



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

**RENATHA FARIAS SILVA**

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM  
DA MATEMÁTICA ESCOLAR**

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em matemática.

**Orientador:** Fabio Colins

**Castanhal-PA**

**2019**



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

Defesa do trabalho de conclusão de curso da discente **Renatha Farias Silva**, intitulada **Resolução de Problemas no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática Escolar**, orientado pelo professor Fabio Colins da Silva, apresentado à banca examinadora da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal.

Castanhal-PA, 09 de setembro de 2019.

Os membros da banca examinadora consideraram a candidata **APROVADA**.

**Banca examinadora:**

---

Prof. Ms. Fabio Colins (IEMCI/UFPA)

---

Profa. Dra. Kátia Liége Nunes Gonçalves (UFPA)

---

Profa. Dra. Maria Lídia Paula Ledoux (UFPA)

*Dedico este trabalho, antes de tudo, a Deus, que é quem me sustenta e rega minha vida. Em seguida, aos meus pais que sempre me incentivaram à carreira acadêmica. Mas também aos meus filhos Michael Pietro, Antony Rafael e Nátaly Karolayne que são os motivos pelo qual sigo lutando.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Chegado ao fim de uma árdua jornada, venho agradecer primeiramente a Deus por ter me sustentado até aqui, assim como aos meus pais Raimunda e Natalino que não mediram esforços para a conclusão desta importante etapa. Também agradeço aos meus filhos Michael, Antony e Nátaly que são a minha fortaleza e ao meu esposo Reginaldo Moraes pela compreensão e apoio.*

*Não poderia deixar de lembrar dos meus amigos que em todo momento estiveram ao meu lado me ajudando e incentivando, em especial Shayane Barbosa por estar ao meu lado nos bons e maus momentos, Simone Reis pela sua amizade e ajuda não somente no curso, mas na vida, Barbara Matos e Luana Oliveira por seus conselhos. Não esquecendo de Emar Rodrigues, Daniel Chaves, Luan Almeida e Cledenilton Albuquerque, integrantes da república que me acompanharam nesta etapa dividindo as dificuldades, compartilhando as alegrias e cultivando amizade, sendo assim parte lembrada sempre deste período que vivi. Agradeço também ao meu professor-orientador Fabio Colins por sua ajuda e compreensão no decorrer deste trabalho.*

*“Lembra-te da minha ordem: Seja forte e corajoso, porque eu, o Senhor, o seu Deus, estarei com você em qualquer lugar que você for!”*

(Josué 1:9)

## RESUMO

O ensino de matemática tem causado reflexões sobre as possibilidades de mudança pedagógica com referência às metodologias de ensino e a relação dos alunos com a disciplina. Neste contexto, a resolução de problemas tem ocupado espaço central nas discussões curriculares, principalmente reflexões sobre os conhecimentos matemáticos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem mobilizados nas/das atividades de resolução de problemas. Nesta perspectiva, a pesquisa teve como objetivo analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados no processo de ensino-aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas a partir do livro *O Homem que Calcula*, de autoria de Malba Tahan. A investigação foi desenvolvida em uma escola pública de Benevides-PA, com alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental, durante o Estágio Supervisionado. Uma pesquisa qualitativa do tipo exploratória. As análises foram realizadas a partir dos registros da resolução dos problemas retirados livro de Malba Tahan, o caso dos 21 vasos e os quatro quatros. A pesquisa apontou em seus resultados que o trabalho com a resolução de problemas requer uma nova postura do professor e dos alunos. Possibilitou refletir sobre a resolução de problemas como uma ferramenta de investigação matemática.

**Palavras-chave:** Matemática. Resolução de problemas. Malba Tahan.

## **ABSTRACT**

The teaching of mathematics has caused reflections on the possibilities of pedagogical change with reference to teaching methodologies and the relationship of students with the subject. In this context, problem solving has occupied a central place in curricular discussions, mainly reflections on the mathematical knowledge inherent to the teaching-learning process mobilized in the problem solving activities. In this perspective, the research aimed to analyze the mathematical knowledge mobilized in the teaching-learning process of mathematics through problem solving from the book *The Man Who Calculates*, written by Malba Tahan. The research was carried out at a public school in Benevides-PA, with 8<sup>th</sup> grade students during the supervised internship. A qualitative exploratory research. The analyzes were performed from the records of problem solving taken from Malba Tahan's book, the case of 21 vessels and the fours four. The research pointed out in its results that working with problem solving requires a new attitude of the teacher and the students. It made it possible to reflect on problem solving as a mathematical research tool.

**Keywords:** Mathematics. Resolucion of the problem. Malba Tahan

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	09
<b>CAPÍTULO 1: PERSPECTIVAS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA</b> .....	11
1.1 A resolução de problemas nos documentos curriculares .....	12
1.2 A resolução de problemas como tendência metodológica .....	15
<b>CAPÍTULO 2: O PERCURSO METODOLÓGICO</b> .....	23
2.1 O contexto da investigação .....	23
2.2 O livro de Malba Tahan .....	24
2.3 A construção das informações .....	28
<b>CAPÍTULO 3: O HOMEM QUE CALCULAVA</b> .....	31
3.1 O problema dos 21 vasos .....	31
3.2 Os quatro quatros .....	36
<b>4. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	41
<b>5. REFERÊNCIAS</b> .....	43

## INTRODUÇÃO

A importância dada à Resolução de Problemas no processo de ensino aprendizagem tem crescido nas últimas décadas, pois isso se deu devido as discussões nacionais e internacionais acerca do currículo de Matemática da Educação Básica. Educadores matemáticos, como George Polya nos Estados Unidos na década de 1960, passaram a refletir sobre o ensino de Matemática na perspectiva da memorização e repetição de algoritmos, e chegaram à conclusão de que o trabalho didático pedagógico precisava ser revisto. As aulas não poderiam continuar assumindo uma tendência em que considerava a construção do conhecimento por meio de rotinas de procedimentos algorítmicos. Pelo contrário, os alunos precisavam ser ativos nesse processo.

Sob esta concepção, a Matemática passaria a ser vista como um "objeto de ensino", onde o matemático descobre a Matemática numa realidade externa a ele, mas após a descoberta de um resultado matemático é necessário justificá-lo dentro de uma estrutura formal e só então fica pronto para ser ensinado. Ou seja, o ensino da Matemática deveria ser pautado na compreensão do objeto matemático e sua relação com o meio sociocultural.

Dessa forma, a pergunta geratriz que orientou a investigação consistiu no seguinte questionamento: *em que termos atividades de Resolução de Problemas podem mobilizar conhecimentos matemáticos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem?* Na perspectiva de respondê-la, a proposta de pesquisa recorreu aos estudos de Polya (1986); Onuchic (1999); Onuchic e Allevato (2004); Pozo e Echeverria (2002), entre outros. Autores que estudam a Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Nesta perspectiva, este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo *analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados no processo de ensino-aprendizagem da Matemática por meio da Resolução de Problemas a partir do o livro O homem que calculava, de autoria de Malba Tahan.* No que concernem os aspectos metodológicos, este estudo assumiu uma abordagem qualitativa do tipo exploratória. A investigação foi desenvolvida em uma turma do 8º Ano do Ensino Fundamental de

uma escola pública de Benevides-PA, tendo como contexto o Estágio Supervisionado<sup>1</sup>.

A pesquisa foi desenvolvida durante a realização do Estágio Supervisionado. As atividades didático-pedagógicas foram organizadas a partir de dois problemas retirados do livro *O homem que calcula*, de autoria de Malba Tahan. Foram os seguintes: o problema dos 21 vasos e o problema dos quatro quatros. A investigação deu-se em duas semanas de observação participativa das aulas de Matemática, contabilizando uma carga horária de doze horas de atividades na escola. O material empírico é resultante dos registros escritos pelos estudantes, que foram analisados com a finalidade de refletir sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados durante as aulas, sobretudo, as estratégias de Resolução dos Problemas.

O texto está organizado em três capítulos, além das considerações finais e referências. No primeiro capítulo discute-se sobre a Resolução de Problemas em duas perspectivas: a Resolução de problemas nos documentos curriculares e a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. No capítulo dois, é descrito o percurso metodológico, ou seja, o contexto da pesquisa, seus participantes, os instrumentos utilizados na construção das informações e o método de análise. No capítulo três, é apresentada as análises do material empírico e os resultados da pesquisa.

---

<sup>1</sup> Disciplina obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática, ofertada pela Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará.

## **CAPÍTULO 1: PERSPECTIVAS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA**

*Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema (POLYA, 1986, p. 15).*

O ensino da Matemática enfrentou dilemas antigos quando se fala do processo professor-aluno-aprendizagem, dificuldades essas que partiram desde a ineficiência da comunicação do conteúdo conceitual, somando-se à dificuldade do discente no entendimento e na consolidação do conteúdo. Esses entraves no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, atualmente, aliaram-se à necessidade de acompanhamento interligado do ensino com a tecnologia, bem como os viés que os acompanham (falta de materiais didático-pedagógicos, recursos estruturais, tempo de planejamento), gerando assim uma necessidade de adequação e inovação que auxiliassem o professor buscar formas mais eficazes para ensinar.

Desse modo, estudos (POLYA, 1986; ONUCHIC, 1999, 2004) sobre Resolução de Problemas como uma metodologia para o ensino de Matemática têm ganhado espaço nas pesquisas acadêmicas, por visar a melhoria das habilidades cognitivas dos alunos e sua participação ativa no processo de ensino e aprendizagem. Nessas pesquisas, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, principalmente na Educação Básica, tem buscado proporcionar aos estudantes a possibilidade de não somente enxergar a Matemática como uma disciplina estática, mas como uma forma de ler o mundo por meio da linguagem matemática.

Nestes termos, para Polya (1986), a busca eficaz em ensinar a resolver problemas não se constitui somente em prover os alunos de destreza e estratégias consistentes, mas de estimular o hábito e a ação de receber a aprendizagem como um problema no qual deve-se encontrar respostas. Mas na prática de sala de aula, não podemos confundir um mero exercício com uma situação problema. A distinção entre exercício matemático e problema matemático precisa estar clara para os alunos, pois eles precisam compreender seu papel nas tarefas propostas, ao invés de repetir algoritmos demonstrados pelo professor de matemática.

Ao assumir a Resolução de Problemas como metodologia de ensino o professor precisa dar autonomia ao aluno, ao invés de fomentar a heteronomia. Sobre isso, Polya (1986, p. 04) afirma que:

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso.

Um dos maiores desafios da docência é encontrar uma metodologia que se aplique a maioria dos alunos, buscando direcioná-los não somente ao resultado correto, mas também a enxergar as diversas aplicações que cada problema tem e sua relação com o cotidiano, o que não é fácil, pois exige tempo, experiência, dedicação e conceitos consistentes. Para Polya (1986), o professor precisa encontrar a medida certa de auxílio ao aluno, para que não falte e nem sobre, dando ao aluno a oportunidade de construção individual do conhecimento.

Uma possibilidade de enfrentar tais desafios pode ser encontrada nos documentos que orientam a construção das propostas curriculares e nas pesquisas que abordam a resolução de problemas como metodologia de ensino, conforme é discutido nas próximas seções deste capítulo.

### *1.1 A Resolução de Problemas nos documentos curriculares*

Segundo Onuchic (1999), é na década de 1980 que o tema Resolução de Problemas ganha destaque nas pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Essas discussões estavam centradas no trabalho de sala de aula, nas estratégias de ensino, nas sugestões de tipos de problemas e na avaliação da aprendizagem. Parte desses materiais contribuíram para a prática dos professores de matemática. É nesse mesmo contexto que surge, nos Estados Unidos da América (EUA), documentos orientadores para a construção de um novo currículo para o ensino de Matemática.

Essas orientações curriculares não pretendiam “dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrário, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas” (ONUICHIC, 1999, p. 10). Isso significa que as orientações curriculares buscavam ampliar discussões sobre políticas educacionais, a formação dos professores, a participação da família na vida escolar dos alunos e a organização de programas de Matemática para toda a Educação Básica.

Para Onuchic (1999, p. 11),

[...] outra característica encontrada nesses currículos é o uso de contextos na resolução de problemas como um meio de desenvolver os conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas. Estes currículos retratam a matemática como uma disciplina unificada por tópicos coerentemente integrados.

Essas discussões internacionais sobre uma nova proposta curricular para o ensino da Matemática refletiram no contexto da educação brasileira. Em 1997 o Ministério da Educação (MEC), por meio da Secretaria de Educação Básica (SEB), após diversos estudos, publica os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Assim, em 1998 é publicado o PCN de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Nesse documento, além de discussões voltadas para os temas transversais (ética, saúde, meio ambiente, cidadania, orientação sexual, pluralidade cultural, trabalho e consumo), dedicou-se abordar reflexões acerca da Resolução de Problemas e o processo de ensino-aprendizagem de Matemática (BRASIL, 1998).

A Resolução de Problemas nos PCN's, com base em pesquisas no campo da Educação Matemática, foi apontada como o ponto de partida para as aulas de Matemática. Ou seja, o ensino de Matemática precisava superar a simples reprodução de algoritmos e o acúmulo de informações veiculadas pelo professor. Na perspectiva apontada pelo documento, o conhecimento matemático ganharia significado “quando os alunos tivessem situações desafiadoras para resolver e trabalhassem para desenvolver estratégias de resolução” (BRASIL, 1998, p. 40). Os PCN's traziam uma crítica sobre o ensino da Matemática centrado na aplicação adquiridos anteriormente pelos estudantes. A Resolução de Problemas deveria ser trabalhada no processo de produção do conhecimento e não como uma forma de aplicar o que já tinha sido ensinado.

O ensino de Matemática estava sendo discutido diante de um contexto educacional em que as práticas didático-pedagógicas consistiam em “ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado” (BRASIL, 1998, p. 40). Desse modo, era reforçado a ideia de que resolver um problema matemático era aplicar um procedimento já aprendido, ou seja, simplesmente fazer cálculos a partir das informações numéricas contidas no texto base do problema. Essa prática implicava centrar o trabalho nos resultados e não no processo.

O conhecimento matemático visto por essa ótica era apresentado aos alunos como pronto e acabado, em vez de um conjunto de conceitos e procedimentos interrelacionados e integrados à outras áreas do conhecimento. Nestes termos, partia-se do pressuposto de que a aprendizagem se dava por meio da reprodução ou aplicação de técnicas prontas. Portanto, a resolução de problemas discutida nos PCN's,

[...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão a oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas (BRASIL, 1998, p. 40).

Nessa perspectiva, o ensino da Matemática ganha outro direcionamento. A Resolução de Problemas passa a ser o eixo norteador do processo de ensino-aprendizagem de Matemática. A definição deixa de ser o ponto de partida da aula e a situação problema ou o problema gerador passa a ser a atividade disparadora. Por meio de um problema gerador, o professor pode explorar com mais profundidade conceitos, ideias e procedimentos matemáticos. Ou seja, a aula toma as situações problemas como forma de o aluno desenvolver e de ampliar estratégias (heurísticas) para resolver problemas. Isso implica também no desenvolvimento de autonomia e autoconfiança.

A concepção de problema matemático, nos PCN's, é ampliada para além de um mero exercício, uma mera aplicação de uma fórmula ou processo operatório. De acordo com os parâmetros, “só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada” (BRASIL, 1998, p. 41). Dessa forma, a aprendizagem matemática dar-se articulada com outras áreas do conhecimento, assim como os conceitos matemáticos são compreendidos pelo aluno por meio de uma articulação com outros conceitos já apreendidos.

A Resolução de Problemas pode proporcionar contextos de aprendizagem de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Assim, um problema matemático é “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado” (BRASIL, 1998, p. 41). Isso mostra que a solução de um problema é construída no processo de resolução, e que um problema matemático pode ser relativo, isto é, o que pode ser um problema para um aluno, não o é para outro. O que determina uma situação problema é o desafio proposto.

Segundo os PCN's, o processo de resolução de um problema não é uma aplicação direta de procedimentos aprendidos, pois seguir passo a passo de um algoritmo não é garantia de que aprendeu matemática. Assim, o processo de resolução de um problema requer o desenvolvimento de habilidades que possibilitem provar resultados, estabelecer distintos caminhos para a resolução, compreender conceitos matemáticos e saber recorrer a ferramenta matemática mais adequada à situação proposta. Ou seja, “a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução” (BRASIL, 1998, p. 41).

Desse modo, resolver um problema requer do estudante as seguintes habilidades: “elaborar um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); comparar seus resultados com os de outros alunos; validar seus procedimentos” (BRASIL, 1998, p. 41). Essas habilidades foram chamadas por Polya (1986) de passos necessários para resolver um problema.

Para Polya (1986), o primeiro passo para encontrar a solução de um problema matemático é *compreender o problema*, ou seja, compreender qual é a incógnita e os dados. O próximo passo é *estabelecer um plano*. Aqui o aluno precisa, por exemplo, recorrer a problemas similares. O terceiro passo é *executar o plano*, então é o momento de pôr em prática o que foi planejado para encontrar a solução do problema. Por fim, *fazer um retrospecto*. Nessa fase o estudante necessita verificar se a solução satisfaz o problema, ou seja, testar a solução.

Para Onuchic (1999), as etapas para a resolução de um problema e a heurística para buscar a solução, conforme Polya descreve e discute, têm sido adotadas nas orientações curriculares, independentemente do conteúdo matemático. Essas discussões fomentaram a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nessa perspectiva, “o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas” (ONUCHIC, 1999, p. 211). Portanto, o ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas deixa de ser um processo isolado.

## 1.2 A Resolução de Problemas como tendência metodológica

A educação como um todo tem sofrido mudanças ao longo do tempo, não somente na sua forma estrutural, mas também no que se pode chamar de visões ideológicas sobre conceitos e atitudes voltados ao âmbito educacional. O século XXI

está sendo marcado por transformações sociais, econômicas, políticas, culturais e tecnológicas, por conseguinte o sistema educacional tem acompanhado, muitas de forma lenta, esse processo evolutivo ao qual a sociedade atual está inserida, isto é, um contexto altamente digital.

Desse modo, foi necessário realizar adequações em todas as áreas de educação, inclusive na Matemática. Por exemplo, não se consegue manter os alunos concentrados em aulas em que o professor passa maior parte do tempo expondo o conteúdo. A sala de aula precisa ser mais dinâmica e os estudantes precisam ser mais participativos. Por isso, Polya (1986) chama a atenção para a importância da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática.

Para Onuchic e Allevato (2004), tem crescido a discussão, no campo da Educação Matemática, sobre a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências educacionais. Isso deu-se devido as pesquisas sobre a Resolução de Problemas. A autora destaca que:

[...] a pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos recebeu muita atenção nas últimas décadas. Entre os desenvolvimentos notáveis estão o trabalho pioneiro de George Polya sobre como resolver problemas. Além disso, outros estudos foram desenvolvidos; estudos sobre o ensino de estratégias em resolução de problemas; sobre heurística, processos metacognitivos e sobre modelação matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 5).

A partir dessas pesquisas, o ensino da Matemática passa a superar o trabalho didático-pedagógico centrado na repetição e na memorização dos fatos aritméticos básicos, como por exemplo o uso excessivo da tabuada. Portanto, a proposta teórico-metodológica era evitar que nas aulas de matemática o professor falasse por grande parte do tempo da aula enquanto os alunos recebiam as informações, escrevia, resolvia exemplos para, em seguida, resolver infinitas listas de exercícios. Para Onuchic (1999, p. 201), os estudantes repetiam “exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através da repetição, com a aplicação de testes”. Assim, os exercícios eram resolvidos da mesma forma que o professor havia feito, sempre seguindo os mesmos passos da resolução.

Nas aulas centradas por meio da repetição havia alguns alunos que conseguiam entender o que faziam, ou seja, conseguiam “pensar” sobre a matemática estudada. No entanto, a maioria dos estudantes não entendiam os algoritmos matemáticos estudados nas aulas, pois “a maioria esquecia do que havia memorizado em pouco tempo” (ONUCHIC, 1999, p. 202). Nesse contexto, o currículo de

Matemática nas escolas brasileiras ainda não estava bem definido, mas o foco das aulas era a aritmética, a álgebra e a geometria.

Com o passar dos anos e com o avanço das pesquisas em Educação Matemática, o processo de ensino e aprendizagem buscou refletir sobre a importância de os alunos aprender Matemática com compreensão. Assim, a Resolução de Problemas, principalmente nas pesquisas acadêmicas, tem assumido três características gerais: resolução de problemas como habilidade matemática; Resolução de Problemas como arte; Resolução de Problemas como contexto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004). Mesmo com o crescimento do interesse pelo tema, os estudos desenvolvidos pouco contribuíram para a prática de sala de aula, visto a complexidade das propostas.

Para Onuchic e Allevato (2004, p. 7), a literatura revela que “o impacto da pesquisa em resolução de problemas no currículo de matemática tem sido limitado e, além disso, o acúmulo de conhecimento sobre o ensino de resolução de problemas tem sido lento”. Essa falta de diálogo entre as pesquisas sobre Resolução de Problemas e a escola básica pode ter sido gerado devido o pouco investimento em projetos de extensão, pois os cursos de formação continuada, geralmente, são oferecidos pelo Ministério da Educação (MEC) sem uma imersão prévia nos espaços escolares para conhecer as reais necessidades dos docentes. Por isso, o MEC poderia dialogar mais com as universidades a fim de que impactasse as práticas pedagógicas com os resultados das pesquisas científicas.

O pouco impacto das pesquisas acadêmicas na sala de aula deu-se, também, porque a Resolução de Problemas apareceu como um tema isolado, com foco na compreensão de conceitos e desenvolvimento de algoritmos seguidos da aplicação de problemas com enunciados, por exemplo, em um problema de combinatória solicitar-se-ia o desenho de um anagrama. Sobre isso, Pozo e Echeverria (2002, p. 6), destacam que:

[...] apesar dessas décadas de pesquisa e do desenvolvimento curricular associado, parece que as habilidades em resolução de problemas dos estudantes ainda necessitam de uma melhoria substancial, especialmente devido à rápida natureza mutável do mundo atual.

Desse modo, faz-se necessário refletir sobre a importância de novas perspectivas sobre o desenvolvimento de pesquisas que abordem a resolução de problemas como objeto de investigação. Pensar a construção de uma teoria que

articule a Resolução de Problemas com as atividades de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

Nestes termos, as pesquisas e o ensino em Resolução de Problemas deveriam contribuir para que os estudantes ampliassem e aprofundassem suas estratégias (heurísticas) em Resolução de Problemas, assim como “ensinar estratégias metacognitivas, desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza da matemática e suas competências pessoais em relação aos conhecimentos matemáticos” (POZO; ECHEVERRIA, 2002, p. 8).

Além de habilidades relacionadas, especificamente, à Matemática, o trabalho com a Resolução de Problemas pode ampliar e consolidar conhecimentos relacionados à leitura e à escrita. Nestes termos, esta pesquisa considera um problema matemático como um gênero textual, portanto, há necessidade de se ensinar e promover situações de aprendizagem para ler estes textos. Pois há nesses textos palavras que têm significados diferentes (de natureza Matemática) e que dificultam a compreensão. Para Itacarambi (2010, p. 14) o “questionamento na interpretação do texto ajuda, na maioria das vezes, a avaliar as respostas dadas pelos alunos e a verificar que a interpretação do professor não é a única possível”. Nessa direção, o problema matemático assume papel de instrumento de contextualização, a partir do momento em que propõe situações que exigem uma solução matemática e que direcionam para o questionamento, a pesquisa e a inserção das operações dentro de um contexto (ITACARAMBI, 2010).

A leitura nas aulas de Matemática, por meio da Resolução de Problemas, pode ser pensada como uma prática de ensino. Conforme Fonseca e Cardoso (2009, p. 66),

a leitura de textos que tenham como objeto, conceitos e procedimentos matemáticos, história da matemática, ou reflexões sobre Matemática, seus problemas, seus métodos, seus desafios podem, porém, muito mais que orientar a execução de determinada técnica, agregar elementos que não só favoreçam a constituição de significados dos conteúdos matemáticos, mas também colaborem para a produção de sentidos da própria Matemática e de sua aprendizagem pelo aluno.

O professor de Matemática pode orientar, praticar ou viabilizar leituras de textos matemáticos em parceria com o professor de Língua Portuguesa, não só na perspectiva de ensino da Matemática, mas também na perspectiva de desenvolvimento da compreensão leitora. Entre os textos que são proporcionados aos alunos, os professores podem selecionar alguns em que estejam presentes

informações numéricas, informações veiculadas por meio de gráficos e tabelas, leitura de mapas, textos com ideias matemáticas etc.

Uma prática necessária nas aulas de Matemática é a escrita. O ato de escrever não possui a mesma fluidez que o ato de oralizar, pois quando escrevemos não podemos recorrer facilmente aos vários argumentos disponíveis na interação oral. No entanto, Smole e Diniz (2001, p. 23), afirmam que a “escrita se junta ao oral e ao desenho para ser usada como mais um recurso de representação das ideias dos alunos”. Dessa forma, a expressão das ideias matemáticas por meio da escrita e do desenho precisa ser fomentada nas aulas, sobretudo, nas atividades de Resolução de Problemas.

Assim, tanto a escrita quanto o desenho, auxiliam o resgate da memória, uma vez que muitas discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registro em forma de texto. O texto escrito amplia as possibilidades de comunicação matemática. Dessa maneira, escrever permite que, além do próprio aluno, seus pais, colegas de outras classes e até mesmo outras pessoas possam ter acesso ao que foi pensado e vivido. Para Smole e Diniz (2001, p. 23) “trabalhar com as diferentes funções da escrita em sala de aula leva a criança a procurar descobrir a importância da língua escrita e de seus múltiplos usos, ao mesmo tempo em que as ideias matemáticas são aprendidas”. Pensar dessa forma nos leva a compreender a importância do uso de símbolo para representar a linguagem matemática.

No entanto, se expressar pela linguagem matemática não é simples, pois sua linguagem requer rigor. Ao exigirmos dos alunos uma linguagem que consideramos adequada e precisa, corremos o risco de impedir que alguns deles tenham acesso ao sentido dos enunciados matemáticos, o qual se constrói a partir de uma linguagem aproximada, em um trabalho em que o importante é a articular significações, relacionar ideias e etapas de raciocínio.

A escrita e o registro por meio de desenhos auxiliam na aprendizagem matemática de forma significativa, pois ajuda no encorajamento diante de situações problemas, na reflexão sobre as operações matemáticas, no esclarecimento de ideias e conceitos matemáticos e como um catalisador para as discussões em atividades em grupo, sobretudo, ajuda o aluno a aprender o que está sendo estudado (SMOLE; DINIZ, 2001).

O professor de Matemática pode explorar o trabalho com a Resolução de Problemas. Pois nessa perspectiva metodológica os alunos podem recorrer aos vários

conceitos e ideias matemáticas. Assim, a resolução de problemas, nesta proposta de pesquisa, é vista como uma atividade de investigação, cujo ponto de partida é a análise qualitativa, ou seja, ter ideia da situação, delimitá-la, ter claro os objetivos, isto é, o que se busca. Por isso, ter claro a concepção de problema é um primeiro passo para o docente compreender as produções dos alunos.

Com base em Onuchic (1999), as atividades de Resolução de Problemas nas aulas de Matemática seguiram, em termos de organização didático-pedagógico, as seguintes etapas:

1ª etapa: *Preparação do problema* – nesse momento inicial, o professor seleciona o problema com a finalidade de proporcionar aos alunos a construção de um novo conceito matemático, princípio ou procedimento. O problema será considerado como *problema gerador*. Nesse caso, o conteúdo matemático relacionado ao problema pode não ter sido trabalhado com os alunos, pois pode ter sido somente introduzido nas aulas.

2ª etapa: *leitura individual* – o professor distribui os textos aos alunos e a leitura é solicitada. Alguns direcionamentos ou questionamentos podem ser realizados antes da leitura propriamente dita.

3ª etapa: *leitura coletiva* – o professor organiza a turma em pequenos grupos de até quatro alunos. Em seguida, uma nova leitura do texto é solicitada.

Para Onuchic (1999, p. 221), caso os alunos tenham dificuldade na leitura do texto, o professor

[...] pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

Mesmo que a aula seja desenvolvida com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, muitos deles ainda se encontram em processo de alfabetização e a proficiência em leitura ainda não foi consolidada por muitos estudantes. Da mesma forma que pode ocorrer de encontrarem no texto palavras ou expressões específicas da linguagem matemática, por isso a importância da mediação do professor nessa etapa do trabalho com a Resolução de Problemas.

4ª etapa: *resolução do problema* – agora os alunos, de posse do problema e sem dúvidas sobre o texto lido, em grupo, de maneira colaborativa, buscam a solução do problema proposto. É nesse momento que o problema gerador contribui para a introdução, ou aprofundamento ou consolidação do conteúdo planejado para a aula.

Nessa etapa, o professor deve observar e incentivar seus alunos. Ele não deve assumir um papel de transmissor do conteúdo da aula. A observação e o incentivo precisam ocorrer durante o processo de resolução do problema. Nesse processo o professor busca mediar a construção do conhecimento matemático por meio de um trabalho colaborativo. Para Onuchic e Allevato (2004, p. 13), “o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles”. O docente é um incentivador. Ele ajuda os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e estratégias desenvolvidas nas aulas anteriores, inclusive, orienta-os a tentar soluções de problemas já enfrentados anteriormente. Assim, o professor

estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 13).

Conforme Onuchic (1999), o professor precisa acompanhar o processo de resolução do problema e ajudar os estudantes, se for necessário, a resolver outros problemas que podem surgir. Por exemplo, a notação utilizada para expressar a linguagem matemática, conceitos matemáticos inerentes ao problema gerador, algoritmos essenciais à resolução e palavras ou expressões na língua materna. Feito isso, os registros do processo de resolução constituem a próxima etapa.

5ª etapa: *registro das resoluções no quadro* – ao concluir as resoluções, o professor convida os alunos a registrar, no quadro, as soluções encontradas. As soluções podem ser desenhos, textos escritos em língua materna e/ou algoritmos matemáticos. Se necessário, solicitar ao aluno que justifique os procedimentos de resolução. Isso fomenta a compreensão de novos algoritmos e o processo heurístico. Vale ressaltar que as soluções erradas também precisam ser feitas no quadro e o professor deve corrigi-las, sem reforçar o erro. Mas procurar esclarecer o porquê do erro.

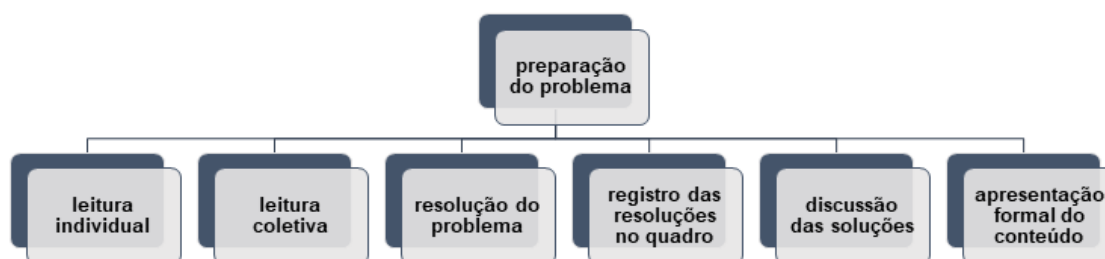
6ª etapa: *discussão das soluções* – nesse momento da aula, a partir dos registros feitos no quadro, os alunos devem ser convidados para discutir e defender as distintas resoluções e possíveis resultados diferentes. Defender seu ponto de vista e esclarecer suas dúvidas é o foco dessa etapa da aula. Ainda nessa etapa, o professor precisa sanar as dúvidas e analisar, junto com os alunos, as soluções encontradas para o problema gerador, ou seja, o docente ajuda os estudantes a chegar a um consenso sobre o resultado obtido.

Para Onuchic e Allevato (2004, p. 13), nessa etapa o “professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos”. Esse é um dos momentos mais produtivos para o processo de ensino-aprendizagem.

7ª etapa: *apresentação formal do conteúdo* – para finalizar a atividade com resolução de problemas, o professor precisa realizar a formalização do conteúdo matemático explorado no problema gerador. Esse registro formal pode ser realizado no quadro branco ou por meio do livro didático. Nessa etapa, ocorre uma apresentação organizada e estruturada da linguagem matemática explícita e implícita do texto do problema. Por isso, a importância da padronização de conceitos, princípios ou algoritmos construídos no/do processo de resolução do problema.

Em síntese, essas etapas podem auxiliar o professor em desenvolver um trabalho direcionado e intencional.

**Figura 1:** Etapas da Resolução de Problemas



**Fonte:** Adaptado de Onuchic e Allevato, 2004.

As aulas de matemática, por meio da resolução de problemas, podem ser planejadas de maneira articulada com as aulas de língua portuguesa. Para isso, nas atividades de leitura e escrita de situações problemas, os professores necessitam ter vontade e criatividade para reorganizar suas aulas. Ele precisa sair de propostas engessadas (definição-exemplo-exercício) e partir para propostas didáticas mais significativas e contextualizadas.

No próximo capítulo, é apresentado como se deu o trabalho com a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática.

## CAPÍTULO 2: O PERCURSO METODOLÓGICO

*“A matemática jamais pode ser vista como um problema, mas sim como uma solução”.*

*(aluno do 8º ano, 2017)*

A organização de um trabalho de pesquisa é, na maioria das vezes, um longo caminho cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, após um certo período de amadurecimento, surge um horizonte para a investigação. Nesse sentido, esta pesquisa assumiu uma abordagem qualitativa do tipo exploratória (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Nesta parte do texto, é apresentado o contexto da investigação, os problemas trabalhados nas aulas de Matemática, os instrumentos utilizados na construção das informações e o método de análise dos resultados da pesquisa.

### *2.1 O contexto da investigação*

O contexto de investigação foi uma turma de 8º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Benevides-PA. O interesse surgiu durante o desenvolvimento do Estágio Supervisionado em 2017. Nessa ocasião, foram realizadas atividades de observação, participação e regência, sob a supervisão da professora de Matemática da turma. A carga horária de estágio foi de 120 horas e parte dessa carga horária seria cedida para a realização da pesquisa.

O Estágio Supervisionado foi oportuno para discutir e refletir sobre aspectos relacionados à docência, ou seja, um momento determinante do curso de licenciatura. Por isso, surgiu o interesse de realizar uma pesquisa que estivesse ancorada no processo de ensino e aprendizagem, pois o curso formava professores de Matemática e pesquisar sobre o contexto de atuação profissional seria relevante para o desenvolvimento profissional da pesquisadora.

A escolha da escola surgiu devido a pesquisadora ter sido aluna dessa instituição. E desenvolver uma pesquisa no lugar onde cursou sua formação escolar básica era uma forma de retribuir parte do investimento destinado à sua educação. A

aproximação com a equipe gestora e com a professora da turma facilitou a inserção no *locus* de pesquisa.

Após essa aproximação, no momento de planejamento da professora, foi apresentado o livro “*O Homem que Calculava*”, de autoria de Malba Tahan (2010). A professora ficou interessada em saber do que se tratava a história. Foi explicado que Malba Tahan, autor do livro, contava uma narrativa de aventura e que nessas histórias tinha bastante matemática. A partir dessa conversa surgiu o interesse da professora em desenvolver algumas aulas com esse livro.

A professora de Matemática da turma disponibilizou duas semanas de aula para que fosse desenvolvida a pesquisa. Portanto, durante doze horas de atividades em sala de aula os alunos realizaram tarefas de leitura e de escrita por meio da Resolução de Problemas, metodologia adotada pela docente.

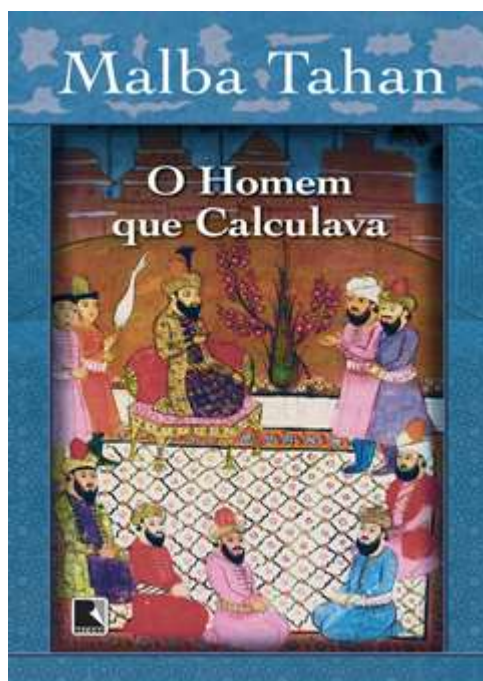
Como se tratava de uma pesquisa em sala de aula, era preciso atentar para os conteúdos do 8º Ano do Ensino Fundamental. Portanto, foram discutidos os assuntos que estavam no planejamento. Números e pensamento algébrico eram objetos do conhecimento que precisavam ser trabalhados.

Diante disso, dedicou-se tempo para fazer a leitura do livro com a finalidade de selecionar episódios que estivessem relacionados com os conteúdos de Matemática do planejamento. Assim, dois episódios foram escolhidos: *O caso dos 21 vasos* e *O problema dos quatro quatros*.

## 2.2 O livro de Malba Tahan

O livro utilizado na pesquisa, *O Homem que Calculava*, de autoria de Malba Tahan (2010), pseudônimo do professor de Matemática e escritor Júlio César de Mello e Souza, é do tipo narrativa e de gênero romance (infanto-juvenil) que aborda conhecimentos matemáticos e a cultura mulçumana. A narrativa dar-se em Bagdá.

**Figura 2:** Capa do livro O homem que Calculava



**Fonte:** Malba Tahan, 2010.

Os conhecimentos matemáticos tratados nessa obra estão relacionados com operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão), potenciação, radiciação, operações com fração, pensamento algébrico, equações e séries intuitivas. Esses objetos matemáticos são abordados na perspectiva da História da Matemática e por meio do raciocínio lógico.

O protagonista da história é Beremiz Samir (o homem que calculava), Tade-Maiá, seu amigo e narrador do romance, e Maluf el Barad, grão-vizir protetor de Beremiz. Na obra é destacado o interesse de Beremiz pela Matemática e sua notoriedade na resolução de problemas. Suas habilidades, por onde passa, desperta nos outros a curiosidade, a simpatia e a inveja.

O primeiro problema trabalhado com os alunos foi o episódio “O Caso dos 21 Vasos”.

la o eloquente calculista prosseguir em suas estranhas observações sobre o número sagrado, quando avistamos, à porta da hospedaria, nosso dedicado amigo o cheique Salém Nasair, que acenava repetidas vezes chamando por nós.

Disse o cheique Salém: – Sinto-me feliz por tê-lo encontrado agora, ó calculista! Sua chegada, não só para mim, como para três amigos que se acham nesta hospedaria foi altamente providencial.

E acrescentou com simpatia e visível interesse:

- Venham! Venham comigo que o caso é muito sério.

Levou-nos a seguir para o interior da hospedaria. Conduziu-nos por um corredor meio escuro, úmido, até o pátio interno, acolhedor e claro. Havia ali

cinco ou seis mesas redondas. Junto a uma dessas mesas achavam-se três viajantes que me pareceram estranhos.

Os homens quando o cheique e o calculista deles se aproximaram, levantaram-se e fizeram o salã. Um deles parecia muito moço; era alto, magro, tinha os olhos claros e ostentava belíssimo turbante amarelo cor de ovo, com uma barra branca, onde cintilava uma esmeralda de rara beleza; os dois outros eram baixos, ombros largos e tinham pele escura como beduínos da África.

Disse o cheique apontando para os três muçulmanos:

- Aqui estão, ó calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora os problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo: 7 cheios; 7 meio cheios e 7 vazios.

Querem agora dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade ao meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó calculista, obter uma solução para este problema?

Beremiz depois de meditar em silêncio durante dois ou três minutos, respondeu:

- A divisão dos 21 vasos, que acabais de apresentar, ó cheique, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

(MALBA TAHAN, 2010, p. 53-54)

Esse primeiro problema despertou a curiosidade e o interesse nos alunos. A professora sentiu a diferença em relação à participação dos alunos na aula. Esse problema foi trabalhado na primeira semana de aula, um total de seis horas aulas. Na segunda semana de aula foi utilizado o problema “Os Quatro Quatros”.

[...] Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais, pulseiras, etc.) era vendido por 4 dinares. Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia:

#### “OS QUATRO QUATROS”

Ao ver Beremiz interessado em adquirir o turbante azul, objetei: - Julgo loucura comprar esse luxo. Estamos com pouco dinheiro e ainda não pagamos a hospedaria. - Não é o turbante que me interessa – retorquiu Beremiz. – Repare que a tenda desse mercador é intitulada “Os Quatro Quatros”. Há nisso tudo espantosa coincidência digna de atenção. - Coincidência? Por quê?

- Ora bagdali – retorquiu Beremiz -, a legenda que figura nesse quadro recorda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros! E antes que eu o interrogasse sobre aquele enigma, Beremiz explicou, riscando na areia fina que cobria o chão: - Quer formar o zero? Nada mais simples. Basta escrever:

$$44 - 44$$

- Estão aí quatro quatros formando uma expressão que é igual a zero. Passemos ao número 1. Eis a forma mais cômoda:

$$44 : 44$$

- Representa essa fração, o quociente da divisão de 44 por 44. E esse quociente é 1. Quer ver agora, o número 2?

(MALBA TAHAN, 2010, p. 28-30)

De posse dos textos, a professora, em parceria com a pesquisadora, planejou as aulas. No primeiro momento da aula foi esclarecido como seria desenvolvido o trabalho com o livro. Assim, para a apresentação do problema foi esclarecido que os problemas tinham sido retirados do livro *O Homem que Calculava*, uma obra que tratava das aventuras de Beremiz Samir.

Foi explicado também que o verdadeiro autor do livro se chamava Júlio César de Mello e Souza, e que ele usava o pseudônimo de Malba Tahan. A obra conquistou a atenção de toda a turma, pois por meio das aventuras e do clima de romance os alunos deleitaram-se na leitura e passaram a olhar a matemática por um viés mais significativo.

Em seguida, o livro foi disponibilizado em formato digital para todos os alunos da turma, isso ajudou na organização das atividades. Portanto, as primeiras aulas foram exploratórias. Nas atividades seguintes foram distribuídas cópias impressas de um dos problemas da coletânea de Malba Tahan e realizada a leitura individual.

Ainda no mesmo dia de aula, após a leitura individual, a turma foi organizada em pequenos grupos para que fizessem a leitura coletiva e discutissem a história. Após a leitura nos grupos, a tarefa seguinte consistiu na leitura e interpretação do texto proposto, que contribuiu também para a compreensão do problema. A tarefa seguinte estava centrada na resolução do problema dos 21 vasos. Os estudantes teriam que efetuar a partilha conforme narrado na história. Essa atividade de resolução do problema tomou duas aulas, pois inicialmente os estudantes apresentaram dificuldade para executá-la. Mas com a interação com os colegas e a mediação da professora, ideias emergiram.

As soluções realizadas nos grupos foram registradas, primeiramente, no caderno e discutidas para que depois fizessem os registros das soluções no quadro branco, pois esses foram instrumentos de comunicação das ideias matemáticas. Com as atividades registradas no quadro, deu-se início às discussões sobre as distintas soluções que, *a priori*, satisfaziam o problema. Momento de interação e troca de ideias.

Para fechamento da aula com o primeiro problema, a professora realizou uma apresentação formal dos conteúdos e ideias matemáticas emergentes da atividade. Esse roteiro de trabalho foi utilizado nos dois problemas. A partir desse momento, os alunos perceberam os conhecimentos matemáticos mobilizados durante e após a resolução do problema. O interessante foram as diversas possibilidades de

enfrentamento da situação problema. Dessa forma, os registros construídos pelos estudantes (escrita e desenho) foram analisados com a finalidade refletir sobre os conhecimentos mobilizados durante as aulas e as estratégias de resolução.

### 2.3 A construção das informações

Para construir as informações necessárias à investigação foram utilizados instrumentos que estivessem adequados ao objetivo da pesquisa. Para isso, recorreu-se à observação participante, ou seja, “uma observação estruturada a partir de um planejamento prévio quanto à coleta de dados” (OLIVEIRA, 2014, p. 79). Para isso, foi feita uma visita prévia à escola e à turma. Discutiu-se com a professora de Matemática sobre a organização das atividades e os materiais que os alunos produziram.

A técnica da observação participante possibilitou a construção de um diário de campo – “caderno no qual escrevemos todas as informações que não fazem parte do material formal da pesquisa” (MINAYO, 2015, p. 71) – onde observações eram anotadas. Além disso, as folhas de atividades realizadas pelos alunos foram o principal material empírico para as análises, conforme a figura abaixo.

**Figura 3:** folha de atividades

Cada um sócio recebeu 7 vasos e a mesma quantidade de vinho.	
	c. M. V.
1º Primeiro Receber:	
2 vasos cheios 3 meios cheios 2 vazios.	$1^o: 3 + 3 + 1 = 7$
2º Segundo Receber:	
3 vasos cheios 1 meio cheios 3 vazios.	$2^o: 2 + 3 + 2 = 7$
3º Terceiro Receber:	
2 vasos cheios 3 meios cheios 2 vazios.	

**Fonte:** diário de campo

A figura 3 é um exemplo do material construído no decorrer da observação participante. Esses registros escritos produzidos pelos estudantes foram analisados com a finalidade de refletir sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados durante as aulas, sobretudo, as estratégias (heurísticas) de resolução dos problemas.

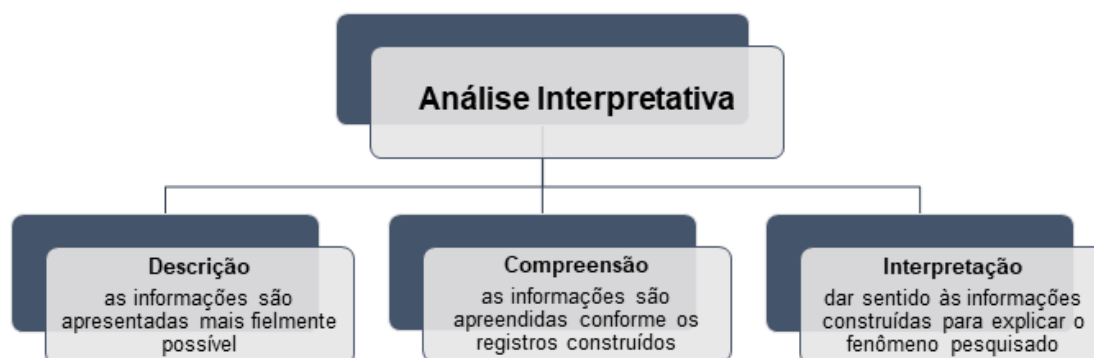
Os registros dos algoritmos utilizados para enfrentar as situações problemas também serviram de informação para as reflexões acerca das estratégias de resolução e dos conhecimentos matemáticos mobilizados nas atividades, conforme registrado na figura 4.

**Figura 4:** folha de atividades

a)  $44 - 44 = 0$   
 b)  $(4+4) : (4+4) = 1$   
 c)  $(4:4) + (4:4) = 2$   
 d)  $(4+4+4) : 4 = 3$   
 e)  $(4-4) \times 4 + 4 = 4$   
 f)  $(4 \cdot 4) + 4 : 4 = 5$   
 g)  $(4+4) : 4 + 4 = 6$   
 h)  $(4+4) - (4:4) = 7$   
 i)  $(4 \times 4) - (4+4) = 8$   
 j)  $(4+4) + (4:4) = 9$   
 k)  $(44 - 4) : 4 = 10$

**Fonte:** diário de campo

Na figura 4 consta os registros das heurísticas utilizadas por um aluno. Esse material serviu como suporte para as discussões dos resultados. De posse dessa empiria, pensou-se em um método de análise que estivesse articulada com a técnica de construção das informações e o material produzido durante a pesquisa. Assim, foi utilizado o *método de análise interpretativa* de Minayo. Esse método consiste em articular as seguintes ações: descrição, compreensão e interpretação. Essas ações precisam estar articuladas com a teoria que fundamentou a discussão do objeto de pesquisa (MINAYO, 2015).

**Figura 5:** Método de Análise Interpretativa

**Fonte:** adaptado de Minayo, 2015.

Portanto, esse método de análise busca dar sentido ao que foi descrito e analisado. É um processo analítico que facilita interpretar falas, textos, desenhos, documentos e livros por meio de um processo sistêmico. E foi a partir desse método

que as informações construídas no/do processo de resolução dos problemas foram analisadas, conforme são apresentadas no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 3: O HOMEM QUE CALCULAVA

*A matemática avança  
à custa de resolver  
problemas.*

(SADOVSKY, 2010, p. 38)

Conforme citação de Sadovsky (2010), o trabalho com a Resolução de Problemas busca recuperar o papel produtor que ela tem. Assim, a pesquisa busca refletir sobre um aluno que precisa ser estimulado a questionar, a resolver problemas, a criar estratégias de resolução e a construir o conhecimento matemático de forma autônoma, tendo o professor como mediador desse processo.

Nestes termos, a pesquisa assumiu duas linhas de análise interpretativa: uma delas dar ênfase às atividades de leitura e de escrita da linguagem matemática e sua interface com a língua materna a partir do problema “**Os 21 vasos**”; a outra discute os conhecimentos matemáticos e as estratégias (heurísticas) de Resolução do Problema “**Os Quatro Quatros**”.

### 3.1 O Problema dos 21 Vasos

A escrita e a leitura, por meio da Resolução de Problemas, podem aproximar ainda mais os alunos da aprendizagem da linguagem matemática com a aprendizagem da língua materna e, com isso, aprofundar as ideias matemáticas. Exemplo disso, pode-se observar nas produções dos estudantes diante do episódio “Os 21 vasos” retirados do livro de Malba Tahan.

**Figura 6: A Partilha dos 21 Vasos**



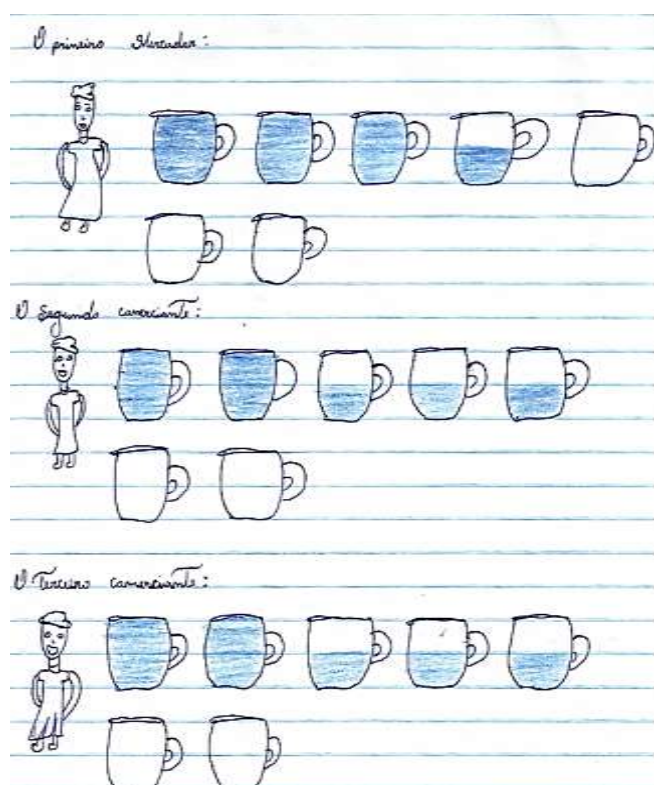
**Fonte:** diário de campo

Na figura 6 fica evidenciado a importância do registro por meio de desenhos. O aluno manifestou sua forma de enfrentar a situação problema. Essas características possibilitam considerar a importância de aprender matemática para ler textos e ler textos para aprender Matemática. Prática que precisa aparecer com mais frequência nas aulas de Matemática da Educação Básica, pois para Onuchic (1999, p. 201) “os alunos deviam aprender matemática com compreensão”. Esse tipo de trabalho possibilita ao aluno familiarizar-se com a linguagem e os símbolos próprios da Matemática.

Conforme Smole e Diniz (2001), os professores precisam organizar rotinas de leitura, independentemente das aulas de Língua Portuguesa, que articule momentos de leitura individual, oral, silenciosa ou compartilhada de modo que, nas aulas de Matemática, os estudantes defrontem com situações efetivas e diversificadas de leitura. Ler livros, ler jornais, ler mapas, ler contas de energia elétrica, ler regras de jogos etc. são práticas necessárias, no entanto, é difícil formar leitores proficientes, pois envolve vários processos: cognitivos, afetivos e sociais.

A figura 7 ilustra a habilidade de criar estratégias para resolver situações problemas.

**Figura 7:** Representação da Partilha dos Vasos



**Fonte:** diário de campo

A figura acima permite compreender que a atividade com o livro de Malba Tahan incentivou os alunos a buscarem diferentes formas de resolver problemas e refletir sobre seus processos de resolução da situação proposta. Tais processos podem se manifestar por meio de algoritmos convencionais, de esquemas, da oralidade ou até mesmo por meio de desenhos, como ilustrado na figura 7.

Outro aspecto relevante foi a aceitação e a análise, por parte dos alunos, das diversas estratégias de resolução como válidas e importantes para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática. Essa atividade conduziu os estudantes para a compreensão de que a ideia matemática pode admitir diferentes formas de expressão e uma expressão pode representar diferentes ideias e contextos matemáticos. Isso implica um grande desafio para o professor de Matemática, “pois se trata de uma compreensão que nos obriga a sair da cômoda posição de atribuir a cada símbolo ou expressão matemática um significado único e, reciprocamente, a cada ideia uma única forma de representação” (NACARATO; LOPES, 2009, p. 123). Assim, um mesmo modelo matemático pode ser trabalhado por meio de diversas estruturas semânticas, favorecendo ao aluno reconhecer isomorfismos matemáticos por meio da diversidade de sentidos atribuídos às estratégias de resolução dos problemas.

A ênfase na produção escrita nas aulas de Matemática resulta em concepções sobre como se dá o processo de construção do conhecimento matemático pelos alunos. A escrita nas aulas de Matemática assumiu um papel de instrumento mediador entre o sujeito e o objeto de conhecimento. Isso se evidencia na figura 8.

**Figura 8:** Escrita das Ideias Matemáticas

Cada um sócio recebeu 7 vasos e a mesma quantidade de vinho.	
Primeiro Receber:	C M V
2 vasos cheios 3 meios cheios 2 vazios.	1 <sup>o</sup> : $3 + 1 + 3 = 7$
Segundo Receber:	2 <sup>o</sup> : $2 + 3 + 2 = 7$
3 vasos cheios 1 meio cheios 3 vazios.	3 <sup>o</sup> : $2 + 3 + 2 = 7$
Terceiro Receber:	
2 vasos cheios 3 meios cheios 2 vazios.	
Primeiro Receber	
3 cheio	
1 meio	
2 vazio	
Segundo Receber	
2 cheio	
3 meio	
2 vazio	
se juntos 2 meios cheios dará a quantidade de 1 vaso cheios. devido em conta então	
3 cheios	↑
1 meio	a quantidade representada
2 vazios	

**Fonte:** diário de campo

Nesse registro percebe-se a importância da escrita para comunicar as ideias matemáticas. Apesar de o estudante ter recorrido aos cálculos aritméticos para enfrentar essa situação, deu maior ênfase à justificativa escrita dos cálculos.

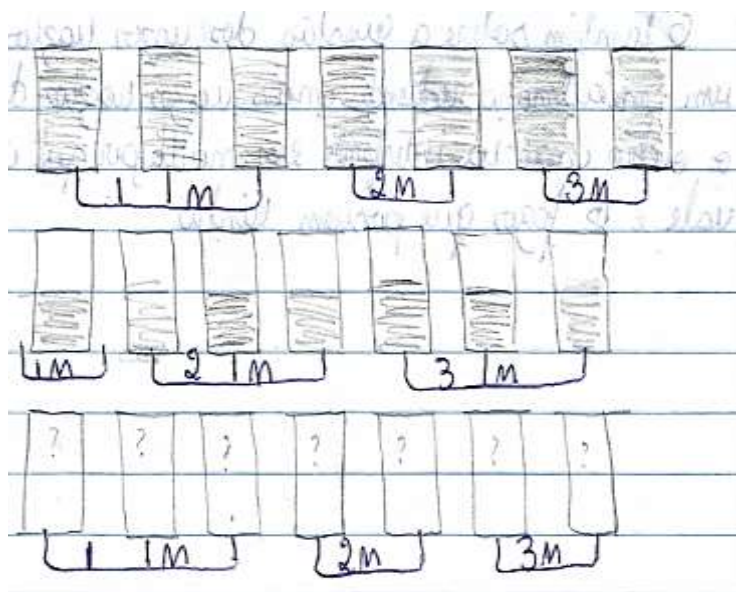
A atividade mostrou também que resolver um problema matemático não consiste no simples reconhecimento de situações típicas e/ou aplicar estratégias recorrentes de aplicação de algoritmos, em que a única tarefa é desenvolver o passo a passo dos procedimentos indicados pelo professor. No entanto, as estratégias de resolução apresentadas nessa proposta são construções que começam com o planejamento qualitativo, levantamento de hipóteses e têm como pressuposto a aprendizagem ativa (ITACARAMBI, 2010).

As respostas dos alunos revelaram que estão sempre em busca de um novo caminho para resolver o problema. Por isso, segundo os estudantes, não causou estranheza fazer desenhos ou registros escritos na tentativa de encontrar a solução, pelo contrário, essa foi a estratégia mais recorrente nas resoluções.

Para Smole e Diniz (2001) muitas vezes, nas situações de resolução de problemas, os alunos optam por representar suas soluções com base no contexto ou na estrutura do problema, o que varia de acordo com a segurança de cada um. Das várias representações que fizeram, uma ou outra se aproximou da técnica operatória, conforme a figura 8, o que não se traduz necessariamente em algoritmo tradicional.

Ler e escrever nas aulas de matemática proporcionou uma diversidade de estratégias (heurísticas) de resolução. Um dos alunos recorreu à linguagem algébrica para expressar suas ideias matemática, conforme a figura 9.

**Figura 9:** Representação algébrica para a Partilha dos Vasos



**Fonte:** diário de campo

A estrutura do raciocínio matemático foi organizada da seguinte maneira: 1M representou o primeiro mulçumano; 2M o segundo e o 3M o terceiro mulçumano. Isso evidenciou a utilização da linguagem algébrica. Essa estratégia foi utilizada como recurso de ampliação da compreensão do problema, além de ser um veículo de acesso a outros tipos de raciocínio. Ao fazer o registro o aluno exteriorizou um conhecimento matemático, revelando sua interpretação do próprio problema e o domínio que possui dos conteúdos matemáticos que fazem parte da atividade proposta.

Para Smole e Diniz (2001), os professores de Matemática, sobretudo, não podem esquecer que uma das principais tarefas da escola é formar alunos que façam uso da leitura e da escrita com autonomia em todas as áreas do currículo. Por esse motivo, a pesquisa propõe que durante as aulas de matemática os estudantes possam ser convidados a registrar e comunicar informações e suas próprias descobertas. Essa prática de ler, escrever e resolver problemas matemáticos, também foi desenvolvida com outro episódio do livro *O Homem que Calculava*, conforme é apresentado no próximo tópico.

### 3.2 Os Quatro Quatros

Nesse problema, os alunos precisavam formar os números de 0 a 10 utilizando somente quatro quatros e as operações fundamentais. Desse modo, precisariam recorrer às propriedades das expressões numéricas, conforme ilustrado na figura 9.

**Figura 9:** Resolução do Problema dos Quatro Quatros

Handwritten solutions for the Four Fours problem:

- Subtraindo quarenta e quatro menos quarenta e quatro o Resultado é zero.  
 $44 - 44 = 0$
- Quarenta e quatro dividido por quarenta e quatro o resultado é um.  
 $44 \div 44 = 1$
- Dividindo quatro por quatro duas vezes e somando os resultados, temos o número Dois.  
 $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$
- Quatro menos quatro dividido por quatro, mais o quatro Potência o Resultado é Três.  
 $4 - \left(\frac{4}{4}\right) = 3$
- Quatro menos quatro mais quatro o Resultado é Quatro.  
 $4 - 4 + 4 = 4$
- Quatro mais quatro dividido por quatro, mais o quatro Potência o Resultado é Cinco.  
 $4 + \left(\frac{4}{4}\right) = 5$

**Fonte:** diário de campo

A figura acima permite afirmar, com base em Onuchic (2012), que o processo de resolução de problemas possibilitou aos alunos ampliar ou aprofundar suas habilidades matemáticas, pois utilizaram ferramentas aritméticas que auxiliam na solução do problema e atendessem as condições propostas para a resolução. Além disso, construiu uma resolução que atendessem aspectos relacionados ao cálculo e à

produção escrita que justificasse o desenvolvimento do algoritmo utilizado. A escrita reforçou a heurística da resolução e acentuou a importância do domínio da linguagem matemática para a resolução de um problema.

O problema “**Os Quatro Quatros**” foi apresentado de tal forma que sua solução fosse aberta, desde que cumprisse com as condições dadas, e isso exigiu dos alunos uma postura autônoma e ativa diante da aula de Matemática. Isso reforça a ideia de que “o ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos já disponíveis” (POZO; ECHEVERRÍA, 2002, p.30). Essa autonomia favoreceu também que aprendessem a aprender, na perspectiva de desafiá-los a encontrar por si mesmo respostas aos problemas propostos.

Sobre a utilização de conhecimentos já disponíveis, conforme afirmaram Pozo e Echeverría (2002), o problema “**Os Quatro Quatros**” exigiu que os estudantes recorressem às ferramentas aritméticas relacionadas às expressões numéricas. Isso fomentou a construção de conhecimentos matemáticos relacionados ao cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, pois esse era o objeto matemático que seria formalizado ao final das atividades propostas para a resolução do problema.

A inquietação dos alunos e a autonomia para buscar respostas em conhecimentos adquiridos anteriormente ficam evidentes no processo de resolução apresentado na figura 10.

**Figura 10:** Expressões Numéricas Criadas para Resolver o Problema

The image shows a list of handwritten mathematical expressions on lined paper, each preceded by a circled letter from 'a' to 'j'. The expressions are:

- a)  $44 - 44 = 0$
- b)  $(4+4) : (4+4) = 1$
- c)  $(4:4) + (4:4) = 2$
- d)  $(4+4+4) : 4 = 3$
- e)  $(4-4) \times 4 + 4 = 4$
- f)  $(4 \cdot 4) + 4 : 4 = 5$
- g)  $(4+4) : 4 + 4 = 6$
- h)  $(4+4) - (4:4) = 7$
- i)  $(4 \times 4) - (4+4) = 8$
- j)  $(4+4) + (4:4) = 9$
- k)  $(44 - 4) : 4 = 10$

**Fonte:** diário de campo

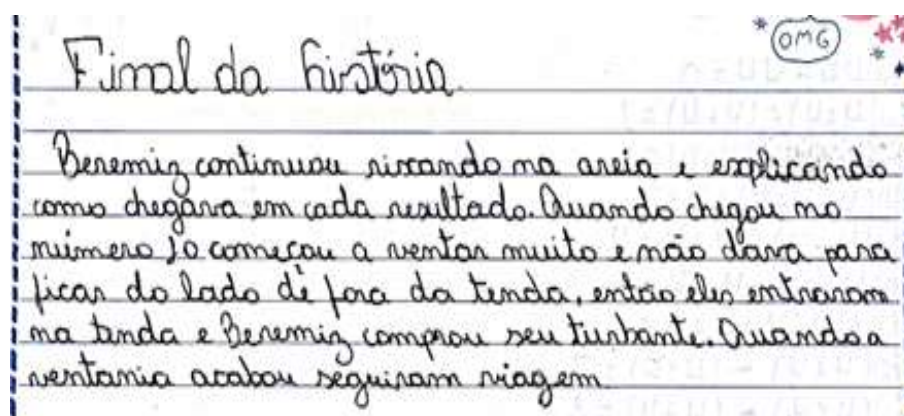
A figura 10 mostra as manipulações matemáticas feitas para encontrar os numerais de 0 a 10. Percebe-se que o processo hierárquico na resolução de uma expressão numérica foi atendido. A manipulação das operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) foi utilizada corretamente, além da utilização dos sinais matemáticos, como o uso dos parênteses.

Outro aspecto relevante dessa atividade é o fato de a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino da Matemática despertar nos alunos a construção de estratégias (heurísticas) diversas para solucionar o problema proposto, além de provocar a criatividade e aproveitar seus conhecimentos já construídos e suas experiências para a construção de um novo conhecimento. Ou seja, recorrer às habilidades relacionadas às expressões numéricas para aprender a calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

A partir do registro da figura 10, pode-se afirmar que as atividades de Resolução de Problemas desenvolvidas nas aulas de Matemática colocaram o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas expressas no texto e deu sentido ao que foi estudado. Conforme afirmam Onuchic e Allevalo (2004, p. 17), a Resolução de Problemas como metodologia de ensino da Matemática “desenvolve nos alunos a capacidade de pensar matematicamente”, assim fazer com que utilizem distintas estratégias em diferentes problemas ou no mesmo problema.

O trabalho com a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, além de permitir a compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos, permite fomentar a prática da escrita, competência que não é restrita ao ensino da Língua Materna, mas que pode ser trabalhada articulada com o ensino da linguagem matemática, conforme exemplificado na figura 11.

**Figura 11:** A Escrita nas Aulas de Matemática



Fonte: diário de campo

A figura 11 ilustra uma das atividades da aula. Após resolver o problema, os alunos foram orientados a construir um final para a história, pois o desfecho da narrativa foi omitido, sem prejuízos à resolução, com a finalidade de solicitar, a partir da compreensão e resolução do problema, a escrita de um final para a história de Beremiz Samir (o homem que calculava). No entanto, essa atividade não pareceu muito comum, pois causou estranheza aos alunos ler e escrever nas aulas de matemática, visto que estavam acostumados a somente fazer cálculos. Mas com o passar das aulas perceberam que as competências linguísticas (ler e escrever) eram importantes para a interpretação dos problemas.

Para Onuchic e Allevato (2004, p. 20), afirmam que os “professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional”. O resultado da pesquisa corrobora com essa assertiva, pois a professora e os alunos disseram que as aulas de matemática não seriam as mesmas depois dessa experiência. A docente, em seu discurso, sentia-se gratificada com os resultados apresentados por seus alunos. Percebeu que a matemática pode, e deve, ser trabalhada a partir de uma obra literária e que ler e escrever não são práticas restritas aos professores de língua portuguesa, mas um compromisso de todos os professores.

A Resolução de Problemas, além de desenvolver o poder matemático nos estudantes, ou seja, a habilidade de pensar matematicamente e otimizar as ferramentas matemáticas, permite aumentar a compreensão dos conteúdos matemáticos e a confiança do aluno. A figura 12 é um exemplo de que os alunos souberam utilizar coerentemente os conceitos e ideias matemática para resolver o problema “**Os Quatro Quatros**”.

**Figura 12:** Novas Soluções para o Problema dos Quatro Quatros

1 → $\frac{44}{44} = 1$	6 → $\frac{4+4}{4+4} = 6$	0 → $44-44=0$
2 → $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$	7 → $4+4-\frac{4}{4} = 7$	
3 → $\frac{4+4+4}{4} = 3$	8 → $4-4+4+4=8$	
4 → $\frac{4-4}{4-0+4+4}$	9 → $\frac{4}{4} + 4 + 4 = 9$	
5 → $\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5$	30 → $\frac{4-4-4}{4} = 30$	

**Fonte:** diário de campo

Essa atividade mostra, conforme afirmam Onuchic e Allevato (2004, p. 21), que a “resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido”. Isso ficou evidente devido os alunos apresentarem confiança e autoestima para resolver os problemas propostos. Assim, na etapa em que a professora foi ao quadro formalizar os conceitos e as ideias matemáticas, a aula passou a ter mais sentido. Os estudantes perceberam a importância de destacar as distintas técnicas operatórias e as propriedades relacionadas ao conteúdo estudado.

Durante as aulas, foi destacado a dificuldade que muitos alunos têm em aprender Matemática, da mesma forma que muitos professores têm para ensinar, mas que da maneira como foi trabalhado, um contexto propício para a compreensão e produção de conhecimento matemático, tais dificuldades podem ser superadas, basta que a aula tenha significado para os estudantes.

No entanto, precisamos fazer uma ressalva sobre os registros por meio de desenhos. As atividades de desenhar por desenhar não se constitui em uma forma de comunicação matemática, pois esta implica interação com outros estudantes. Para que isso ocorresse, foi necessário organizar atividades que garantissem a apreciação dos desenhos produzidos pelos alunos, ou seja, fizessem com que os desenhos fossem realmente um veículo de transmissão de ideias. Sendo assim, é importante propor situações nas quais desenhar envolva discussão com os colegas e troca de ideias.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa deu-se em torno da seguinte problemática, *em que termos atividades de Resolução de Problemas podem mobilizar conhecimentos matemáticos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem?* Assim, teve como objetivo *analisar os conhecimentos matemáticos mobilizados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio da Resolução de Problemas a partir do o livro O homem que calculava, de autoria de Malba Tahan.* Tanto a pergunta diretriz quanto o objetivo, fizeram com que surgisse um novo olhar para a organização didático-pedagógica da aula de Matemática.

Um aspecto relevante dessa pesquisa refere-se às contribuições para o exercício da docência. Uma possibilidade de trabalhar a matemática na interface com a Língua Materna foi suscitada a partir do estudo realizado. Da mesma forma que a escola se tornou espaço de formação. Lugar onde problemas reais são apresentados aos professores em formação, por isso a importância da disciplina Estágio Supervisionado.

Essa pesquisa mobilizou saberes docentes relacionados à organização do conteúdo e à articulação teoria e prática. Por isso, os cursos de formação de professores poderiam, com mais solidez, articular “os conhecimentos produzidos pelas universidades *a respeito* do ensino e os saberes desenvolvidos pelos professores *em suas práticas cotidianas*” (TARDIF, 2014, p. 23). Caso seja nestes termos, o professor em formação terá um novo olhar sobre as distintas maneiras de chegar ao conhecimento necessário para ministrar aulas.

Sobre o processo de aprendizagem, foi possível perceber que por meio da Resolução de Problemas os alunos puderam manifestar suas ideias sobre o conhecimento matemático e construir, em parceria com o professor e os colegas, habilidades para resolver problemas com mais autonomia. A proposta desenvolvida apresentou a matemática como uma atividade de investigação, pois tinham que, atenciosamente, compreender e interpretar as situações propostas por cada problema.

Pode-se inferir que a compreensão do problema matemático não depende exclusivamente de ideias ou conceitos matemáticos, mas que existe uma relação intrínseca entre a Língua Materna e a linguagem matemática. Foi percebido que muito

do que leva um estudante fracassar diante de um problema matemático, muitas vezes, depende de habilidades relacionadas à leitura e à escrita.

Ao ler um problema, o sucesso do aluno não dependerá somente da interpretação dos conceitos matemáticos (sua estrutura lógica), mas depende também de seu conhecimento de mundo, ou seja, de suas experiências. Assim, a Resolução de Problemas, nesta pesquisa, assumiu um papel de instrumento de contextualização, conforme Itacarambi (2010, p. 15), “a partir do momento em que propõe situações e exigem uma solução matemática e que direcionam para o questionamento, a pesquisa e a inserção das operações dentro de um contexto”.

O trabalho coletivo também merece destaque. O debate coletivo dos problemas propostos possibilitou um trabalho de investigação. Os alunos realizaram, além de análises quantitativas, análises qualitativas em um ambiente democrático de discussão. Os estudantes mobilizaram saberes matemáticos e aprofundaram outros. Também começaram a se encorajar e a criar conjecturas sobre as estratégias utilizadas nas resoluções, mas sempre respeitando a opinião do colega.

Portanto, a pesquisa contribuiu para que o ensino da Matemática na Educação Básica seja visto com mais seriedade. Que as dificuldades em aprender Matemática, muitas vezes, está relacionada diretamente em como o ensino está organizado. E que o trabalho com a Resolução de Problemas pode minimizar as dificuldades dos alunos. Assim, o professor pode solicitar alguns cuidados na aula: fazer uma leitura cuidadosa dos enunciados do problema; incentivar diversas formas de registros dos procedimentos de busca da solução; compreender a linguagem matemática e verificar sua relação com a língua materna; encorajar os alunos para tomadas de decisão; organizar a aula com vistas ao trabalho colaborativo; valorizar os erros e corrigi-los. Essas são algumas atitudes, resultantes da pesquisa, que podem ser adotadas pelo professor de Matemática.

## 5. REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 1998.

FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, M. da C. F. R. CARDOSO, C. de A. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática e Matemática para ler o texto. *In*: NACARATO, Adair. LOPES, Celi. **Escrituras e leituras na educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de Problemas no Ensino Fundamental**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. 34. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

POZO, J. I. ECHEVERRÍA, M. D. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. São Paulo: Ática, 2010.

SMOLE, Kátia Stocco. DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. 79. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 16. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.