UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA

LUCAS DA SILVA COSTA

SÉRIES TEMPORAIS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA

CASTANHAL
2022

LUCAS DA SILVA COSTA

SÉRIES TEMPORAIS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA

Portfólio acadêmico apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Arthur da Costa Almeida.
Universidade Federal do Pará.

CASTANHAL
2022

LUCAS DA SILVA COSTA

SÉRIES TEMPORAIS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA

Portfólio acadêmico apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Arthur da Costa Almeida.
Universidade Federal do Pará.

Data da aprovação: ____/____/_____

Conceito: _____

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Arthur da Costa Almeida, Doutor.
UFPA/Campus de Castanhal/Faculdade de Matemática

_____
Prof. Valdelírio Silva e Silva, Doutor.
UFPA/Campus de Castanhal/Faculdade de Matemática

_____
Profa. Carla Cristina de Souza Tavares, Mestra.
UFPA/Campus de Castanhal/Faculdade de Matemática

A Maria Raiele Santos, pelo apoio e companheirismo desde que tínhamos 10 anos de idade. Não importa o quanto tenhamos nos distanciado, sempre estarei contigo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, antes de tudo, embora eu não tenha mais certeza do que exatamente eu acredito religiosamente.

Aos meus pais, Maria José e Alexandre, pelo apoio, compreensão e paciência que sempre tiveram comigo desde o início.

Ao professor Valdelírio Silva, por sua compreensão, cuidado e insistência comigo. Por quem sempre tive grande admiração profissional e respeito, obrigado por acreditar em mim e também por me apresentar a programação, “Criatura”!

A Edyvana Gabriela, por sempre estar ao meu lado, principalmente nos últimos dois anos que foram especialmente difíceis e conturbados e por dizer algumas verdades quando necessário. Pela parceria nas produções acadêmicas, nas disciplinas e nos “rolês aleatórios” entre um surto e outro.

Ao meu orientador, Arthur Almeida, por me auxiliar nessa reta final e por me orientar e aconselhar nas produções mesmo antes de se tornar meu orientador de TCC. Aos convites para ajudar na fiscalização das provas de seleção do Mestrado, pela carta de recomendação e por todo o apoio que me foi dado até aqui.

A Ma. Carla Tavares, por aceitar compor minha banca e pela atenção durante as disciplinas de Cálculo e Análise.

Ao meu amigo Alisson Ferrari, uma das pessoas mais inteligentes que já conheci, por acreditar mais em mim do que eu mesmo. Obrigado pelo apoio, pelas conversas extremamente nerds que só nós parecemos gostar, pela parceria nos *games* e nos momentos de tristeza também. Obrigado por ainda se importar, meu querido “Ptolomeu”.

A William Farias, por todas as ligações inesperadas e sem motivo aparente simplesmente pra conversar comigo, sejam elas as 7h da manhã ou as 23h da noite. Tu pareces adivinhar quando não estou bem, me salvou várias vezes. Obrigado por passar teus últimos dias no Pará comigo, não esquecerei.

A todos os amigos que de alguma forma estiveram ao meu lado, especialmente a Maria Raiele, Hildmir, Luely, Renato Vinícius, Raylana, Juan, Deyse e meu gentil Pseudo-burguês (Renato Júnior). Obrigado a todos que estiveram comigo.

A mim mesmo, Lucas Aranha, por não desistir apesar de tudo. “Eu” do presente, faça tudo que o “Eu” do passado não pode, não tentou, desistiu ou não teve coragem de fazer ou concluir. Desista apenas da ideia tornar a desistir.

“A ostra, para fazer uma pérola, precisa ter dentro de si um grão de areia que a faça sofrer. Sofrendo, a ostra diz para si mesma: “Preciso envolver esta areia pontuda que me machuca com uma esfera lisa que lhe tire as pontas...”. Ostras felizes não fazem pérolas. Pessoas felizes não sentem a necessidade de criar. O ato criador, seja na ciência ou na arte, surge sempre de uma dor. Não é preciso que seja uma dor doída. Por vezes, a dor aparece como aquela coceira que tem o nome de curiosidade.”

(ALVES, 2008)

RESUMO

Este texto consiste em um portfólio acadêmico, tem por intuito apresentar as produções acadêmicas e científicas desenvolvidas no decorrer da formação no curso de Licenciatura em Matemática, em ordem cronológica. Dito isso, são apresentadas cinco publicações acadêmico-científicas desenvolvidas e publicadas durante a graduação, no período que compreende os anos de 2018 a 2021, das quais foram selecionadas três. A primeira das três publicações escolhidas refere-se a modelagem de uma epidemia de sarampo ocorrido na região Norte do Brasil, no ano de 2018, este trabalho surgiu do meu interesse pela Epidemiologia e pela Modelagem com Equações Diferenciais Ordinárias, permitindo pôr em prática os conteúdos das disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear. O segundo texto corresponde aos resultados parciais de uma pesquisa exploratória na cidade de Belém do Pará, buscando verificar uma possível correlação entre o volume de chuvas na cidade e o índice de instabilidade CAPE (*Convective Available Potential Energy*) através da análise de Séries Temporais. A última produção busca realizar a junção dos dois trabalhos mencionados anteriormente, aplicando Séries Temporais ao estudo dos surtos de dengue no estado do Paraná ocorridos no período de janeiro de 2014 a janeiro de 2021. Dessa forma, o primeiro texto possibilitou verificar como métodos numéricos funcionam bem, mesmo nos casos em que a solução analítica fechada é desconhecida ou difícil de ser encontrada. O segundo evidenciou uma possível correspondência na tendência variacional das séries analisadas. Enquanto no terceiro trabalho se confirmou a existência de uma forte sazonalidade, evidenciando a necessidade do uso de um modelo mais apropriado que considere este fator.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Epidemiologia; Modelagem Matemática; Precipitação; Séries Temporais.

ABSTRACT

This text consists of an academic portfolio, with the aim of presenting the academic and scientific productions developed during the training course in Mathematics, in chronological order. That said, five academic-scientific publications developed and published during graduation are presented, in the period from 2018 to 2021, of which three were selected. The first of the three publications chosen refers to the modeling of a measles epidemic that occurred in the Northern region of Brazil, in 2018, this work arose from my interest in Epidemiology and Modeling with Ordinary Differential Equations, allowing to put into practice the contents of the disciplines of Calculus and Linear Algebra. The second text corresponds to the partial results of an exploratory research in the city of Belém do Pará, seeking to verify a possible correlation between the volume of rainfall in the city and the CAPE (Convective Potential Available Energy) instability index through the analysis of Time Series. The last production seeks to carry out the combination of the two studies mentioned above, applying Time Series to the study of dengue outbreaks in the state of Paraná that occurred from January 2014 to January 2021. Thus, the first text made it possible to verify how well numerical methods work, even in cases where the closed analytical solution is unknown or difficult to find. The second showed a possible correspondence in the variational trend of the analyzed series. While in the third study, the existence of a strong seasonality was confirmed, evidencing the need to use a more appropriate model that considers this factor.

Keywords: Differential Equations; Epidemiology; Mathematical Modeling; Precipitation; Time Series.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....9
2 UMA DOR CHAMADA CURIOSIDADE.....11
3 PRODUÇÕES EM EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA.....13
3.1 ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÕES DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR ATRAVÉS DE SÉRIES DE TAYLOR DE 1º, 2º E 3º ORDENS.....14
3.2 ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM EPIDEMIOLOGIA.....23
3.3 MODELAGEM DE UMA EPIDEMIA DE SARAMPO USANDO SIR.....25
3.4 COMPARAÇÃO ENTRE A VARIAÇÃO MENSAL DA CAPE E DA PRECIPITAÇÃO EM BELÉM, PA.....30
3.5 MODELOS PREDITIVOS DE SÉRIES TEMPORAIS EPIDEMIOLÓGICAS PARA O ESTUDO DA DENGUE NO PARANÁ, BRASIL.....35
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....43
REFERÊNCIAS.....45
ANEXO A – Comprovantes de apresentação de trabalho.....46

1 INTRODUÇÃO

Este portfólio é constituído por cinco publicações apresentadas e publicadas em anais/*proceeding* de eventos científicos, estando estruturado em quatro seções, referências e anexos. A primeira seção, Introdução, apresenta brevemente a maneira como este texto está estruturado, além de fornecer um panorama sucinto das produções contidas nele. Na segunda seção, é mostrada minha relação com a Matemática e a Ciência, passando por vários níveis escolares até meu trajeto ao longo da graduação. A terceira seção traz cinco publicações, das quais selecionei três que acredito representarem meus interesses em relação a trajetória acadêmica e possíveis caminhos a trilhar. Na última seção, são feitas minhas considerações finais acerca dos três trabalhos selecionados para compor este trabalho de conclusão.

Cada uma das publicações contidas neste portfólio traz contribuições relevantes para o meu processo de formação, permitindo tanto aplicar os conteúdos aprendidos nas disciplinas da grade curricular quanto ter acesso a conhecimentos que não estão presentes em nossa formação inicial. O primeiro trabalho, “Análise numérica de soluções do modelo epidemiológico SIR através de séries de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordens”, marca o início de minhas experiências acadêmicas em eventos científicos e aborda um método numérico para resolução de modelos baseados em sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Já o segundo, “Estudo de modelos matemáticos em Epidemiologia” é um resumo simples feito a partir de um projeto pessoal de estudo que deu origem as inquietações que formam a base dos textos expostos neste portfólio. Estes dois primeiros serão apresentados de maneira mais superficial.

As três produções posteriores são as que de fato atendem aos requisitos mínimos exigidos na resolução acadêmica Nº 01/2017, sobre as quais serão feitas as devidas considerações no encerramento deste trabalho. O terceiro texto, “Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR”, apresenta aplicações de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear à área da Saúde. No quarto, “Comparação entre a variação mensal da CAPE e da precipitação em Belém, PA”, temos o uso de Séries Temporais para a análise de dados meteorológicos. Por fim, o texto “Modelos preditivos de Séries Temporais epidemiológicas para o estudo da dengue no Paraná, Brasil” faz uma interseção entre os dois anteriores, mostrando aplicação de Séries Temporais a problemas na área de Saúde.

Assim, este portfólio tem como proposta estabelecer uma sequência lógica das produções desenvolvidas e como elas contribuíram para a consolidação dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso de graduação e para minha formação profissional.

2 UMA DOR CHAMADA CURIOSIDADE

Ainda durante minha infância, eu já demonstrava um interesse pela Ciência mesmo que de uma maneira mais inocente e despretensiosa. Assistir a um documentário sobre Astronomia parecia quase tão cativante quanto os desenhos animados que passavam na televisão. Mas a Matemática, a tão temida disciplina escolar, sempre dava um jeito de surgir entre uma informação e outra. Eu desejava conhecer o Universo, mas a Matemática parecia ser a linguagem com a qual tudo nele era escrita, então percebi que precisava aprendê-la.

No decorrer do ensino fundamental II tive um novo professor de Matemática, ele era diferente dos outros. Ele fazia com que os conteúdos parecem mais divertidos e estava sempre me instigando a ser cada vez melhor, me deixava constantemente motivado. Eu tinha muitas perguntas, não queria apenas saber como se realiza um determinado cálculo ou qual termo técnico se dá para essa ou aquela ferramenta. Nunca me bastou saber como utilizar, eu desejava saber os porquês, como e onde surgiram, a partir de quais necessidades e para qual finalidade. Então, essa pequena dor que surgia como um incomodo no peito começou a crescer cada vez mais.

Durante o ensino médio, essa dor, uma dor chamada curiosidade, se tornou grande demais e me levou a mergulhar em lugares que para mim eram desconhecidos e eu nem mesmo era capaz de compreendê-los. As inquietações não tinham fim, se limitar a aceitar que raízes quadradas de números negativos não existiam era muito raso. Como poderiam não existir? Na busca pela resposta acabei esbarando nos números Complexos e fui além deles. Quaternions, quarta dimensão, números quase inimagináveis. Então, decidi que me tornaria um Matemático e faria da curiosidade minha aliada.

Aos 17 anos ingressei na Universidade Federal do Pará (UFPA), no *campus* universitário de Castanhal, para cursar Matemática. O percurso não foi nem de longe como imaginei, mas esse não é um ponto negativo. No decorrer do curso tive a oportunidade de realizar alguns estudos e de enriquecer minha formação através de cursos de extensão e apresentações de trabalhos em eventos científicos e acadêmicos de algumas outras instituições, além de conhecer novas áreas, entre elas a Epidemiologia Matemática.

Nesse contexto, a Faculdade de Matemática da UFPA apoia e incentiva que seus discentes busquem integrar seus conhecimentos aos seus três pilares

fundamentais: Ensino, Pesquisa e Extensão. Por isso, as produções acadêmicas contidas neste portfólio retratam minhas experiências e estudos teóricos e práticos quanto a duas subáreas específicas da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral e as Séries Temporais aplicados as áreas de Epidemiologia e Meteorologia.

3 PRODUÇÕES EM EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA

A resolução Nº 01/2017, em seu art. 12, determina que os estudantes que optarem por elaborar um portfólio como TCC, na modalidade publicação, devem atender a pelo menos um dos seguintes requisitos:

I. um artigo (revista ou periódico);
II. duas comunicações orais (em anais dos eventos);
III. três pôsteres (em anais dos eventos);
IV. uma comunicação oral e dois pôsteres (em anais dos eventos).

Com base nisso, eu escolhi construir meu TCC considerando o item IV, embora pudesse ter optado pelo item II. O quadro 1 elenca todos os meus trabalhos publicados no decorrer da graduação, no período entre 2018 e 2021, dando destaque aos três textos selecionados para compor este trabalho.

Quadro 1: Produções acadêmicas ao longo do processo de formação em Matemática.

TÍTULO	AUTORES	EVENTO	PERÍODO
Análise numérica de soluções do modelo epidemiológico SIR através de séries de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordens	Deyse Lohanny S. Feitosa Edyvana G. S. Teixeira Lucas da Silva Costa Maria Luely S. de Oliveira Frayzer Lima de Almeida	I Simpósio de Ensino Pesquisa e Extensão - SIEPEX	30 de outubro a 01 de novembro de 2018
Estudo de modelos matemáticos em epidemiologia	Lucas da Silva Costa Arthur da Costa Almeida	IV Simpósio de Ensino Pesquisa e Extensão - SIEPEX	25 a 27 de agosto de 2021
Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR	Lucas da Silva Costa Edyvana G. S. Teixeira Arthur da Costa Almeida	XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC	13 a 17 de setembro de 2021
Comparação entre a variação mensal da CAPE e da precipitação em Belém, PA	Edyvana G. S. Teixeira Lucas da Silva Costa Arthur da Costa Almeida	XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC	13 a 17 de setembro de 2021

Modelos preditivos de Séries Temporais epidemiológicas para o estudo da dengue no Paraná, Brasil	Lucas da Silva Costa Arthur da Costa Almeida	XXI Semana de Matemática e XI Semana de Estatística – SEMAT e SEMEST	08 a 25 de novembro de 2021

Fonte: Organizado pelo autor.

As produções destacadas foram escolhidas para compor a terceira seção que busca apresentar os três trabalhos aprovados, sendo um no formato de comunicação oral, em evento regional na área de Estatística e Probabilidade e dois no formato de pôster, em evento nacional na área da Matemática Aplicada e Computacional. Para a seleção dos três trabalhos entre os cinco listados, foi usado como critério o nível do evento e os requisitos do item IV. Considerando que todos os textos tem como ponto comum a Modelagem e, com exceção do quarto, a aplicação em Epidemiologia.

Além disso, os dois primeiros textos do quadro 1 estão presentes neste portfólio a fim de estabelecer uma linha cronológica completa. No entanto, apenas os três destacados constituem a composição oficial deste TCC. Reforça-se ainda que o art. 12, em seu §3º determina que o aluno seja o autor principal de pelo menos um dos trabalhos, podendo ser co-autor dos demais.

3.1 ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÕES DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR ATRAVÉS DE SÉRIES DE TAYLOR DE 1º, 2º E 3º ORDENS

Tive meu primeiro contato com a Modelagem Matemática e com as aplicações em Epidemiologia através de um convite do professor Dr. Frayzer Lima para realizar um estudo que faria parte de um projeto de pesquisa ao qual ele estava trabalhando e que deu origem ao texto “Análise numérica de soluções do modelo epidemiológico SIR através de séries de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordens”, no qual fui co-autor. Esta foi minha primeira experiência com textos acadêmicos, sendo realizada antes mesmo das primeiras aulas da disciplina de Metodologia Científica.

Neste trabalho, foram analisadas as soluções de um sistema de EDOs que visava modelar a epidemia de gripe suína (H1N1), ocorrida em 2009, com auxílio do método de expansões de Séries de Taylor a título de comparação com as aproximações obtidas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem divulgadas em Deniz e Missio (2014).

É importante mencionar algumas falhas deste trabalho, decorrentes principalmente de nossa inexperiência. A primeira delas é referente aos erros apresentados, o erro absoluto é indicado quando há valores nulos nos dados coletados, o que inviabilizaria o uso do erro relativo. Como erroneamente não foi realizada uma normalização dos dados, trabalhamos com as quantidades populacionais reais. Uma maneira mais apropriada de medir a exatidão das simulações é calculando o erro relativo, pois ele leva em consideração a escala do problema modelado.

Outro ponto a ser esclarecido diz respeito a apresentação dos resultados, os gráficos ilustrados nas figuras 1 e 2 dão margem para interpretações equivocadas. Eles não mostram a comparação entre as simulações pelo método de séries de Taylor e o método de Runge-Kutta aplicado em Deniz e Missio (2014), mas sim a comparação entre as simulações em diferentes ordens do mesmo método (séries de Taylor).

Além disso, os resultados mostram que a precisão das simulações com ambos os métodos é muito similar. No entanto, não são feitas considerações acerca das vantagens de um método sobre outro. Uma dessas vantagens seria em relação ao custo computacional, se a precisão obtida é similar então é vantajoso usar aquele com a menor quantidade de estágios. Claramente a escolha mais apropriada dependerá dos objetivos da pesquisa e características do problema. Por fim, na lista de referências há uma produção não citada ao longo do texto.

Este texto foi submetido e aprovado para ser apresentado, na modalidade comunicação oral, no I Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão – SIEPEX, evento local organizado pelo campus universitário de Castanhal da UFPA, em 2018. Sob o ISSN 2595-7856.

ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÕES DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR ATRAVÉS DE SÉRIES DE TAYLOR DE 1º, 2º E 3º ORDENS

Deyse Lohanny Da Silva Feitosa[1]
Edyvana Gabriela Da Silva Teixeira[2]
Lucas da Silva Costa[3]
Maria Luely Santos de Oliveira[4]
Frayzer Lima de Almeida[5]
FACMAT / UFPA

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo a população humana vem sendo acometida por diversas epidemias sejam ocasionadas pela falta de saneamento, higiene, mudanças climáticas, entre outros fatores. A gripe A (H1N1) consiste numa doença causada por uma mutação do vírus da gripe. Também conhecida como gripe suína, o H1N1 é um subtipo da *Influenza* A (vírus *Influenza* da família dos *Ortomixovírus*). As primeiras formas do vírus foram descobertas em porcos, mas as mutações conseguintes o tornaram uma ameaça também para os seres humanos. Como todo vírus, manifestado de forma inusitada em pessoas, não costumam existir métodos preventivos.

Tratando-se de pandemias utiliza-se modelos determinísticos compartimentais que sejam capazes de analisar seu comportamento. Esses modelos consistem em reorganizar a população em subgrupos de acordo com o seu estágio em relação a doença estudada e avaliar a sua evolução em decorrência do tempo. Com o modelo

[1] feitosadeyse86@gmail.com
[2] edyvanateixeira@gmail.com
[3] lcsilva17.ls@gmail.com
[4] luelysantos1206@gmail.com
[5] frayzerlima@hotmail.com

SIR podemos desenvolver sistemas de equações diferenciais em que suas soluções são obtidas através de métodos numéricos, tais como o método de Euler e suas extensões aplicando dados hipotéticos com análise gráfica de erros absolutos. Será explanado nesse artigo a utilização do modelo SIR para modelar a gripe suína analisada em Deniz e Missio (2014). Para solucionar e analisar o referido modelo, aplicamos o método numérico da Série de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordem.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Foram realizadas pesquisas referentes à epidemiologia, aos sistemas de equações diferenciais, aos modelos epidemiológicos com ênfase no modelo SIR. Ele registra ao longo do tempo três estados na população de hospedeiros onde: S são os suscetíveis, que não são infectados, mas podem vir a serem infectados, I são os infectados, que podem vir a ficar recuperados ou irem a óbito por conta da doença contraída e R são resistentes, que são os indivíduos que conseguiram adquirir uma imunidade devido a uma infecção passada. Este modelo é capaz de modelar vários tipos de doenças, tais como rubéola, sarampo, catapora, caxumba e gripe (SOARES, 2010).

O modelo desenvolvido no artigo de Deniz e Missio (2014), empregado como embasamento teórico faz uso do mesmo modelo epidemiológico SIR, entretanto os referidos autores utilizam o método de *Runge-Kutta* de 4ª ordem para solucionar o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (\pi - \mu)S - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \alpha + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \qquad (1)$$

Onde, π e μ são as taxas de natalidade e mortalidade natural, respectivamente; α é a taxa de mortalidade causada pela doença; β é a taxa de contato e γ é a taxa de recuperação dos infectados. Os parâmetros utilizados pelos autores foram: β = 0,233, π = 0,003, μ = 0,0001, α = 0,0001 e γ = 0,45; sob as condições iniciais:

$S(0) = S_0 = 10$, $I(0) = I_0 = 1$ e $R(0) = R_0 = 0$.

Partimos das seguintes equações genéricas para explanar acerca das expansões em Séries de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordens:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = f(S(t), I(t), R(t)) \\ \frac{dI(t)}{dt} = g(S(t), I(t), R(t)) \\ \frac{dR(t)}{dt} = h(S(t), I(t), R(t)) \end{cases} \quad (2)$$

Onde, a derivada da função $S(t)$ é a função composta $f(S(t), I(t), R(t))$, a derivada da função $I(t)$ é a função composta $g(S(t), I(t), R(t))$ e a derivada da função $R(t)$ é a função composta h($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) em que todas dependem das variáveis S, I e R, que por sua vez dependem da variável t tempo. Com isso, fazendo uma comparação com o modelo de Deniz e Missio (2014), equação (1), com o modelo genérico, equação (2), obtemos as igualdades:

$$\begin{cases} f\big(S(t), I(t), R(t)\big) = (\pi - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) \\ g\big(S(t), I(t), R(t)\big) = \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha + \gamma)I(t) \\ h\big(S(t), I(t), R(t)\big) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (3)$$

Dessa forma, apresentamos as expansões em Séries de Taylor de 1ª, 2ª e 3ª ordens, respectivamente, às quais solucionam numericamente o sistema de equações diferenciais de Deniz e Missio (2014), equação (1):

$$\begin{cases} S_p(t_{i+1}) \cong S(t_i) + \frac{dS(t_i)}{dt}h \\ I_p(t_{i+1}) \cong I(t_i) + \frac{dI(t_i)}{dt}h \\ R_p(t_{i+1}) \cong R(t_i) + \frac{dR(t_i)}{dt}h \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} S_p(t_{i+1}) \cong S(t_i) + \frac{dS(t_i)}{dt}h + \frac{d^2S(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} \\ I_p(t_{i+1}) \cong I(t_i) + \frac{dI(t_i)}{dt}h + \frac{d^2I(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} \\ R_p(t_{i+1}) \cong R(t_i) + \frac{dR(t_i)}{dt}h + \frac{d^2R(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} S_p(t_{i+1}) \cong S(t_i) + \frac{dS(t_i)}{dt}h + \frac{d^2S(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3S(t_i)}{dt^3}\frac{h^3}{3!} \\ I_p(t_{i+1}) \cong I(t_i) + \frac{dI(t_i)}{dt}h + \frac{d^2I(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3I(t_i)}{dt^3}\frac{h^3}{3!} \\ R_p(t_{i+1}) \cong R(t_i) + \frac{dR(t_i)}{dt}h + \frac{d^2R(t_i)}{dt^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3R(t_i)}{dt^3}\frac{h^3}{3!} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$t_{i+1} - t_i = h, 0 \leq i \leq n.$$

Após os cálculos das expansões de Taylor será realizada uma análise quantitativa dos erros absolutos obtidos através das soluções de primeira e segunda ordem, o mesmo processo também será realizado com as soluções de segunda e terceira ordem, a seguir.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente solucionamos a equação (1) através da Série de Taylor de primeira e de segunda ordens. Em seguida calculamos o erro absoluto das soluções, no qual identificamos como: Erro01-S, Erro01-I e Erro01-R, identificando dessa forma o erro entre susceptíveis, infectados e recuperados, os quais constam na figura 1.

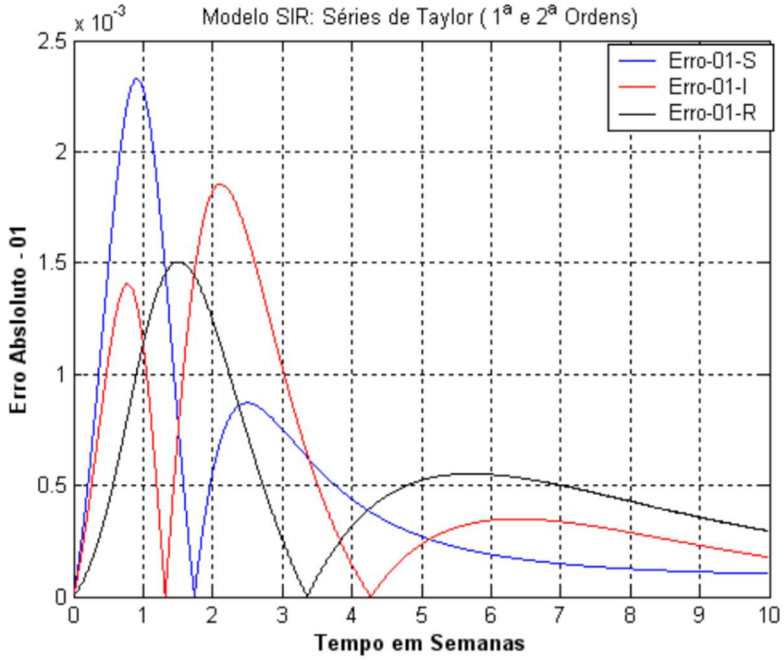


Figura 1: Erro absoluto entre as expansões em Série de Taylor de 1ª e 2ª ordens.

Constatamos na figura 1 que o maior erro causado entre as soluções analisadas tem amplitude da ordem de 10^{-3}. Novamente o sistema da equação 1 é solucionado pela expansão da Série de Taylor de segunda e de terceira ordem. Fizemos o cálculo do erro absoluto entre susceptíveis, infectados e recuperados, estes são apresentados na figura 2, como Erro02-S, Erro02-I e Erro02-R, para susceptíveis, infectados e recuperados, respectivamente.

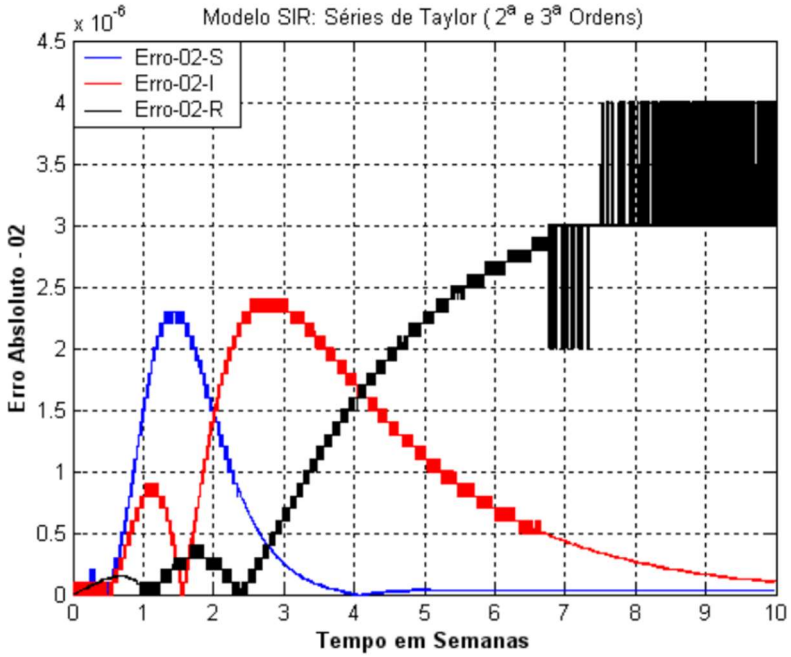


Figura 2: Erro absoluto entre as expansões em Série de Taylor de 2ª e 3ª ordens.

Constatamos na figura 2 que a maior amplitude de erro é da ordem de 10^{-6}, significando que está ocorrendo a convergência da solução numérica. É apresentado na figura 3 a solução do modelo SIR, equação (1), através da equação (4.3) e em caráter comparativo também apresentamos a solução de Deniz e Missio (2014), figura 4.

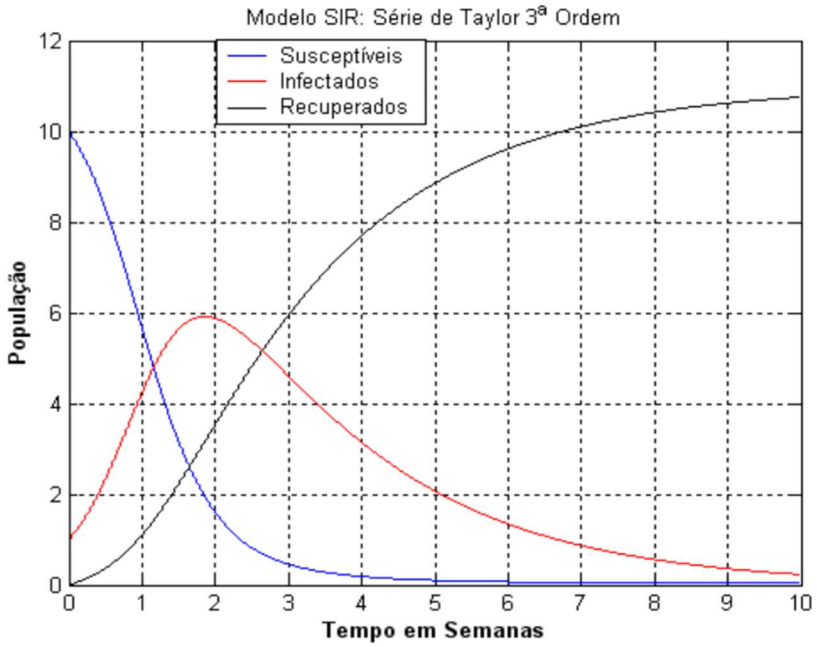


Figura 3: Solução numérica da equação 1, pelo método da Série de Taylor de 3ª ordem.

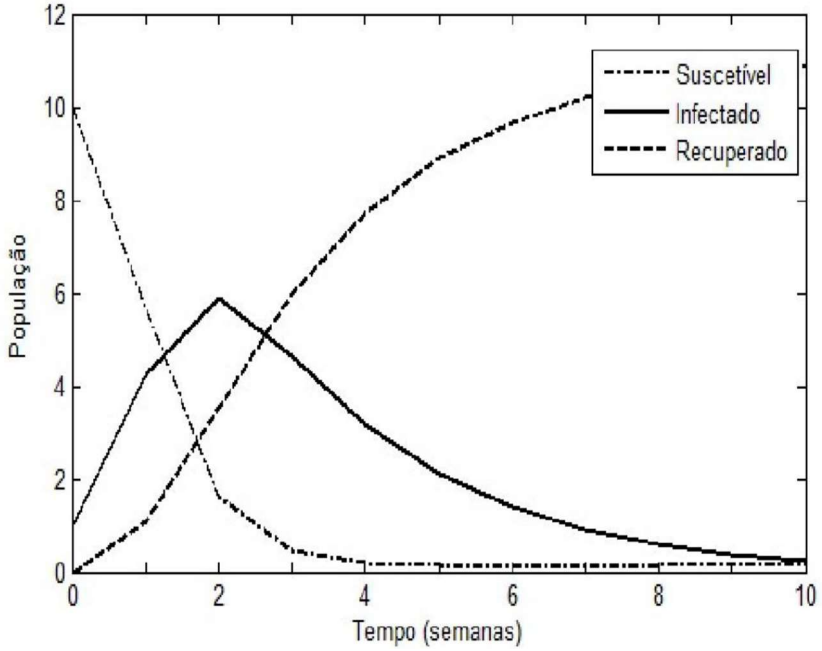


Figura 4: Solução numérica da equação 1, pelo método de *Runge-Kutta* de 4ª ordem. Fonte: Deniz e Missio (2014).

Verificamos na figura 3 e na figura 4 os gráficos onde a população de susceptíveis tem ponto inicial em dez decrescendo no período de cinco semanas, e a partir da sexta semana segue de forma assintótica para zero. Quanto aos infectados,

constatamos que a sua curva cresce até a segunda semana, atingindo seu ponto máximo, e em seguida decresce de forma assintótica para zero, a partir da segunda semana. Quanto aos recuperados verificamos que tem seu ponto inicial em 0 e tem um crescimento assintótico no intervalo da população de 10 e 11, a partir da nona semana.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo SIR sendo solucionado por Séries de Taylor tornou possível fazer a análise dos erros absolutos, onde a figura 1 mostra que o erro é da ordem de 10^{-3}. Em seguida efetuamos a análise da figura 2, onde a ordem máxima do erro é de 10^{-6}, em que notamos que acontece a convergência da solução numérica da equação (1).

O modelo epidemiológico SIR, equação (1), foi solucionado através do método de expansão em Séries de Taylor de 3ª ordem, e sua solução, figura 3, foi comparada com a solução, também da mesma equação (1), porém solucionada pelo método de *Runge-Kutta*, figura 4, constante no artigo de Deniz e Missio (2014), onde constatamos que os resultados são equivalentes.

Por fim, concluímos que através da utilização do modelo SIR mesmo com o uso de dados hipotéticos o método aplicado (expansão em Séries de Taylor de 3ª ordem) permite resolver satisfatoriamente o sistema de equações proposto, fornecendo aproximações com precisão similar as apresentadas no texto de Deniz e Missio (2014), base deste trabalho.

REFERENCIAS

BARROSO LC, BARROSO MMA, FREDERICO FILHO FC, CARVALHO MLB, MAIA ML. 1987. Cálculo Numérico. Editora Harbra Ltda. São Paulo.

DENIZ EM, MISSIO M. 2014. Um Modelo de Equações Diferenciais no Estudo da Evolução Temporal da Influenza A(H1N1). 8º ENEPE UFGD, 5º ENEPEX UEMS, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS.

SOARES ALO. 2010. Modelagem Alternativa para Sistemas Epidemiológicos. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André-SP.

3.2 ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM EPIDEMIOLOGIA

Após concluir a disciplina de Metodologia Científica, fiquei com a sensação de que ela não proporcionou o desenvolvimento das habilidades necessárias para o aprimoramento de nossa escrita científica. Então, em 2019, conforme meu interesse pela modelagem e pelo estudo de doenças infectocontagiosas foi crescendo, decidi que tentaria elaborar um projeto pessoal de estudos com o intuito de desenvolver as habilidades básicas de pesquisa e escrita acadêmica, assim como adquirir novos conhecimentos teóricos e ter a possibilidade de aplica-los. Os projetos de estudo costumam conter problemas mais simples, visando o aprimoramento de habilidades e a obtenção de experiência prática (LOPES, 2021).

A quarta edição do SIEPEX, que ocorreu em agosto de 2021, abriu submissão de resumos simples referentes aos trabalhos desenvolvidos pelos alunos da UFPA oriundos de projetos, ligados ou não a instituição. Nesse contexto, submeti um resumo relacionado ao meu projeto pessoal que tratava sobre o estudo de modelos matemáticos. A esta altura eu já havia obtido alguns resultados com meus estudos, produzido e submetido meu primeiro texto em um congresso que devido a situação pandêmica que enfrentávamos em 2020, foi adiado e minha apresentação ocorreu apenas em setembro de 2021.

O resumo “Estudo de modelos matemáticos em epidemiologia” foi aprovado no IV Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão – SIEPEX, ocorrido de maneira virtual em agosto de 2021. Cuja identificação das publicações é feita pelo ISSN 2595-7856.

ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM EPIDEMIOLOGIA

Lucas da Silva Costa[1]

Arthur da Costa Almeida[2]

Ao longo da história, as populações humanas têm enfrentado uma série de surtos epidêmicos. O estudo das doenças infectocontagiosas continua mostrando-se uma necessidade atual e que precisa de constantes aprimoramentos. Nesse sentido, esta pesquisa surge do seguinte questionamento: como os diferentes tipos de modelos matemáticos em epidemiologia contribuem para o estudo dessas doenças e como podem ser desenvolvidos modelos híbridos que possam unir as principais vantagens de alguns deles? Para responde-lo, definiu-se como objetivo o estudo e comparação dos principais modelos existentes. Para a fase inicial da pesquisa, foram estudados os modelos compartimentais a derivadas de ordem inteira e fracionada apresentados em Farias (2017) e os modelos a Séries Temporais definidos em Kawahama et al (2018). Foi utilizado para o estudo o modelo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) em tempo contínuo e com vacinação constante, ao qual aplicamos dados reais do surto de sarampo ocorrido na região Norte do Brasil, de fevereiro de 2018 à janeiro de 2019. O algoritmo de resolução do sistema foi desenvolvido em linguagem *Python*, com auxílio das bibliotecas científicas *Numpy* e *Scipy*. Após isso foi realizada a análise dos pontos de instabilidade do sistema, de maneira similar a realizada com o modelo para HIV elaborado por Theodoro *et al* (2018). Verificamos que o ponto de equilíbrio de nosso sistema era um ponto de sela instável e que, embora simples, o sistema descreveu bem o problema. Para a fase seguinte, pretende-se implementar os conceitos de derivada de ordem não inteira e de Séries Temporais.

Palavras-chave: epidemiologia matemática. equações diferenciais. sarampo.

[1]Discente da faculdade de Matemática, FacMat/UFPA.
[1]lucas.silva.costa@castanhal.ufpa.br
[2]Doutor em Engenharia Elética, coordenador do ProfMat e professor associado na UFPA.
[2]arthur@ufpa.br

3.3 MODELAGEM DE UMA EPIDEMIA DE SARAMPO USANDO SIR

Este trabalho foi elaborado a partir de minhas inquietações quanto a Modelagem e Epidemiologia Matemática. A partir do trabalho realizado com o Dr. Frayzer Lima, meu interesse pela área foi crescendo continuamente e em 2019 decidi iniciar alguns estudos por conta própria, realizar um breve levantamento bibliográfico e a coletar dados, dando os primeiros passos em relação ao projeto de estudo que havia definido.

Sendo o fato de o Brasil quase perder seu certificado de erradicação de sarampo devido a ocorrência de uma epidemia da doença na região Norte do país minha principal motivação para elaboração deste trabalho (Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR). Após iniciar a pesquisa fiz um convite a Edyvana Teixeira para colaborar com o estudo e ao Dr. Arthur Almeida para nos orientar. Após a flexibilização de alguns eventos científicos devido a situação pandêmica a qual nos encontrávamos, submetemos e tivemos nosso trabalho aprovado para ser apresentado no XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), na modalidade pôster e publicado como um resumo no vol. 8 de *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, com ISSN 2359-0793.

Considerando que “modelar é conceber, para um objeto, um modelo que permita conhecê-lo, compreendê-lo, interpretá-lo e auxilie na antecipação do comportamento dele” (LE MOIGNE, 1977, p.34), para que pudéssemos estudar o comportamento do surto de sarampo precisávamos de um modelo que mesmo simples considerasse as principais características da doença. Por isso, buscamos conhecer um pouco melhor o sarampo, sua forma de contágio, caracterização biológica e estrutura do vírus transmissor, além de sua ação no organismo infectado. A partir disso e levando em consideração indicadores populacionais referentes aos estados afetados pela epidemia, definimos os parâmetros necessários e adaptamos um dos modelos genéricos propostos por Farias (2017).

O modelo em questão é composto por um sistema de EDOs e foi solucionado computacionalmente utilizando o método de Runge-Kutta de terceira ordem. Além disso, a análise dos pontos de equilíbrio do sistema foi feita com base em seus respectivos autovetores e autovalores. Uma informação pertinente não apresentada

no texto é que um sistema está em equilíbrio instável quando ao sofrer uma perturbação, por menor que seja, tende a não retornar à situação de equilíbrio.

Vale ressaltar ainda que nas considerações do trabalho há um erro grave de análise de dados e interpretação dos resultados. O erro se dá ao considerar que valores discordantes sejam similares, fazendo com que resultados discrepantes fossem julgados semelhantes.

Feitas estas considerações, este trabalho nos permitiu, além de proporcionar um exercício de modelagem interessante, aplicar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (especialmente Cálculo D) e Álgebra Linear de maneira prática e contextualizada, contribuindo para fixação do conteúdo de maneira mais significativa.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR

Lucas da Silva Costa[1]
Edyvana G. da S. Teixeira[2]
Arthur da Costa Almeida[3]
UFPA/FACMAT, Castanhal, PA

O sarampo é uma doença endo-epidêmica, altamente contagiosa e de transmissão direta, causada por um ácido ribonucleico (ARN) vírus do gênero *Morbillivirus*, pertencente à família *Paramyxoviridae*. Ele possui uma estrutura composta basicamente por duas partes: o nucleocapsídeo, parte não infectante do vírus onde está contido seu único genoma ARN, e um invólucro externo lipídico-glicoprotéico, o qual tem potencial infectante. Uma vez dentro do organismo, o vírus estabelece ligações com os receptores celulares, os quais podem ser células CD150, moléculas de nectina-4 ou CD46 (para o vírus atenuado). A presença do microrganismo invasor estimula a produção de anticorpos, as imunoglobulinas IgM e IgG, responsáveis por sua neutralização [1].

A motivação para o estudo da dinâmica temporal do sarampo, partiu do fato de o Brasil, mesmo possuindo uma vacina gratuita e eficaz, quase perder seu certificado de erradicação da doença, concedido pela Organização Mundial da Saúde (OMS) em 2016. O objetivo é fazer um exercício de modelagem matemática, comparando resultados analíticos e numéricos, além de uso de computador, como auxiliar cada vez mais indispensável na pesquisa científica.

Para esta pesquisa foram analisados modelos compartimentais contínuos e discretos com e sem estrutura etária e com cobertura vacinal, como os propostos em [2] e [3]. Apresentaremos um modelo Suscetível-Infectado-Recuperado (SIR) contínuo com vacinação constante, no qual a população está dividida em três compartimentos: suscetíveis, infectados e recuperados, como desenvolvido em [3].

[1]lcsilva17.ls@gmail.com
[2]edyvanateixeira@gmail.com
[3]arthur@ufpa.br

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) &= \mu N(1-\upsilon) - (\lambda(t)+\mu)S(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) &= \lambda(t)S(t) - (\mu+\gamma)I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) &= \mu N\upsilon + \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

Tais que $\lambda(t) = \frac{\beta\, I(t)}{N}$ é a taxa de transmissão, com número de contatos potencialmente infectantes $\beta = 0{,}9$. Com base no estudo das características da doença e nos índices de [4], definimos: a taxa de mortalidade/natalidade $\mu = 0{,}0131$ para uma esperança de vida igual a 76,3 anos, a taxa de recuperação $\gamma = 0{,}466$ para um período infeccioso de 10 dias, uma cobertura vacinal $\upsilon = 0{,}5763$ e $N = 1000$ para população total. A simulação foi realizada utilizando a linguagem *Python*, sob as condições iniciais: $S(0) = 999$, $I(0) = 1$ e $R(0) = 0$.

Obtivemos uma reprodutibilidade basal $R_0 = 1{,}8785$; e os pontos de equilíbrio $P_0(s^*; i^*) = (423{,}7;\ 0)$ e $P_*(s^*; i^*) = (532{,}3;\ -2{,}93)$. Como P_* não possui sentido biológico, avaliamos o ponto P_0. O qual têm como autovalores $\lambda_1 = -0{,}0131$ e $\lambda_2 = 0{,}0977$. Os autovetores associados são, respectivamente, $\upsilon_1 = (1;\ 0)$ e $\upsilon_2 = (-0{,}9602;\ 0{,}279)$. Devido aos autovalores λ_1 e λ_2 serem dois valores reais, distintos e de sinais opostos, temos que P_0 é um ponto de sela instável. A figura 1 ilustra a solução numérica para o sistema (1), o comportamento da curva de infectados gerada pelo modelo e da curva referente aos dados reais estão representados na Figura 2.

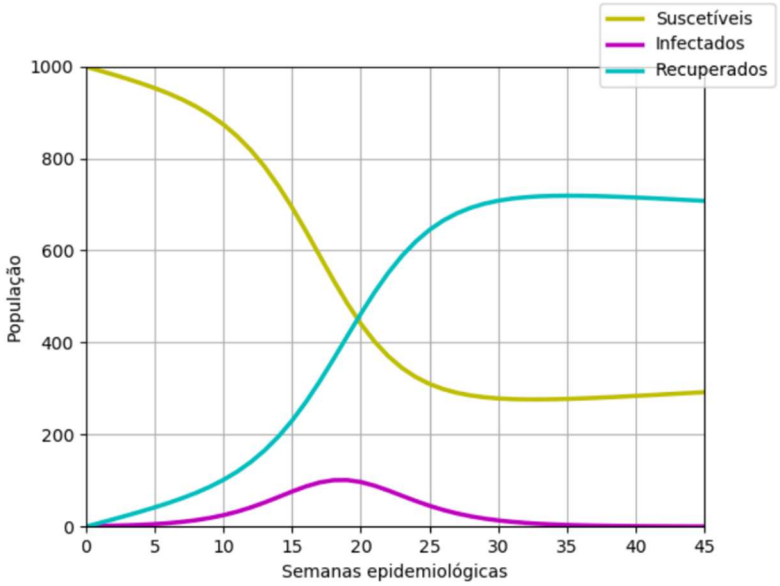


Figura 1: Aproximação numérica por Séries de Taylor.

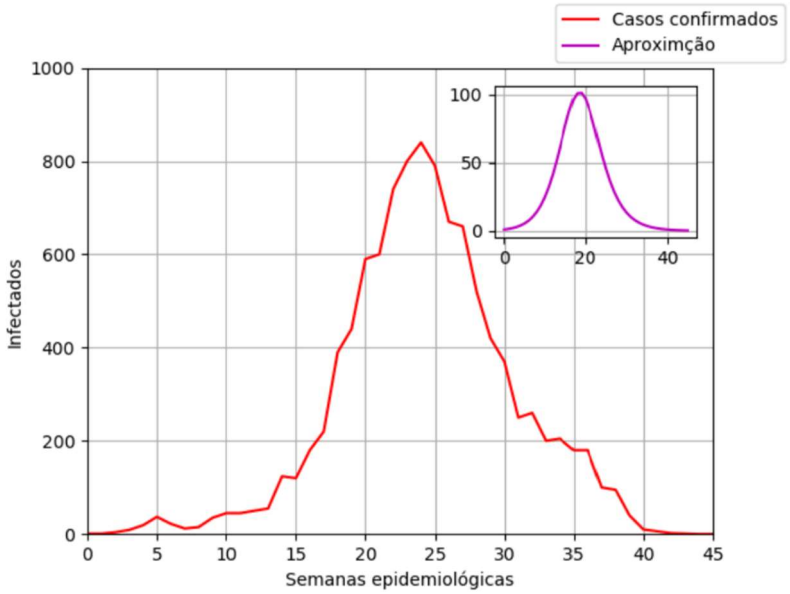


Figura 2: Comparativo entre as curvas de infectados.

Verificou-se que a modelagem matemática usando algoritmos numéricos e discretos, implementados em uma linguagem de programação, forneceu resultados semelhantes aos obtidos de forma analítica. Além disso, sabe-se que esses métodos numéricos funcionam bem, mesmo nos casos em que a solução analítica fechada é desconhecida ou difícil de ser encontrada, o que justifica o seu conhecimento e domínio por parte da nova geração de pesquisadores e matemáticos.

Referências

[1] Ali, S. A. R. A. Caracterização genética dos vírus do sarampo genótipo D4 detectados no Brasil no período de 2003-2012. Dissertação de Mestrado, Instituto Oswaldo Cruz, 2012.

[2] Cristovão, R. B. Modelo SIR: Uma aplicação à Hepatite A. Monografia, USP, 2015.

[3] Farias, A. V. Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária. Monografia, UFRG, 2017.

[4] IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Tábua completa de mortalidade para o Brasil - 2018. Rio de Janeiro, 2019.

3.4 COMPARAÇÃO ENTRE A VARIAÇÃO MENSAL DA CAPE E DA PRECIPITAÇÃO EM BELÉM, PA

Diferente do texto descrito na subseção 3.3, este não partiu de uma iniciativa própria. Fomos convidados, Edyvana Teixeira e eu, a contribuir com uma pesquisa em andamento que estava sendo desenvolvida pelo Dr. Arthur Almeida e que viria a se consolidar como um projeto de pesquisa da Faculdade de Matemática do *campus* Castanhal da UFPA.

Embora a área de concentração da pesquisa tenha despertado bastante nosso interesse, era algo completamente novo visto que não há nenhuma disciplina na grade curricular do curso que contemple o conteúdo trabalhado no estudo em questão ou mesmo o mencione superficialmente. Este foi nosso primeiro contato com Séries Temporais e com análise de dados meteorológicos.

O estudo consistiu em realizar uma comparação entre um índice de instabilidade específico e os dados de precipitação da cidade de Belém através da análise de suas respectivas séries temporais considerando as observações coletadas durante um período de 10 anos a fim de tentar identificar uma possível correlação entre elas.

Buscamos conhecer algumas das principais características geográficas e climáticas da região em que se localiza a cidade em questão, tomando como principal referência para isso Bastos *et al* (2002), além de compreender o índice meteorológico CAPE (*Convective Available Potential Energy*), utilizado ao longo do estudo, visando defini-lo e apresentá-lo. Os dados utilizados foram provenientes do site Climatempo (2020) o qual fornece os dados de sondagens feitas diariamente.

É importante esclarecer o significado de alguns termos mencionados no trabalho como a temperatura virtual da parcela de ar, ela representa a temperatura que o ar seco precisaria ter para sua densidade ser equivalente à do ar úmido, considerando que estejam sob a mesma pressão. Outro termo citado é a convecção livre, também denominada convecção natural, ela pode ser definida como uma transferência de calor ou de massa ocasionada pela movimentação de moléculas dentro de fluídos. De modo que essa movimentação seja gerada por diferenças de densidade do fluído e não por fontes externas (CONNOR, 2020).

Este texto foi submetido e aprovado para ser apresentado no XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), na modalidade pôster

e publicado como um resumo no vol. 8 de *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, com ISSN 2359-0793. Embora ele tenha sido bem recebido pelos pareceristas, eles solicitaram que refizéssemos as análises de forma mais complexa utilizando co-integração, conteúdo comumente trabalhado em estudos na área de Ciências Econômicas, sugerindo Portal (2021) e Machado *et al* (2018) como base.

Entretanto, este era mais um conteúdo que não faz parte da grade curricular de nosso curso de graduação e devido ao curto período fornecido para fazer as mudanças, escrevemos uma carta explicando formalmente a situação e solicitando que reavaliassem nosso caso. Nossa solicitação foi aceita e tivemos nosso trabalho aprovado e apresentado em setembro de 2021.

É importante ressaltar que este texto apresenta resultados parciais de um estudo exploratório e que nosso objetivo não era estabelecer a relação entre as séries, mas verificar indícios de sua existência. Além disso, pode surgir o questionamento “como este trabalho se relaciona e complementa os demais contidos neste portfólio?”

Este trabalho me serviu como motivação e base para o estudo de Séries Temporais, porém com aplicações em Epidemiologia que corresponde originalmente a minha linha de pesquisa de interesse. Inclusive, estes estudos deram origem a novas inquietações (dores) que convergiram para a elaboração da terceira e última publicação apresentada neste TCC.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação entre a variação mensal da CAPE e da precipitação em Belém, PA

Edyvana G. da S. Teixeira [1]
Lucas da Silva Costa[2]
Arthur da Costa Almeida[3]
UFPA/FACMAT, Castanhal, PA

A Meteorologia utiliza alguns índices, os índices de instabilidade, para descrever o estado da atmosfera em um dado momento e identificar a possibilidade de ocorrências de tempestades em uma região. Dentre eles, destaca-se a CAPE (*Convective Available Potential Energy*, em inglês). A CAPE informa a energia potencial disponível na atmosfera para que ocorra a convecção de uma parcela de ar. Quanto maior for esse valor, maiores as chances de ocorrências de tempestades na área. Com unidades em J/kg, define-se a CAPE pela equação (1). Nessa equação Z_1 é a altura do nível de convecção livre, Z_2 é a altura do nível de equilíbrio, T_1 é a temperatura virtual da parcela (em K), T_2 é a temperatura do ambiente (em K) e g é a aceleração da gravidade.

$$CAPE = \int_{Z_1}^{Z_2} g\frac{T_2 - T_1}{T_1}dz. \quad (1)$$

A proposta deste trabalho é fazer uma comparação da série temporal dos valores da CAPE, em uma base mensal, com a série temporal dos dados mensais de precipitação, para avaliar, com ferramentas elementares, a possibilidade dessas séries possuírem as mesmas tendências de variação, ou se poderiam estar, de alguma forma, correlacionadas.

[1]edyvanateixeira@gmail.com
[2]lcsilva17.ls@gmail.com
[3]arthur@ufpa.br.

A área de estudo é a cidade de Belém do Pará, cujo clima é caracterizado por uma precipitação anual de 3000 mm distribuída em 186 dias de ocorrências por ano [1]. Para isso, foram coletados os dados diários de sondagens atmosféricas feitas no Aeroporto de Belém (estação: SBBE-82193), durante o período de 2006 a 2015, distribuídos pelo site da Universidade de Wyoming [6]. Essas sondagens são realizadas diariamente às 12h e 0h UTC. Os dados de climatologia da precipitação mensal, foram obtidos do site Climatempo [2]. Os dados de sondagem e precipitação foram processados e agrupados por mês, obtendo-se a mediana mensal dos valores da CAPE. Para o processamento desses dados foi desenvolvido um programa no ambiente estatístico R [5].

A Figura 1 mostra no eixo vertical esquerdo, em mm, a variação mensal do nível de precipitação, e, no eixo vertical direito, em J/kg, a mediana da CAPE, derivada dos dados de sondagens atmosféricas. No eixo horizontal, estão os meses do ano. Já na Figura 2 são mostrados, em uma outra visualização, a variação da mediana de precipitação contra os dados da CAPE.

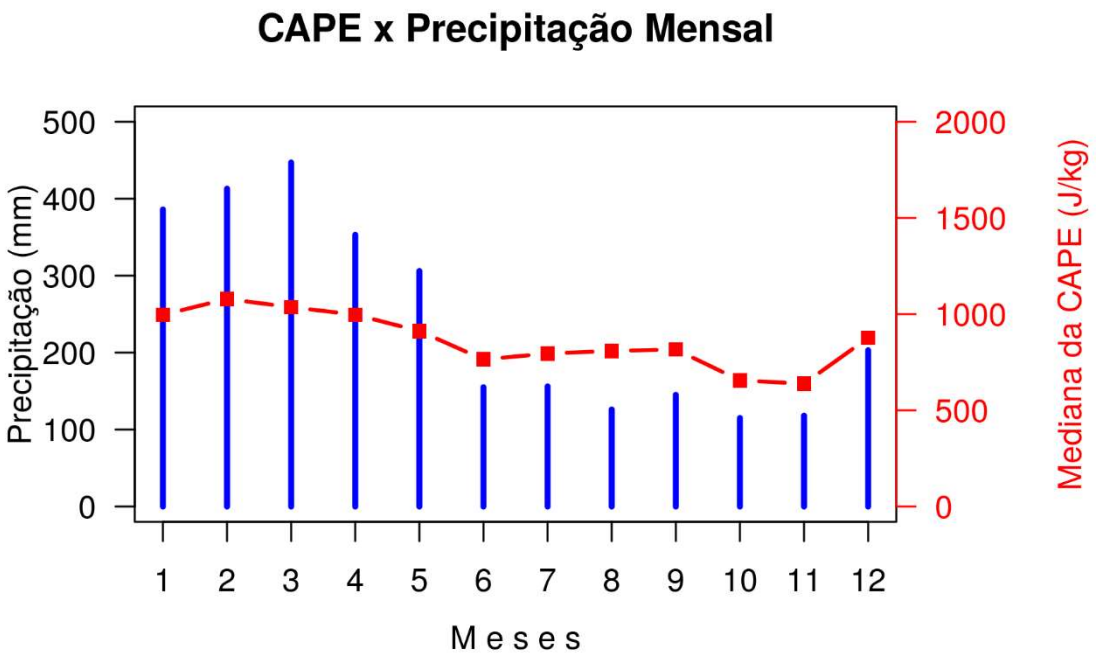


Figura 1: CAPE x Precipitação Mensal em Belém, PA.

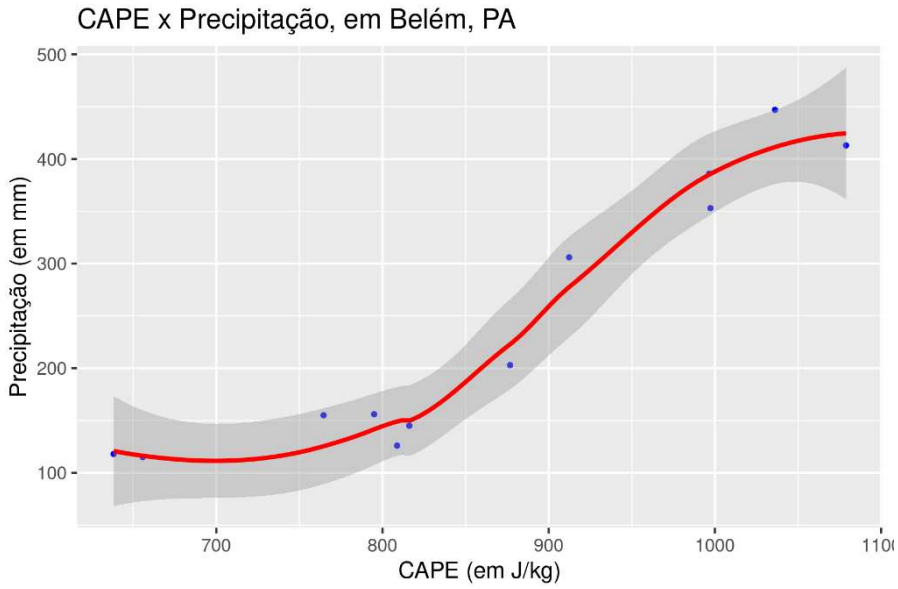


Figura 2: CAPE x Precipitação Mensal em Belém, PA.

Observando-se os gráficos, verifica-se que pode haver uma correspondência na tendência variacional das duas grandezas, sugerindo que pode haver correlação no sentido de que quanto maior for a CAPE, maior também poderá ser a quantidade de chuva. Entretanto, como se trata de uma abordagem exploratória e elementar, não se pretende responder essa questão de forma conclusiva neste trabalho, pois isso demandaria o uso de técnicas matemáticas mais precisas e avançadas, tais como as usadas em [3] e descritas em [4].

Referências

[1] Bastos, T. X; Pacheco, N. A; Nechet, D. e Sá, T. D. A; *Aspectos Climáticos de Belém nos Últimos Cem Anos*, EMBRAPA, Belém, PA, 2002.

[2] Climatempo. *Url:https://www.climatempo.com.br/climatologia/232/belem-pa*, Acessado em: 11 jan. 2020.

[3] Machado, S. L. D; Silva, C. R. e Araújo, A. A. Descrição temporal do comportamento do Cerrado *sensu strictu* usando séries temporais. *Ciência e Natura*, vol. 40, 2018, Disponível em: URL https://core.ac.uk/download/pdf/231204087.pdf. Acessado em: 01 jun. 2021.

[4] Portal Action. *URL http://www.portalaction.com.br/series-temporais/53-cointegracao-em-series-temporais*. Acesso em 01 jun. 2021.

[5] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*. 2012, URL https://www.R-project.org/.

[6] Wyoming University. *Url:http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html*. Acessado em: 21 maio 2016.

3.5 MODELOS PREDITIVOS DE SÉRIES TEMPORAIS EPIDEMIOLÓGICAS PARA O ESTUDO DA DENGUE NO PARANÁ, BRASIL

Esta é a última publicação selecionada para compor esse portfólio. Ela é, de certa forma, a interseção entre os trabalhos anteriores e mostra como embora eu permaneça dentro da minha área de interesse, minhas escolhas e minha curiosidade foram moldando e refinando minhas linhas de estudo. Partindo de modelos determinísticos e chegando a modelos probabilísticos que consideram a aleatoriedade intrínseca aos fenômenos biológicos.

Após iniciar os estudos sobre séries temporais, comecei a buscar aplicações delas a problemas envolvendo estudo de doenças infectocontagiosas e continuei a estudar algumas metodologias e modelos mais específicos para trabalhar com essas séries. Para seleção do problema de pesquisa costumo procurar em sites jornalísticos e de notícias por situações epidêmicas atípicas. Assim, defini como meu objeto de estudo a situação da dengue no estado do Paraná, visto que apesar dos surtos acontecerem com uma nítida periodicidade o ano epidemiológico de 2019/2020 apresentou uma quantidade de casos cerca de 10 vezes maior que anos anteriores.

Inicialmente, a ideia era treinar um modelo híbrido SARIMA (*Seasonal Auto-Regressive Integrated Moving Average*) que considerasse variáveis exógenas, ou seja, variáveis externas ao fenômeno, mas que poderiam ter influência direta ou indireta sobre ele. Elas seriam variáveis climáticas como temperatura e volume de chuvas, visando integrar Epidemiologia e Meteorologia. Entretanto, esse texto apresenta apenas as fases iniciais do estudo com o treinamento de um modelo ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Average*) que não considera tais variáveis e nem o fator sazonal.

A metodologia adota foi a abordagem de Box e Jenkins, apresentada em Silva (2005). Ela consiste em três fases cíclicas, podendo conter até cinco passos ao todo. A primeira fase, identificação do modelo, é precedida por três passos. O passo 1 é a plotagem da série para que se possa fazer a visualização e as primeiras análises dela, o passo 2 se trata de verificar se ela é ou não estacionária. Em caso afirmativo, segue-se para a fase 1, em caso negativo aplicam-se diferenças sucessivas para torna-la estacionária (passo 3) e então seguimos para fase 1.

É relevante mencionar que não selecionamos o modelo mais apropriado para nossa série, visto que ao longo das análises ficou evidente o padrão sazonal dos

dados e uma forte tendência. Assim, o modelo mais adequado seria de fato o SARIMA e não um ARIMA. Porém, como já mencionado, estas são apenas as etapas iniciais do estudo, por isso decidimos treinar primeiro o modelo ARIMA. Inclusive, a identificação do modelo e a possível sazonalidade das observações foram questionadas durante a apresentação oral deste trabalho.

Ainda sobre a abordagem metodológica, a fase 1 é seguida da estimativa do modelo (fase 2). É nesta fase que são feitos os primeiros testes com o modelo aplicado aos dados coletados, o que é seguido do quarto passo que consiste em verificar a adequação do modelo aos dados reais. Esse passo se assemelha a etapa de validação definida por Bassanezi (2002) que consiste no “processo de aceitação ou não do modelo proposto”, sendo nessa etapa que “os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real” (BASSANEZI, 2002, p.30). Em caso afirmativo iremos para a fase 3 (previsão), em caso negativo seguimos para o quinto passo (modificação do modelo) em que faremos o ajuste dos parâmetros e retornaremos para a fase 1.

Para validação do modelo utilizamos o método das raízes dos erros médios quadrados (RMSE, em inglês) e comparamos também os resultados dos três modelos ARIMA implementados a fim de determinar qual fornecia as melhores aproximações. Cabe ainda salientar que a discrepância no número de casos de dengue registrado no ano epidemiológico de 2019/2020 em relação aos anos anteriores causa uma distorção nas observações, o que torna mais trabalhosa a adequação dos modelos aos dados coletados. Assim, é compreensível que os erros encontrados sejam relativamente expressivos, haja vista que no período mencionado (2019/2020) foram registados mais de 20 mil casos em uma única semana, enquanto em anos anteriores esses valores dificilmente ultrapassavam as 2 mil observações semanais (Boletins de Dengue, 2021).

Outro ponto a se considerar é que esta discrepância possa ser causada pelo aumento populacional ou ainda pela melhoria no sistema de coleta de dados. Porém, ao visualizar a série temporal é possível verificar que a quantidade de casos no ano epidemiológico imediatamente anterior é evidentemente inferior a ponto de não ter ocorrido um surto e é improvável que haja uma melhoria na coleta ou um crescimento da população tão intenso para justificar um aumento dessa magnitude.

Além disso, há a necessidade de detalhar alguns termos técnicos utilizados. Os modelos ARIMA consideram que a composição da série temporal seja dada a partir da soma ponderada dos valores do ruído branco, a qual é representada pelo operador média móvel ($\theta(B)$). Estes modelos partem de uma característica fundamental das séries temporais: as observações passadas influenciam no presente, i.e., o valor da série em um dado instante de tempo t está correlacionado aos valores da própria série em instantes anteriores. Essa autocorrelação é representada pelo polinômio $\phi(B)$ que é o operador autorregressivo. Já o operador diferença diz respeito as diferenças sucessivas realizadas para trabalhar com séries não-estacionárias, i.e., que apresentam tendência, sazonalidade ou ciclos.

Este trabalho foi submetido e aprovado, na modalidade comunicação oral, para ser apresentado na XXI Semana de Matemática e XI Semana de Estatística, eventos regionais promovidos pela Universidade Federal de Uberlândia, em 2021 e estão disponíveis nos anais do evento com ISSN 2594-6617.

XXI Semana da Matemática e XI Semana da Estatística
Universidade Federal de Uberlândia
08 a 25 de Novembro de 2021

Modelos preditivos de Séries Temporais epidemiológicas para o estudo da dengue no Paraná, Brasil.

Lucas da Silva Costa
Universidade Federal do Pará
Faculdade de Matemática
lucas.silva.costa@castanhal.ufpa.br

Arthur da Costa Almeida
Universidade Federal do Pará
Faculdade de Matemática
arthur@ufpa.br

Introdução

A dengue é uma doença tropical grave, de transmissão vetorial, causada por um arbovírus do gênero *Flavivírus*, pertencente à família *Flaviviridae* e possuí quatro sorotipos distintos (DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4). Ela pode ser assintomática, leve ou grave e manifesta-se de duas formas: clássica ou febre hemorrágica da dengue (FHD). [5]

Os vetores responsáveis por sua transmissão são as fêmeas dos mosquitos do gênero *Aedes*, especialmente os *Aedes Aegypti*, da família *Culicidae*. A dengue é tida como um preocupante problema de saúde pública mundial, consistindo em uma das arboviroses mais relevantes da atualidade.

No Paraná, no Brasil, a incidência desta doença apresenta algumas peculiaridades devido as características geográficas e climáticas do estado [1]. Em decorrência destas particularidades é possível observar um padrão sazonal de incidência de dengue que coincide com o verão. A motivação para o estudo da série temporal epidemiológica de dengue surgiu do fato de o estado ter enfrentado a maior epidemia da doença de sua história durante o período epidemiológico de 2019/2020, chegando a registar mais de 20 mil casos em uma única semana e um acumulado superior a 227 mil ocorrências. [8]

É neste contexto que os modelos matemáticos tem ganhado destaque, pois através deles é possível traduzir as características de fenômenos biológicos para linguagem matemática e assim simulá-los computacionalmente. Na literatura, encontra-se um vasto arsenal de modelos para estudo de epidemias, desde modelos simples como o proposto por [3] para o sarampo ou um pouco mais sofisticados como o implementado por [6] para dengue, na Malásia.

A proposta deste trabalho é fazer um exercício de modelagem estatística e implementar um modelo *Auto-Regressive Integrated Moving Average* (ARIMA) para predição da série temporal de dados epidemiológicos semanais de casos de dengue no Paraná.

Materiais e Métodos

Este estudo aborda a incidência de dengue no Paraná durante o período que se estende de 05 de janeiro de 2014 à 03 de janeiro de 2021. Para isso foram utilizados os modelos ARIMA, cujas componentes p, d e q foram determinadas baseando-se na abordagem de Box e Jenkins, cujos passos são descritos na Figura 1. Esta metodologia traduz-se na adequação destes modelos ao conjunto de dados analisado [4]. Em primeiro lugar foi realizada a aplicação de diferenciações sucessivas na série original visando convertê-la em estacionária, posteriormente foi realizada uma análise gráfica das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para identificar valores para os parâmetros p e q. Por fim, o modelo mais adequado foi selecionado baseado na comparação das raízes dos erros médios quadráticos (RMSE).

As simulações computacionais foram realizadas em linguagem *Python*, com auxílio das bibliotecas *Pandas*, *Statsmodels* e *Matplotlib*, no ambiente de programação em nuvem *Google Colaboratory*. Os dados utilizados foram obtidos através do DATASUS e da Secretaria da Saúde do estado do Paraná.

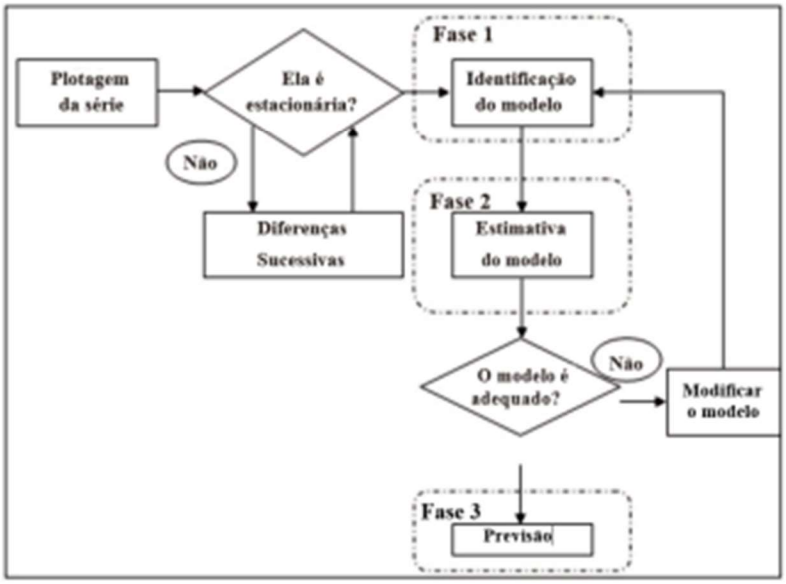


Figura 1: Passos para a construção do modelo Box e Jenkins. Fonte: traduzido de [6].

2.1 Séries Temporais

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de valores que variam em intervalos de tempo, apresentando uma dependência serial. Elas são compostas por, basicamente, quatro componentes (tendência, variações cíclicas, sazonalidade e variações irregulares) e podem ser modeladas utilizando processos estocásticos (i.e., regidos por leis probabilísticas) [7]. Dentre as formas de descrever estes processos estão os modelos ARIMA, denotados por ARIMA(p, d, q), em que p é a componente auto-regressiva, d é número de diferenças sucessivas necessárias para converter a série em estacionária e q é o número da componente de médias móveis. De modo geral, um ARIMA(p, d, q) é descrito como:

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t \tag{1}$$

Na qual $\phi(B)$, $\theta(B)$ e $\Delta = 1-B$ representam, respectivamente, os operadores auto-regressivo, média móvel e diferença e a_t é um ruido branco [2], ou seja, é um sinal discreto em que suas amostras são consideradas uma sequência de variáveis aleatórias, que não apresentam autocorrelação, possuem média nula e variância finita.

Resultados e Discussões

Na Figura 2 podemos observar que a série original não é estacionária e que os surtos da doença acontecem entre os meses de janeiro e maio, atingindo seu pico histórico em março de 2020. Para tornar a série estacionária foi realizada sua diferenciação ($d = 1$) para que a média fique centrada em zero, como mostra a Figura 3.

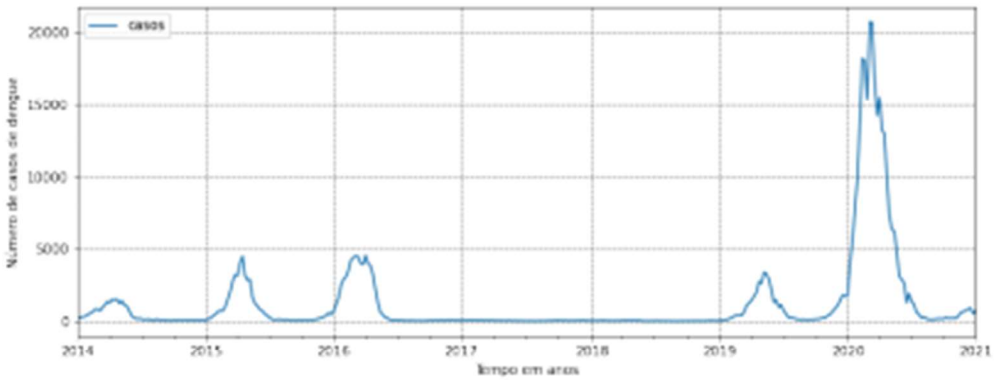


Figura 2: Série temporal epidemiológica de casos de dengue no Paraná.

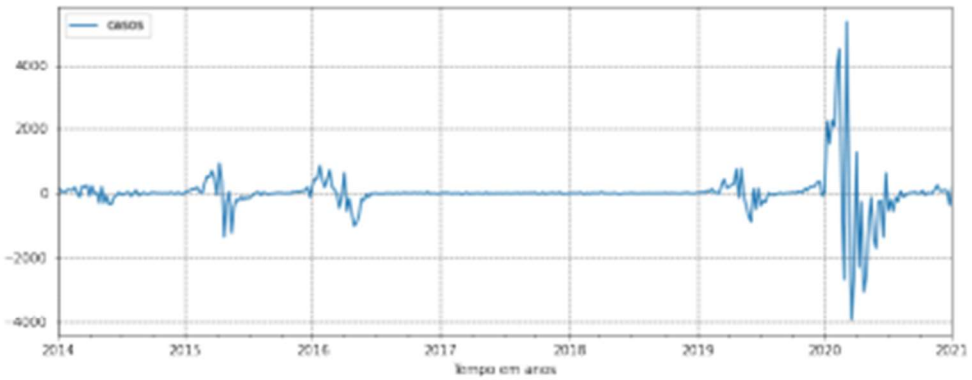


Figura 3: Série "integrada"por diferenças sucessivas.

Em seguida, os casos de todos os anos presentes no nosso conjunto de dados foram agrupados por mês para posteriormente serem calculadas as médias mensais, como pode ser observado na Figura 4 a qual mostra que os maiores números de ocorrências acontecem nos meses de fevereiro, março e abril. Enquanto a Figura 5 ilustra a autocorrelação parcial, por meio da qual podemos determinar nosso coeficiente p. A área em azul está relacionada a significância estatística e indica que não há garantia de que exista autocorrelação para valores compreendidos dentro dela.

A Figura 6 traz a comparação entre a série original e as predições dos modelos ARIMA(16, 1, 7), ARIMA(16, 1, 6) e ARIMA(12, 1, 6), os quais apresentaram desempenhos muito similares.

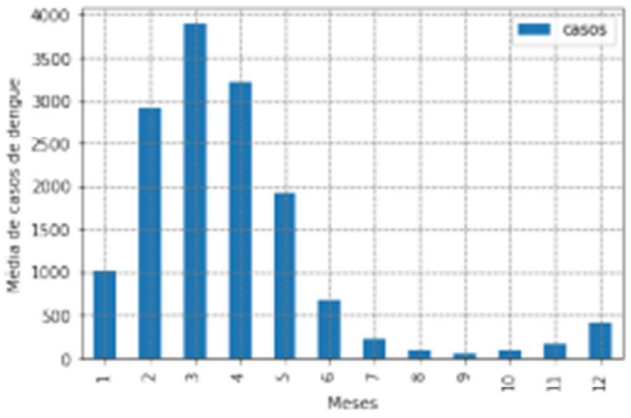


Figura 4: Gráfico das médias mensais de casos de dengue agrupados de 2014 à 2020.

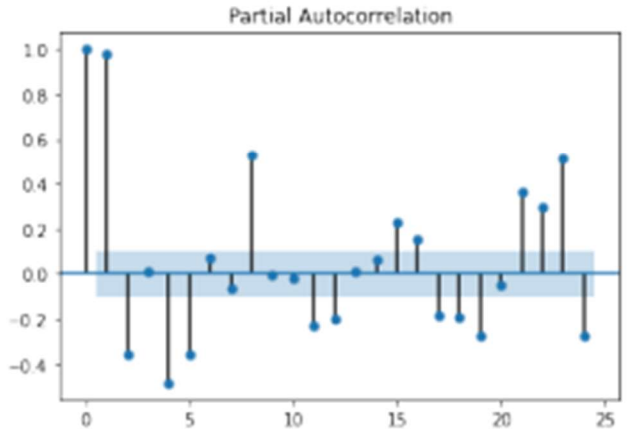


Figura 5: Gráfico de autocorrelação parcial para a série temporal epidemiológica.

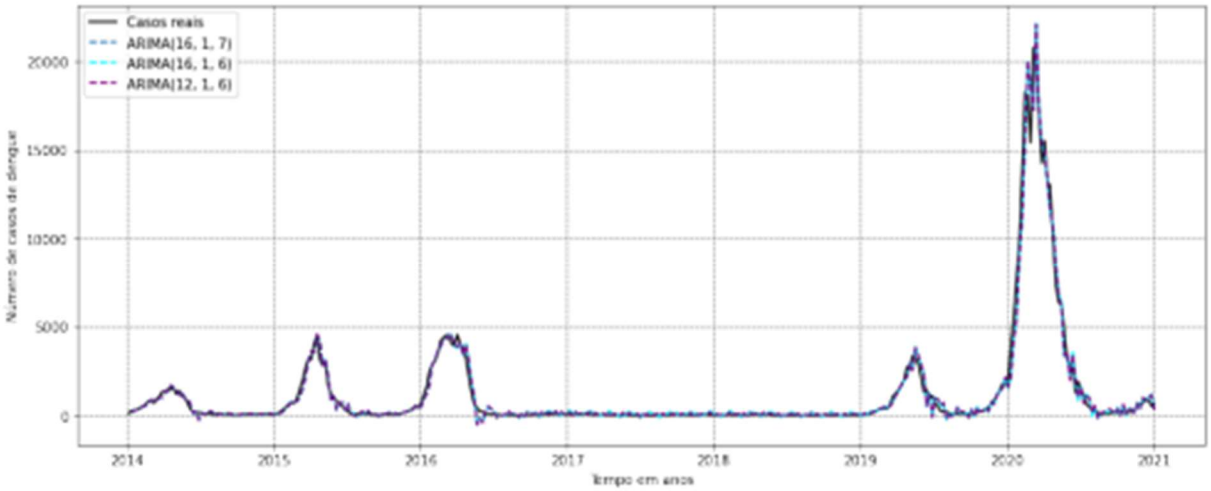


Figura 6: Gráfico de comparação entre a série original e as predições dos modelos ARIMA.

Considerações

Neste trabalho foram abordados modelos estocásticos de séries temporais para descrever dados epidemiológicos referentes a incidência de dengue no Paraná, no período de 05 de janeiro de 2014 à 03 de janeiro de 2021. Pode-se concluir que as predições estocásticas apresentaram um bom ajuste aos dados, em grande parte devido ao fato dos fenômenos biológicos possuírem um fator aleatório intrínseco, o que torna os modelos probabilísticos mais realísticos. Embora os três modelos tenham fornecido resultados muito similares, o ARIMA$(16, 1, 6)$ teve o menor erro quadrático médio da raíz ($RMSE = 481,42$). É relevante ressaltar que o ARIMA$(16, 1, 7)$ obteve um $RMSE = 481,51$), porém ele exigiu um custo computacional consideravelmente maior para um resultado pouco satisfatório se comparado ao ARIMA$(16, 1, 6)$ que demandou cerca de 5 vezes menos tempo para ser executado.

Referências

[1] André Luiz de Almeida Melo, Rosângela Clara Paulino, Edilene Alcântara de Castro, Vanete Thomaz Soccol e Carlos Ricardo Soccol, *Distribuição espacial da dengue no estado do Paraná, Brasil, em 2009-2012*, Revista de Epidemiologia e Controle de Infecção, vol.4(4):223-228, 2014.

[2] Eliezer José Balbinot, Jaque Willian Scotton, Simone Maffini Cerezer e Claodomir Antonio Martinazzo, *Modelos de séries temporais aplicados a previsão de radiação solar*, Perspectiva, Erechim. v. 41, n.155, p. 63-71, 2017.

[3] Lucas da Silva Costa, Edyvana Gabriela da Silva Teixeira e Arthur da Costa Almeida, *Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR*, XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, pôster, 2021.

[4] Luiza Maria Oliveira da Silva, *Uma aplicação de Árvores de Decisão, Redes Neurais e KNN para a identificação de modelos ARMA não-sazonais e sazonais*, tese de doutorado, PPGEE-PUC-Rio, 2005.

[5] Ministério da Saúde. *Dengue: aspectos epidemiológicos, diagnóstico e tratamento*, editora MS, 2002.

[6] Nazri Che Dom, A Abu Hassan, Z Abd Latif, Rodziah Ismail, *Generating temporal model using climate variables for the prediction of dengue cases in Subang Jaya, Malaysia*, Asian Pacific Journal of Tropical Disease, 3(5):352–61, 2013.

[7] Pedro A. Morettin e Clélia M. C. Toloi, *Análise de Séries Temporais*, Edgard Blücher, 2004.

[8] Boletins de dengue, http://www.dengue.pr.gov.br/Pagina/Boletins-da-Dengue#, acessado: 11/09/2021.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O portfólio acadêmico intitulado “SÉRIES TEMPORAIS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À MODELAGEM DE PROBLEMAS DE EPIDEMIOLOGIA E METEOROLOGIA” trouxe contribuições para consolidação da construção de conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, ajudando-me a analisar minhas próprias publicações e escrita acadêmica por um olhar mais crítico, permitindo que eu observasse mais claramente as limitações e falhas de meus trabalhos.

O estudo sobre o surto de sarampo na região Norte, utilizando modelagem com equações diferenciais ordinárias, teve por objetivo exercitar meus conhecimentos de Modelagem Matemática e programação, através da comparação de resultados analíticos e numéricos. Embora relativamente simples, esse trabalho permitiu verificar que mesmo modelos mais simplificados, quando implementados computacionalmente, podem fornecer aproximações satisfatórias mesmo em casos em que as soluções são puramente computacionais, desde que as análises sejam feitas adequadamente. Além disso, reafirma a importância desses conhecimentos e ferramentas durante o processo de desenvolvimento de jovens pesquisadores. Uma maneira interessante de refinar este trabalho é utilizar derivadas de ordem fracionada e considerar um sistema de vacinação em pulsos.

Por outro lado, a pesquisa meteorológica exploratória na cidade de Belém do Pará, em que se fez uso de Séries Temporais e índices de instabilidade, objetivou realizar uma comparação entre duas séries, uma delas referente aos valores da CAPE (base mensal) e a outra referente aos dados mensais de precipitação. Apesar de usarmos ferramentas matemáticas básicas, este trabalho nos permitiu identificar a possível existência de uma correspondência na tendência variacional das duas séries. Isso nos fornece um bom indício de que de fato haja uma correlação de proporcionalidade entre os valores da CAPE e a quantidade de chuvas. Ademais, pude adquirir novas habilidades de programação através do *software* R e enriquecer minha formação com um conteúdo para além da graduação em Matemática. Uma sugestão muito apropriada para potencializar essa pesquisa é seguir a indicação dos pareceristas do CNMAC e trabalhar com a técnica de co-integração.

O último texto teve como proposta a aplicação de um modelo ARIMA, a fim de predizer a série temporal de dados epidemiológicos semanais de casos de dengue

ocorridos no estado do Paraná, além de proporcionar um bom exercício de modelagem estatística. A proposta foi alcançada, haja vista que foram aplicados três modelos ARIMA com configurações diferentes, os quais foram testados, comparados e validados seguindo a metodologia de Box e Jenkins e considerando alguns pontos da própria abordagem metodológica de Bassanezi para realização da modelagem. Vale ressaltar que no decorrer desse estudo foi possível pôr em prática conhecimentos e técnicas referentes a modelagem, coleta, organização e análise de dados, além de modelos probabilísticos, análise de resíduos e programação. Uma forma de enriquecer esta pesquisa é adaptar o modelo para considerar tanto a sazonalidade quanto variáveis exógenas, algumas variáveis climáticas podem afetar o comportamento dos vetores transmissores da dengue e também o comportamento humano o que pode influenciar indiretamente o número de casos. Assim, pode-se até mesmo treinar um modelo de *Desicion Tree* ou de *Random Florest*, trazendo mais complexidade e sofisticação ao modelo.

Por fim, as publicações apresentadas neste portfólio e o próprio processo de desenvolvimento e construção dele me permitiram compreender com mais clareza o caminho que venho trilhando até então e a traçar os próximos passos de minha jornada acadêmica e profissional. Além disso, é através deste Trabalho de Conclusão de Curso que posso, assim como as ostras, revestir os principais grãozinhos de curiosidade que me causavam dor, a fim de transformá-los em preciosas pérolas durante o novo percurso que irei trilhar, não mais como graduando, mas como um profissional em início de carreira.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. **Ostra feliz não faz pérola**. 1. ed. São Paulo: Editora Planeta do Brasil, 2008.

BASSANEZI, C. R. **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática**. 1. ed. – São Paulo: Contexto, 2002.

BASTOS, T. X; PACHECO, N. A; NECHET, D.; SÁ, T. D. A; **Aspectos Climáticos de Belém nos Últimos Cem Anos**, EMBRAPA, Belém, PA, 2002.

_____. **Boletins de Dengue**. Paraná: Ministério da Saúde, Secretaria de Saúde do Estado do Paraná, 1ª à 52ª semanas epidemiológicas, ago. 2019/jun. 2020. Disponível em: http://www.dengue.pr.gov.br/Pagina/Boletins-da-Dengue#. Acesso em: 11 set. 2021.

CLIMATEMPO. *Url:https://www.climatempo.com.br/climatologia/232/belem-pa*. Acessado em: 11 jan. 2020.

CONNOR, N. *What is Natural Convection – Free Convection – Definition*. *In*: Thermal Engineering. **Thermal Engineering**. [*S.l.*]: 22 maio 2019. Disponível em: https://www.thermal-engineering.org/what-is-natural-convection-free-convection-definition/. Acesso em: 11 jan. 2022.

DENIZ, E. M.; MISSIO, M. **Um Modelo de Equações Diferenciais no Estudo da Evolução Temporal da Influenza A(H1N1)**. 8º ENEPE UFGD, 5º ENEPEX UEMS, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS, 2014.

LOPES, M. EPISÓDIO 02: As 3 diferenças entre os Projetos de Portfólio e os Projetos de estudos. **Série: O Portfólio de Respeito em Ciência de Dados**. 1 vídeo (11 min). SEJA UM *DATA SCIENTIST*, 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VRNx7iw4u34. Acesso em: 30 jan. 2022.

FARIAS, A. V. **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária**. Monografia, UFRG, 2017.

LE MOIGNE, J. L. *La Théorie du Système Général Théorie de la Modélisation*. ***Presses Universitaires de France***, 1977.

Machado, S. L. D; Silva, C. R.; Araújo, A. A. **Descrição temporal do comportamento do Cerrado *sensu strictu* usando séries temporais**. *Ciência e Natura*, vol. 40, 2018, Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/231204087. Acessado em: 01 jun. 2021.

PORTAL Action. *URL http://www.portalaction.com.br/series-temporais/53-cointegracao-em-series-temporais*. Acesso em 01 jun. 2021.

SILVA, L. M. O. da. **Uma aplicação de Árvores de Decisão, Redes Neurais e KNN para a identificação de modelos ARMA não-sazonais e sazonais**, tese de Doutorado, PPGEE-PUC-Rio, 2005.

ANEXO A – Comprovantes de apresentação de trabalho



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL

II SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO - SIEPEX

CERTIFICADO

Certificamos que **LUCAS DA SILVA COSTA**, apresentou o trabalho **ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÕES DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR ATRAVÉS DE SÉRIES DE TAYLOR DE 1ª, 2ª E 3ª ORDENS**, na modalidade **COMUNICACAO ORAL**, durante o **II SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO - SIEPEX** - do Campus Universitário de Castanhal, realizado nos dias de 30 e 31 de outubro, e 01 de novembro de 2018.

Castanhal, 01 de novembro de 2018.

Prof. Bruno Souza Lyra Castro
Vice-Coordenador
Campus Universitário de Castanhal
Portaria nº 3544/2017-UFPA

Profª Geriane Lopes Castro Silva Thym
Coordenadora de Extensão
Campus Universitário de Castanhal
Portaria Nº 021/2015 - UFPA



IV SIMPÓSIO DE ENSINO PESQUISA E EXTENSÃO DA UFPA CASTANHAL

CIÊNCIA E INOVAÇÕES TECNOLÓGICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DA AMAZÔNIA

CERTIFICADO

Certificamos que o trabalho intitulado **ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM EPIDEMIOLOGIA** foi apresentado, em forma de comunicação, durante o **IV SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO** realizado, *online*, no período de 25 a 27 de agosto de 2021 pelo *campus* de Castanhal da Universidade Federal do Pará – UFPA.

AUTORES: LUCAS DA SILVA COSTA; ARTHUR DA COSTA ALMEIDA.

FRANCISCO VALDINEI SANTOS DOS ANJOS
COORDENADOR ACADÊMICO UFPA- CASTANHAL

FACOMP NAcess GEPLISES UFPA

ISSN: 2595 7856

CERTIFICADO

CNMAC 2021
XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Certificamos que o trabalho intitulado

Modelagem de uma epidemia de sarampo usando SIR

Autoria de

Lucas da Silva Costa, Edyvana Gabriela da Silva Teixeira, Arthur da Costa Almeida

foi apresentado por **Lucas da Silva Costa**

como pôster durante o XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2021, realizado de 13 a 17 de setembro de 2021 em formato virtual.

Pablo Martín Rodríguez
Presidente
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

Organização:

Certification by Galoá

CERTIFICADO

CNMAC 2021
XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Certificamos que o trabalho intitulado

Comparação entre a variação mensal da CAPE e da precipitação em Belém, PA

Autoria de

Edyvana Gabriela da Silva Teixeira, Lucas da Silva Costa, Arthur da Costa Almeida

foi apresentado por **Lucas da Silva Costa**

como pôster durante o XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2021, realizado de 13 a 17 de setembro de 2021 em formato virtual.

Pablo Martín Rodríguez
Presidente
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

Organização:

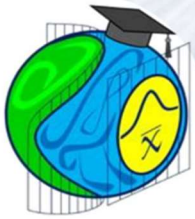
Certification by Galoá

UFU

famat

Certificado

XXI SEMAT - XI SEMEST



Certificamos que o trabalho **"Modelos preditivos de Séries Temporais epidemiológicas para o estudo da dengue no Paraná, Brasil"** foi apresentado por **Lucas da Silva Costa** na Modalidade Comunicação Oral no Evento XXI Semana da Matemática e XI Semana da Estatística da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, realizado de 08 de Novembro à 25 de Novembro de 2021.

Uberlândia, 23 de Novembro de 2021

Prof. Dr. Vinicius Vieira Fávaro
Diretor da Faculdade de Matemática da UFU

Profª. Drª. Giselle Moraes R. Pereira
Presidente da Comissão
Organizadora do Evento