



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**EDILENE LACERDA PONTES**  
**RAUL CARLOS DE ALENCAR CANTUÁRIO**

**RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS:**  
**Regra dos trapézios repetida e adaptativa**

**Acará-Pará**

**2022**

Edilene Lacerda Pontes  
Raul Carlos de Alencar Cantuário

RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS:  
Regra dos trapézios repetida e adaptativa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

Acará-Pará  
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

Pontes, Edilene Lacerda.

Resolução de uma integral simples através de métodos numéricos : Regra dos trapézios repetida e adaptativa / Edilene Lacerda Pontes, Raul Carlos de Alencar Cantuário . — 2022.  
19 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Integração numérica. 2. Regra dos trapézios. 3. Quadratura adaptativa. I. Título.

CDD 518.54

---

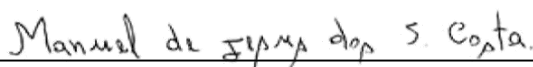
Edilene Lacerda Pontes  
Raul Carlos de Alencar Cantuário

RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS:  
Regra dos trapézios repetida e adaptativa

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Aprovado em: 31/08/2022.

**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Orientador – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA



Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima  
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA



Prof. Dr. José Francisco Silva da Costa  
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos primeiramente a Deus, por nos conceder sabedoria, entendimento, força e perseverança para continuar firmes na realização de um sonho.

Aos nossos pais Edna Maia Lacerda, Jorge Antônio Cardoso Pontes, Raimunda Nívea Barbosa de Alencar, que sempre estiveram ao nosso lado e nunca mediram esforços em nos apoiar, incentivar nessa caminhada até a graduação.

Ao meu irmão Raí de Alencar Goes que não viveu para ver esse momento, mas que sempre acreditou em mim.

Aos professores que contribuíram com nossa jornada acadêmica, em especial ao nosso orientador Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa que com sua simplicidade e sabedoria nos fez querer ser mais, nos fez acreditar que iria dar certo. Obrigado pela dedicação, compreensão, incentivo, pelas valiosas contribuições que fizeram com que esse trabalho se concretizasse, e por nos encorajar a todo momento nos direcionando para a conclusão de mais uma etapa.

A vocês e a todos que estiveram ao nosso lado acreditando em nosso potencial e que contribuíram de alguma maneira para que esse sonho se tornasse realidade, um muito obrigado não é justo e nem suficiente para descrever o quanto somos gratos a vocês.

# RESOLUÇÃO DE UMA INTEGRAL SIMPLES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS: Regra dos trapézios repetida e adaptativa

Edilene Lacerda Pontes  
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia– FACET  
[edilene.lacerda.p@gmail.com](mailto:edilene.lacerda.p@gmail.com)

Raul Carlos de Alencar Cantuário  
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia– FACET  
[raul.alencar.c@gmail.com](mailto:raul.alencar.c@gmail.com)

Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET  
[manuelsc@ufpa.br](mailto:manuelsc@ufpa.br)

## RESUMO

O objetivo desta pesquisa consistiu em apresentar e comparar a resolução de uma integral simples através do método numérico da regra dos trapézios repetida e adaptativa. Neste contexto, foram apresentadas as teorias matemáticas que embasam esses procedimentos, incluindo o erro de truncamento e o algoritmo adaptativo da quadratura trapezoidal. Inicialmente abordou-se a resolução analítica de uma integral simples definida em uma situação problema não contextualizada, a qual posteriormente foi resolvida numericamente através de dois códigos implementados em uma interface do programa Matlab possibilitando dessa maneira uma análise quantitativa através do erro relativo no que concerne o desempenho das técnicas numéricas abordadas.

**Palavras-chave:** Integração numérica, Regra dos trapézios, Quadratura adaptativa.

## ABSTRACT

The objective of this research was to present and compare the resolution of a simple integral through the numerical method of the repeated and adaptive trapezoidal rule. In this context, the mathematical theories that support these procedures were presented, including the truncation error and the adaptive trapezoidal quadrature algorithm. Initially, the analytical resolution of a simple integral defined in a non-contextualized problem situation was approached, which was later solved numerically through two codes implemented in a Matlab program interface, thus enabling a quantitative analysis through the relative error regarding the performance of the numerical techniques addressed.

**Keywords:** Numerical integration, Trapezoidal rule, Adaptive quadrature.

## 1 INTRODUÇÃO

No cálculo diferencial e integral estuda-se o conceito de integral, e quais procedimentos devem ser adotados para resolvê-la analiticamente, onde os resultados obtidos, dependendo do tipo da integral significam por exemplo, áreas ou volumes de figuras geométricas. Embora seja conhecido com essa nomenclatura somente a partir do século XIX, seu conceito é utilizado desde os tempos antigos, por Arquimedes (387-212 a. C) (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003).

Assim como no passado, na atualidade não é diferente, pois, essa técnica é utilizada como uma estratégia na resolução de problemas nas mais variadas áreas do conhecimento científico, quais sejam, na geometria, no cálculo de áreas sob curvas, na determinação de volumes, no comprimento de arcos, nos cálculos do trabalho realizado por uma força, momento, centro de massa, momento de inércia entre outras aplicações (ROGÉRIO, BADAN, SILVA, 2019).

Embora seja um importante instrumento, há situações em que a resolução analítica apresenta um alto nível de complexidade ou até mesmo impossível de obter-se uma solução. Todavia, existem outros métodos que permitem o cálculo dessa integral, conhecidos como métodos numéricos. Uma das técnicas utilizada é a regra dos trapézios (*RT*), em sua configuração simples (*RTS*), repetida (*RTR*) e adaptada (*RTA*), onde, as mesmas determinam um valor aproximado para a integral a menos de uma precisão requerida. As técnicas de quadratura adaptativa apresentam uma precisão dentro de tolerâncias aceitáveis, isso é alcançado em virtude da escolha de determinados pesos e pontos de integração com característica dinâmica durante a execução das mesmas (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003).

Diferentemente de uma integração numérica convencional a integração numérica adaptativa, fundamentalmente, atua sem a necessidade de informar uma determinada amplitude  $h$  entre os pontos de integração, estabelecendo dessa maneira os algoritmos de quadratura adaptativa. Ainda como informação, Sperandio, Mendes e Silva (2003), destacam que uma das características dessa técnica é utilizar subintervalos menores onde a função integrando apresenta uma maior variação. Neste sentido, o presente trabalho abordará uma integração adaptativa, baseada na regra trapezoidal.

## 2 REGRAS DOS TRAPÉZIOS CLASSICAS

Para obter uma melhor compreensão sobre integração numérica, é necessário possuir a concepção do cálculo diferencial e integral, onde afirma que se existe um determinado intervalo  $[a, b]$ , no qual uma função contínua  $f(x)$ , possui uma primitiva no mesmo, isto é, há uma função  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x)$ . Como resultado a integral definida desta função neste intervalo é dada por (GUIDORIZZI, 2001):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Entretanto há situações em que  $f(x)$  apresenta elevado nível de complexidade em sua formulação matemática, ou seja, a primitiva  $F(x)$  é de difícil obtenção ou até mesmo técnicas analíticas não se aplicam em sua determinação. Vinculado a estas constatações, ainda existem casos onde a função a ser integrada é obtida por meio de pontos tabelados, portanto inviabilizando a utilização da formulação (1) (BARROSO, 1987).

Nesse contexto, existem métodos para a obtenção de uma solução para essas integrais, referido como métodos de integração numérica, que determinam um valor aproximado, os quais de uma forma generalizada substituem a função integrando  $f(x)$  por um polinômio  $P_n(x)$  que interpola os pontos  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, ((x_n, f(x_n)))$  pertencentes ao intervalo que define os chamados limites de integração. Tais pontos são considerados igualmente espaçados determinando subintervalos na seguinte disposição  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , e de comprimento  $h$ , definidos por  $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$ . Com base nessa abordagem, Newton-

Cotes desenvolveram fórmulas de integração numérica (RUGGIERO, 2010), que na presente pesquisa será utilizada a regra dos trapézios.

### 2.1 REGRA DOS TRAPÉZIOS SIMPLES (RTS)

A RTS, é uma estratégia numérica que utiliza os fundamentos teóricos da interpolação de Lagrange de grau 1 ( $P_1(x)$ ), ou seja, interpola a função  $f(x)$  nos pontos  $x_0$  e  $x_1$ . Em outras palavras, a função integrando  $f(x)$  é substituída pelo polinômio interpolador  $P_1(x)$ , como segue:

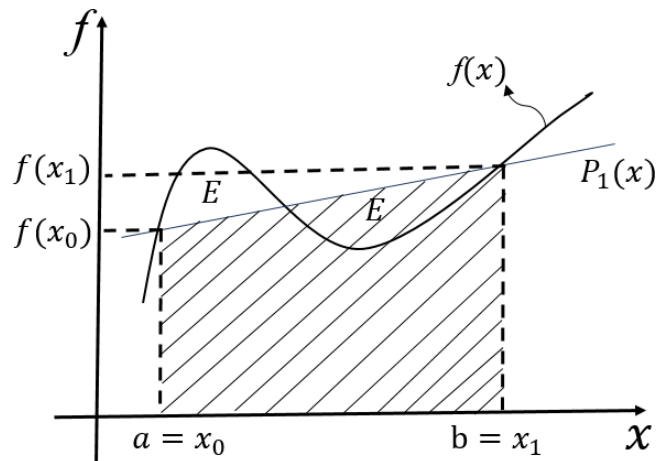
$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{x-x_1}{x_1-x_0} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \right] dx = h \left[ \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right] \quad (2)$$

Logo,

$$I \approx h \left[ \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right], \quad (3)$$

que corresponde a área do trapézio de altura  $h = x_1 - x_0$  e base  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ , o qual pode ser observado na Figura 1 (RUGGIERO, 2010).

Figura 1 - Imagem geométrica da regra dos trapézios simples



Fonte: Adaptado (RUGGIERO, 2010).

### 2.1.1 Erro de truncamento ( $E_{RTS}$ )

Existe um erro de integração ( $E$ ) (ver, Figura 1) o qual é a diferença entre a integral exata de  $f(x)$  (área sob a curva  $f(x)$ ) e a integral aproximada (trapézio), tal que, essa disparidade é causada pelo erro de truncamento cometido ao realizar a aproximação da função através do polinômio. Para quantificar esta desigualdade utiliza-se teoricamente a seguinte fórmula (BARROSO, 1987):

$$E_{RTS} = \frac{-h^3}{12} f''(\varepsilon), \quad a \leq \varepsilon \leq b \quad (4)$$

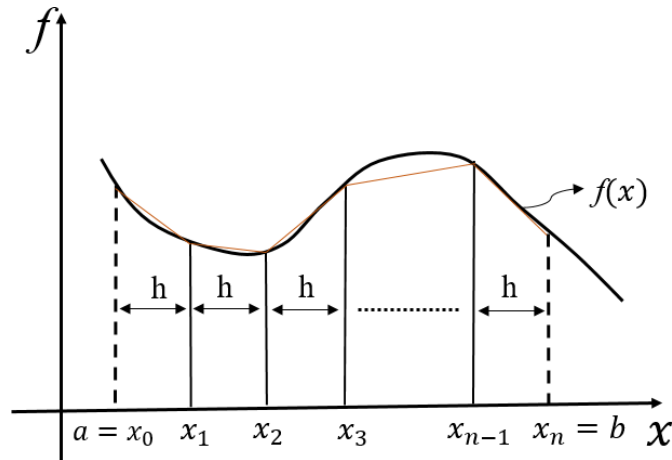
Obs.:

- Se  $f'' > 0$ , o resultado da integração numérica é determinado por excesso;
- Se  $f'' < 0$ , o resultado da integração numérica é determinado por falta.

### 2.2 REGRA DOS TRAPÉZIOS REPETIDA ( $RTR$ )

Uma forma que se tem para refinar o resultado obtido utilizando a  $RTR$  é dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de amplitude  $h$  e a cada subintervalo se aplica a  $RTS$ , processo ilustrado na Figura 2 (BARROSO 1987, p. 210).

Figura 2 – Imagem geométrica da regra do trapézio repetida



Fonte: Adaptado (BARROSO, 1987)

A partir deste fato, obtém-se a fórmula *RTR* dada por (RUGGIERO, 2010):

$$I_{TR} = \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\} \quad (5)$$

### 2.2.1 Erro de truncamento ( $E_{RTR}$ )

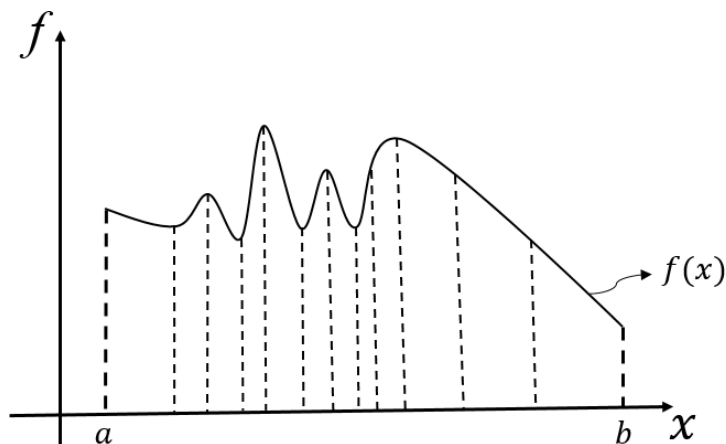
De forma similar, na determinação teórica do erro de truncamento quando utiliza-se à *RTS* é possível também quantificar o erro de truncamento ao aplicar-se a *RTR*. Tal erro é definido pela soma dos erros cometidos na aplicação da fórmula da *RTS* em cada subintervalo, podendo ser quantificado pela seguinte fórmula (BARROSO, 1987):

$$E_{RTR} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\varepsilon), \quad a \leq \varepsilon \leq b \quad (6)$$

## 3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA ADAPTATIVA

Os métodos apresentados anteriormente, rotineiramente são aplicados quando a função integrando  $f(x)$  apresenta uma variação suave ao longo do intervalo de integração, porém, pode não ser conveniente seu uso para funções que possuem um grau elevado de variação nesse intervalo. Para este tipo de situação a literatura apresenta algoritmos de integração numérica adaptativos, que diferente da *RTS* e da *RTR*, onde as mesmas fornecem espaçamento  $h$  (*constante*), os mesmos realizam o cálculo da integral variando a dimensão dos subintervalos, tornando-o dinâmico computacionalmente, os quais sejam mais densos onde a função apresenta maiores variações em sua imagem geométrica (ver, Figura 3) (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

Figura 3 – Representação geométrica de uma subdivisão de um intervalo de integração quando utiliza-se um processo adaptativo

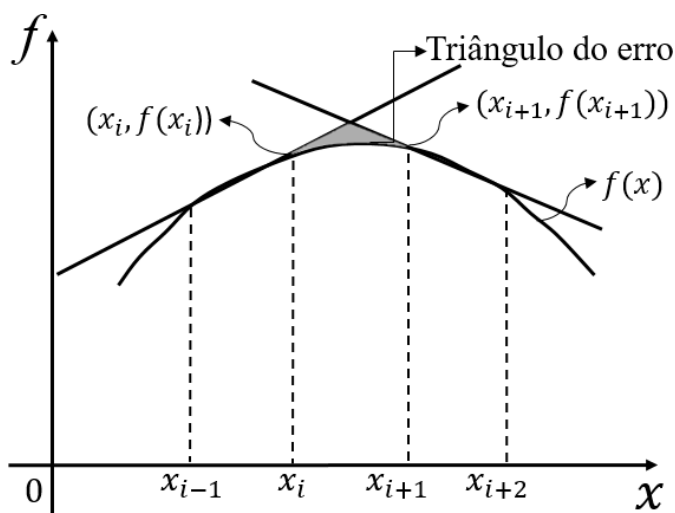


Fonte: Adaptado (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

### 3.1 REGRA DO TRAPÉZIO ADAPTADA (**RTA**)

Para obter uma aproximação mais precisa para a função  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , a regra do trapézio adaptada é uma das indicadas para se realizar a implementação do algoritmo numérico adaptativo. Essa regra consiste em realizar aproximações sucessivas, porém, partindo de um erro pré-estabelecido (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003). O cálculo deste erro pode ser obtido através da trigonometria, uma vez que “pelos pontos do gráfico de  $f$ , com abscissas sendo as extremidades dos subintervalos de integração  $(x_i, f(x_i))$  e  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ),  $0 \leq i \leq n - 1$ , onde  $n$  é o número de aplicação da regra, são traçadas retas secantes ao gráfico de  $f(x)$ ” como representadas na Figura 4 (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003, p. 221).

Figura 4 – Representação grafica da regra trapezoidal adaptativa



Fonte: Adaptado (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

Através desta representação gráfica é possível notar que, as retas secantes que correspondem ao intervalo  $i - 1$ , e  $i + 1$  ao convergirem produzem um ponto que, com os pontos  $(x_i, f(x_i))$  e  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ , formam um triângulo, onde suas áreas são cotas superiores ao integrar cada subintervalo, isso se o subintervalo  $i$ ,  $2 \leq i \leq n - 1$ , não possuir pontos extremos no intervalo de integração. Adotando a notação  $f_k \equiv f(x_k)$  com base na Figura 5 para o triângulo indicado, tem-se (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003, p. 222):

$$c^2 = (f_i - f_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \quad (7)$$

$$q = \frac{c}{\cotg \alpha_{i-1} + \cotg \alpha_i}, \quad (8)$$

onde

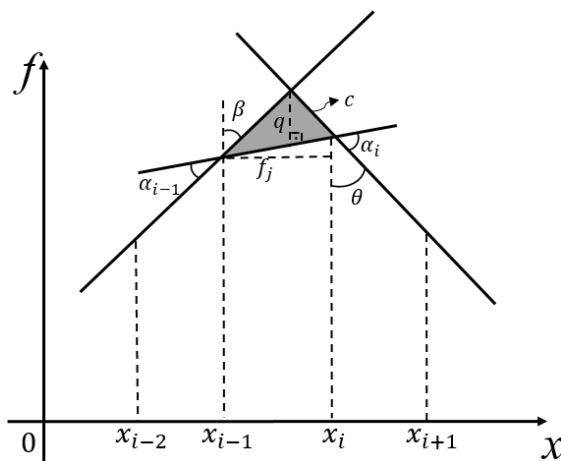
$$\alpha_{i-1} = \frac{\pi}{2} - \beta - y \text{ e } \alpha_i = \frac{\pi}{2} + y - \theta, \quad (9)$$

com

$$\beta = \text{arc cotg} \left( \frac{f_i - f_{i-2}}{x_i - x_{i-2}} \right); y = \text{arc cotg} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{f_i - f_{i-1}} \right) \text{ e} \quad (10)$$

$$\theta = \text{arc cotg} \left( \frac{f_i - f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right)$$

Figura 5 – Representação geométrica na determinação da *COTA* do erro da regra dos trapézios



Fonte: Adaptado (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

Portanto, nesta abordagem a cota para erro, definida como *COTA* é:

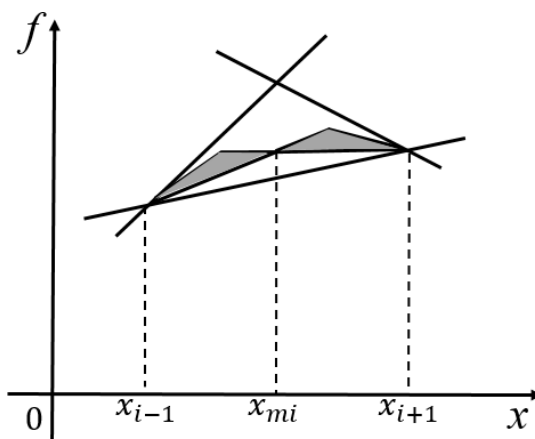
$$COTA = \frac{1}{2} c \cdot q \quad (11)$$

Após calcular as cotas (áreas dos triângulos) em cada subintervalo para estimar o erro de integração, obtém-se uma lista ordenada de maneira decrescente, onde cada cota é acompanhada de seu respectivo subintervalo assim como também os outros valores já calculados (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003).

Ao aplicar a regra trapezoidal em cada subintervalo, deve-se verificar o erro, se ele não atingir os parâmetros estabelecidos, é necessário calcular novamente com mais precisão, aplicando a regra repetidamente até o valor ser suficientemente aceitável (ver, Figura 6). Podendo assim ser descartado, mediante a verificação de uma tolerância dada por:

$$COTA \leq \varepsilon \frac{x_i - x_{i+1}}{b-a}, \quad (12)$$

Figura 6 – Representação geométrica da aplicação da regra dos trapézios duas vezes no subintervalo  $i$



Fonte: Adaptado (SPERANDIO, MENDES E SILVA 2003).

ou seja, realiza-se uma iteração, melhorando os resultados a cada partição, reaproveitando os resultados obtidos anteriormente. Quando todos os subintervalos são removidos, ocorre o seguinte:

$$\begin{aligned} ERRO\ TOTAL &\leq \sum_{\text{Subintervalos}} COTAS \\ & \leq \sum_{\text{Subintervalos}} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{b-a} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_{i-1}) = \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

Assegurando desta maneira a precisão desejada para o resultado (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003).

A fim de fixar os conceitos supracitados, na próxima seção será apresentado o algoritmo da regra dos trapézios adaptada.

### 3.2 ALGORITMO ADAPTATIVO BASEADO NA REGRA DOS TRAPÉZIOS

A seguir serão apresentadas as principais etapas do algoritmo que será utilizado, para implementar a regra dos trapézios adaptativa (SPERANDIO, MENDES E SILVA, 2003), (ver, Figura 4):

- I- Calculam-se as cotas, áreas de triângulos para os erros de integração em cada subintervalo;

- II- Com as cotas do item I, determina-se uma lista em ordem decrescente, sendo cada cota vinculada ao correspondente subintervalo e a outras quantidades já calculadas, ou seja, os valores funcionais  $f_{i-1}$  e  $f_i$ , bem como as cotangentes  $\cot\alpha_{i-1}$  e  $\cot\alpha_i$ ;
- III- Um subintervalo pode ser descartado quando a *COTA* para o erro de integração satisfazer uma condição de admissibilidade, estipulada em função de uma tolerância, especificada por:  $COTA \leq \varepsilon \frac{x_i - x_{i-1}}{b-a}$ ;

Salienta-se que a não verificação da condição exposta no item III para o subintervalo  $i$ , então para o mesmo indica-se a aplicação da regra trapezoidal outras vezes.

#### 4 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

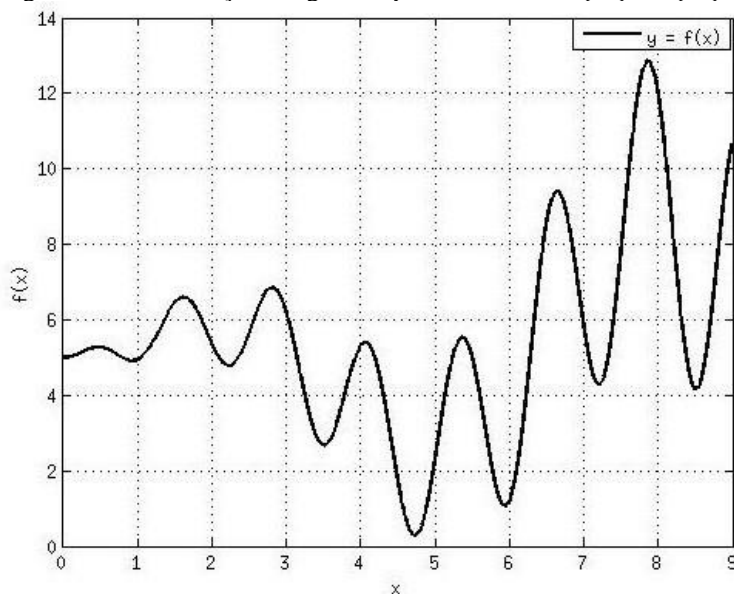
Para efeito de testagem do método numérico da regra dos trapézios, será resolvido uma integral de um problema não contextualizado, primeiramente de modo analítico, bem como numericamente através da implementação em uma interface do programa Matlab utilizando a *RTR* e *RTA*, a menos de uma precisão requerida.

##### 4.1 PROBLEMA

Calcule a integral  $\int_0^9 [5 + x \sin(3x) \cos(2x)] dx$ , analiticamente e numericamente.

Verifica-se que no intervalo de integração estipulado, a função do integrando apresenta um comportamento oscilatório (ver, Figura 7).

Figura 7 – Imagem geométrica da função integrando  $f(x) = 5 + x \sin(3x) \cos(2x)$  no intervalo  $[0,9]$ .



Fonte: Autoria própria (2022)

## 4.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Destaca-se que a integral supracitada será resolvida pelo teorema fundamental do cálculo (1), como segue:

$$I = \int_0^9 5 + x \cdot \sin(3x) \cdot \cos(2x) dx$$

Para calcular  $I$ , calcula-se inicialmente a integral utilizando a identidade trigonométrica  $\sin(t) \cdot \cos(s) = \frac{1}{2}(\sin(t+s) + \sin(t-s))$  com isso obtém-se:

$$\int_0^9 [5 + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin(5x) + \sin(x))] dx$$

Em seguida, empregando a propriedade distributiva da multiplicação e multiplicando em cada termo dentro dos colchetes por  $\frac{1}{2}x$ , obtém-se:

$$\int_0^9 [5 + \frac{x \cdot \sin(5x)}{2} + \frac{x \cdot \sin(x)}{2}] dx$$

Pela propriedade da integral  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ , encontra-se:

$$\int_0^9 5 dx + \int_0^9 \frac{x \cdot \sin(5x)}{2} dx + \int_0^9 \frac{x \cdot \sin(x)}{2} dx$$

Assim, considerando a propriedade  $\int_a^b [a \cdot f(x)] dx = a \cdot \int_a^b f(x) dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , para calcular a segunda e terceira integral, obtém-se:

$$\int_0^9 5 dx + \frac{1}{2} \int_0^9 [x \cdot \sin(5x)] dx + \frac{1}{2} \int_0^9 [x \cdot \sin(x)] dx$$

Portanto, resolvendo a integral através da fórmula de integração por parte  $\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$ , têm-se:

$$\int_0^9 5 dx + \frac{1}{2} \cdot (x \cdot (-\frac{\cos(5x)}{5}) - \int_0^9 -\frac{\cos(5x)}{5} dx) + \frac{1}{2} \cdot (x \cdot (-\cos(x)) - \int_0^9 -\cos(x) dx)$$

Para resolver as integrais, utiliza-se a propriedade  $\int_a^b [a \cdot f(x)] dx = a \cdot \int_a^b f(x) dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e a integração primitiva  $\int_a^b \cos(x) dx = \sin(x)$ , simultaneamente com  $\int_a^b -f(x) dx =$

$-\int_a^b f(x) dx$ , assim:

$$\int_0^9 5 dx + \frac{1}{2} \cdot (x \cdot (-\frac{\cos(5x)}{5}) - \int_0^9 -\frac{\cos(5x)}{5} dx) + \frac{1}{2} \cdot (x \cdot (-\cos(x)) - \int_0^9 -\cos(x) dx)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5dx + \frac{1}{2} \left( x \left( -\frac{1}{5} \right) - 1 \left( -\frac{1}{5} \right) \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x) dx + \frac{1}{2} \left( x \left( -\cos(x) \right) + \sin(x) \right)$$

Agora, calculando a multiplicação, adotando a substituição  $t = 5x$  e determinando a primitiva imediata restante, tem-se:

$$5x + \frac{1}{2} \cdot \left( x \cdot \left( -\frac{\cos(5x)}{5} \right) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5x) \right) + \frac{-x \cdot \cos(x) + \sin(x)}{2}.$$

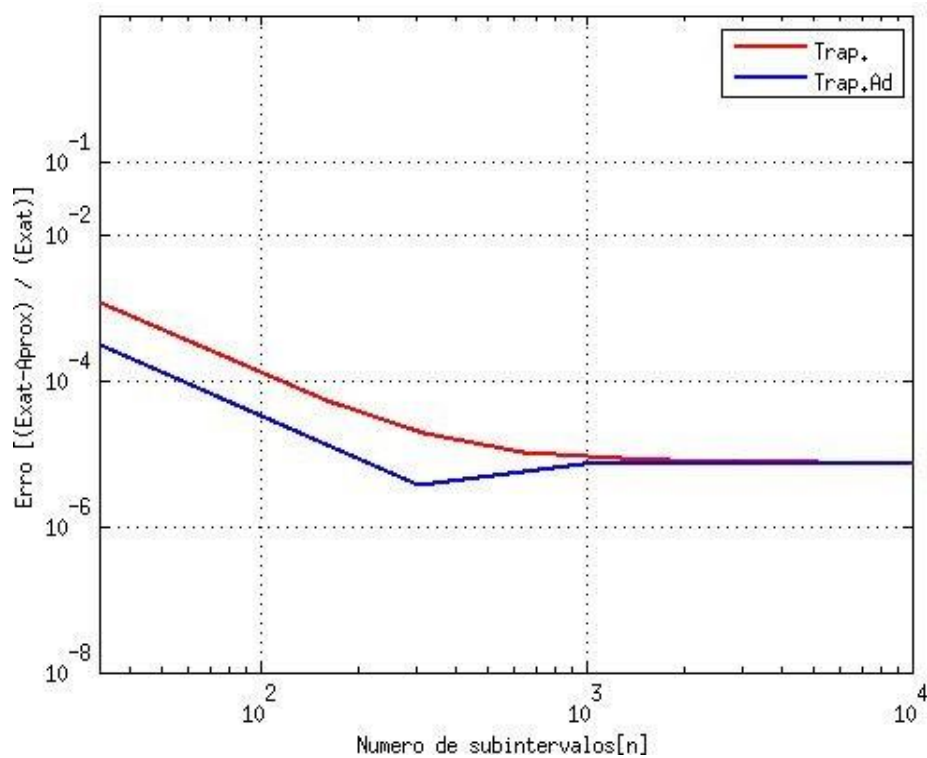
Finalmente, utilizando a formulação (1), resulta:

$$\begin{aligned} & \left( 5x - \frac{x \cdot \cos(5x)}{10} + \frac{\sin(5x)}{50} + \frac{-x \cdot \cos(x) + \sin(x)}{2} \right) \Bigg|_0^9 \\ & 5 \cdot 9 - \frac{9 \cos(5 \cdot 9)}{10} + \frac{\sin(5 \cdot 9)}{5} + \frac{-9 \cdot \cos(9) + \sin(9)}{2} - \left( 5 \cdot 0 - \frac{0 \cdot \cos(5 \cdot 0)}{10} + \frac{\sin(5 \cdot 0)}{5} \right. \\ & \left. + \frac{-0 \cos(0) + \sin(0)}{2} \right) \\ & 45 - \frac{9 \cos(45)}{10} + \frac{\sin(45)}{50} + \frac{-9 \cos(9) + \sin(9)}{2} \\ & 45 - \frac{4,727}{10} + \frac{0,851}{50} + \frac{8,200 + 0,412}{2} \approx 48,850 \end{aligned}$$

#### 4.3 COMPARAÇÃO DO RESULTADO OBTIDO ANALITICAMENTE E NUMERICAMENTE DA INTEGRAL

Para uma comparação mais fidedigna entre os processos utilizados objetivando indicar quais das técnicas apresentadas possui um desempenho mais satisfatório em relação a robustez e acurácia em situações que a função integrando possui variações abruptas no domínio de integração estipulado (ver, Figura 7), mostrar-se-á através da Figura 8 o erro relativo cometido quando os resultados numéricos são comparados com o resultado analítico.

Figura 8 – Representação geométrica do erro relativo



Fonte: Autoria própria (2022)

#### 4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A *RTA* tem uma maior acurácia no cálculo da integral utilizada, ou seja, o erro relativo apresentado na Figura 8 é menor que o erro relativo determinado quando se utiliza a *RTR*. Em outras palavras, a *RTA* para estimar um o erro de aproximadamente  $10^{-5}$  precisou subdividir o intervalo de integração em pouco mais de 100 (cem) subintervalos, por outro lado a *RTR* necessita de um número de subdivisões próximo de 1000 (mil) subintervalos para estimar a mesma acurácia.

Ainda como informação, é possível observar que a partir de 1000 (mil) subintervalos, o gráfico mostra que, a regra *RTR* e a *RTA* tendem a convergir para o resultado obtido analiticamente, contudo, a acurácia *RTR* continua menos robusta em relação a *RTA*. Em relação aos cálculos a *RTR* foi concluída em aproximadamente 0.083020 s já a *RTA* em 148.801820 s.

## CONCLUSÃO

O presente trabalho expôs uma abordagem sobre integração numérica, levando em consideração a regra dos trapézios repetida e uma adaptação em relação a mesma denominada regra dos trapézios adaptada. Neste contexto, foi resolvida uma integral simples tanto analiticamente quanto numericamente, indicando através da fundamentação teórica do erro relativo que a *RTA* se apresenta mais adequada na solução numérica de uma integral simples quando a função integrando apresenta uma forte variação no intervalo de integração.

Portanto, tendo em vista que este é um vasto campo de conhecimento com variadas aplicações, tem-se como perspectivas utilizar a pesquisa em questão em uma situação problema real, além de expandir a mesma abordagem utilizando outras técnicas de integração numérica tanto para integrais simples como múltiplas.

## REFERENCIAS

BARROSO, Leônidas Conceição. **Calculo Numérico (Com Aplicações)**. 2. ed. São Paulo: HARBRA, 1987.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Gen/LTC, 2001.

ROGÉRIO, Mauro Urbano; BADAN, Ana Amélia; SILVA, Hélio Corrêa. **Aplicações da integral**. In: ROGÉRIO, Mauro Urbano; BADAN, Ana Amélia; SILVA, Hélio Corrêa. Cálculo diferencial e integral: Funções de uma variável. *S.l.*, Goiás:[s.n], [2019?]. Disponível em: [11 \(ufg.br\)](http://11.ufg.br). Acesso em: 22 maio 2022.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 1996.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken. **Cálculo numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: PEARSON PRENTICE HALL, 2003.