



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

BRÁULIO LUDERO DE LUCENA JÚNIOR

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA ONDAS COM AMORTECIMENTO DO
TIPO KELVIN-VOIGT E RETARDO FORTE NO TEMPO**

SALINÓPOLIS - PA
2022

BRÁULIO LUDERO DE LUCENA JÚNIOR

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA ONDAS COM AMORTECIMENTO DO
TIPO KELVIN-VOIGT E RETARDO FORTE NO TEMPO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

SALINÓPOLIS - PA
2022

BRÁULIO LUDERO DE LUCENA JÚNIOR

ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA ONDAS COM AMORTECIMENTO DO TIPO KELVIN-VOIGT E RETARDO FORTE NO TEMPO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Data da aprovação: 26/08/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Orientador - PDM/UFPA/Salinópolis

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro
Examinador UFPA/Salinópolis

Prof. Mestrando Joelson Dias Martins
Secretaria Municipal de Educação - Salinópolis

SALINÓPOLIS - PA
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

L935a Lucena, Bráulio Ludero de Lucena Júnior.
Análise de estabilidade para ondas com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt e retardo forte no tempo / Bráulio Ludero de Lucena Júnior Lucena. — 2022.
11 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Ramos

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2022.

1. Equação da onda. 2. Viscoelasticidade. 3. Termo de retardo. 4. Decaimento exponencial. 5. Método da energia. I. Título.

CDD 515.353

Análise de estabilidade para ondas com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt e retardo forte no tempo

Bráulio Ludero de Lucena Júnior

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará.
Rua Raimundo Santana Cruz, s/n, 68721-000, Salinópolis-Pa, Brasil.*

Abstract

Neste trabalho consideramos a equação da onda em domínio unidimensional com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt e termo de retardo. Fornecemos uma ideia de como é provada a boa colocação do problema e em seguida, provamos o resultado de decaimento exponencial da energia total do problema usando o método da energia.

Keywords: Equação da onda, viscoelasticidade, termo de retardo, decaimento exponencial, método da energia

1. Introdução

Com os recentes avanços tecnológicos os estudos de sistemas com amortecimento viscoelástico têm se tornado cada vez mais importantes, tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações. A viscoelasticidade é um amortecimento intrínseco do material capaz de 5
exibir simultaneamente propriedades de sólidos elásticos e de fluidos viscosos (ver [1, 2, 3]). Esse tipo de amortecimento - também chamado de amortecimento estrutural ou amortecimento do tipo Kelvin-Voigt, é o tema de estudo deste trabalho. A Figura 1 ilustra esse tipo de amortecimento.

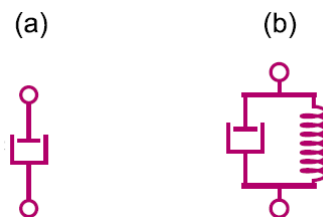


Figura 1: Modelo de amortecimento viscoelástico: (a) viscoso; (b) Kelvin-Voigt. Adaptado de L. Sun & L. Chen [4] – J. Sound Vib. **335**(2015)19–33

Aqui consideramos a equação da onda unidimensional com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt dada por 10

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - \mu_1 u_{xxt}(x, t) - \mu_2 u_{xxt}(x, t - \tau) = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \quad (1)$$

com o efeito de retardo agindo no termo de amortecimento. Os coeficientes $\mu_i > 0$ ($i = 1, 2$) e $\tau > 0$ controlam o amortecimento e o retardo respectivamente. As condições iniciais são dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u_{xxt}(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau), \quad \forall x \in (0, l) \times (0, \tau), \quad (3)$$

e as condições de contorno por

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

15 Os efeitos de retardo surgem em muitos problemas práticos, e é bem conhecido, que eles podem introduzir instabilidades, ver por exemplo [5, 6, 7, 8, 9].

Em [9] Nicaise e Pignotti estudaram a equação da onda com amortecimento interno dada por

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x)[\mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau)] = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty),$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_D \times (0, +\infty),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_N \times (0, +\infty),$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ e } u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega,$$

$$u_t(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau) \quad \text{em } \Omega \times (0, \tau),$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função tal que $a(x) \geq 0$ a.e. em Ω e $a(x) > a_0 > 0$ a.e. em $\omega \subset \Omega$.

20 Eles provaram que a energia total do problema decai exponencialmente para zero se $\mu_2 < \mu_1$. Por outro lado, se $\mu_2 > \mu_1$ eles mostraram uma instabilidade no problema.

Ao melhor do nosso conhecimento, o primeiro trabalho a investigar a interação entre o amortecimento do tipo Kelvin-Voigt e os efeitos desestabilizantes do atraso é devido à Makheloufi et al. [10]. Neste trabalho os autores consideraram o sistema de Timoshenko

25 dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_{xxt}(x, t) - \mu_2 \varphi_{xxt}(x, t - \tau) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (6)$$

Usando técnicas de semigrupo eles provaram a boa colocação do problema, um resultado de falta de estabilidade exponencial e o decaimento polinomial com taxa a ótima $t^{-1/2}$.

Motivado por Makheloufi et al. [10], estudamos o comportamento do problema (1)–(4) na intenção de aplicar o método da energia para provar o decaimento exponencial tal como foi desenvolvido em [10].

30

2. Boa colocação

Para lidarmos com o problema (1)–(4) precisamos reescrever o termo $u_{xxt}(x, t - \tau)$ responsável pelo efeito de retardo. Isso é feito através de uma mudança de variável.

Seguindo os passos de Said-Houari e Laskri [11] (ver também Nicaise e Pignotti [9, 12]),
 35 introduzimos uma nova variável dependente para lidar com o termo de retardo. Mais precisamente, consideramos

$$\eta(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in (0, l), \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (7)$$

Com isso, o problema (1)–(4) pode ser reescrito como

$$u_{tt} - u_{xx} - \mu_1 u_{xxt} - \mu_2 \eta_{xx}(x, 1, t) = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \quad (8)$$

$$\tau \eta_t + \eta_\rho = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty), \quad (9)$$

com condições iniciais e de contorno dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l), \quad (10)$$

$$\eta(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho\tau), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, 1), \quad (11)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

A energia total do problema (8)–(12) é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\tau\mu_1}{2} \int_0^l \int_0^1 |\eta_x|^2 d\rho dx. \quad (13)$$

40 O teorema seguinte trata da lei de dissipação de energia do problema.

Teorema 2.1. *Seja (u, η) a solução do problema (8)–(12). Para $\mu_2 < \mu_1$, a energia $E(t)$ dada em (13) satisfaz a lei de dissipação dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C_1 \int_0^l (|u_{xt}|^2 + |\eta_x(x, 1, t)|^2) dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

onde $C_1 := \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) > 0$.

Prova: Multiplicando a equação (8) por u_t , integrando por partes em $[0, l]$ e usando a
 45 condição de contorno (12) obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \mu_1 \int_0^l |u_{xt}|^2 dx + \mu_2 \int_0^l \eta_x(x, 1, t) u_{xt} dx = 0. \quad (15)$$

Analogamente, multiplicando a equação (9) por $-\mu_1 \eta_x$ e integrando por partes em $[0, l] \times [0, 1]$ temos

$$\frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta_x|^2 d\rho dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u_{xt}|^2 dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 dx = 0. \quad (16)$$

Adicionando as equações (15) e (16) ficamos com

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u_{xt}|^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 dx - \mu_2 \int_0^l \eta_x(x, 1, t) u_{xt} dx,$$

onde $E(t)$ dada em (13). Usando a desigualdade de Young temos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \int_0^l |u_{xt}|^2 dx - \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 dx.$$

Portanto, para $\mu_2 < \mu_1$ existe uma constante positiva $C_1 := \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) > 0$ de onde concluímos a prova do teorema.

■

Ressaltamos que neste trabalho não é nossa intenção provar a boa colocação do problema, porém fornecemos a ideia de como a prova é feita. Inicialmente consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_0^1((0, l); L^2(0, 1)), \quad (17)$$

onde

$$L^2(0, l) = \left\{ f : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}; \int_0^l |f|^2 dx < \infty \right\}$$

e

$$H_0^1(0, l) = \left\{ f \in L^2(0, l); \int_0^l |f_x|^2 dx < \infty; f(0) = f(l) = 0 \right\},$$

munido com o produto interno

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^l u_1 \tilde{u}_1 dx + \int_0^l u_{0,x} \tilde{u}_{0,x} dx + \tau \mu_1 \int_0^l \int_0^1 z_{0,x}(x, \rho) \tilde{z}_{0,x}(x, \rho) d\rho dx,$$

para todo $U = (u_0, u_1, z_0)^T$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{z}_0)^T$ em \mathcal{H} e a norma dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 := \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (18)$$

A existência e unicidade de solução pode ser garantida pela teoria de semigrupo de operadores lineares (13). Note que o sistema (8)–(12) pode ser reescrito como

$$\Phi_t(t) = \mathcal{A}\Phi(t), \quad t > 0, \quad (19)$$

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad (20)$$

onde $\Phi(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t), z(\cdot, 1, t))^T$ é a solução do sistema, $\Phi_0 = (u_0(\cdot), u_1(\cdot), f_0(\cdot, -\tau))^T$ é a condição inicial e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 \\ (\cdot)_{xx} & (\mu_1 + \mu_2)(\cdot)_{xx} & \mu_2 \int_0^1 (\cdot)_{xx\rho} d\rho \\ 0 & 0 & \tau^{-1}(\cdot)_{\rho} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

onde denotamos por $I(\cdot)$ o operador identidade. O domínio de \mathcal{A} é dado por

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U = (u_0, u_1, z_0) \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \times H_0^1((0, l); H^1(0, 1)) \right\}.$$

É fácil ver que \mathcal{A} é dissipativo desde que $\mu_2 < \mu_1$, pois para cada $U = (u_0, u_1, z_0)^T \in D(\mathcal{A})$ temos

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -C_1 \int_0^l \left(|u_1|^2 + |z_0(x, 1)|^2 \right) dx \leq 0, \quad (22)$$

onde $C_1 := (\mu_1 - \mu_2)/2 > 0$. Como \mathcal{A} é um operador dissipativo, é padrão mostrar que 0 pertence ao conjunto resolvente de \mathcal{A} , i.e., $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então, a partir do Teorema de Lumer-Phillips ([13], Teorema 4.3), é garantido que o operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em \mathcal{H} . Com isso, podemos afirmar o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Boa colocação). *Sejam $D(\mathcal{A})$ e \mathcal{H} conforme definidos anteriormente. Então para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (19)–(20) possui uma única solução fraca $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C([0, \infty); \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então $U(t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathcal{A}))$ é a solução forte do problema (19)–(20).*

3. Decaimento exponencial: O método da energia

Nesta seção provamos que a energia total do problema (8)–(12) decai exponencialmente para zero. O teorema seguinte trata deste resultado.

Teorema 3.1 (Decaimento exponencial). *Suponha que $\mu_2 < \mu_1$. Então, a energia $E(t)$ do problema (8)–(12) decai exponencialmente para zero com o tempo t tende ao infinito, i.e., existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ independentemente dos dados iniciais tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (23)$$

A prova deste teorema requer a construção de dois lemas técnicos que são destacados a seguir.

Lema 3.2. *Seja (u, η) a solução do problema (8)–(12). Então o funcional*

$$\mathcal{F}(t) := \int_0^l u_t u \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx, \quad (24)$$

satisfaz a seguinte taxa de variação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq \int_0^l |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 \, dx. \quad (25)$$

Prova: Multiplicando a equação (8) por u e integrando por partes em $[0, l]$ temos

$$\int_0^l u_{tt} u \, dx + \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u|^2 \, dx + \mu_2 \int_0^l \eta_x(x, 1, t) u_x \, dx = 0.$$

Por outro lado, da identidade $u_{tt}u = \frac{\partial}{\partial t}(u_t u) - |u_t|^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^l u_t u \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx \right) - \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \mu_2 \int_0^l \eta_x(x, 1, t) u_x \, dx = 0. \quad (26)$$

Finalmente, definido o funcional

$$\mathcal{F}(t) := \int_0^l u_t u \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx, \quad (27)$$

usamos a desigualdade de Young para obtermos o resultado

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq \int_0^l |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 \, dx. \quad (28)$$

■

90 **Lema 3.3.** *Seja (u, z) a solução do problema (8)–(12). Então o funcional*

$$\mathcal{G}(t) := \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx, \quad (29)$$

satisfaz,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = -2\mathcal{G}(t) - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l |u_{xt}|^2 \, dx. \quad (30)$$

Prova: Multiplicando a equação (9) por $\frac{2}{\tau} e^{-2\tau\rho} \eta_{xx}$ e integrando por partes em $[0, l] \times [0, 1]$ temos

$$2 \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_t \eta_{xx} \, d\rho \, dx + \frac{2}{\tau} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho \eta_{xx} \, d\rho \, dx = 0, \quad (31)$$

seguido por

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{d}{d\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx = 0. \quad (32)$$

95 Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, dx \Big|_0^1 + 2 \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx = 0 \quad (33)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l e^{-2\tau} |\eta_x(x, 1, t)|^2 \, dx - \frac{1}{\tau} \int_0^l |u_{xt}|^2 \, dx \\ & + 2 \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Definido o funcional

$$\mathcal{G}(t) := \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta_x|^2 \, d\rho \, dx, \quad (35)$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = -2\mathcal{G}(t) - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l |u_{xt}|^2 \, dx. \quad (36)$$

Isto conclui a prova.

100 ■

3.1. Prova do Teorema (3.1)

Agora estamos em condições de provar o Teorema 3.1. Para isso, definimos o funcional de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := N_0 E(t) + \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t), \quad (37)$$

onde $N_0 > 0$ é uma constante definida posteriormente. Além disso, é fácil ver que $\mathcal{L}(\cdot)$ e $E(\cdot)$ são equivalentes, i.e., existem constantes $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (38)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & -\left(N_0 C_1 / c_p - 2\right) \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - \left(N_0 C_1 - 2/\tau\right) \frac{1}{2} \int_0^l |u_{xt}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & - 2e^{-2\tau} \int_0^l \int_0^1 |\eta_x|^2 d\rho dx - \left(2N_0 C_1 + 2e^{-2\tau}/\tau - \mu_2\right) \frac{1}{2} \int_0^l |\eta_x(x, 1, t)|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $c_p > 0$ é a constante de Poincaré. Escolhendo $N_0 > 0$ suficientemente grande, i.e.,

$$N_0 > \max\left\{2c_p/C_1, 2/\tau C_1, \mu_2/2C_1\right\}, \quad (39)$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\left(N_0 C_1 / c_p - 2\right) \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx - 2e^{-2\tau} \int_0^l \int_0^1 |\eta_x|^2 d\rho dx.$$

Tomando $\xi_0 := \min\{1, 4e^{-2\tau}/\tau\mu_1, N_0 C_1 / c_p - 2\}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\xi_0 E(t), \quad (40)$$

que é equivalente (ver 38) à escrever

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{\xi_0}{k_2} \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (41)$$

Portanto provamos que

$$E(t) \leq M E(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (42)$$

com $M := k_2/k_1 \geq 1$ e $\omega = \xi_0/k_2$.

4. Considerações finais

Em 2019, quando começamos a estudar a estabilização exponencial da equação da onda com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt e termo de retardo no tempo, não havia nenhum trabalho na literatura que analisasse problemas com esse tipo de amortecimento. Porém, com o surgimento da pandemia de COVID-19, tivemos que parar nossas atividades por um tempo. Quando retomamos os estudos, fomos surpreendidos com o trabalho de Makheloufi et al. [10], onde os autores consideraram os mesmos mecanismos de amortecimento que estávamos estudando, só que aplicados ao sistema de vigas de Timoshenko.

Dessa forma, nossa pretensão com este trabalho se resume a desenvolver um material didático que forneça ao aluno de graduação, uma pequena ideia de como o método da energia é usado na estabilização exponencial de problemas com esse tipo de amortecimento.

Referências

- [1] M. A. Meyers, K. K. Chawla, *Mechanical Behavior of Materials*, no. 98-103, Cambridge, 1999.
- [2] N. G. McCrum, C. P. Buckley, C. B. Bucknall, *Principles of Polymer Engineering*, no. 391, New York, 1988.
- [3] R. S. Lakes, *Viscoelastic Solids* (1998), CRC Press, 2017.
- [4] L. Sun, L. Chen, Free vibrations of a taut cable with a general viscoelastic damper modeled by fractional derivatives, *Journal of Sound and Vibration* 335 (2015) 19–33.
- [5] R. Datko, Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks, *SIAM Journal on Control and Optimization* 26 (3) (1988) 697–713.
- [6] R. Datko, Two examples of ill-posedness with respect to time delays revisited, *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (4) (1997) 511–515.
- [7] R. Datko, J. Lagnese, M. P. Polis, An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations, *SIAM Journal on Control and Optimization* 24 (1) (1986) 152–156.
- [8] G. Q. Xu, S. P. Yung, L. K. Li, Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 12 (4) (2006) 770–785.
- [9] S. Nicaise, C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, *SIAM Journal on Control and Optimization* 45 (5) (2006) 1561–1585.
- [10] H. Makheloufi, M. Bahlil, B. Feng, Optimal polynomial decay for a timoshenko system with a strong damping and a strong delay, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 44 (8) (2021) 6301–6317.
- [11] B. Said-Houari, Y. Laskri, A stability result of a timoshenko system with a delay term in the internal feedback, *Applied Mathematics and Computation* 217 (6) (2010) 2857–2869.
- [12] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, *Differential and Integral Equations* (2008) 935–958.
- [13] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer New York, 1983.