



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

GLEDISTONE DA SILVA DE AVIZ

CONSTRUÇÃO DA IMAGEM NO PLANO E NA ESFERA UNITÁRIA
COM A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

SALINÓPOLIS

2025

GLEDISTONE DA SILVA DE AVIZ

**CONSTRUÇÃO DA IMAGEM NO PLANO E NA ESFERA UNITÁRIA
COM A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago

SALINÓPOLIS

2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

D111c da Silva de Aviz, Gledistone.
CONSTRUÇÃO DA IMAGEM NO PLANO E NA ESFERA
UNITÁRIA COM A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA /
Gledistone da Silva de Aviz. — 2025.
42 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalban
Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade Federal do
Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura
em Matemática, Salinópolis, 2025.

1. Projeção Estereográfica. 2. Esfera Unitária. 3. Plano. 4.
Geogebra. I. Título.

CDD 516.36

GLEDISTONE DA SILVA DE AVIZ

CONSTRUÇÃO DA IMAGEM NO PLANO E NA ESFERA UNITÁRIA COM A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago


Aprovado em: 28/03/2025

Conceito: Excelente


BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **AMILCAR MONTALBAN SAYAGO**
Data: 23/04/2025 17:08:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **JEZIEL DO NASCIMENTO CORREIA**
Data: 23/04/2025 16:06:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jeziel do Nascimento Correia (Examinador externo)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS**
Data: 23/04/2025 13:11:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias (Examinadora externa)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Com gratidão, dedico este trabalho à cada um que acreditou e me apoiou mesmo quando eu não acreditava que conseguiria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à força que me trouxe até aqui, à vida que me cedeu as oportunidades de aprendizado e à cada pessoa que cruzou meu caminho.

Em particular, gostaria de agradecer imensamente ao Professor Amilcar, que é um exemplo de caráter e profissionalismo, sempre disposto à ajudar e sempre paciente em compartilhar seu conhecimento.

À Débora, que inesperadamente entrou na minha vida durante essa empreitada acadêmica. Sempre me ajudou e me ouviu quanto à questões pessoais e profissionais, uma companheira leal. À ela devo minha gratidão e amizade.

Agradeço também aos meus pais Erasmo e Lionete, que apesar de discordâncias, fizeram o que estava ao seu alcance para me ajudarem. À minha irmã, Maria Rita, pelo companheirismo e torcida.

Em especial, agradeço ao meu tio e minha vó, Joelyson e Rita. Sempre estiveram torcendo por mim e me apoiando. À minha tia, Lionalva, sempre foi minha maior inspiração nos estudos. Obrigado.

Não poderia esquecer dos meus amigos, especialmente à Rudiele, Dellys, Tayrone, Raissa, Alice, Ingrid, Valéria e Thaissa, que comemoraram comigo todas as minhas aprovações em outros cursos. Agradeço também aos amigos que fiz durante o curso Mariane, Poliana, Rivaldo e Lorena, sempre apoiando um ao outro nos trabalhos e estudos.

Por fim, agradeço também aos amigos não estiveram nesses momentos, mas que no decorrer da minha carreira acadêmica e profissional, seguiram torcendo por mim. Chegar até aqui com o apreço de vocês foi importantíssimo. Obrigado por tanto.

RESUMO

Neste trabalho, foram estudadas as propriedades da Projeção Estereográfica e sua aplicação na esfera unitária. Inerente a isso, foram abordados alguns conceitos relacionados à esfera unitária e demonstrados alguns teoremas. Seguiu-se a sequência de estudos: A Projeção Estereográfica na esfera para dimensão n , visando a aplicação na Dimensão 3 e Implementação Gráfica da Projeção Estereográfica em Dimensão 3. Para esse propósito, o software GeoGebra foi usado como auxílio.

Palavras-chave: Projeção Estereográfica; Esfera Unitária; Plano; Geogebra.

ABSTRACT

In this work, the properties of the Stereographic Projection and its application in the unitary sphere were studied. Inherent to this, some concepts related to the unitary sphere were addressed and some theorems were demonstrated. The following sequence of studies followed: Stereographic Projection in the sphere for dimension n , aiming at the application in Dimension 3 and Graphical Implementation of the Stereographic Projection in Dimension 3. For this purpose, the GeoGebra software was used as an aid.

Keywords: Stereographic Projection; Unitary Sphere; Plane; Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Projecção Estereográfica a partir do Pólo Norte da Esfera \mathbb{S}^2 para o Plano \mathbb{R}^2 | 11 |
| Figura 2 – Espaço das coordenadas. | 13 |
| Figura 3 – Vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} | 14 |
| Figura 4 – Círculo \mathbb{S}^1 | 15 |
| Figura 5 – Esfera \mathbb{S}^2 | 16 |
| Figura 6 – Projecção estereográfica direta do polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} para o Plano $\{X_k = k\}$ | 17 |
| Figura 7 – Projecção estereográfica inversa do Plano $\{X_k = k\}$ para o polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} | 19 |
| Figura 8 – Projecção estereográfica direta do polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ | 22 |
| Figura 9 – Projecção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 | 23 |
| Figura 10 – Projecção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_n = k\}$ | 24 |
| Figura 11 – Projecção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_n = k\}$ para o polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} | 25 |
| Figura 12 – Projecção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ | 28 |
| Figura 13 – Projecção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 | 29 |
| Figura 14 – Projecção estereográfica do mapa da cidade de Salinópolis/PA no plano e na esfera unitária. | 30 |
| Figura 15 – A projecção estereográfica direta do pólo norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ é: $f(t)$ | 31 |
| Figura 16 – A projecção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o pólo norte da esfera unitária é: $f^{-1}(t)$ | 31 |
| Figura 17 – Esfera unitária $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$ e hiperplano $\{X_3 = -2\} \in \mathbb{R}^2$ | 34 |
| Figura 18 – Mapa no papel milimetrado 1. | 35 |
| Figura 19 – Mapa no papel milimetrado 2. | 35 |
| Figura 20 – Mapa no papel milimetrado 3. | 36 |
| Figura 21 – Mapa no papel milimetrado 4. | 36 |
| Figura 22 – Mapa no papel milimetrado 5. | 37 |
| Figura 23 – Controle da lista de pontos. | 37 |
| Figura 24 – Superfície de projecção direta. | 38 |

| | |
|---|----|
| Figura 25 – Superfície de projeção inversa. | 39 |
| Figura 26 – Projeção esfereográfica do mapa da cidade de Salinópolis/PA no plano e na esfera unitária. | 40 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 11 |
| I REFERENCIAIS TEÓRICOS | 13 |
| 1 Espaço das coordenadas (Plano cartesiano) | 13 |
| 1.1 Equação vetorial da reta | 13 |
| 1.2 Equação paramétrica da reta | 14 |
| 1.3 Módulo de um vetor | 15 |
| 1.4 Equação da esfera unitária | 15 |
| 1.5 Função inversa | 16 |
| II PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA | 17 |
| 2 Teoremas | 17 |
| III APLICAÇÕES | 30 |
| 3 Aplicação da projeção estereográfica do mapa de Salinópolis/PA | 30 |
| 4 Aplicação da projeção estereográfica da semi-circunferência na esfera unitária para o plano | 30 |
| 5 Aplicação da projeção estereográfica da parábola no plano para a esfera unitária | 31 |
| CONCLUSÃO | 32 |
| REFERÊNCIAS | 33 |

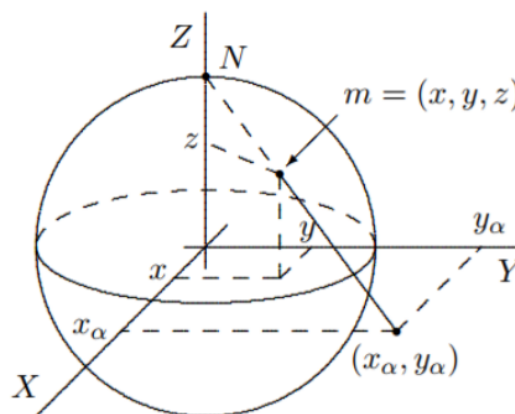
INTRODUÇÃO

Este trabalho é a realização de uma pesquisa do estudo de curvas e superfícies (conforme mencionados em [2]), utilizando de conceitos básicos da Geometria Diferencial aplicados à Projeção Estereográfica (conforme mencionado em [1]) tanto da esfera para o plano quanto do plano para a esfera em qualquer dimensão.

A sugestão soou como um desafio, visto que a disciplina não é ofertada em todos os cursos (como o de Licenciatura em Matemática, no Campus UFPA/Salinópolis). Essa área possui relevância em várias outras como: Física, Química, Biofísica, Topografia, Economia, Computação Gráfica e Astronomia. Trazendo alusão a essa afirmação, podemos, inclusive, mencionar a dissertação [9], a qual teve como objetivo investigar as propriedades da Projeção Estereográfica e suas aplicações em diversos campos do conhecimento. Para isso, foi necessário abordar alguns conceitos matemáticos relacionados à esfera unitária e à astronomia antes de definir a Projeção Estereográfica e discutir são abordagem em sala de aula para alunos do ensino fundamental e médio.

Analisando a Figura 1, podemos observar que a Projeção Estereográfica pode funcionar como um mapeamento dos pontos da Esfera \mathbb{S}^2 formada pelos pontos no Plano \mathbb{R}^3 que obedecem a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para um Plano $\{X_n = k\} \in \mathbb{R}^2$. Traçando a Reta da Projeção a partir do Pólo Norte $N = (0, 0, 1)$ da Esfera \mathbb{S}^2 , a reta toca o ponto $m = (x, y, z)$ na superfície de \mathbb{S}^2 e também o ponto $A = (x_\alpha, y_\alpha)$ no plano \mathbb{R}^2 , em que a abscissa e ordenada do ponto A está em função de x, y e z do ponto m da esfera \mathbb{S}^2 . Como também se dá da mesma forma para a inversa, onde x, y e z do ponto m estão em função da abscissa e ordenada do ponto A no Plano \mathbb{R}^2 .

Figura 1: Projeção Estereográfica a partir do Pólo Norte da Esfera \mathbb{S}^2 para o Plano \mathbb{R}^2 .



Fonte: De [9]

O entendimento desse breve raciocínio é essencial para darmos continuidade e aprofundar no estudo dessa temática.

Decidimos desenvolver essa pesquisa aspirando estudar as propriedades de

curvas e superfícies, utilizando conceitos básicos da Geometria Diferencial para fazer a projeção estereográfica tanto da esfera para o plano como do plano para a esfera em qualquer dimensão. Com a finalidade de enriquecer a compreensão matemática e ter aplicações em diversas áreas, este trabalho é amparado pelo grande interesse teórico e prático para pesquisadores da área e em outras áreas das ciências.

A metodologia buscou estudar a Projeção Estereográfica na Esfera para dimensão n , inicialmente, realizamos uma análise bibliográfica, com vistas a identificar, avaliar e interpretar as pesquisas disponíveis mais relevantes. Portanto, partimos analisando os livros e trabalhos listados nas referências relacionados à Geometria Diferencial, Cálculo e à Projeção Estereográfica.

Nessas condições, o objetivo geral foi aplicar a Projeção Estereográfica na esfera de dimensão 3. Seguem os seguintes objetivos específicos:

- Estudar a Projeção Esferográfica em dimensão n ;
- Construir a função que leva a imagem tanto da esfera para o plano quanto do plano para esfera em dimensão 3;
- Implementar o gráfico da projeção da imagem da esfera para o plano como do plano para a esfera em dimensão 3 com o software Geogebra.

Para alcançar os objetivos de pesquisa enunciados, cumprimos as seguintes etapas:

1. **Referenciais teóricos:** Envolveu analisar materiais e estudos das temáticas em Bibliotecas; Periódicos e Repositórios de Universidades com foco nas aplicações desses conceitos em outros campos das ciências; a descrição e definição de conceitos matemáticos como suporte para o entendimento da Projeção Estereográfica.
2. **Projeção estereográfica:** Neste trabalho buscou-se desenvolver e demonstrar os teoremas 2.1 e 2.2 para a projeção estereográfica tanto de forma direta e inversa para o caso geral.
3. **Aplicação:** Os teoremas 2.1 e 2.2 foram aplicados para o caso particular em que $n = 3$ e $k = -2$ na projeção estereográfica do mapa da cidade de Salinópolis/PA tanto na esfera unitária quanto no plano, na projeção estereográfica da semi-circunferência na esfera unitária para o plano e na projeção estereográfica inversa da parábola no plano para a esfera unitária.

Parte I

REFERENCIAIS TEÓRICOS

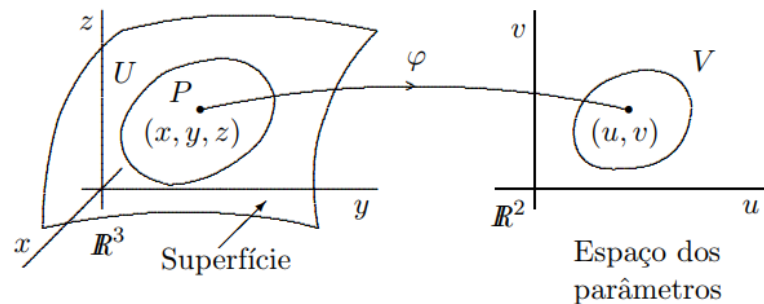
A seguir serão apresentados os conceitos fundamentais e necessários para a compreensão da Projeção Estereográfica, começando pelo estudo do plano cartesiano, equações vetoriais e paramétricas associadas a retas e superfícies. Será abordado também módulo de um vetor, equação da esfera unitária e função inversa. Essa base teórica é essencial para fundamentar as definições, propriedades e demonstrações que serão desenvolvidas posteriormente, garantindo um entendimento claro e estruturado dos temas explanados no trabalho.

1 Espaço das coordenadas (Plano cartesiano)

De [7], tem-se a seguinte definição:

Definição 1.1. *Uma representação paramétrica parcial ou global de uma superfície dada é uma aplicação bijetora $\varphi: U \rightarrow V$ de uma região U na superfície \mathbb{R}^3 , que pode ser uma parte dela ou ela inteira, em um aberto V do \mathbb{R}^2 com a topologia usual, chamado neste contexto de espaço dos parâmetros ou espaço das coordenadas.*

Figura 2: Espaço das coordenadas.



Fonte: De [7]

A Figura 2, representa a função φ bijetiva levando pontos da região $U \in \mathbb{R}^3$ à região $V \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi: U \rightarrow V; x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v).$$

1.1 Equação vetorial da reta

De [5], tem-se a seguinte definição:

Definição 1.2. *Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo \vec{v} . Para que um ponto P do espaço pertença à reta r , é necessário e suficiente que os vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} sejam colineares (vetores que têm a mesma direção, mesmo que tenham sentidos opostos), isto é:*

$$\overrightarrow{AP} = \vec{v}t,$$

ou:

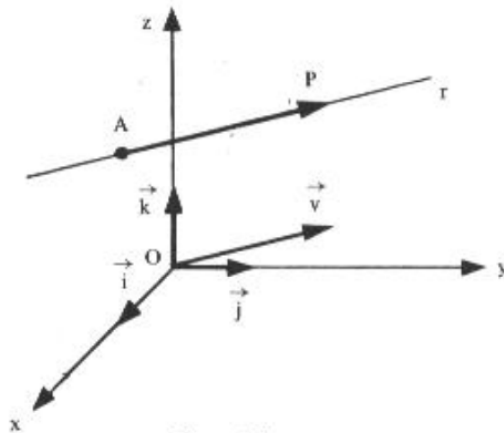
$$P - A = \vec{v}t$$

$$P = A + \vec{v}t,$$

ou ainda, se $P = (x, y, z)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, obtemos:

$$\vec{r} : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (a, b, c)t.$$

Figura 3: Vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} .



Fonte: De [5]

Onde \vec{v} é não nulo e aponta para a mesma direção de \vec{r} , sendo denominado o vetor diretor da reta \vec{r} .

1.2 Equação paramétrica da reta

De [5], tem-se a seguinte definição:

Definição 1.3. Sejam $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y, z)$ e $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da reta \vec{r} e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor de mesma direção de \vec{r} . Da equação vetorial da reta \vec{r} obtemos:

$$\vec{r} : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$\vec{r} : (x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct).$$

Logo:

$$\vec{r} : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct. \end{cases}$$

Observação 1.1. t : É o parâmetro que varia em todos os números reais, pois atribuindo

diferentes valores para esse parâmetro, obtemos diferentes pares ordenados (x, y, z) , que representam os pontos da reta. Assim, podemos até traçar todos os pontos da reta em questão. Em nosso caso, usaremos λ .

1.3 Módulo de um vetor

De [5], tem-se a seguinte definição:

Definição 1.4. *Módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo:*

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}},$$

ou, em coordenadas,

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x, y, z) \cdot (x, y, z)},$$

ou seja:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.4 Equação da esfera unitária

De [8], tem-se a seguinte definição:

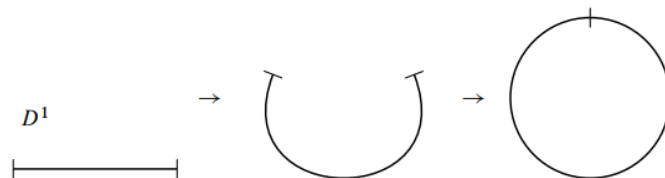
Definição 1.5. *A primeira forma que mencionamos mostra que qualquer esfera \mathbb{S}^n é como o espaço obtido adicionando-se um ponto infinito ao espaço \mathbb{R}^n . Do ponto de vista topológico, isso é equivalente a tomar uma bola n -dimensional e colapsar a um único ponto o seu bordo. Usando símbolos, denotamos D^n a bola fechada unitária em \mathbb{R}^n :*

$$D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Para obter o círculo \mathbb{S}^1 a partir de um intervalo, basta identificar seu bordo, que consiste de dois pontos, em um único ponto.

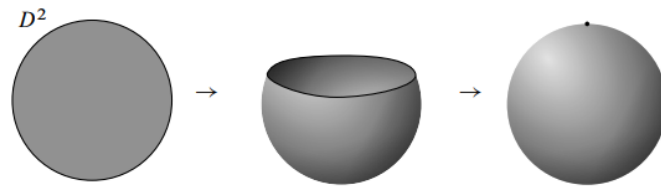
A Figura 4, mostra o círculo \mathbb{S}^1 a partir de um intervalo.

Figura 4: Círculo \mathbb{S}^1 .



Fonte: De [8].

A Figura 5, mostra a esfera \mathbb{S}^2 a partir da contração de todo o bordo de um disco D^2 a um só ponto.

Figura 5: Esfera S^2 .

Fonte: De [8].

Com isso, estamos afirmando a esfera n -dimensional S^n , cuja definição é:

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

1.5 Função inversa

De [4], tem-se a seguinte definição:

Definição 1.6. *Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função injetora e seja $B = \text{Im}(F)$. Assim, para cada $Y \in B$ existe um único $X \in A$ tal que: $F(X) = Y$. Pois bem, a função G , definida em B é dada por $G(X) = Y$ se, e somente se, $F(Y) = X$ denomina-se função inversa de F . Se F for uma função que admite inversa, então diremos que F é uma função inversível. Observe que se F for uma função inversível com inversa G então G será, também, inversível, e sua inversa será F . De acordo com a definição acima, para todo $X \in A$, temos:*

$$G(F(X)) = X \equiv G^{-1}(X).$$

Então, para todo $X \in B$:

$$F(G(X)) = X \equiv F^{-1}(X).$$

Parte II

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

A seguir serão demonstradas as propriedades e os teoremas fundamentais da Projeção Estereográfica. Essa abordagem proporcionará um entendimento aprofundado da projeção da esfera no plano e vice-versa. Essa abordagem é crucial para elucidar a compreensão das aplicações e implementações gráficas apresentadas posteriormente.

2 Teoremas

Teorema 2.1. *Se \mathbb{S}^{n-1} é uma esfera unitária, $N = (0, \dots, 1)$ o seu polo norte e $\{X_n = k\}$ hiperplano, $k < 1$, então:*

(i) *A projeção estereográfica direta do polo norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} para o hiperplano $\{X_n = k\}$ é dada por:*

$$f(x) = \frac{k-1}{x_n-1} \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{(x_n-1)}{k-1} k \right),$$

onde $f(x)$ representa o ponto na qual a semi-reta \overrightarrow{Nx} corta o hiperplano $\{X_n = k\}$.

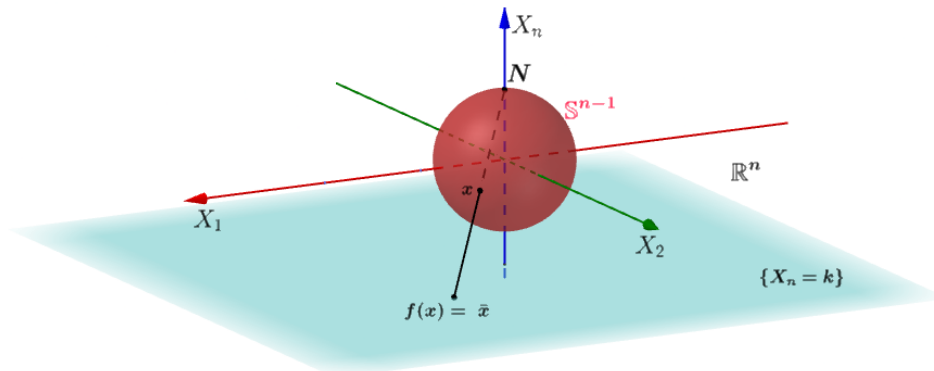
(ii) *A projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_n = k\}$ para o polo norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} é dada por:*

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1-k)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k-1)^2} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k-1)^2}{2(1-k)} \right),$$

onde $f^{-1}(\bar{x})$ representa o ponto na qual a semi-reta $\overrightarrow{N\bar{x}}$ corta a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} .

Demonstração. (i) A Figura 6, mostra a projeção estereográfica direta do polo Norte $N = (0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ intersectando o ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \{X_k = k\}$.

Figura 6: Projeção estereográfica direta do polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} para o Plano $\{X_k = k\}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Seja a reta de projeção que passa por N e x até \bar{x} que pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned}\bar{x}(\lambda) &= N + \overrightarrow{Nx}\lambda \\ \bar{x}(\lambda) &= N + (x - N)\lambda \\ \bar{x}(\lambda) &= N - N\lambda + x\lambda \\ \bar{x}(\lambda) &= (1 - \lambda)N + x\lambda.\end{aligned}$$

Substituindo $N = (0, \dots, 1)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k)$, temos:

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k) &= (0, \dots, 1 - \lambda) + (x_1\lambda, \dots, x_{n-1}\lambda, x_n\lambda) \\ (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k) &= (x_1\lambda, \dots, x_{n-1}\lambda, (1 - \lambda) + x_n\lambda).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Daí, pela equação da reta paramétrica, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1\lambda \\ \bar{x}_2 = x_2\lambda \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}\lambda \\ k = (1 - \lambda) + x_n\lambda. \end{array} \right.$$

Da última coordenada, temos

$$\begin{aligned}k &= 1 - \lambda + x_n\lambda \\ k &= 1 + (x_n - 1)\lambda \\ \lambda &= \frac{k - 1}{x_n - 1}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Agora, substituindo equação (2.2) na equação (2.1) da reta paramétrica, podemos encontrar as coordenadas da função da projeção estereográfica direta do polo Norte da esfera unitária:

$$f(x) = \left(\frac{k - 1}{x_n - 1}x_1, \dots, \frac{k - 1}{x_n - 1}x_{n-1}, 1 - \frac{k - 1}{x_n - 1} + x_n \frac{k - 1}{x_n - 1} \right).\tag{2.3}$$

Simplificando a última coordenada, temos:

$$\begin{aligned}1 - \frac{k - 1}{x_n - 1} + x_n \frac{k - 1}{x_n - 1} &= \frac{x_n(k - 1) - (k - 1)}{x_n - 1} + 1 \\ &= \frac{(x_n - 1)(k - 1)}{x_n - 1} + 1 = \frac{(x_n - 1) + (k - 1)(x_n - 1)}{x_n - 1} \\ &= \frac{(x_n - 1)((k - 1) + 1)}{x_n - 1} = k.\end{aligned}$$

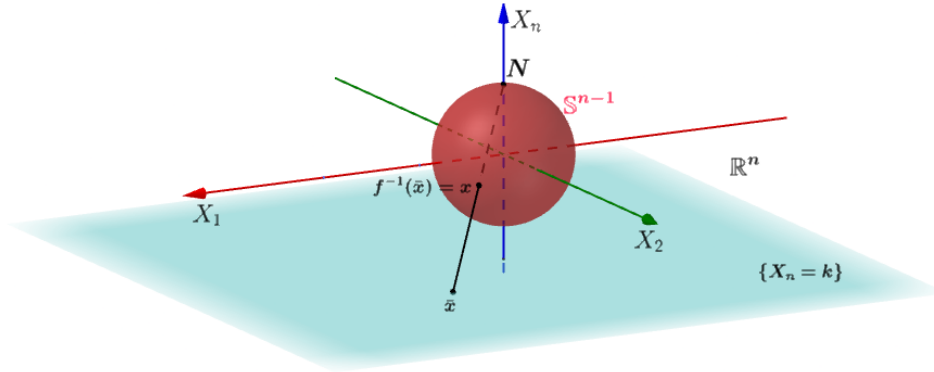
Fatorando a equação (2.3), temos que a função de projeção estereográfica direta do polo

Norte da esfera unitária é dada por:

$$f(x) = \frac{k-1}{x_n-1} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n-1}{k-1} k \right).$$

(ii) A Figura 7, mostra a projeção estereográfica inversa do ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \{X_n = k\}$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ intersectando o polo Norte $N = (0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Figura 7: Projeção estereográfica inversa do Plano $\{X_k = k\}$ para o polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Seja a reta de projeção que passa por \bar{x} até x e N que pode ser parametrizada por:

$$x(\lambda) = N + \overrightarrow{N\bar{x}}\lambda$$

$$x(\lambda) = N + (\bar{x} - N)\lambda.$$

Substituindo $N = (0, \dots, 1)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k)$, temos:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (0, \dots, 1) + (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k-1)\lambda$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (\bar{x}_1\lambda, \dots, \bar{x}_{n-1}\lambda, (k-1)\lambda + 1).$$

Daí, pela equação da reta paramétrica, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1\lambda \\ x_2 = \bar{x}_2\lambda \\ \vdots \\ x_{n-1} = \bar{x}_{n-1}\lambda \\ x_n = (k-1)\lambda + 1. \end{array} \right.$$

Da última coordenada, temos

$$\lambda = \frac{x_n - 1}{k - 1}. \quad (2.4)$$

Como $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, fazemos:

$$\bar{x}_1^2 \lambda^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 \lambda^2 + ((k-1)\lambda + 1)^2 = 1.$$

Somando $\lambda^2 k^2$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\bar{x}_1^2 \lambda^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 \lambda^2 + \lambda^2 k^2 + ((k-1)\lambda + 1)^2 = 1 + \lambda^2 k^2.$$

Fazendo $\bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 + k^2 = \|\bar{x}\|^2$, temos:

$$\|\bar{x}\|^2 \lambda^2 + ((k-1)\lambda + 1)^2 = 1 + \lambda^2 k^2. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.4) em equação (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|^2 \left(\frac{x_n - 1}{k-1} \right)^2 + \left((k-1) \frac{x_n - 1}{k-1} + 1 \right)^2 &= 1 + \left(\frac{x_n - 1}{k-1} \right)^2 k^2 \\ \frac{(x_n - 1)^2 \|\bar{x}\|^2 + x_n^2 (k-1)^2}{(k-1)^2} &= 1 + \left(\frac{x_n - 1}{k-1} \right)^2 k^2 \\ (x_n - 1)^2 \|\bar{x}\|^2 + x_n^2 (k-1)^2 &= (k-1)^2 + \frac{(x_n - 1)^2}{(k-1)^2} (k-1)^2 k^2 \\ (x_n - 1)^2 \|\bar{x}\|^2 &= (k-1)^2 + (x_n - 1)^2 k^2 - x_n^2 (k-1)^2 \\ (x_n - 1)^2 \|\bar{x}\|^2 &= (k-1)^2 (1 - x_n^2) + (x_n - 1)^2 k^2 \\ \|\bar{x}\|^2 &= (k-1)^2 \frac{(1 - x_n^2)}{(x_n - 1)^2} + \frac{(x_n - 1)^2}{(x_n - 1)^2} k^2. \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por $\frac{1}{(k-1)^2}$, temos:

$$\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k-1)^2} = \frac{(k-1)^2 (1 - x_n^2)}{(k-1)^2 (x_n - 1)^2}.$$

Simplificando, temos:

$$\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k-1)^2} = \frac{(1 - x_n)(1 + x_n)}{(x_n - 1)^2}$$

$$\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k-1)^2} = \frac{(1 - x_n)(1 + x_n)}{(1 - x_n)^2}$$

$$\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k-1)^2} = \frac{(1 + x_n)}{(1 - x_n)}$$

$$(\|\bar{x}\|^2 - k^2)(1 - x_n) = (1 + x_n)(k-1)^2$$

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|^2 - k^2 - \|\bar{x}\|^2 x_n + k^2 x_n &= (1 + x_n)(k^2 - 2k + 1) \\
\|\bar{x}\|^2 - k^2 - \|\bar{x}\|^2 x_n + k^2 x_n &= k^2 - 2k + 1 + k^2 x_n - 2k x_n + x_n \\
-\|\bar{x}\|^2 x_n + k^2 x_n - k^2 x_n + 2k x_n - x_n &= k^2 - 2k + 1 - \|\bar{x}\|^2 + k^2 \\
x_n(-\|\bar{x}\|^2 + k^2 - k^2 + 2k - 1) &= (k - 1)^2 - \|\bar{x}\|^2 + k^2 \\
x_n &= \frac{-(\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2)}{-(\|\bar{x}\|^2 - k^2 + k^2 - 2k + 1)} \\
x_n &= \frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.6) em equação (2.4), temos:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} - 1}{k - 1} \\
\lambda &= \frac{\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2 - \|\bar{x}\|^2 + k^2 - (k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2}}{k - 1} \\
\lambda &= \frac{\frac{-2(k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2}}{k - 1} \\
\lambda &= \frac{-2(k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} \frac{1}{(k - 1)} \\
\lambda &= \frac{-2(k - 1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} \\
\lambda &= \frac{2(1 - k)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Multiplicando $\frac{2(1-k)}{2(1-k)}$ na equação (2.6), temos:

$$x_n = \frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} \frac{2(1 - k)}{2(1 - k)}.$$

Por fim, temos:

$$x_n = \frac{2(1 - k)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} \frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2}{2(1 - k)}.$$

Portanto, de equações (2.6) e (2.7) temos que a função da projeção estereográfica inversa para o polo Norte da esfera unitária é dada por:

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1 - k)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k - 1)^2} \left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2 - (k - 1)^2}{2(1 - k)} \right).$$

□

Lema 2.1. *Se \mathbb{S}^2 é uma esfera unitária, $N = (0, 0, 1)$ seu pólo norte e $\{X_3 = 0\}$ hiperplano,*

então:

(i) A projeção estereográfica direta do polo norte da esfera \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ é dada por:

$$f(x) = \frac{-1}{x_3 - 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

onde $f(x)$ representa o ponto na qual a semi-reta \overrightarrow{Nx} corta o hiperplano $\{X_3 = 0\}$.

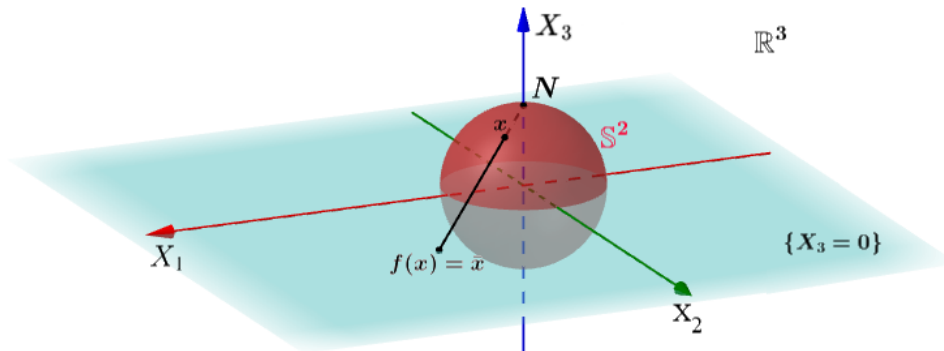
(ii) A projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_n = k\}$ para o polo norte da esfera \mathbb{S}^2 é dada por:

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1)}{\|\bar{x}\|^2 + (-1)^2} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \frac{\|\bar{x}\|^2 - 1}{2} \end{pmatrix},$$

onde $f^{-1}(\bar{x})$ representa o ponto na qual a semi-reta $\overrightarrow{N\bar{x}}$ corta a esfera unitária.

Demonstração. (i) A Figura 8, mostra a projeção estereográfica direta do polo Norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ intersectando o ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{X_3 = 0\}$.

Figura 8: Projeção estereográfica direta do polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Pelo Teorema 2.1, item (i), com $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ e $\{X_3 = 0\}$, temos $k = 0$ na aplicação:

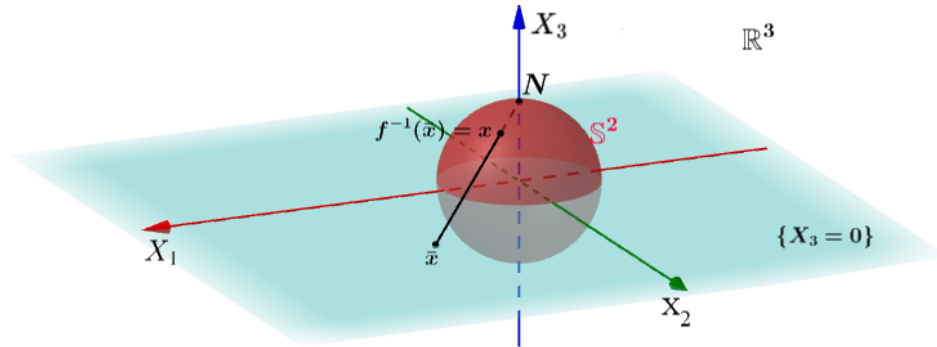
$$f(x) = \frac{0 - 1}{x_3 - 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_3 - 1}{0 - 1} \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$$f(x) = \frac{-1}{x_3 - 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) A Figura 9, mostra a projeção estereográfica inversa do ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X_3 = 0$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ intersectando o polo Norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$.

Figura 9: Projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o polo Norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Pelo Teorema 2.1, item (ii), com $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ e $\{X_3 = 0\}$, temos $k = 0$ na aplicação:

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1-0)}{\|\bar{x}\|^2 - 0^2 + (0-1)^2} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \frac{\|\bar{x}\|^2 - 0^2 - (0-1)^2}{2(1-0)} \right).$$

Por fim:

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1)}{\|\bar{x}\|^2 + (-1)^2} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \frac{\|\bar{x}\|^2 - 1}{2} \right).$$

Teorema 2.2. Se \mathbb{S}^{n-1} é uma esfera unitária e $S = (0, \dots, -1)$ o polo sul de \mathbb{S}^{n-1} e $\{X_n = k\}$ hiperplano, $k > -1$, então:

(i) A projeção estereográfica direta do polo sul da esfera \mathbb{S}^{n-1} para o hiperplano $\{X_n = k\}$ é dada por:

$$g(x) = \frac{k+1}{x_n+1} \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{(x_n+1)}{k+1} k \right),$$

onde $g(x)$ representa o ponto na qual a semi-reta \overrightarrow{Sx} corta o hiperplano $\{X_n = k\}$.

(ii) A projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_n = k\}$ para o polo sul da esfera \mathbb{S}^{n-1} é dada por:

$$g^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(k+1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \right),$$

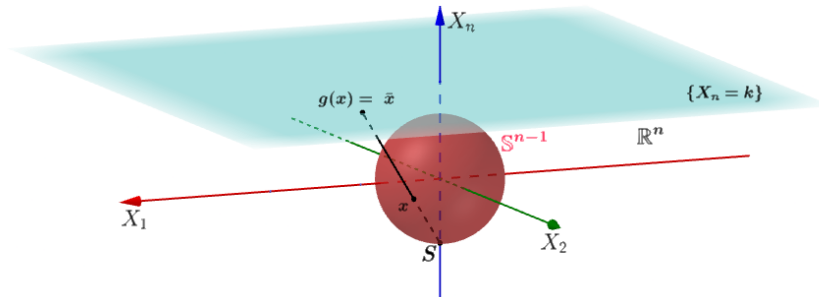
onde $g^{-1}(\bar{x})$ representa o ponto na qual a semi-reta $\overrightarrow{S\bar{x}}$ corta a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} .

Demonstração. (i) A Figura 10 mostra a projeção estereográfica do polo Sul $S = (0, \dots, -1) \in \mathbb{S}^{n-1}$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ intersectando o ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \{X_n = k\}$.

Seja a reta de projeção que passa por S e x até \bar{x} que pode ser parametrizada por:

$$\bar{x}(\lambda) = S + \overrightarrow{Sx}\lambda$$

Figura 10: Projeção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_n = k\}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor

$$\bar{x}(\lambda) = S + (x - S)\lambda$$

$$\bar{x}(\lambda) = S - S\lambda + x\lambda$$

$$\bar{x}(\lambda) = (1 - \lambda)S + x\lambda$$

Substituindo $S = (0, \dots, -1)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k)$, temos:

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k) = (0, \dots, \lambda - 1) + (x_1\lambda, \dots, x_{n-1}\lambda, x_n\lambda)$$

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k) = (x_1\lambda, \dots, x_{n-1}\lambda, (\lambda - 1) + x_n\lambda). \quad (2.8)$$

Daí, pela equação da reta paramétrica, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1\lambda \\ \bar{x}_2 = x_2\lambda \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1} = x_{n-1}\lambda \\ k = (\lambda - 1) + x_n\lambda. \end{array} \right.$$

Da última coordenada, temos

$$k = \lambda - 1 + x_n\lambda$$

$$k = (x_n + 1)\lambda - 1$$

$$\lambda = \frac{k + 1}{x_n + 1}. \quad (2.9)$$

Agora, substituindo equação (2.9) na equação (2.8), podemos encontrar as coordenadas da função da projeção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária:

$$g(x) = \left(\frac{k + 1}{x_n + 1}x_1, \dots, \frac{k + 1}{x_n + 1}x_{n-1}, 1 - \frac{k + 1}{x_n + 1} + x_n \frac{k + 1}{x_n + 1} \right). \quad (2.10)$$

Simplificando a última coordenada, temos:

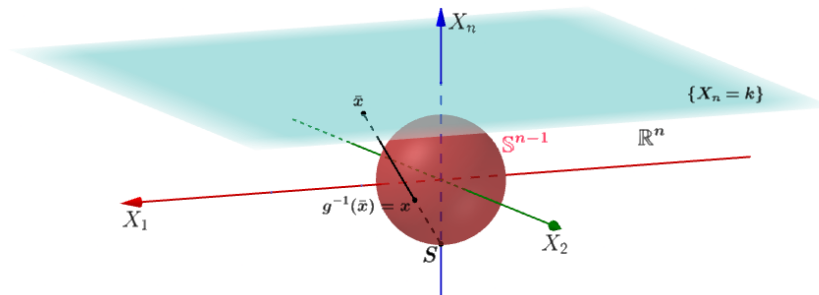
$$\begin{aligned}
& \frac{k+1}{x_n+1} - 1 + x_n \frac{k+1}{x_n+1} = \frac{x_n(k+1) + (k+1)}{x_n+1} - 1 \\
& = \frac{(x_n+1)(k+1)}{x_n+1} - 1 = \frac{(k+1)(x_n+1) - (x_n+1)}{x_n+1} \\
& = \frac{(x_n+1)((k+1)-1)}{x_n+1} = k.
\end{aligned}$$

Fatorando a equação (2.10), temos que a função de projeção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária é dada por:

$$g(x) = \frac{k+1}{x_n+1} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n+1}{k+1} k \right).$$

(ii) A Figura 11, mostra a projeção estereográfica direta do ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \{X_n = k\}$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ intersectando o polo Sul $S = (0, \dots, -1) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Figura 11: Projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_n = k\}$ para o polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Seja a reta de projeção que passa por \bar{x} até x e N que pode ser parametrizada por:

$$x(\lambda) = S + \overrightarrow{S\bar{x}}\lambda$$

$$x(\lambda) = S + (\bar{x} - S)\lambda.$$

Substituindo $S = (0, \dots, -1)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k)$, temos:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (0, \dots, -1) + (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, k+1)\lambda$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (\bar{x}_1\lambda, \dots, \bar{x}_{n-1}\lambda, (k+1)\lambda - 1).$$

Daí, pela equação da reta paramétrica, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1 \lambda \\ x_2 = \bar{x}_2 \lambda \\ \vdots \\ x_{n-1} = \bar{x}_{n-1} \lambda \\ x_n = (k+1)\lambda - 1 \end{array} \right.$$

Da última coordenada, temos:

$$\lambda = \frac{x_n + 1}{k + 1}. \quad (2.11)$$

Como $P \in \mathbb{S}^{n-1}$, fazemos:

$$\bar{x}_1^2 \lambda^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 \lambda^2 + ((k-1)\lambda - 1)^2 = 1,$$

somando $\lambda^2 k^2$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\bar{x}_1^2 \lambda^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 \lambda^2 + \lambda^2 k^2 + ((k-1)\lambda - 1)^2 = 1 + \lambda^2 k^2.$$

Fazendo $\bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_{n-1}^2 + k^2 = \|\bar{x}\|^2$, temos:

$$\|\bar{x}\|^2 \lambda^2 + ((k-1)\lambda - 1)^2 = 1 + \lambda^2 k^2.$$

De equação (2.11), temos:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|^2 \left(\frac{x_n + 1}{k + 1} \right)^2 + \left((k+1) \frac{x_n + 1}{k + 1} - 1 \right)^2 &= 1 + \left(\frac{x_n + 1}{k + 1} \right)^2 k^2 \\ \frac{(x_n + 1)^2 \|\bar{x}\|^2 + x_n^2 (k + 1)^2}{(k + 1)^2} &= 1 + \left(\frac{x_n + 1}{k + 1} \right)^2 k^2 \\ (x_n + 1)^2 \|\bar{x}\|^2 + x_n^2 (k + 1)^2 &= (k + 1)^2 + \frac{(x_n + 1)^2}{(k + 1)^2} (k + 1)^2 k^2 \\ (x_n + 1)^2 \|\bar{x}\|^2 &= (k + 1)^2 + (x_n + 1)^2 k^2 - x_n^2 (k + 1)^2 \\ (x_n + 1)^2 \|\bar{x}\|^2 &= (k + 1)^2 (1 - x_n^2) + (x_n + 1)^2 k^2 \\ \|\bar{x}\|^2 &= (k + 1)^2 \frac{(1 - x_n^2)}{(x_n + 1)^2} + \frac{(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} k^2. \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por $\frac{1}{(k+1)^2}$, temos:

$$\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k + 1)^2} = \frac{(k + 1)^2 (1 - x_n^2)}{(k + 1)^2 (x_n + 1)^2}.$$

Simplificando, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k+1)^2} &= \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{(x_n+1)^2} \\
\frac{\|\bar{x}\|^2 - k^2}{(k+1)^2} &= \frac{(1-x_n)}{(1+x_n)} \\
(\|\bar{x}\|^2 - k^2)(1+x_n) &= (1-x_n)(k+1)^2 \\
\|\bar{x}\|^2 - k^2 + \|\bar{x}\|^2 x_n - k^2 x_n &= (1-x_n)(k^2 + 2k + 1) \\
\|\bar{x}\|^2 - k^2 + \|\bar{x}\|^2 x_n - k^2 x_n &= k^2 + 2k + 1 - k^2 x_n - 2k x_n - x_n \\
\|\bar{x}\|^2 x_n - k^2 x_n + k^2 x_n + 2k x_n + x_n &= k^2 + 2k + 1 - \|\bar{x}\|^2 + k^2 \\
x_n(\|\bar{x}\|^2 - k^2 + k^2 + 2k + 1) &= (k+1)^2 - \|\bar{x}\|^2 + k^2 \\
x_n &= \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{(\|\bar{x}\|^2 - k^2 + k^2 + 2k + 1)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$x_n = \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2}. \quad (2.12)$$

Substituindo equação (2.12) na equação (2.11), temos:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} + 1}{k+1} \\
\lambda &= \frac{\frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2 + \|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2}}{k+1} \\
\lambda &= \frac{2(k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \\
\lambda &= \frac{2(k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \cdot \frac{1}{(k+1)} \\
\lambda &= \frac{2(k+1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \\
\lambda &= \frac{2(k+1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2}. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por $\frac{2(k+1)}{2(k+1)}$ na equação (2.12), temos:

$$x_n = \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \cdot \frac{2(k+1)}{2(k+1)}.$$

Por fim, temos:

$$x_n = \frac{2(k+1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \cdot \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{2(k+1)}.$$

Portanto, temos que a função da projeção estereográfica inversa para o polo Sul da esfera

unitária é dada por:

$$g^{-1}(x) = \frac{2(k+1)}{\|\bar{x}\|^2 - k^2 + (k+1)^2} \left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \frac{-\|\bar{x}\|^2 + k^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \right).$$

□

Lema 2.2. Se \mathbb{S}^2 é uma esfera unitária, $S = (0, 0, -1)$ seu pólo norte e $\{X_3 = 0\}$ hiperplano, então:

(i) A projeção estereográfica direta do polo sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ é dada por:

$$g(x) = \frac{1}{x_3 + 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

onde $g(x)$ representa o ponto na qual a semi-reta \overrightarrow{Sx} corta o hiperplano $\{X_3 = 0\}$.

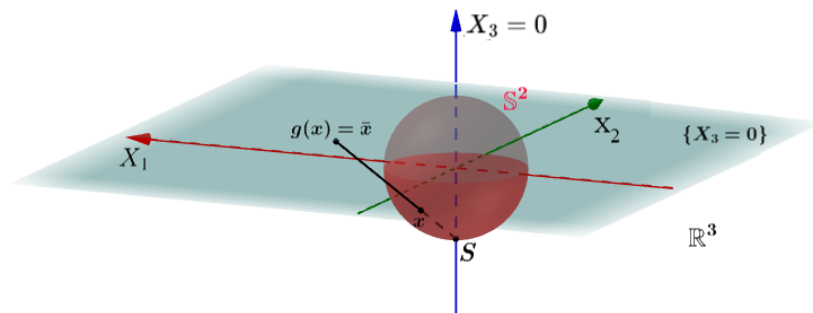
(ii) A projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o polo sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 é dada por:

$$g^{-1}(\bar{x}) = \frac{2}{\|\bar{x}\|^2 + 1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \frac{-\|\bar{x}\|^2 + 1}{2} \end{pmatrix},$$

onde $g^{-1}(\bar{x})$ o ponto na qual a semi-reta $\overrightarrow{S\bar{x}}$ corta a esfera unitária.

Demonstração. (i) A Figura 12, mostra a projeção estereográfica do polo Sul $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ intersectando o ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{X_3 = 0\}$.

Figura 12: Projeção estereográfica direta do polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Pelo Teorema 2.2, item (i), com $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$ e $\{X_3 = 0\}$, temos $k = 0$ na aplicação:

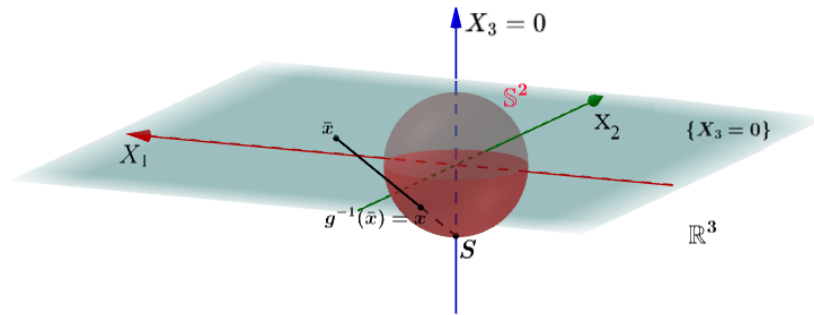
$$g(x) = \frac{0+1}{x_3+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_3+1}{0+1} \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$$g(x) = \frac{1}{x_3 + 1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) A Figura 13, mostra a projeção estereográfica inversa do ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \{X_3 = 0\}$, a reta de projeção passa pelo ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ intersectando o polo Sul $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$.

Figura 13: Projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o polo Sul da esfera unitária \mathbb{S}^2 .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Pelo Teorema 2.2, item (ii), com $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$ e $\{X_3 = 0\}$, temos $k = 0$ na aplicação:

$$g(x)^{-1} = \frac{2(0+1)}{\|\bar{x}\|^2 - 0^2 + (0+1)^2} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \frac{-\|\bar{x}\|^2 + 0^2 + (0+1)^2}{2(0+1)} \end{pmatrix}.$$

Por fim:

$$g^{-1}(\bar{x}) = \frac{2}{\|\bar{x}\|^2 + 1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \frac{-\|\bar{x}\|^2 + 1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Parte III

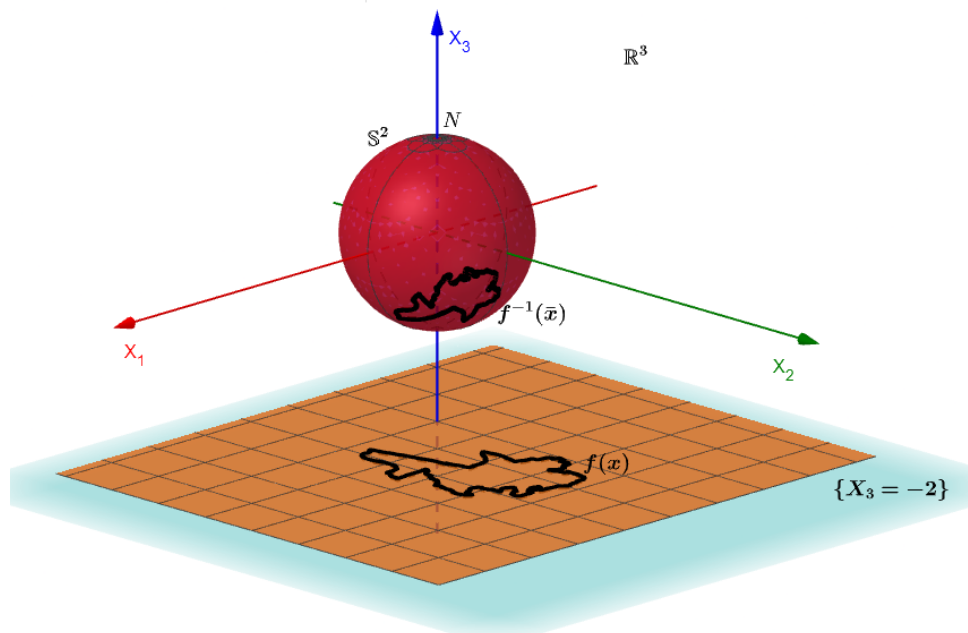
APLICAÇÕES

A seguir serão apresentadas as aplicações práticas da Projeção Estereográfica utilizando o software GeoGebra. Serão demonstradas tanto a projeção direta da esfera para o plano quanto a inversa, evidenciando a utilidade dessa ferramenta matemática. Essa seção tem a finalidade de conectar a teoria desenvolvida nas partes anteriores.

3 Aplicação da projeção estereográfica do mapa de Salinópolis/PA

A Figura 14, mostra a aplicação do Teorema 2.1 com $n = 3$ e $k = -2$ no software **Geogebra**. O item (i) cria o mapa da cidade de Salinópolis/PA na esfera unitária com a projeção estereográfica direta $f(x)$. O item (ii) cria o mapa da cidade de Salinópolis/PA no hiperplano $\{X_3 = -2\}$ com a projeção estereográfica inversa $f^{-1}(\bar{x})$. Ambas as aplicações foram feitas com suporte da ferramenta Spline Cúbica Natural (explicação em anexo).

Figura 14: Projeção estereográfica do mapa da cidade de Salinópolis/PA no plano e na esfera unitária.

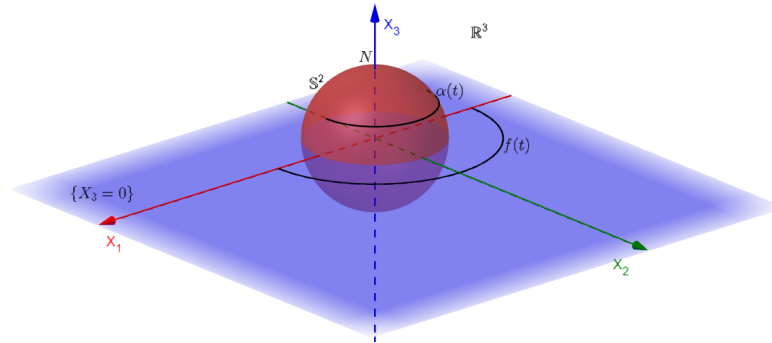


Fonte: Elaborado pelo autor.

4 Aplicação da projeção estereográfica da semi-circunferência na esfera unitária para o plano

A Figura 15 representa geometricamente a projeção estereográfica direta de $\alpha(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t), \frac{1}{2})$, $t \in [0, \pi]$ da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$.

Figura 15: A projeção estereográfica direta do pólo norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ é: $f(t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

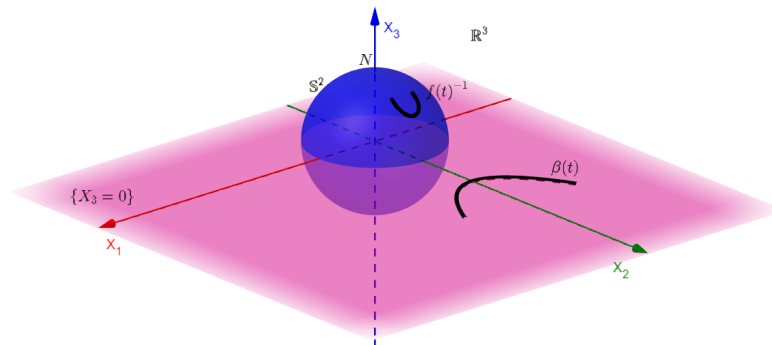
Usando o Lema 2.1, item (i), temos que a projeção estereográfica direta $\alpha(t) \in \mathbb{S}^2$ para o hiperplano $\{X_3 = 0\}$ é:

$$f(t) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(t), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) \right).$$

5 Aplicação da projeção estereográfica da parábola no plano para a esfera unitária

Na Figura 16, representa geometricamente a projeção estereográfica inversa de $\beta(t) = (t, t^2 + 2)$, $t \in [-1, 1]$ do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para a esfera unitária \mathbb{S}^2 .

Figura 16: A projeção estereográfica inversa do hiperplano $\{X_3 = 0\}$ para o pólo norte da esfera unitária é: $f^{-1}(t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando o Lema 2.1, item (ii), temos que a projeção estereográfica inversa $\beta(t) \in \{X_3 = 0\}$ para a esfera unitária \mathbb{S}^2 é:

$$f^{-1}(t) = \frac{2}{t^4 + 5t^2 + 5} \left(t, t^2 + 2, \frac{t^4 + 5t^2 + 3}{2} \right).$$

CONCLUSÃO

A pesquisa da Projeção Estereográfica desenvolvida neste projeto, foi um tópico desafiador e interessante pois proporcionou uma breve introdução em conceitos da Geometria Diferencial, que não está na grade curricular do curso de licenciatura em Matemática do Campus da UFPA na cidade de Salinópolis/PA. O estudo das propriedades da projeção estereográfica não apenas levou a um entendimento mais aprofundado das correspondências entre o plano e a esfera unitária, mas também direcionou para conceitos fundamentais inerentes a vários tópicos matemáticos.

O conceito da Projeção Estereográfica fornece um ambiente interativo que pode permitir que estudantes visualizem e entendam como as estruturas matemáticas em outras dimensões se comportarão. Além disso, a relação entre a esfera unitária S^2 e o plano \mathbb{R}^2 permite a aplicação da teoria, aproximando-nos de realidades práticas em outros campos de estudo como a Física, Engenharia, Geografia e até mesmo a Astrologia.

Neste estudo é possível encontrar aplicações em uma série de campos práticos, como modelagem física e plotagem gráfica de dados em duas dimensões. Como exemplo, na área de Cartografia, a projeção estereográfica é usada no mapeamento da superfície da Terra. A matemática pode ser usada para encontrar soluções para problemas reais e teóricos, o que reforça a necessidade e interesse em buscar e explorar o estudo da Geometria Diferencial aplicada em outras áreas.

O trabalho alcançou seus objetivos e, conseqüentemente, representa uma contribuição significativa para a Matemática, pois introduz a Geometria Diferencial no âmbito da licenciatura. Por meio da integração da teoria matemática com aplicações reais em softwares como o Geogebra, este estudo estimula o interesse e a curiosidade de alunos e pesquisadores, preparando-os para explorar áreas interdisciplinares e despertando suas habilidades de resolução de problemas. A Projeção Estereográfica é, portanto, um tópico ativo, com potencial para enriquecer o currículo do curso de Matemática e atuar como uma base sólida para possíveis desdobramentos.

Diante disso, considerando as diversificadas temáticas em que podemos estudar a aplicação da Projeção Estereográfica, podemos questionar "Como a Projeção Estereográfica pode ser adaptada no estudo da **captura de imagens através da lente câmeras de 360 graus** e da **constatação da posição de estrelas e constelações através de telescópios de alta precisão** projetando-as em um plano \mathbb{R}^2 ?". Esses questionamentos podem abrir futuras investigações interdisciplinares que conectam matemática, tecnologia digital e astronomia.

REFERÊNCIAS

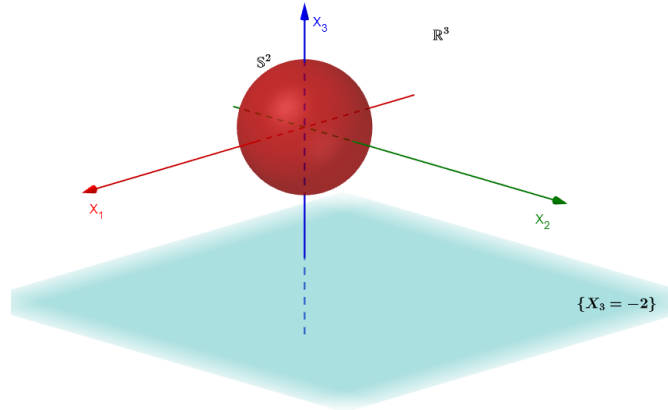
- [1] DE LIMA, R.F. . Introdução à Geometria Diferencial. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [2] DO CARMO, M.P. Geometria Riemanniana. 5 ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2011.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro:LTC, 2001.
- [4] TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.
- [5] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica.
- [6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, vol. 3. 5.ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2013.
- [7] SCHNEIDER, Claudio. **Ambientação à Geometria Diferencial**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2012.
- [8] CARVALHO, André Salles de; SIEJAKOWSKI, Rafal Marian. **Topologia e geometria de 3-variedades: uma agradável introdução**. 2022.
- [9] SILVA, Alexandre Manuel Moraes Mena. Projecção estereográfica: propriedades e aplicações. 2011. Tese de Doutorado.
- [10] UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP). **Papel milimetrado**. Disponível em: <https://www.dca.fee.unicamp.br/courses/EE531/1s2005/milimetrado.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2025.
- [11] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Salinópolis - PA**. 2022. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/geociencias/cartas-e-mapas/mapas-municipais/31452-colecao-de-mapas-municipais.html>. Acesso em: 09 mar. 2025.
- [12] GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 09 mar. 2025.
- [13] CORRÊA, Silvio Luiz da Silva. **Aplicações com spline cúbico**. 2023. 26 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, 2023.

APÊNDICE

A - Cenário de aplicação

Para aplicação desse estudo, optamos por utilizar o mapa da cidade de Salinópolis/PA. Cidade onde nosso Campus da Universidade Federal do Pará reside. Então, podemos imaginar o seguinte cenário na Figura 17:

Figura 17: Esfera unitária $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$ e hiperplano $\{X_3 = -2\} \in \mathbb{R}^2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

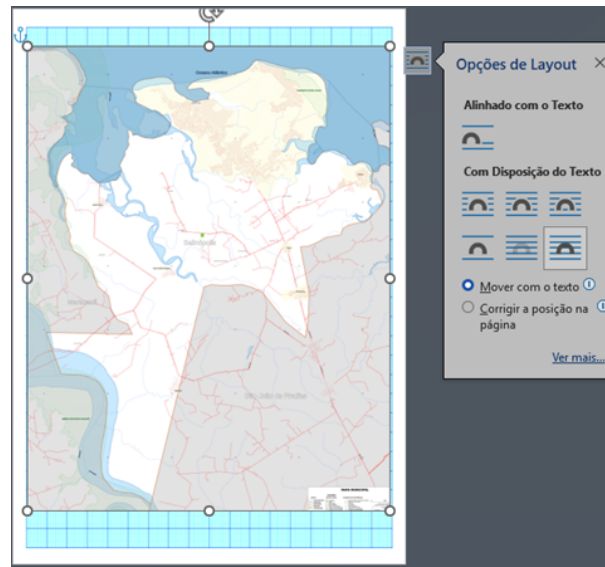
Temos uma superfície plana $\{k = -2\} \in \mathbb{R}^2$ e logo acima temos nossa esfera unitária $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$. Com o intuito de projetar a imagem do mapa de Salinópolis em ambas as superfícies, precisamos ter os pontos que formam a figura do mapa com o qual estamos trabalhando. Adquirimos o mapa diretamente da base de arquivos do site do IBGE ([11]), cuja referência é de Maio de 2024, e partimos para obtenção dos pontos que formam o mapa do município.

A1 - Obtenção da lista de pontos do mapa de Salinópolis/PA

1. Com a nossa referência em mãos, abrimos o Word do pacote Office 365, com um papel milimetrado oriundo da Web ([10]) e colocamos a imagem do mapa sobrepommo-o com a opção de layout: Em frente ao texto;
2. Alinhamos o mapa sobre o papel milimetrado centralizando-o vertical e horizontalmente;
3. Invertemos a visualização do Mapa horizontalmente (para que a projeção na esfera seja conforme o mapa é originalmente);
4. Reduzimos sua visualização em 65% para que pudéssemos imprimir o papel e traçar o mapa sobre o papel milimetrado.
5. Definimos a escala de 10mm para cada lado dos quadrados do papel milimetrado. Em seguida, pudemos definir os pontos cujas coordenadas são formadas por um par ordenado de números (x, y) no plano cartesiano, formando o mapa da cidade de Salinópolis/PA.

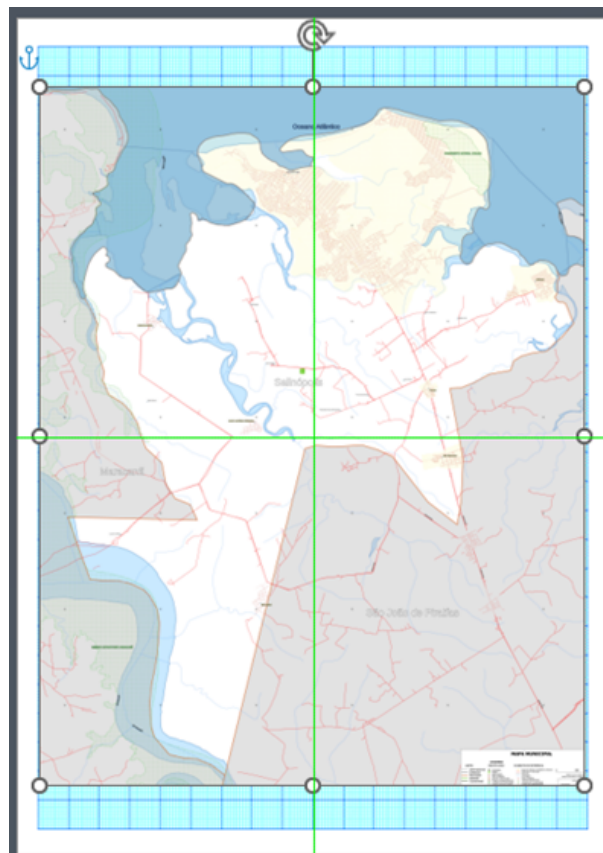
Nas Figuras (18, 19, 20, 21 e 22) abaixo podemos visualizar o passo a passo descrito anteriormente.

Figura 18: Mapa no papel milimetrado 1.



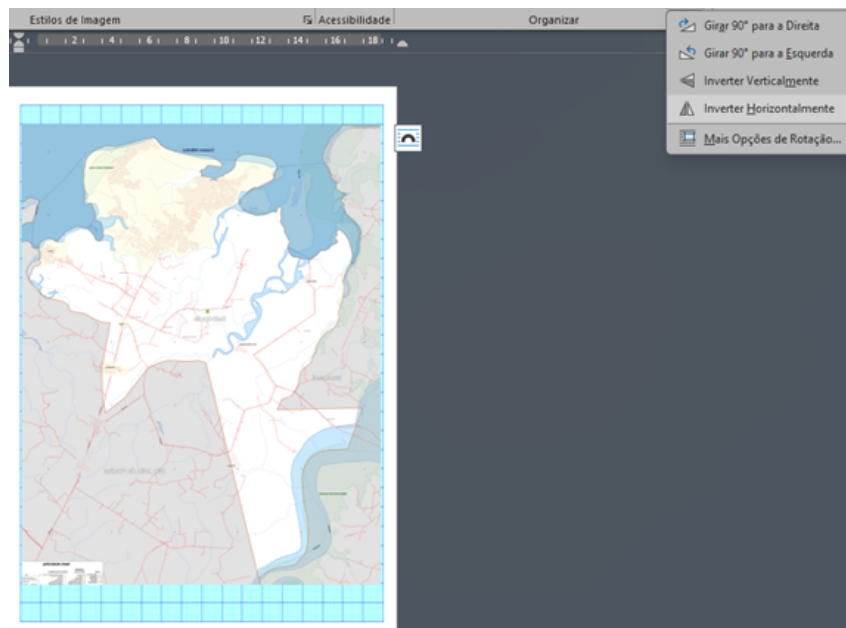
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19: Mapa no papel milimetrado 2.



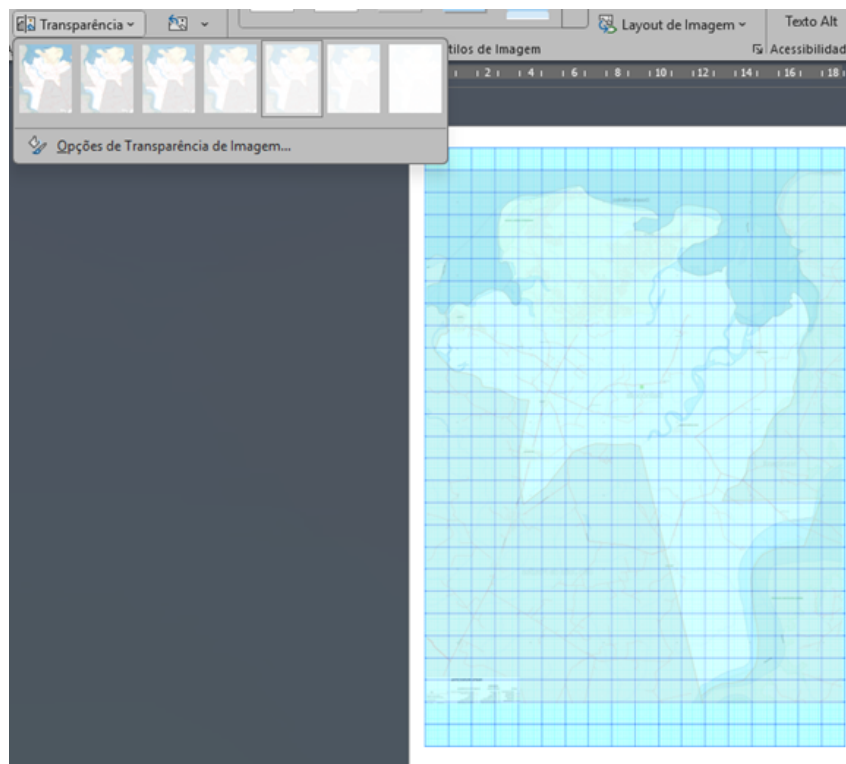
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20: Mapa no papel milimetrado 3.



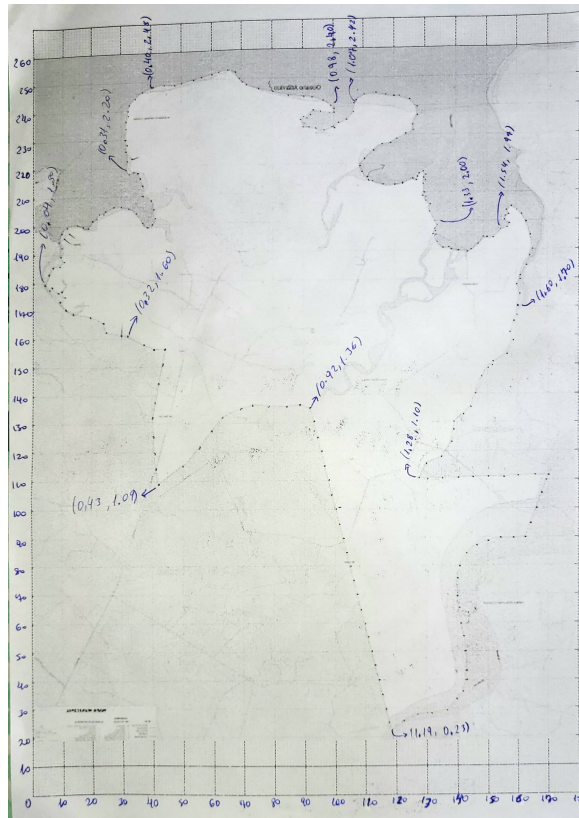
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21: Mapa no papel milimetrado 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22: Mapa no papel milimetrado 5.

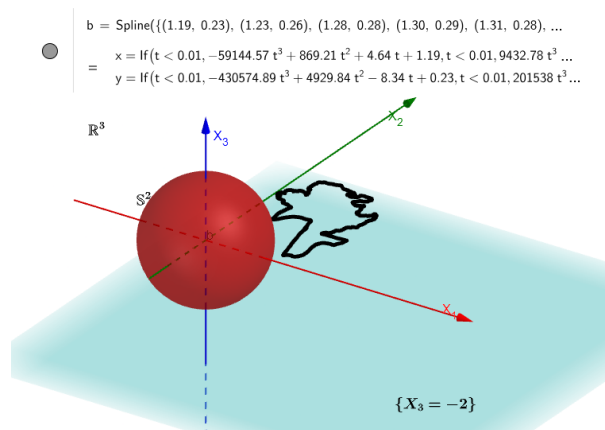


Fonte: Elaborado pelo autor.

A2 - Usando o Geogebra para representar graficamente o mapa de Brasil com a projeção estereográfica

Após adquirirmos nossa lista de pontos (totalizando 258 pontos), pudemos estudar como projetá-la na superfície do plano e da esfera unitária no Geogebra ([12]). Para ter o controle da figura, utilizamos a ferramenta **Spline** (Cria curvas suaves através de um conjunto de pontos, conforme abordado em [13]). Na Figura 23 podemos visualizar a aplicação da nossa lista de pontos na ferramenta **Spline**:

Figura 23: Controle da lista de pontos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A parametrização dos pontos que o software Geogebra emprega na ferramenta **Spline** possibilita variar sua trajetória e pode ser explorada brevemente em [2] e [3].

Com a aplicação da figura do mapa da cidade de Salinópolis/PA no mesmo arquivo, por questão de melhor visualização, podemos ocultá-la e partir para a projeção estereográfica no plano e na esfera unitária. A fim de que as superfícies estejam preparadas para receberem a figura do mapa, podemos usar a ferramenta **Surface** (Cria superfícies no espaço 3D) com a aplicação do teorema 2.1. Segue a estrutura da ferramenta:

Surface(Expressão, Expressão, Expressão, Variável do Parâmetro 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável do Parâmetro 2, Valor Inicial, Valor Final)

- **Expressão, Expressão, Expressão:** Estas são as três expressões que definem as coordenadas x, y e z de um ponto na superfície. Cada expressão é uma função de uma ou duas variáveis de parâmetro. As variáveis de parâmetro geralmente são chamadas de "u" e "v" e são brevemente abordadas em [6].
- **Variáveis dos Parâmetros:** Variáveis de parâmetro que usamos nas expressões. Elas definem as "direções" da superfície.
- **Valores iniciais e finais:** São valores que definimos para limitar/controlar as variações dos parâmetros.

Aplicando o Teorema 2.1 em nosso contexto, temos:

(i) **Projeção direta:** Seja S^2 uma esfera unitária, $N = (0, 0, 1)$ seu pólo norte e $\{X_3 = k = -2\}$ hiperplano, então:

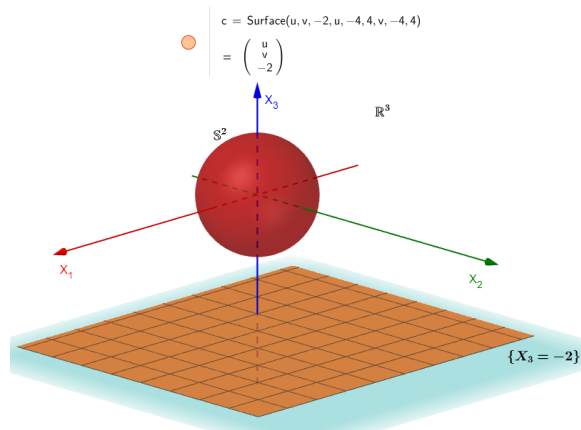
$$f(x) = \frac{-2-1}{-2-1} \left(x_1, x_2, \frac{(-2-1)}{-2-1} (-2) \right)$$

Por fim:

$$f(x) = (x_1, x_2, -2).$$

Essa foi nossa configuração representada na Figura 24 para aplicação no hiperplano $k = -2 \in \mathbb{R}^2$ conforme os critérios da ferramenta **Surface**.

Figura 24: Superfície de projeção direta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(ii) **Projeção inversa:** Seja S^2 uma esfera unitária, $N = (0, 0, 1)$ seu pólo norte, $\{k = -2\}$ hiperplano e $\|\bar{x}\|^2 = (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + (-2)^2)$, temos:

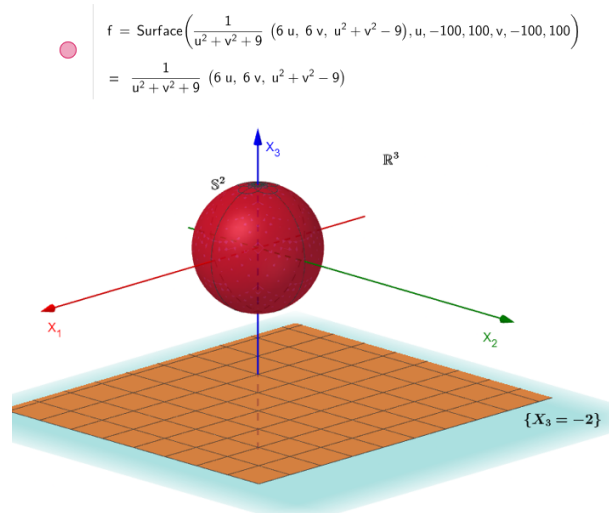
$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{2(1 - (-2))}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + (-2)^2 - (-2)^2 + (-2 - 1)^2} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + (-2)^2 - (-2)^2 - (-2 - 1)^2}{2(1 - (-2))} \right)$$

Por fim:

$$f^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + 9} \left(6\bar{x}_1, 6\bar{x}_2, \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 9 \right).$$

Essa foi nossa configuração representada na Figura 25 para aplicação na esfera unitária $(x^2 + y^2 + z^2 = 1) \in \mathbb{R}^3$ conforme os critérios da ferramenta **Surface**.

Figura 25: Superfície de projeção inversa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nossas superfícies estão preparadas para receberem a projeção de nossa lista de pontos. Para isso, iremos usar a ferramenta **Curve** (usada para criar curvas paramétricas, tanto no plano 2D quanto no espaço 3D). Podemos observar abaixo seus critérios de execução de comando:

Curve(Expressão, Variável do Parâmetro, Valor Inicial, Valor Final, Variável do Parâmetro 2, Valor Inicial, Valor Final)

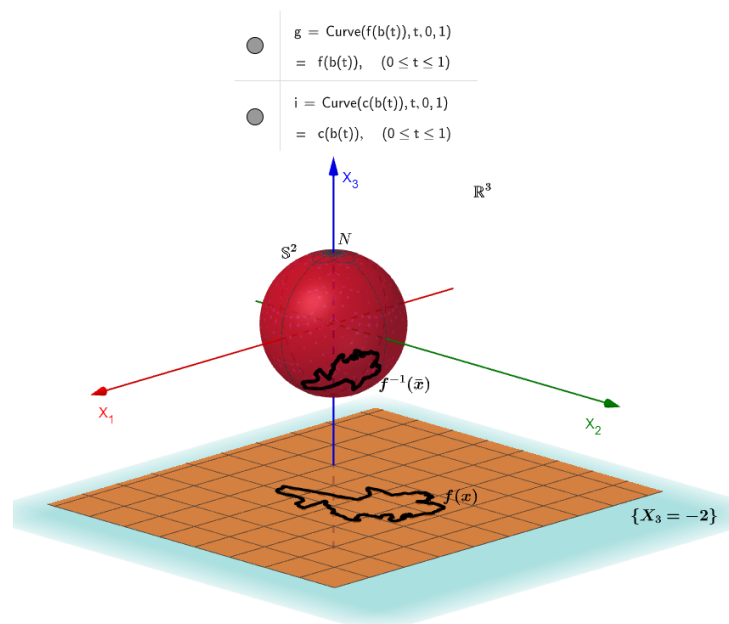
- **Expressão:** Esta expressão que define as coordenadas x e y de um ponto de curva. A expressão é uma função de uma única variável de parâmetro. As variáveis de parâmetro geralmente são chamadas de "t".
- **Variável de parâmetro:** Variável que varia ao longo da curva.
- **Valores iniciais e finais:** São valores que definimos para limitar/controlar a variação do parâmetro.

A aplicação dessa ferramenta foi feita através de uma composição de funções para cada projeção. Seguem as especificações:

- A **projeção estereográfica direta** é dada por $f(x)$ que é a composição de c (superfície do hiperplano $\{X_3 = -2\} \in \mathbb{R}^2$) com b (lista de pontos do mapa da cidade de Salinópolis/PA). A variável para esse parâmetro foi "t", que variou de 0 à 1.
- A **projeção estereográfica inversa** é dada por $f^{-1}(\bar{x})$ que é a composição de f (superfície da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$) com b (lista de pontos do mapa da cidade de Salinópolis/PA). A variável para esse parâmetro foi "t", que variou de 0 à 1.

A Figura 26, mostra a aplicação do Teorema 2.1 com $n = 3$ e $k = -2$ com a ferramenta **Curve** do software **Geogebra**. O item (i) cria o mapa da cidade de Salinópolis/PA na esfera unitária com a projeção estereográfica direta $f(x)$. O item (ii) cria o mapa da cidade de Salinópolis/PA no hiperplano $\{X_3 = -2\}$ com a projeção estereográfica inversa $f^{-1}(\bar{x})$.

Figura 26: Projeção esfereográfica do mapa da cidade de Salinopolis/PA no plano e na esfera unitária.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A3 - Lista de pontos do mapa da cidade de Salinópolis/PA

{(1.19, 0.23), (1.23, 0.26), (1.28, 0.28), (1.30, 0.29), (1.31, 0.28), (1.37, 0.29), (1.40, 0.33), (1.42, 0.37), (1.43, 0.40), (1.43, 0.43), (1.43, 0.50), (1.42, 0.56), (1.41, 0.60), (1.40, 0.66), (1.40, 0.70), (1.40, 0.77), (1.41, 0.80), (1.43, 0.84), (1.47, 0.88), (1.50, 0.89), (1.54, 0.90), (1.59, 0.90), (1.62, 0.90), (1.64, 0.95), (1.67, 1.00), (1.69, 1.06), (1.69, 1.10), (1.70, 1.12), (1.66, 1.12), (1.60, 1.12), (1.55, 1.11), (1.50, 1.11), (1.45, 1.11), (1.40, 1.11), (1.35, 1.11), (1.30, 1.10), (1.28, 1.10), (1.30, 1.16), (1.35, 1.18), (1.38, 1.23), (1.39, 1.28), (1.39, 1.30), (1.43, 1.32), (1.45, 1.35), (1.46, 1.40), (1.48, 1.48), (1.50, 1.49), (1.52, 1.50), (1.52, 1.52), (1.57, 1.54), (1.59, 1.56), (1.58, 1.61), (1.59, 1.65), (1.60, 1.67), (1.60, 1.70), (1.61, 1.75),

(1.60, 1.78), (1.61, 1.80), (1.61, 1.82), (1.63, 1.85), (1.64, 1.88), (1.65, 1.90), (1.64, 1.96),
 (1.63, 2.00), (1.62, 2.02), (1.60, 2.03), (1.58, 2.05), (1.56, 2.04), (1.57, 2.03), (1.56, 2.02),
 (1.56, 2.00), (1.58, 1.98), (1.54, 1.97), (1.52, 1.94), (1.50, 1.94), (1.49, 1.94), (1.47, 1.92),
 (1.44, 1.90), (1.41, 1.89), (1.39, 1.90), (1.38, 1.90), (1.37, 1.91), (1.35, 1.91), (1.33, 1.93),
 (1.32, 1.96), (1.34, 1.98), (1.33, 2.00), (1.32, 2.03), (1.32, 2.06), (1.30, 2.08), (1.29, 2.09),
 (1.30, 2.10), (1.29, 2.13), (1.29, 2.16), (1.30, 2.17), (1.29, 2.18), (1.28, 2.17), (1.27, 2.14),
 (1.26, 2.15), (1.22, 2.13), (1.20, 2.12), (1.16, 2.13), (1.12, 2.15), (1.11, 2.15), (1.11, 2.16),
 (1.10, 2.17), (1.09, 2.19), (1.11, 2.21), (1.14, 2.25), (1.16, 2.28), (1.19, 2.28), (1.21, 2.29),
 (1.23, 2.30), (1.26, 2.32), (1.26, 2.34), (1.28, 2.38), (1.28, 2.40), (1.25, 2.43), (1.22, 2.43),
 (1.20, 2.43), (1.17, 2.43), (1.14, 2.44), (1.10, 2.43), (1.07, 2.42), (1.07, 2.38), (1.04, 2.34),
 (1.00, 2.32), (0.97, 2.31), (0.94, 2.32), (0.92, 2.33), (0.90, 2.33), (0.89, 2.36), (0.90, 2.37),
 (0.92, 2.38), (0.93, 2.39), (0.97, 2.38), (0.98, 2.37), (1.00, 2.38), (1.00, 2.39), (0.98, 2.40),
 (0.96, 2.43), (0.93, 2.44), (0.90, 2.44), (0.85, 2.45), (0.80, 2.46), (0.75, 2.46), (0.72, 2.48),
 (0.70, 2.49), (0.69, 2.51), (0.68, 2.52), (0.66, 2.53), (0.63, 2.52), (0.60, 2.51), (0.57, 2.50),
 (0.54, 2.50), (0.50, 2.49), (0.48, 2.48), (0.44, 2.48), (0.40, 2.48), (0.38, 2.46), (0.34, 2.44),
 (0.33, 2.40), (0.33, 2.38), (0.32, 2.37), (0.32, 2.34), (0.31, 2.30), (0.32, 2.28), (0.31, 2.26),
 (0.32, 2.23), (0.31, 2.20), (0.33, 2.18), (0.34, 2.19), (0.36, 2.18), (0.36, 2.16), (0.37, 2.14),
 (0.37, 2.10), (0.40, 2.08), (0.40, 2.05), (0.41, 2.03), (0.40, 2.00), (0.39, 2.01), (0.35, 2.05),
 (0.33, 2.06), (0.30, 2.07), (0.28, 2.07), (0.24, 2.04), (0.24, 2.03), (0.23, 2.03), (0.22, 2.02),
 (0.20, 2.02), (0.19, 1.99), (0.18, 2.00), (0.16, 2.01), (0.12, 2.00), (0.10, 1.98), (0.09, 1.94),
 (0.10, 1.90), (0.12, 1.88), (0.09, 1.87), (0.06, 1.87), (0.05, 1.84), (0.04, 1.80), (0.05, 1.78),
 (0.06, 1.79), (0.09, 1.77), (0.10, 1.78), (0.11, 1.75), (0.09, 1.74), (0.11, 1.70), (0.13, 1.69),
 (0.20, 1.68), (0.24, 1.67), (0.25, 1.62), (0.32, 1.60), (0.38, 1.58), (0.41, 1.56), (0.44, 1.56),
 (0.43, 1.50), (0.42, 1.44), (0.41, 1.38), (0.40, 1.32), (0.40, 1.25), (0.41, 1.20), (0.42, 1.15),
 (0.43, 1.09), (0.50, 1.15), (0.54, 1.22), (0.59, 1.28), (0.63, 1.32), (0.70, 1.35), (0.73, 1.36),
 (0.79, 1.36), (0.85, 1.36), (0.88, 1.37), (0.92, 1.36), (0.93, 1.30), (0.94, 1.26), (0.96, 1.20),
 (0.97, 1.15), (0.98, 1.10), (0.99, 1.14), (1.00, 1.07), (1.01, 0.95), (1.02, 0.90), (1.03, 0.86),
 (1.05, 0.80), (1.06, 0.75), (1.07, 0.70), (1.08, 0.65), (1.09, 0.60), (1.11, 0.55), (1.12, 0.50),
 (1.13, 0.46), (1.15, 0.40), (1.16, 0.35), (1.17, 0.30), (1.18, 0.25), (1.19, 0.23)}