidas da Samambaia. O caule é o eixo que sustenta os ramos da direita e da esquerda.

É válido destacar que objetos da natureza como o floco de neve e a samambaia não apresentam cópias reduzidas idênticas de si. Podemos dizer que na natureza existe uma autossimilaridade em diferentes escalas, e logo, o floco de neve e a samambaia da natureza possuem autossimilaridade estatística, pois, essa autossimilaridade existe em média, em diferentes escalas. Já nos fractais matemáticos floco de neve e samambaia, observamos que as partes são cópias exatas do todo.

6 A árvore pitagórica

Finalmente, neste capítulo trataremos do fractal que é o tema do trabalho: a árvore pitagórica. Sua construção tem como base a conhecida figura da demonstração de Euclides do teorema de pitágoras. Este fractal foi construído pela primeira vez em 1942 pelo matemático alemão Albert Bosman. Bosman foi um professor holandês de engenharia elétrica e matemática. Uma cópia de seu primeiro esboço (desenhado à mão!). Da árvore com triângulos isósceles retângulos tinha cerca de 33,5 polegadas por 23,5 polegadas. Em 1957, Bosman publicou um livro sobre *Het Wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde* (o maravilhoso campo de exploração da geometria plana ¹) que continha uma descrição da árvore (para mais detalhes consulte ²).

Neste capítulo, faremos um estudo elementar deste fractal detalhando as propriedades exploradas no artigo intitulado *Uma árvore Fractal: explorando fractais no ensino médio* de autoria de REIS (2015).

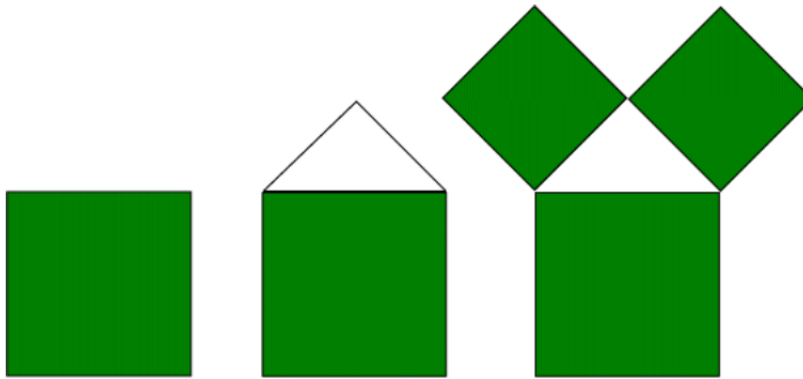
6.1 Processo iterativo

A construção da árvore pitagórica consiste nos seguintes passos: começamos com um quadrado. Em seguida, construímos um triângulo isósceles retângulo cuja hipotenusa seja o lado superior do quadrado inicial. Depois, construímos quadrados nos outros dois lados deste triângulo isósceles, como mostra a figura 34.

¹ tradução nossa

² <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/Bosman.htm>

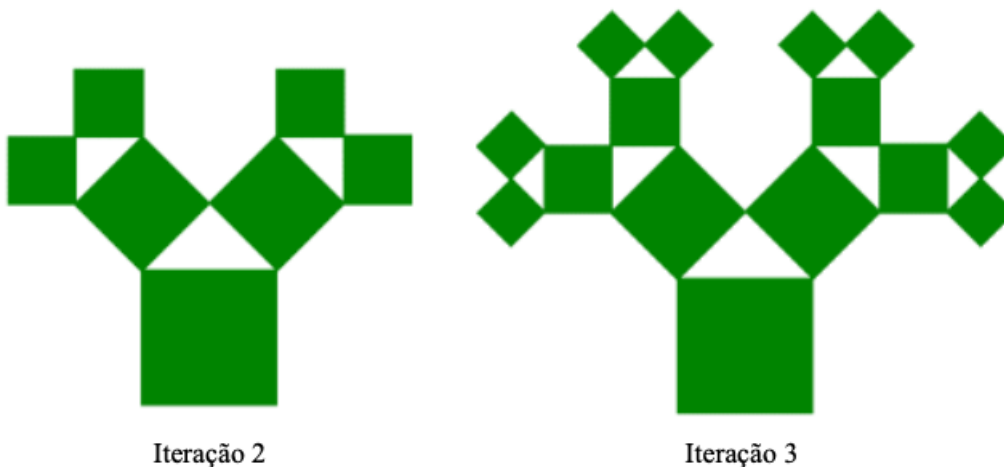
Figura 34 – Processo iterativo da árvore pitagórica



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

Em seguida, repita o processo recursivamente em cada um dos dois novos quadrados. A figura 35 abaixo mostra as próximas duas iterações:

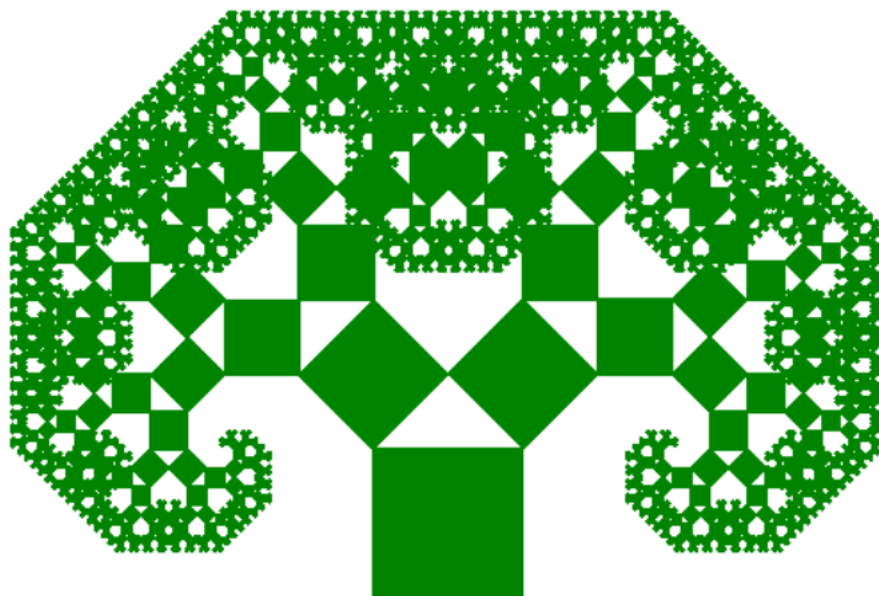
Figura 35 – Processo iterativo da árvore pitagórica



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

O conjunto limite desta sequência de iterações chama-se *Árvore fractal*. A figura 36 ilustra uma boa aproximação da árvore pitagórica:

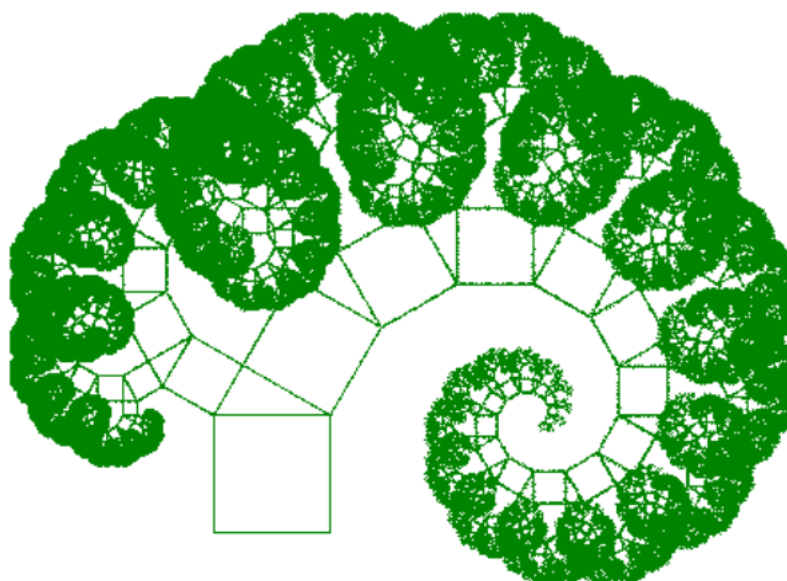
Figura 36 – Árvore pitagórica



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

Os triângulos construídos nas hipotenusas podem ser qualquer triângulo retângulo com ângulos agudos e o formato da árvore pitagórica vai variar de acordo com os ângulos destes triângulos. A figura 37 mostra o que acontece após 20 iterações se cada triângulo tiver ângulos de $\pi/3$ e $\pi/6$.

Figura 37 – Árvore pitagórica



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

Podemos construir a árvore pitagórica através do seguinte sistema de funções iteradas³:

$$f_1(x, y) = \begin{bmatrix} (\cos(\theta))^2 & -\cos(\theta)\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta)\text{sen}(\theta) & (\cos(\theta))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x, y) = \begin{bmatrix} (\text{sen}(\theta))^2 & -\cos(\theta)\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta)\text{sen}(\theta) & (\text{sen}(\theta))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\cos(\theta))^2 \\ 1 + \cos(\theta)\text{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$

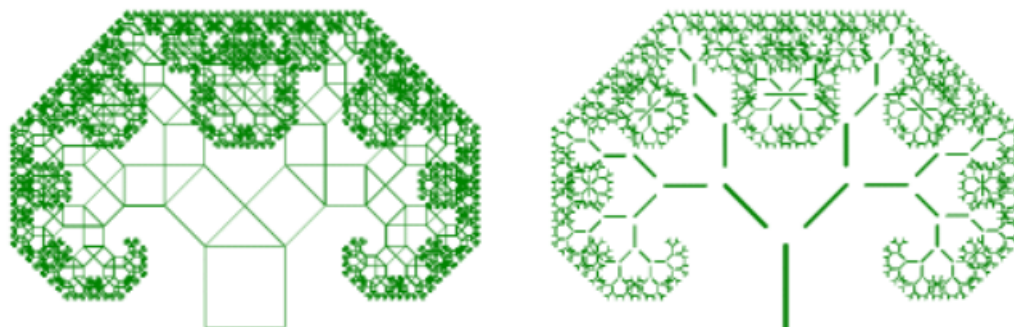
$$f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Note que a função $f_3(x, y)$ não é uma contração, e logo $\{f_1, f_2, f_3\}$ não é um sistema de funções iteradas. Portanto, a teoria dos sistemas de funções iteradas não pode ser aplicada, mas, neste caso, podemos provar⁴ que as iterações do quadrado inicial dadas por este sistema de função iterada convergem para um conjunto limite. Porém, neste caso o conjunto limite definido dependerá do conjunto inicial usado. A figura 38 ilustra esta propriedade: a árvore à esquerda foi gerada após 10 iterações começando com um quadrado e $\theta = \pi/4$ e árvore à direita foi gerada após 10 iterações começando com um segmento de linha vertical.

³ <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

⁴ <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/treeconvergence.htm>

Figura 38 – Árvore pitagórica



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>

Observe que enquanto o "tronco" das duas árvores são diferentes, as "folhas externas" das árvores parecem ser muito semelhantes. Isso ocorre porque se você excluir a terceira função do sistema de funções iteradas, as duas funções restantes são contrações e, portanto, têm um atrator único, não importa qual seja o conjunto inicial.

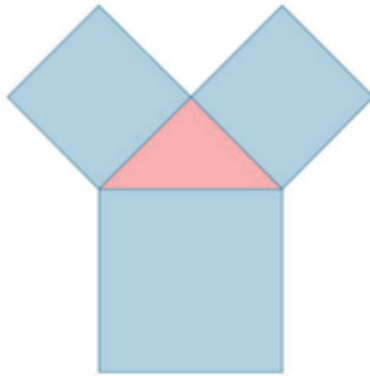
6.2 Propriedades matemáticas elementares

No que segue, vamos explorar algumas propriedades elementares da árvore pitagórica entre elas:

1. Número de triângulos e quadrados;
2. Perímetro dos triângulos e dos quadrados;
3. Área dos triângulos e dos quadrados.

Nas construções a seguir, iremos chamar de "Nível", cada conjunto formado por um triângulo retângulo com quadrados construídos em cada um dos seus lados, de acordo com a figura abaixo.

Figura 39 – Base para construção da Árvore Pitagórica



Fonte: <https://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf>

6.2.1 Número de triângulos e quadrados

Note que a figura inicial tem somente 1 triângulo. No nível 2, cada cateto do triângulo anterior gera 2 novos quadrados, por consequência 2 novos triângulos. No nível 3, os dois triângulos anteriores, que juntos possuem 4 catetos, vão gerar 4 quadrados e a partir destes 4 triângulos serão gerados. Analisando este processo recursivo, temos a seguinte sequência:

$$(1, 2, 4, 8, 16) \tag{6.1}$$

Observamos então que se trata de uma PG de razão $q = 2$, e primeiro termo $a_1 = 1$. Daí podemos notar que o número de triângulos em um certo nível de interação é determinado através do termo geral dessa progressão. Vamos denotar por t_n o número de triângulos da n -ésima interação, temos.

$$t_n = 2^{n-1} \tag{6.2}$$

Por fim, para determinar o número total de triângulos acumulados em determinado nível, basta utilizarmos a soma dos n termos dessa PG. Essa soma em função do nível n de interação é dada por,

$$s_n = 2^n - 1 \tag{6.3}$$

Podemos calcular o número de quadrados de diversas maneiras. Utilizaremos como base novamente um pensamento indutivo e recursivo. A construção inicia-se com 3 quadrados, conforme 39. Para efeitos práticos, desconsideraremos inicialmente o primeiro quadrado da base, depois introduziremos ele ao resultado final, se necessário. Logo, o nível 1 tem 2 quadrados. No nível 2, cada quadrado serviu de base para formação de um triângulo e estes, por sua vez, dão origem a 4 novos quadrados. O processo se repete no nível 3, gerando, desta vez, 8 novos quadrados. Analisamos indutivamente que temos a sequência,

$$(2, 4, 8, 16) \quad (6.4)$$

Claramente se trata de uma PG de razão $q = 2$, e primeiro termo $a_1 = 2$. Então o número de quadrados em cada nível será o termo geral dessa progressão (com exceção do primeiro nível que tem 3 quadrados). Chamemos de q_n com $n \geq 2$, o número de quadrados da n -ésima interação, temos,

$$q_n = 2^n \quad (6.5)$$

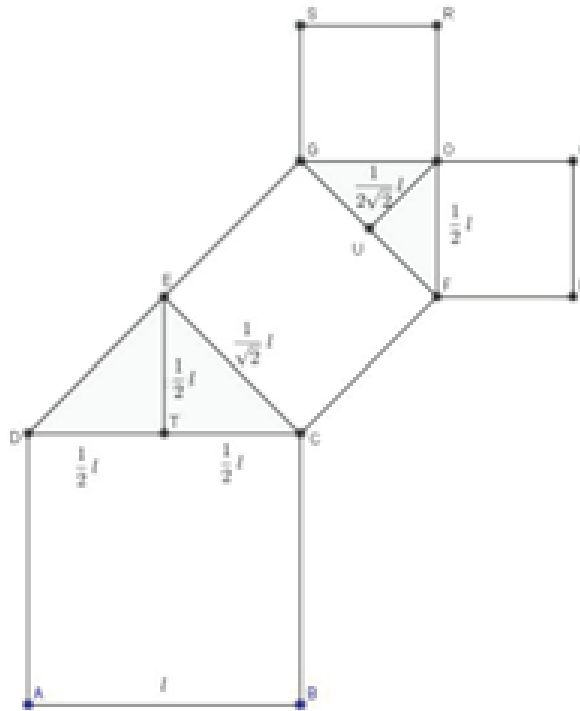
Assim sendo, o número total de quadrados acumulados em determinado nível (n -ésima interação) é obtido através da soma dessa PG, que considerando o quadrado inicial, é dada por,

$$s_n = 2^{n+1} - 1 \quad (6.6)$$

6.2.2 Perímetro dos triângulos e dos quadrados

Em nossa construção, os triângulos são todos semelhantes (Caso AAA), ou seja, para determinarmos o perímetro de cada um deles em função do nível de interação, investigaremos a razão de proporcionalidade entre um dos lados (neste caso a base) dos triângulos de uma interação a outra e verificaremos se essa razão é constante. Para tanto, analisaremos a construção abaixo que descreve um ramo da Árvore de Pitágoras.

Figura 40 – Detalhes de uma Árvore Pitagórica. Razão de semelhança entre os triângulos



Fonte: <https://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf>

Observe que o primeiro triângulo tem como base o lado do primeiro quadrado, no caso l . O segundo tem como base o lado do outro quadrado, que é justaposto a um dos catetos do primeiro triângulo. Como o triângulo é retângulo isósceles de hipotenusa l , percebemos facilmente que seus catetos medem $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Portanto, temos que a base do segundo triângulo é exatamente $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Devido a autossimilaridade dos fractais, essa proporcionalidade é constante. Assim sendo, como os triângulos usados na construção são semelhantes, a razão de proporcionalidade entre os lados é a mesma razão entre os perímetros. Essa razão é a constante de proporcionalidade que, segundo verificamos vale $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Analisando nível a nível, no nível 1 de interação, o perímetro do triângulo é dado por $p_1 = l + \sqrt{2}l = l(1 + \sqrt{2})$. Logo, para determinarmos o perímetro de cada triângulo da n -ésima interação, basta encontrarmos o termo geral da PG. Denotemos esse termo por p_n , representando o n -ésimo perímetro. Temos,

$$p_n = l(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \quad (6.7)$$

Da mesma forma realizada anteriormente, verificaremos a constante de proporcionalidade entre os lados dos quadrados. Na figura 40, o primeiro quadrado tem lado l , cada um dos quadrados seguintes tem lado $\frac{\sqrt{2}}{2}l$, então a constante de proporcionalidade é $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para efeitos práticos, iremos considerar a contagem a partir do primeiro quadrado justaposto ao cateto do primeiro triângulo. Considerando os quatro lados de cada quadrado, a sequência que representa os perímetros investigados é uma PG de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e primeiro termo $a_1 = 2\sqrt{2}l$. Ou seja, o perímetro do n -ésimo quadrado é o termo geral da PG. Chamemos de l_n o perímetro de um dos n -ésimos quadrados, temos,

$$l_n = 4l \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad (6.8)$$

Novamente, para o nível 1, devemos adicionar os 4 lados do maior quadrado da base.

6.2.3 Área dos triângulos e dos quadrados

Iniciaremos nossa análise demonstrando a seguinte Proposição:

Proposição 1. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes. Se k é a constante de proporcionalidade entre os lados desse triângulo, temos que a constante de proporcionalidade entre as áreas desse triângulo é k^2 .*

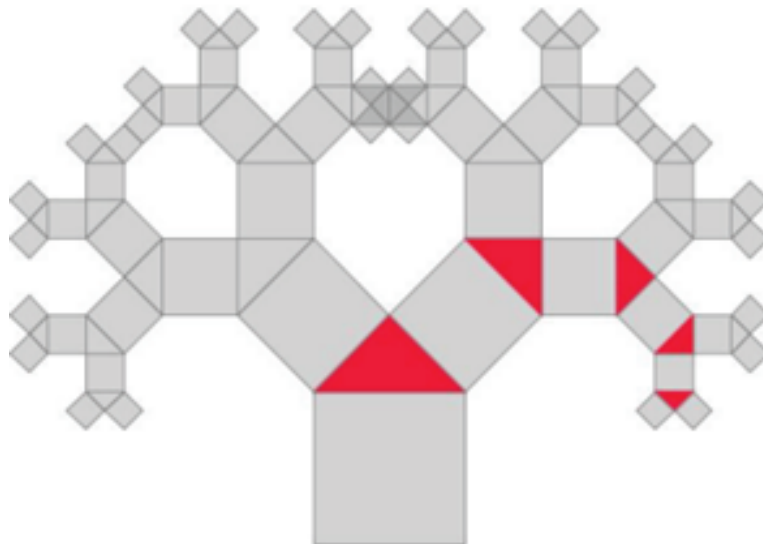
Demonstração. Sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{B'C'} = a'$ e h e h' as alturas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente relativas às bases BC e $B'C'$. Como, por hipótese, eles são semelhantes, temos que $a = ka'$ e $h = kh'$. Sabemos que a área $A(ABC) = \frac{ah}{2}$ e $A(A'B'C') = \frac{a'h'}{2}$, daí

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka'kh'}{a'h'} = k^2 \quad (6.9)$$

□

Nosso objetivo é determinar a área de cada um dos triângulos gerados em uma n -ésima interação. Para efeitos práticos, consideraremos somente um ramo da Árvore Pitagórica, que está destacado em vermelho.

Figura 41 – Triângulos considerados na análise



Fonte: <https://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf>

Segundo a proposição 1, se sabemos a razão de semelhança entre dois triângulos, a razão entre suas áreas é dada pelo quadrado desta razão. Como visto anteriormente, a razão entre dois lados de triângulos subsequentes é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, então a razão entre as áreas será $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Com isso, se montarmos uma sequência com áreas dos triângulos analisados temos,

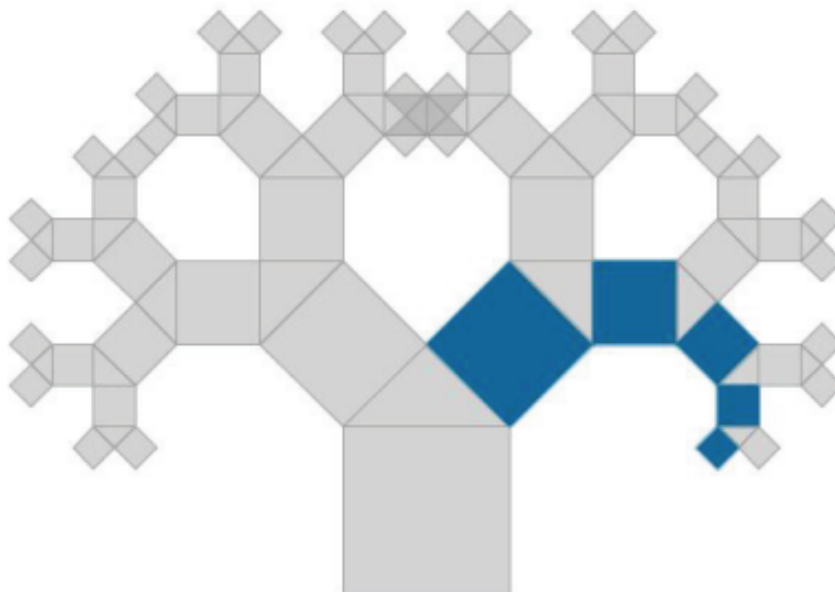
$$\left(\frac{1}{4} l^2, \quad \frac{1}{8} l^2, \quad \frac{1}{16} l^2, \quad \dots \right) \quad (6.10)$$

Obviamente essa sequência se trata de uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{1}{4} l^2$. Nosso interesse é o n -ésimo termo dessa sequência. Denotando por T_n esse valor, temos,

$$T_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (6.11)$$

Inicialmente vamos considerar apenas os quadrados justapostos aos catetos desses triângulos, posteriormente, quando for necessário, adicionaremos a área do quadrado maior da base.

Figura 42 – Quadrados que inicialmente entram na contagem



Fonte: <https://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf>

Vimos anteriormente que a razão de proporcionalidade entre os lados dos quadrados é $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Analisando a proposição 1, concluímos que a razão entre as áreas de dois quadrados subsequentes é exatamente $\frac{1}{2}$. Considerando um dos quadrados justapostos ao primeiro triângulo como primeiro elemento dessa sequência, temos que, sendo seu lado $\frac{\sqrt{2}}{2}l$, sua área é $a_1 = \frac{1}{2}l^2$. Portanto, a sequência com as áreas de cada quadrado em relação ao nível de interação é dada por,

$$\left(\frac{1}{2} l^2, \quad \frac{1}{4} l^2, \quad \frac{1}{8} l^2, \quad \frac{1}{16} l^2, \quad \dots \right) \quad (6.12)$$

Note que se trata de uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{1}{2}l^2$. A área de um dos quadrados na n -ésima interação é representada pelo termo geral desta sequência. Consideremos Q_n a área desse n -ésimo quadrado, então Q_n é definido por,

$$Q_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (6.13)$$

7 Flores e frutos na arte

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Teorema de Pitágoras e da Árvore pitagórica na arte através das obras de alguns artistas que usam a matemática como linguagem de expressão artística. Para isto, exploramos o site no site <https://culturacientifica.com>, especialmente os artigos: *Cultura pitagórica: arte* (disponível em <https://culturacientifica.com/2013/05/22/cultura-pitagorica-arte/>) e *El teorema de Pitágoras en el arte* (disponível em <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>).

7.1 Teorema de Pitágoras na arte

O Teorema de Pitágoras, é, sem dúvida, o resultado mais conhecido em todo o mundo. Este famoso resultado aparece em diferentes manifestações culturais, como por exemplo, nas artes plásticas, literatura, música, cinema, publicidade, etc. Aqui, apresentaremos algumas manifestações artísticas que usam o Teorema de Pitágoras, em particular a figura geométrica da demonstração de Euclides (veja figura 26). Assim, vamos começar pelas artes plásticas. Veremos como alguns artistas plásticos expressam a sua arte com o teorema de Pitágoras usando-o em suas pinturas e esculturas.

Vamos começar colhendo os frutos do teorema de Pitágoras produzidos pelo artista conceptual norte-americano *Mel Bochner* (figura 43), nascido em Pittsburgh, na Pensilvânia, em 1940, que ao longo da sua carreira artística tem realizado uma interessante e contínua reflexão sobre a matemática e, em particular, sobre a geometria.

Figura 43 – Mel Bochner

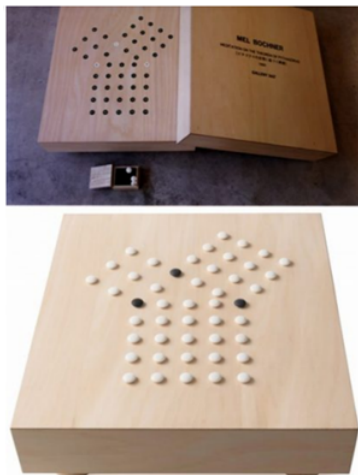


Fonte: <https://www.wikiart.org/en/mel-bochner>

O trabalho deste artista relaciona-se a números e matemática. Há algumas obras que envolvem o Teorema de Pitágoras. Inicialmente, abordaremos uma série de obras intituladas *Meditação sobre o Teorema de Pitágoras*, cujo trabalho se deu no início dos anos 1970.

Na série de trabalhos em questão, o artista aborda a representação gráfica do trigêmeo pitagórico (3, 4, 5), que perfaz a equação $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9 + 16 = 25$) e sua relação com o triângulo retângulo associado, 3, 4 e 5, e ao valor de seus quadrados, representados em suas obras em objetos diversos, tais como avelãs, seixos e cristais.

Figura 44 – Versão em livro de artista da obra *Meditação sobre o Teorema de Pitágoras* (1993)



Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

A representação do triângulo pitagórico com os três quadrados adjacentes cujas áreas indicam os quadrados de lados correspondentes do triângulo retângulo e, assim, a área do quadrado adjacente à hipotenusa (c^2) corresponde à soma das áreas dos quadrados adjacentes às pernas ($a^2 + b^2$), é uma representação encontrada em muitos trabalhos.

A obra *Pitágoras* (1989) do compositor e artista coreano-americano Nam June Paik (Seul, Coréia do Sul, 1932 – Miami, EUA, 2006), é um exemplo destes trabalhos. *Pitágoras* consiste em 16 televisões, que juntas idealizam o triângulo retângulo, com 1, 3, 5 e 7 televisões em cada linha, 5 tubos de neon azuis, para o quadrado da hipotenusa, 3 tubos de neon vermelhos, para o quadrado da perna lateral, e 5 tubos de neon verdes, para o quadrado da perna da base. A transmissão das imagens na televisão é feita em três aparelhos de DVD.

Figura 45 – Instalação *Pitágoras* (1989)

Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

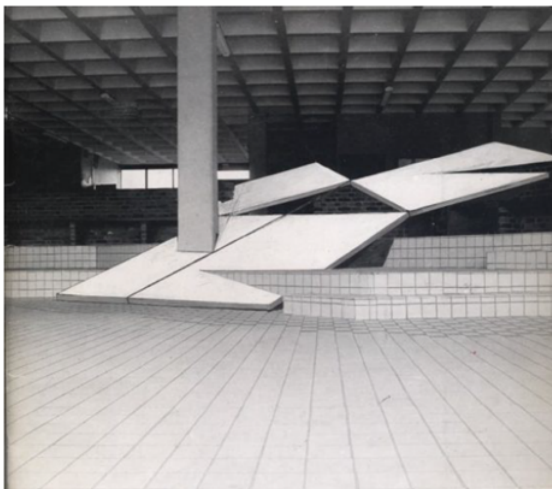
[//culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/](https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/)

Pierre Gallais, artista plástico e matemático francês, idealizou duas instalações relacionadas ao Teorema de Pitágoras, no Centro de Arte Contemporânea de Fleurs (França), no ano de 1990, chamada *Pitágoras* e *Interseções*.

Figura 46 – *Pitágoras* (1990)

Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

[//culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/](https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/)

Figura 47 – *Intersecções* (1990)

Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

Nascido em Winterthur, no ano de 1908, na Suíça, Max Bill, além de artista, era arquiteto, designer gráfico, designer industrial e tipógrafo. Max estudou na Bauhaus, teve notoriedade na arte concreta e também se interessou no Teorema de Pitágoras. O artista desenvolveu uma abstração geométrica, onde as formas básicas, como o triângulo, passaram a ter um papel de liderança.

Figura 48 – Cartaz da exposição sobre a obra de Max Bill, pintura e escultura

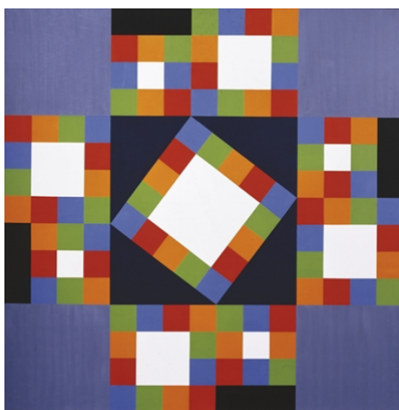


Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

Este Pôster estava presente na exposição organizada pelo Museu de Arte Contemporânea de Madrid, em fevereiro de 1980, e pela Fundação Joan Miró, nos meses de março e abril do mesmo ano. O trabalho de Max Bill é observado sob o esquema do Teorema de Pitágoras para o trigêmeo pitagórico (3, 4, 5). Observamos o quadrado superior de 5 x 5, correspondente à hipotenusa. Os quadrados abaixo são de 3 x 3 e 4 x 4, correspondentes às pernas.

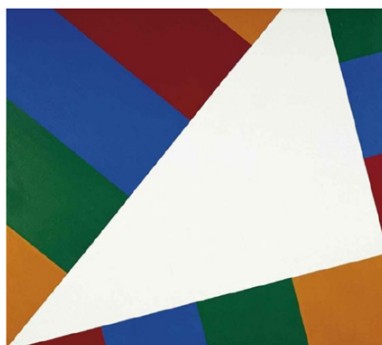
Max Bill também realizou o trabalho *Konstruktion um das thema 3 – 4 – 5* (1980), “Construção sobre o tema 3 - 4 - 5”, onde observamos novamente, além do triângulo retângulo do terna pitagórico (3,4,5), os três quadrados dos lados 3, 4 e 5, com os seus lados sendo formados por quadrados de quatro cores diferentes, estas sendo distribuídas de forma cíclica pelo perímetro dos quadrados, e o centro é branco. Observamos também que o número de quadrados do perímetro dos três quadrados é 8, 12 e 16, isto é, todos divisíveis por 4.

Figura 49 – *Konstruktion um das thema 3 - 4 - 5* (1980)



Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

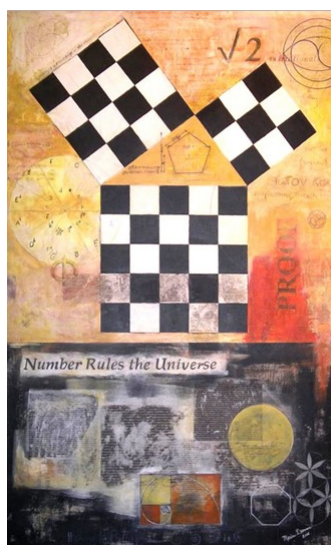
Desta mesma série de trabalhos sobre o Teorema de Pitágoras, está a obra *Pythagoräisches dreieck no quadrat II*, “Triângulo pitagórico no quadrado II”.

Figura 50 – *Pythagoräisches dreieck in quadrat II* (1980)

Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

[//culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/](https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/)

A artista norte-americana Marion Drennen, que se define como uma “artista conceitual que trabalha com matemática”, também se interessou pelo Teorema de Pitágoras. Uma de suas manifestações artísticas é “Homenagem a Pitágoras” (2006), na qual podemos notar o diagrama geométrico do Teorema de Pitágoras como o centro da obra. A obra também faz alusão a outros aspectos relevantes da matemática pitagórica, como visto na frase “Os números governam o Universo” e na palavra “Prova”, já que foi Pitágoras o responsável por inserir a necessidade de haver uma demonstração lógica nos resultados matemáticos, a raiz de dois e o número Phi, a espiral dourada, o pentágono ou proporções musicais, e outros.

Figura 51 – Marion Drennen, *Homenaje a Pitágoras*, 2006

Fonte: <https://culturacientifica.com/2013/05/22/cultura-pitagorica-arte/>

7.2 Árvore pitagórica na arte

A união de diferentes cópias de estruturas idealizadas a partir de triângulos e quadrados, para originar uma estrutura maior também foi utilizada na arte por outros artistas. O artista holandês Herman Van de Poll, usou esse diagrama em suas obras para representar estruturas fractais, descrevendo seu trabalho como “baseado nas formas matemáticas da teoria do caos” e da “geometria fractal”. Destacamos a série *Puzzle boom van Pitágoras*, algo parecido com “Árvore com o quebra-cabeça de Pitágoras”.

Figura 52 – Quebra-cabeça boom de Pitágoras n°10

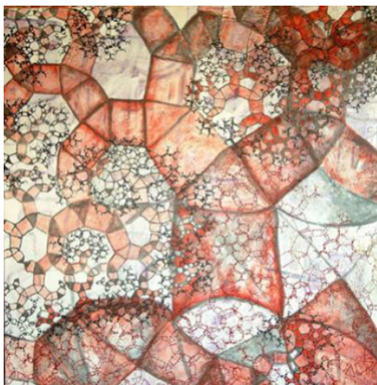


Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

<https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

Ou ainda a série *Fractalgeneratie*, algo como "geração Fractal".

Figura 53 – Geração fractal n°31



Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

<https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

Utilizando da mesma ideia de gerar um fractal, o austríaco Hartmut Skerbisch (Ramsau am Dachstein, Áustria, 1942 – Schloss Kalsdorf, Áustria, 2009), idealizou em uma de suas representações artísticas uma árvore fractal tridimensional de Pitágoras, formado por cubos em vez de triângulos.

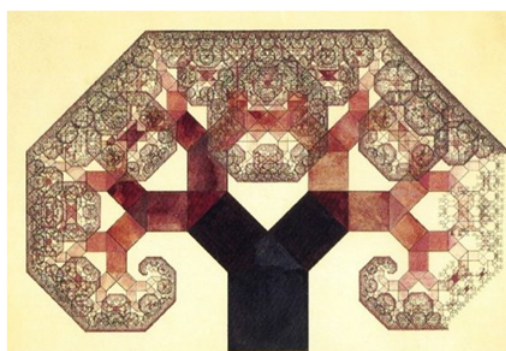
Figura 54 – *Fractal Pitágoras Tree*



Fonte: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>

Podemos apreciar, na figura 55, o desenho da árvore pitagórica feito pelo professor de matemática Alfred E. Bosman, que vale destacar, vizinho do artista MC Escher (1898-1972).

Figura 55 – Representação artística da Árvore Pitagórica feita por Alfred E. Bosman



Fonte: <https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/>

A Árvore Pitagórica inspirou também o matemático, cientista da computação e artista holandês Koos Verhoeff (1927-2018). O escultor manifestou sua arte através de uma escultura em bronze denominada *Mitered Fractal Tree I* (2010), feita no ano de 1980, inicialmente em madeira.

Figura 56 – *Mitered Fractal Tree I* (2010)



Fonte: <https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/>

Um outro escultor, o holandês Anton Bakker, no contexto do seu projeto artístico *Perspectivas em Simetria*, apresenta uma série de esculturas como forma de homenagear o seu mentor, o artista e matemático Koos Verhoeff.

Figura 57 – *Koos Fractal Tree*



Fonte: <https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/>

[//culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/](https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/)

A árvore de Pitágoras foi utilizada também pelo artista e matemático japonês Kentaro Okamoto. Em sua obra, o artista utiliza um triângulo retângulo com ângulos, aproximadamente, de 42° , 38° e 90° , com a área de cada cor sendo a mesma, por consequência do teorema de Pitágoras.

Figura 58 – *Árvore Pitagórica* (2021)



Fonte: <https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/>

[//culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/](https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/)

8 Ramificações e novas sementes

O surgimento de novas ferramentas para elucidar o mundo no qual vivemos é algo sempre necessário para a evolução da humanidade. Sob essa perspectiva, a Geometria Fractal é fundamental no processo de construção de formas com as quais se possa compreender objetos da natureza, que outrora não podiam ser explicados baseando-se na Geometria Euclidiana.

Notadamente, o estudo dos fractais com suas propriedades, procedimentos recursivos e medida, é de singular importância para a investigação de uma Matemática que possa explicar nosso mundo, os fenômenos da natureza e os objetos que nos cercam. Notar a beleza de tais objetos instiga a curiosidade humana, e traz uma nova visão ao pensarmos em Geometria de uma forma mais ampla.

A Geometria Fractal possui diversas aplicações em vários campos da Matemática e em outros ramos como ciências, tecnologias e até mesmo na arte. Além disso, pode ter alguns de seus conceitos explorados em sala de aula.

Dessa forma apresentamos neste trabalho uma breve introdução à Geometria Fractal, com a finalidade de despertar a curiosidade sobre esses objetos, visando o seu alcance para que se possa aprofundar o estudo acerca de suas características e propriedades. É necessário enxergar as coisas mediante novas perspectivas, que mudem um pouco os conceitos da geometria tradicional, apresentada durante toda a nossa vivência como aluno, desde o ensino básico até o ensino superior.

Neste trabalho, fizemos uma abordagem elementar do fractal árvore pitagórica e destacamos algumas aplicações na arte, pois este fractal é, em geral, pouco estudado apesar de ter como base um teorema fundamental da matemática: o teorema de Pitágoras. Entendemos que os objetivos foram alcançados e revendo o plano de voo traçado percebemos que muitas direções podem ser seguidas para novos voos

neste universo tão fascinante, como, por exemplo, propor atividades pedagógicas sobre fractais, em particular a árvore pitagórica, para a sala de aula, usar aplicativos computacionais para gerar fractais ou explorar algumas obras de arte para propor atividades interdisciplinares.

Referências

- [1] ALVES, M. T. **O Conjunto de Cantor**. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Matemática - UFSC, 2008.
- [2] ALVES, M. T.; WHOBEL, L. **O Conjunto de Cantor: Caracterização via Base Ternária**. UEPG - SIGMAT - Simpósio Integrado de Matemática, Ponta Grossa, 2018.
- [3] BARBOSA, R. M. **Descobrimos a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [4] BARNESLEY, M. F. **Fractals Everywhere**. San Diego, CA: Academic Press, Inc, 1988.
- [5] BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 1974.
- [6] CORRÊA, A. de O. **Geometria Fractal no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, UNIFAP. 2014.
- [7] EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP. 2009. 600 p.
- [8] FALCONER, K. **Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications**. Chichester, UK, 1990.
- [9] GLEICK, J. **Caos: A Criação de Uma Nova Ciência** - Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.
- [10] IBÁÑEZ, R. **El teorema de Pitágoras en el arte. Matemoción**. Disponível em: <https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/>. Acesso em 17 set. 2023.

- [11] IBÁÑEZ, R. **Paseando entre árboles de Pitágoras. Matemoción.** Disponível em: <https://culturacientifica.com/2021/12/01/paseando-entre-arboles-de-pitagoras/>. Acesso em 16 set. 2023.
- [12] JOYCE, D. E. **Euclid's Elements – Book I: Proposition 47.** Disponível em: <https://mathcs.clarku.edu/djoyce/java/elements/bookI/propI48.html>. Acesso em 16 set. 2023
- [13] MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature.** [S.I.]: W. H. Freeman and Company, 1982.
- [14] MANDELBROT, B. **Objectos Fractais.** 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.
- [15] MENDES JUNIOR, D. de C. **Uma nova abordagem dos Complexos para o Ensino Médio: o estudo dos fractais e do caos na composição do conjunto preenchido de Julia e o conjunto de Mandelbrot.** Dissertação Profmat– Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3359&id2=75600. Acesso em 22 set. 2023.
- [16] MOREIRA, M. D. M. **Revisitando o Teorema de Pitágoras.** DMA-UFV: Rio de Janeiro. 2017.
- [17] OLIVEIRA, G. C. **Geometria fractal na Educação Básica.** Monografia - UFMG, Belo Horizonte, 2014.
- [18] OLIVEIRA, G. J. C. **Ensaio fractais à luz do Ensino Médio** Universidade Federal de Alagoas, 2016.
- [19] RABAY, Y. S. F. et al. **Estudo e aplicações da geometria fractal.** Tese Profmat - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

- [20] REIS, J. N. da C. **Uma Árvore de Pitágoras Explorando os Fractais no Ensino Médio**. *Ciência e Natura*, v. 37, n. 3, 2015.
- [21] RIBEIRO, V. V. S. M. **Revisitando o Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Viçosa. 2013. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/5882/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em 10 set. 2023.
- [22] SCHWINGEL, J. C. da S. **A matemática da samambaia de Barnsley**. 2016. 42 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- [23] SILVA, P. M. **Medidas fractais aplicadas à classificação de texturas**. 2019. 118 f. Tese (Doutor em Matemática Aplicada). Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2019.
- [24] SILVIA, Y. F. R. **Estudo e aplicação da geometria fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa PB, 2013. Disponível em <http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/handle/123456789/436>. Acesso em 15 set. 2023.
- [25] SOUSA, A. OLIVEIRA, G. e ALVES, L. **Pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos**. *Cadernos da Fucamp*, v.20, n.43, p.64-83. 2021.
- [26] VALE, T., I.; PIMENTEL (2005). **Padrões: um tema transversal no currículo**, vol 85, *Revista Educação e Matemática*, Portugal, pp. 14–20.
- [27] VAZ, C. L. D. **Alguns aspectos computacionais da Geometria Fractal**. Notas. Universidade Federal do Pará, 2011.
- [28] VAZ, C. **Software Maxima e aplicações**, Editora EdiAedi. 2016. Disponível em <https://editaedi.ufpa.br/index.php/catalogo>. Acesso em 17 dez. de 2023.

-
- [29] ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P (2002). **Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation.** Educational Studies in Mathematics, 49(3), 379–402.
- [30] <https://mathtourist.blogspot.com/2009/02/pondering-artists-perplexing-tribute-to.html>
- [31] <https://chien-de-lisard.blogspot.com/2017/03/portrait-dun-inconnu-pierre-gallois-1992.html>