



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**



**PROGRAMA EDUCACIONAL PARA ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL
DE PLACAS, UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
ATRAVÉS DO MATLAB**

EDUARDO UCHÔA DANTAS

**Belém - PA
Junho/2026**

EDUARDO UCHÔA DANTAS

**PROGRAMA EDUCACIONAL PARA ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL
DE PLACAS, UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
ATRAVÉS DO MATLAB**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade
de Engenharia Civil do Instituto de Tecnologia da
Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr Edilson Moraes Lima e Silva

Co-orientador: Prof. Ph.D Remo Magalhães de Souza

**Belém
Novembro de 2025**

Eduardo Uchôa Dantas

**PROGRAMA EDUCACIONAL PARA ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL
DE PLACAS, UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
ATRAVÉS DO MATLAB**

Belém, 27 de Janeiro de 2025

Prof. Edilson Moraes
Lima e Silva
Dr. Pela COPPE/UFRJ
Orientador

Prof. Remo Magalhães
de Souza
PhD. pela UC Berkeley
Co-orientador

BANCA EXAMINADORA

Prof. Edilson Moraes Lima e Silva (UFPA)
Dr. pela COPPE/UFRJ

Prof. Remo Magalhães de Souza (UFPA)
PhD. pela UC Berkeley

Prof. Plinio Glauber Carvalho dos Prazeres (UFPA)
PhD. pela Technische Universitaet Graz

CONCEITO FINAL: 10

Dedico em primeiro lugar aos meus pais Eduardo e Cássia Milena, pelo constante incentivo ao questionamento e por se mostrarem exemplos da força poderosa de mudança proveniente da constante dedicação e busca ao conhecimento.

Ao meu orientador Prof. Dr. Edilson Moraes Lima e Silva, pelos ensinamentos não apenas acadêmicos, mas também de vida, que me incentivaram a alçar os mais altos voos e a sempre testar meus limites.

Ao meu Co-orientador Prof. PhD. Remo Magalhães, pelo espaço, estrutura, ensinamentos e experiência prática que se fizeram fundamentais no processo.

Ao Prof. Dr Plínio Prazeres, pela ajuda, pelos materiais e pelas aulas, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos do NICAIE e do GEDIPS, por todo o apoio e ajuda no desenvolvimento do trabalho e pelo companheirismo diário que tornou a rotina proveitosa.

Aos professores e funcionários da UFPa, pela disposição em ajudar tanto quanto fosse necessário.

Aos meus grandes amigos de infância, por todo o companheirismo e apoio durante toda a jornada, não apenas universitária, mas de uma vida inteira.

Aos alunos do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, a quem dedico este trabalho, que este possa auxiliá-los a alcançar os mais altos patamares no estudo de estruturas, assim como os trabalhos daqueles que vieram antes de mim o fizeram.

Dedico este trabalho ‘*in memoriam*’ a Daniel Moura, autor do Trabalho de conclusão de curso que inspirou este trabalho e a quem busquei honrar no desenvolvimento deste trabalho.

Em especial dedico esse trabalho ‘*in memoriam*’ de Socorro Serrão, minha falecida avó, que tanto me impulsionou e foi o mais belo exemplo da honestidade e devoção ao próximo que pude ter em minha vida.

***No que diz respeito ao empenho, ao compromisso, ao esforço, à dedicação,
não existe meio termo. Ou você faz uma coisa bem-feita ou não faz.***

Ayrton Senna

Eduardo Uchoa Dantas

RESUMO

Este artigo apresenta o desenvolvimento de um programa educacional para a análise estática e modal de elementos de placa, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) implementado na linguagem científica MATLAB. O elemento finito utilizado é do tipo quadrilateral quadrático com nove nós, baseado na teoria de placas de Mindlin-Reissner, adequada para o tratamento de placas espessas. O programa foi desenvolvido com fins didáticos e de pesquisa, permitindo a visualização de formas modais de vibração e distribuições principais de tensão e deformação. Para validar a ferramenta proposta, foram realizadas simulações com base em casos clássicos da literatura, complementadas por comparações com softwares comerciais. Os resultados obtidos evidenciam a precisão e aplicabilidade do programa no contexto acadêmico.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Placas de Mindlin, Análise Modal, Análise Estática, MATLAB.

ABSTRACT

This paper presents the development of an educational program for the static and modal analysis of plate elements using the Finite Element Method (FEM) implemented in the scientific programming language MATLAB. The finite element employed is a nine-node quadratic quadrilateral, based on the Mindlin-Reissner plate theory, which is suitable for modeling thick plates. The program was developed for educational and research purposes, allowing the visualization of modal vibration shapes and principal distributions of stress and strain. To validate the proposed tool, simulations were carried out based on classical cases from the literature, complemented by comparisons with commercial software. The results demonstrate the accuracy and applicability of the program in academic settings.

Keywords: Finite Element Method, Mindlin Plates, Modal Analysis, Static Analysis, MATLAB.

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das principais ferramentas numéricas aplicadas à engenharia estrutural, devido à sua flexibilidade na modelagem de geometrias complexas e à facilidade de implementação computacional. Suas origens remontam ao método de Rayleigh-Ritz, tendo recebido uma formulação matricial consolidada por Argyris e Kelsey, no final da década de 1950. A consolidação moderna do MEF se deu a partir do

trabalho seminal de Turner, Clough, Martin e Topp (1956), sendo Clough, professor da Universidade da Califórnia em Berkeley, o responsável por cunhar o termo “método dos elementos finitos”.

Simulações computacionais e métodos computacionais, como a Análise por Elementos Finitos (AEF), tornaram-se metodologias essenciais em ciência e engenharia nas últimas décadas, em uma ampla variedade de campos acadêmicos. Seis décadas após a invenção do computador digital, simulações avançadas de elementos finitos são usadas para aprimorar e impulsionar o progresso teórico e experimental, em diferentes níveis de complexidade. Particularmente na Engenharia Civil e Estrutural (Plevris; Markeset, 2019).

Devido à sua importância para a análise e projeto de muitos sistemas e estruturas de engenharia em várias indústrias, o método dos elementos finitos (MEF) tem sido introduzido em muitos programas de engenharia de diversas maneiras. A teoria do MEF é muito intensiva em matemática, exigindo bom conhecimento de mecânica, teoria da elasticidade, álgebra matricial e programação de computadores. Portanto, é tipicamente introduzido em cursos de pós-graduação ou em disciplinas eletivas da graduação, enquanto as aplicações do MEF em vários problemas são introduzidas em uma disciplina separada de graduação, ou como módulos em um grupo de disciplinas (L. Bishay, 2020). Nota-se, portanto, como fundamental que os conceitos da formulação do método sejam apreendidos para que o aluno não utilize o software como uma ferramenta mágica que soluciona estruturas complexas, algo que pode ser perigoso em aplicações reais. Um bom exemplo do ensino da formulação e funcionamento de um software de elementos finitos foi demonstrado no trabalho de [9] cobrindo a formulação e implementação de um software para análise estática de estruturas treliçadas.

Nota-se ainda que há necessidade de propostas educacionais para abordar a formulação de elementos finitos isoparamétricos, que possuem uma complexidade ainda superior ao introduzir conceitos como sistema natural de coordenadas, matriz jacobiana de transformação, etc. Aliada a essa complexidade referente ao Método dos Elementos Finitos, é importante demonstrar as aplicações práticas do estudo de análise dinâmica, e como essa poderosa ferramenta numérica pode ser usada, demonstrando a união entre as duas áreas de estudo e o seu potencial para solucionar problemas reais, como case de sucesso dentro do âmbito educacional, já se apresentou em um trabalho anterior o LESM [14], um software educacional com interface gráfica, que propôs uma metodologia hands-on ao ensino, dando acesso ao código aberto do software, que realizava análise dinâmica utilizando elementos de barra, tornando possível a observação e análise, pelo aluno, do comportamento físico e resposta do sistema estrutural e das equações que governam o movimento, além de estudar de perto como toda a implementação computacional é realizada.

O uso da linguagem MATLAB, desenvolvida no final dos anos 70, é um importante fator na implementação computacional do programa proposto, por ser uma linguagem de alto nível com fácil compreensão para usuários iniciais de programação. A linguagem MATLAB já vem a muito sendo utilizada no desenvolvimento de ferramentas voltadas ao método dos elementos finitos, por sua facilidade e pacotes de funções ao trabalhar com matrizes, funções vetoriais ou análise de sinais, como exemplo de trabalhos já desenvolvidos na linguagem, podemos

citar o trabalho de [9], um programa para solucionar análise de elementos finitos de contato, ou ainda a ToolBox, CastLab, uma biblioteca com programação orientada a objeto para o ambiente MATLAB para propósitos educacionais e de pesquisa [10]. Nota-se, portanto, a vasta aplicação e extensão do desenvolvimento de programas e ferramentas na linguagem MATLAB.

Embora o programa tenha sido originalmente desenvolvido no MATLAB, sua implementação também pode ser executada no GNU Octave, uma plataforma computacional gratuita e de código aberto que apresenta elevada compatibilidade com a linguagem MATLAB. Essa possibilidade amplia a acessibilidade da ferramenta, especialmente para estudantes, pesquisadores e instituições que não dispõem de licenças comerciais. Dependendo das funções utilizadas, podem ser necessários pequenos ajustes de sintaxe ou a instalação de pacotes adicionais no Octave, sobretudo quando o código utiliza recursos específicos de toolboxes do MATLAB. Entretanto, para rotinas numéricas e gráficas básicas, a execução tende a ocorrer sem modificações significativas, permitindo a reprodução gratuita dos procedimentos computacionais apresentados neste estudo.

No desenvolvimento do programa em elementos finitos para a análise estática e modal de placas, partimos da formulação matemática do problema em termos de **equações diferenciais parciais (EDPs)**, que descrevem o comportamento físico das estruturas quanto a deslocamentos e vibrações. A solução dessas equações é buscada dentro de um **domínio**, que corresponde à geometria da placa em estudo, devidamente acompanhada de suas **condições de contorno** (como engastes, apoios ou bordas livres). Como a solução analítica dessas EDPs é, em geral, inviável, recorre-se a uma **aproximação** numérica, obtida pela discretização do domínio em elementos finitos e pela escolha de funções de interpolação adequadas. Nesse processo, a qualidade da solução depende do refinamento da malha e do modelo de aproximação, sendo a **convergência** o critério fundamental que assegura que, à medida que a discretização é refinada, os resultados numéricos se aproximam da solução exata do problema estrutural.

Neste contexto, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um programa computacional educacional para análise estática e modal de elementos de placa, trazendo de forma didática e com uma metodologia “Hands-on” o desenvolvimento de um elemento finito isoparamétrico empregando o MEF. O código é implementado na linguagem MATLAB, com o objetivo de apoiar o ensino e a pesquisa em disciplinas de introdução ao método dos elementos finitos e de introdução à dinâmica das estruturas. Além de abordar a formulação do elemento quadrilateral de nove nós, o programa é validado por meio de comparações com soluções analíticas e ferramentas comerciais reconhecidas.

2 FORMULAÇÃO TEÓRICA

A Teoria de Placas de Mindlin-Reissner [13] constitui uma generalização da teoria clássica de Kirchhoff, sendo adequada para a análise de placas espessas, nas quais os efeitos do cisalhamento transversal se tornam relevantes. Enquanto a teoria de Kirchhoff assume que seções normais à superfície média da placa permanecem normais após a deformação — desconsiderando, portanto, os efeitos de cisalhamento — a teoria de Mindlin admite que tais seções podem sofrer rotações, permitindo a inclusão desses efeitos na formulação. A formulação de Mindlin baseia-se nas seguintes hipóteses fundamentais:

- **Linearidade física:** O material é considerado linearmente elástico, obedecendo à Lei de Hooke. Isso implica que as tensões são proporcionais às deformações, e que não há efeitos plásticos ou não lineares no comportamento do material.
- **Linearidade geométrica:** Admitimos que os deslocamentos e deformações sejam pequenos o suficiente para que a geometria deformada da placa possa ser aproximada pela geometria original. Dessa forma, os efeitos não lineares são negligenciados, e a análise é realizada com base na configuração indeformada.

Uma placa de espessura constante resiste a um carregamento transversal por meio da flexão, da mesma forma que uma viga. A Figura 1 mostra as tensões e os esforços em uma placa plana de material isotrópico, homogêneo e linearmente elástico. Os esforços na placa podem ser obtidos facilmente a partir de integrais no domínio na espessura da placa, conforme demonstrado nas equações abaixo.

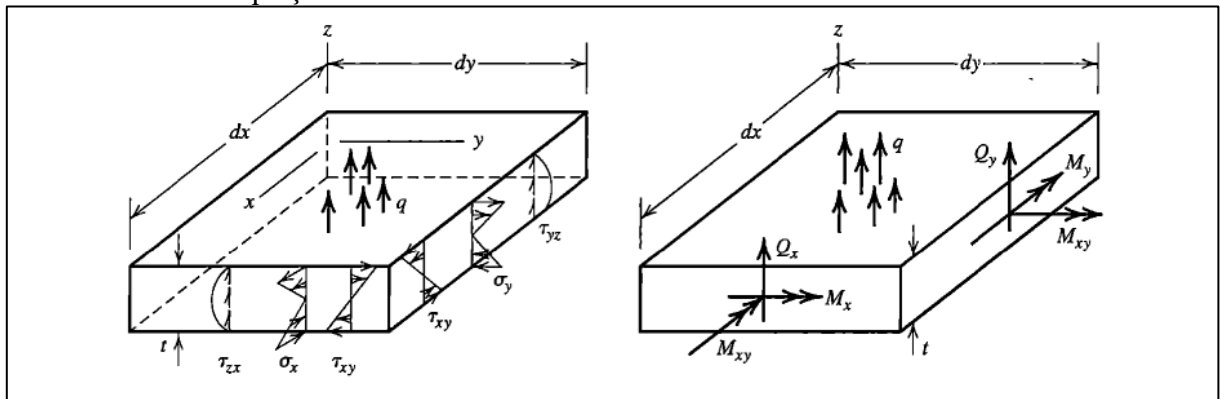


Figura 1 - Forces and Stresses on a Plate Element, COOK [2002]

σ_x e σ_y são esforços normais e variam linearmente com a espessura z , esses esforços normais são associados com os momentos fletores M_x e M_y , portanto, estes podem ser calculados a partir da integração dos esforços normais ao longo da espessura, conforme demonstrado abaixo:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

(1)

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

(2)

O esforço cisalhante τ_{xy} varia linearmente com z e é igual a zero na linha neutra da seção. Esse esforço é associado com o momento torsor M_{xy} , que pode ser calculado integrando-o ao longo da espessura.

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz$$

(3)

De acordo com [2] a tensão normal σ_z é considerável irrelevante quando comparado com σ_x , σ_y e τ_{xy} . As tensões transversais de cisalhamento τ_{yz} e τ_{xz} variam quadraticamente com a espessura da placa e são associados com os esforços cortantes Q_x e Q_y , que podem ser calculados integrando as tensões cisalhantes no domínio da espessura, conforme mostrado nas equações abaixo.

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz$$

(4)

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

(5)

Na teoria de flexão de placas, em geral, não há cargas paralelas ao plano e as tensões atuantes no plano são consideradas nulas na linha neutra da seção $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Assumindo o material como homogêneo, as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} assumem valores máximos nos limites externos da espessura da placa $z = \pm \frac{t}{2}$

Valores arbitrários para essas tensões podem ser calculados a partir das seguintes equações:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{t^3/12} z \quad \sigma_y = \frac{M_y}{t^3/12} z \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{t^3/12} z$$

De acordo com [2] as tensões transversais cisalhantes τ_{yz} e τ_{xz} são pequenas em comparação com σ_x , σ_y e τ_{xy} e assumem seus valores máximos no meio da seção, onde $z=0$. Para um material homogêneo, essas tensões variam parabolicamente ao longo da espessura e seus valores máximos podem ser obtidos a partir das equações abaixo.

$$\tau_{yz} = 1.5 \frac{Q_y}{t}$$

(6)

$$\tau_{zx} = 1.5 \frac{Q_x}{t}$$

(7)

Como hipóteses simplificadoras da teoria de Mindlin, adotamos as seguintes:

- Pontos situados no meio da seção ou seção média ($z=0$) movem-se apenas na direção z após as deformações devido a flexão. Pontos fora da superfície média da placa possuem componentes de deslocamento em x , y e z , que são dados respectivamente por u , v and w .
- Uma linha reta e normal a superfície média antes do carregamento não mais permanecerá normal à superfície média após os carregamento, portanto, as deformações por esforços cortantes são consideradas. O movimento de um ponto na superfície média não é governado por curvaturas $w_{,x}$ e $w_{,y}$ e passam a ser governadas por pequenos ângulos de rotação θ_x e θ_y , como pode ser visualizado na Figura 2

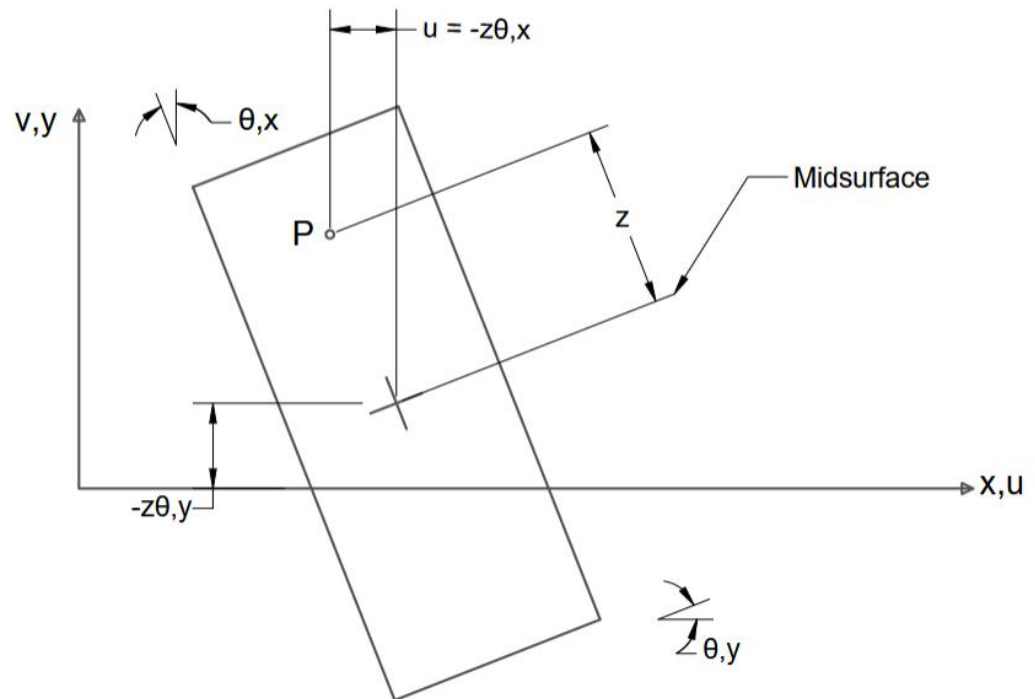


Figura 2 - Elemento Diferencial de placa após o carregamento com deformações por esforço cortante. [COOK,2005]

- As deformações por cisalhamento são consideradas de forma aproximada na teoria de Mindlin, utilizando um coeficiente $\kappa = 5/6$ que corrige a hipótese de que a distribuição das tensões cisalhantes τ_{yz} e τ_{xz} são constantes ao longo da espessura da placa, como pode ser visto na Figura 3, essas deformações apresentam uma configuração parabólica.

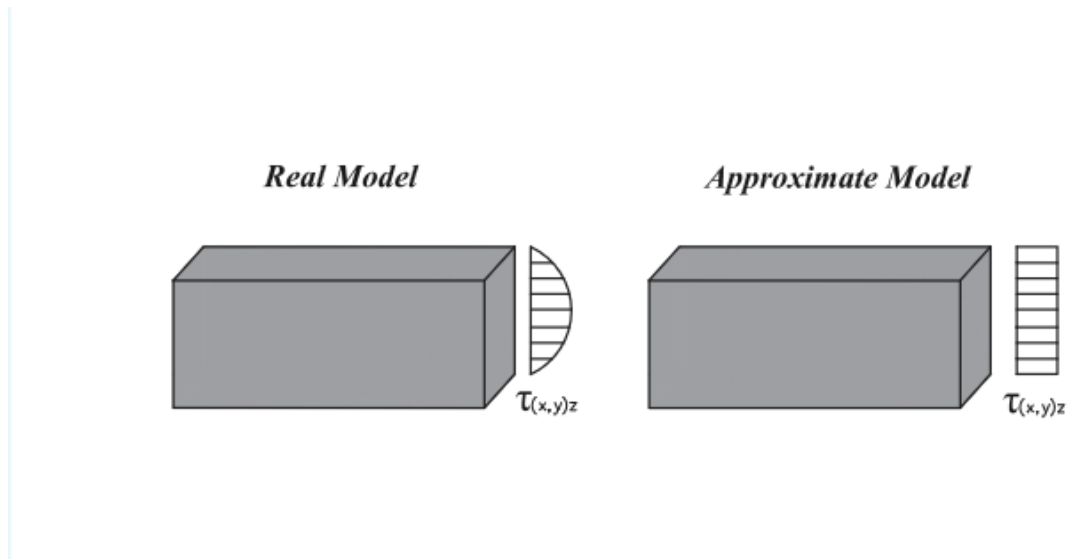


Figura 3 - Aproximação do Esforço cisalhante no elemento de placa

A introdução de um coeficiente de correção de cisalhamento k decorre do fato de que, para uma placa de espessura t , a tensão de cisalhamento transversal não é uniformemente distribuída ao longo da espessura, mas segue um perfil parabólico, como ilustrado na Figura 3. Nessa distribuição física, a tensão de cisalhamento atinge seu valor máximo na superfície média e se anula nas superfícies superior e inferior. Esse comportamento pode ser descrito a partir da lei de Hooke para cisalhamento, $\tau = G\gamma$, juntamente com a relação de densidade de energia de deformação $u = 1/2\tau\gamma$. Com base nessas relações, a energia total de deformação por cisalhamento associada à distribuição real de tensões em uma placa de seção transversal retangular pode ser escrita como a Equação 8

$$U_{real} = \int_A \frac{\tau^2(z)}{2G} dA = \frac{3Q^2}{5AG}$$

(8)

Conforme mostrado na Equação 8, a energia real de deformação por cisalhamento depende da distribuição não uniforme de tensões $\tau(z)$ ao longo da espessura. Entretanto, de acordo com as hipóteses simplificadoras do modelo de Mindlin, a deformação de cisalhamento transversal e, conseqüentemente, a tensão de cisalhamento são assumidas constantes ao longo da espessura (ver Figura 3). Sob essa hipótese, tomando $\tau_{avg} = Q/A$, a energia de deformação por cisalhamento correspondente torna-se a Equação 9.

Como a Equação 9 não reproduz a mesma energia de deformação da Equação 8, introduz-se um fator de correção k , de modo que a rigidez efetiva ao cisalhamento seja escrita como kAG . O valor de k é então obtido impondo-se a equivalência energética entre o modelo simplificado e a distribuição real de tensões, isto é, impondo-se ***U_{model}=U_{real}***.

$$U_{model} = \int_A \frac{\tau^2_{avg}}{2G} dA = \frac{Q^2}{2AG}$$

(9)

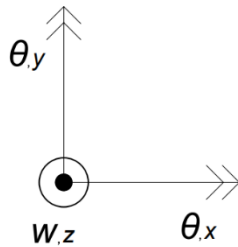


Figura 4 - Graus de liberdade do elemento de placa

Esses são, portanto, os graus de liberdade do elemento de placa, e a partir destes poderemos calcular as deformações do elemento. Os graus de liberdade do elemento são um importante fator na análise de elementos finitos, eles nos dizem quais os deslocamentos e deformações que de fato estão sendo consideradas na análise e o seu uso e interpretação devem ser realizados com muita cautela.

Podemos, usando das hipóteses simplificadoras da teoria de Kirchhoff e da teoria da elasticidade, determinar uma relação entre as rotações θ_x , θ_y e o deslocamento transversal w_o .

De acordo com [5], as deformações por cisalhamento são calculadas pela teoria da elasticidade de acordo com as equações abaixo:

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = -\theta_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}$$

(10)

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = -\theta_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}$$

(11)

Conforme dito anteriormente, é possível perceber que podemos determinar as deformações nos elementos a partir do deslocamento transversal e das rotações θ_x , θ_y em torno de x e y, portanto, a hipótese de que estes são os graus de liberdade adequados para a análise é atendida.

Abaixo são demonstradas as equações para obter os outros componentes de deformação normal a partir dos graus de liberdade do elemento.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} = -zw'_0$$

(12)

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} = -zw'_0$$

(13)

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)$$

(14)

3 ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO QUADRILATERAL QUADRÁTICO DE 9 NÓS Q9

No contexto do Método dos Elementos Finitos, os elementos isoparamétricos são amplamente utilizados devido à sua versatilidade na modelagem de geometrias complexas e à consistência entre a interpolação geométrica e a interpolação dos campos de deslocamento. O termo “isoparamétrico” refere-se ao uso das mesmas funções de forma tanto para descrever a geometria do elemento quanto para interpolar os deslocamentos e demais variáveis de campo.

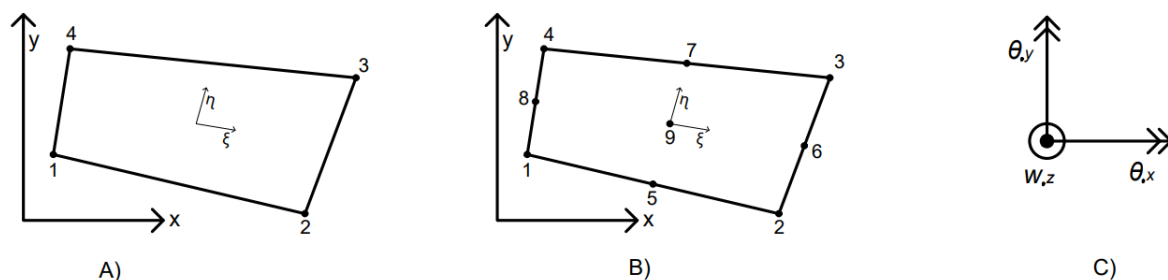


Figura 5 - a) Elemento Q4 de 4 nós b) Elemento Q9 de 9 nós c) Graus de liberdade

Neste trabalho, foi adotado o elemento quadrilateral de nove nós, também conhecido como **Q9**, por ser uma extensão de ordem superior do elemento quadrilateral bilinear de quatro nós (Q4). O elemento Q9 inclui nós intermediários em cada lado, além de um nó central, totalizando nove pontos nodais. Cada nó possui três graus de liberdade, que são mostrados na Figura 5 b) e c), respectivamente, sendo estes uma translação em z e duas rotações θ_x e θ_y , em torno de x e de y .

A utilização de um elemento quadrático como o Q9 apresenta diversas vantagens:

- **Maior precisão com menos elementos:** A ordem superior das funções de forma permite capturar variações mais complexas nos campos de deslocamento e deformação, reduzindo a necessidade de refinamento excessivo da malha;
- **Melhor representação geométrica:** A capacidade de modelar contornos curvos com precisão torna o elemento adequado para domínios com geometria irregular;
- **Compatibilidade com modelos educacionais e de pesquisa:** A implementação do Q9 oferece uma excelente base para estudos didáticos e comparativos com formulações clássicas e comerciais.

3.1 Formulação do elemento finito Q9

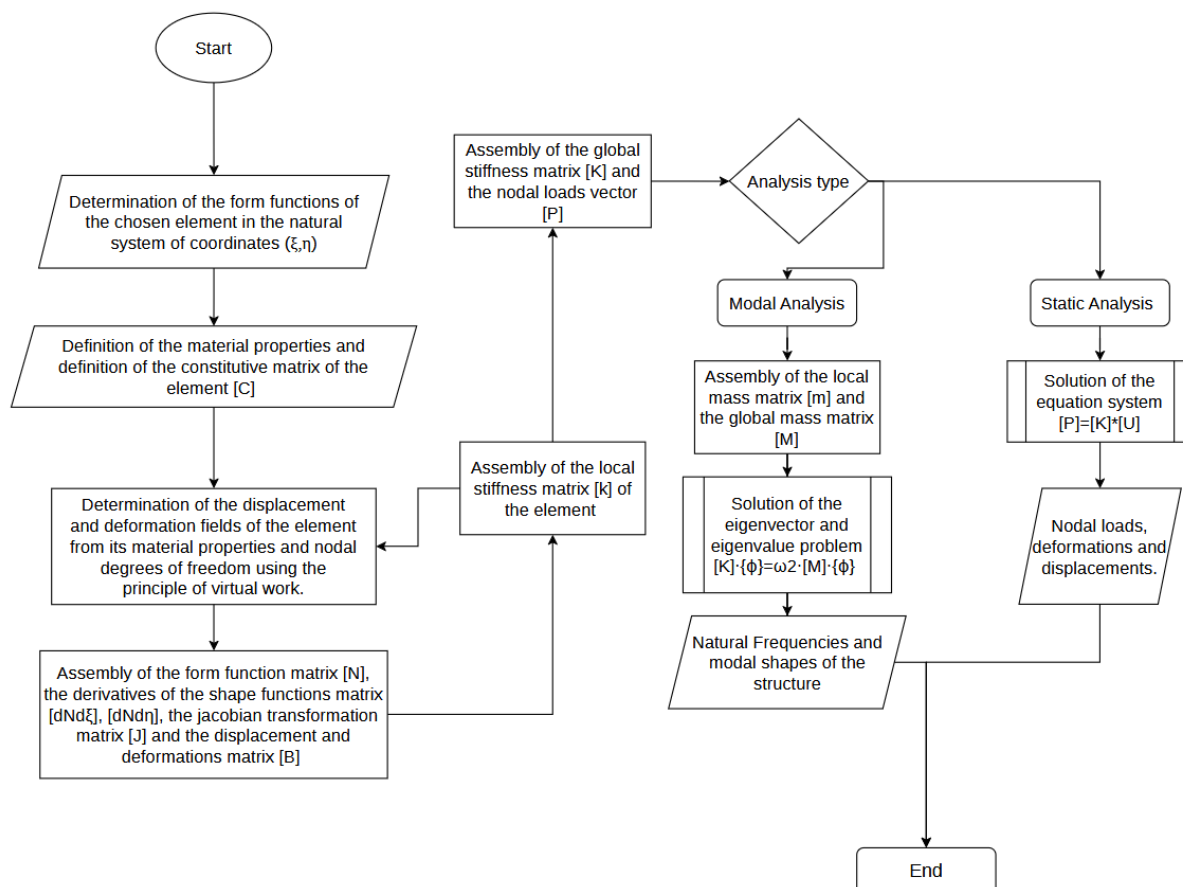


Figura 6 - Quadro geral da formulação do elemento finito isoparamétrico Q9

Na Figura 6, é ilustrado um panorama geral que foi utilizado na formulação do elemento finito quadrilateral quadrático de 9 nós. Deve-se atentar ao fato de que a formulação de qualquer elemento finito parte da premissa básica de compreender as suas relações de tensão e deformação compatíveis com os graus de liberdade representados no elemento. Conforme dito anteriormente, a formulação do elemento Q9 é realizada a partir de uma extrapolação das funções de forma do elemento Q4 e suas relações são quadráticas, na Figura 7 é possível visualizar as funções de forma utilizada para um elemento com 4 a 9 nós.

Include only if node i is present in the element					
	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$-\frac{1}{4}N_9$
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$-\frac{1}{4}N_9$
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$					

Figura 7 - Funções de forma para o elemento Q9

A partir das funções de forma mostradas na Figura 7 podemos montar a matriz $[N]$ que contém as funções de forma para o elemento.

$$[N] = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_i \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_i \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & N_i \end{pmatrix} \quad (8)$$

Na formulação isoparamétrica de elementos finitos, as funções de forma são dadas inicialmente em coordenadas naturais (ξ, η) e precisamos usar uma matriz jacobiana, que transforma derivadas de funções cartesianas em derivadas no sistema natural, para que possamos transformar derivadas que são primariamente naturais, basta inverter-se a matriz jacobiana de acordo com o exemplo abaixo.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

(15)

A partir da Lei de Hooke, podemos começar a visualizar as relações de tensão e deformação do elemento, conforme pode-se visualizar abaixo.

$$\sigma = \mathbf{E} \cdot \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

(16)

Onde, $[C] = E$, a matriz constitutiva do material em estado plano de tensões, composta das propriedades do material como o módulo de elasticidade ou módulo de Young (E), que relaciona a tensão e a deformação aplicada ao material e o coeficiente de Poisson (ν), que relaciona as respostas de deformação longitudinal e deformação transversal do material, $[\varepsilon]$ é o vetor de deformações e $[\sigma]$ é o vetor de tensões.

Conforme dito anteriormente, as tensões σ_z não são consideradas

A partir das relações de deformação mostradas no capítulo 2, equações (10),(11),(12),(13) e (14), podemos montar uma equação matricial com as relações de deformação e deslocamento

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

(17)

Temos, portanto, a seguinte equação matricial em sua forma compacta, representada como

$$k = \nabla U$$

(18)

Onde, k é o vetor de deformações do elemento, ∇ é a matriz de operadores diferenciais das relações de deformação do elemento e U é o vetor de deslocamentos nodais generalizados definido pela equação abaixo.

Para calcular o deslocamento de um ponto no interior do elemento precisamos relacionar os deslocamentos nodais da equação (19) utilizando as funções de interpolação, que são representadas pelas funções de forma do elemento, apresentadas na matriz [N] (8)

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Então obtemos d , que será o vetor de deslocamentos nodais, representando os deslocamentos de cada nó e seus graus de liberdade, [N], a matriz de funções de forma e U o vetor de deslocamentos do elemento.

$$U = Nd \quad (20)$$

Substituindo a equação (20) na equação (18), chega-se a equação abaixo, onde a matriz [B], corresponde ao produto da matriz ∇ de operadores diferenciais pela matriz [N], esta matriz relaciona os deslocamentos nodais as deformações no interior do elemento.

$$B = \nabla N \quad (21)$$

3.2 Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento finito isoparamétrico Q9 é realizada integrando-se as matrizes mostradas anteriormente ao longo de sua espessura dentro dos dois domínios de coordenadas naturais (ξ, η)

$$k = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T C B |J| d\xi d\eta \quad (22)$$

em que:

- t é a espessura da placa;
- $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana;
- A integração é realizada sobre o domínio natural utilizando **quadratura de Gauss** com pontos e pesos apropriados à ordem das funções.

como visto acima, o cálculo da matriz de rigidez local é realizado através de uma dupla integração, no entanto, o processo de integração analítica desse tipo de equação pode se mostrar extremamente trabalhoso e complexo, por essa razão, adota-se métodos numéricos para solução de equação, como o método de integração numérica de Gauss-Legendre [15] mostrado abaixo.

Esse método, mais conhecido como Quadratura de Gauss, realiza a integração calculando os valores da função $f(x)$, dentro do intervalo definido e multiplicando-os por pesos w , chamamos cada conjunto de valor da função e peso associado de ponto, e a depender da ordem da integração, teremos mais pontos de Gauss dentro de uma mesma integral, aumentando a precisão.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(x_i)$$

(23)

3.3 Matriz de massa do Elemento

A matriz de massa de um elemento é uma representação discreta da massa real do elemento, que é contínua sobre todo o seu volume. No elemento implementado, utilizou-se uma matriz de massa consistente, que pode ser representada pela equação abaixo.

$$[M] = \int \rho [N]^T [N] dV$$

(24)

A essa matriz dá-se o nome de “consistente” pois utilizam-se as mesmas funções de forma utilizadas para obter a matriz de rigidez do elemento. A integração no domínio do volume na realidade pode ser realizada da mesma forma que a integração por quadratura gaussiana utilizada para a obtenção da matriz de rigidez do elemento $[k]$ e seus valores dependem do peso específico do material e da espessura da placa analisada.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

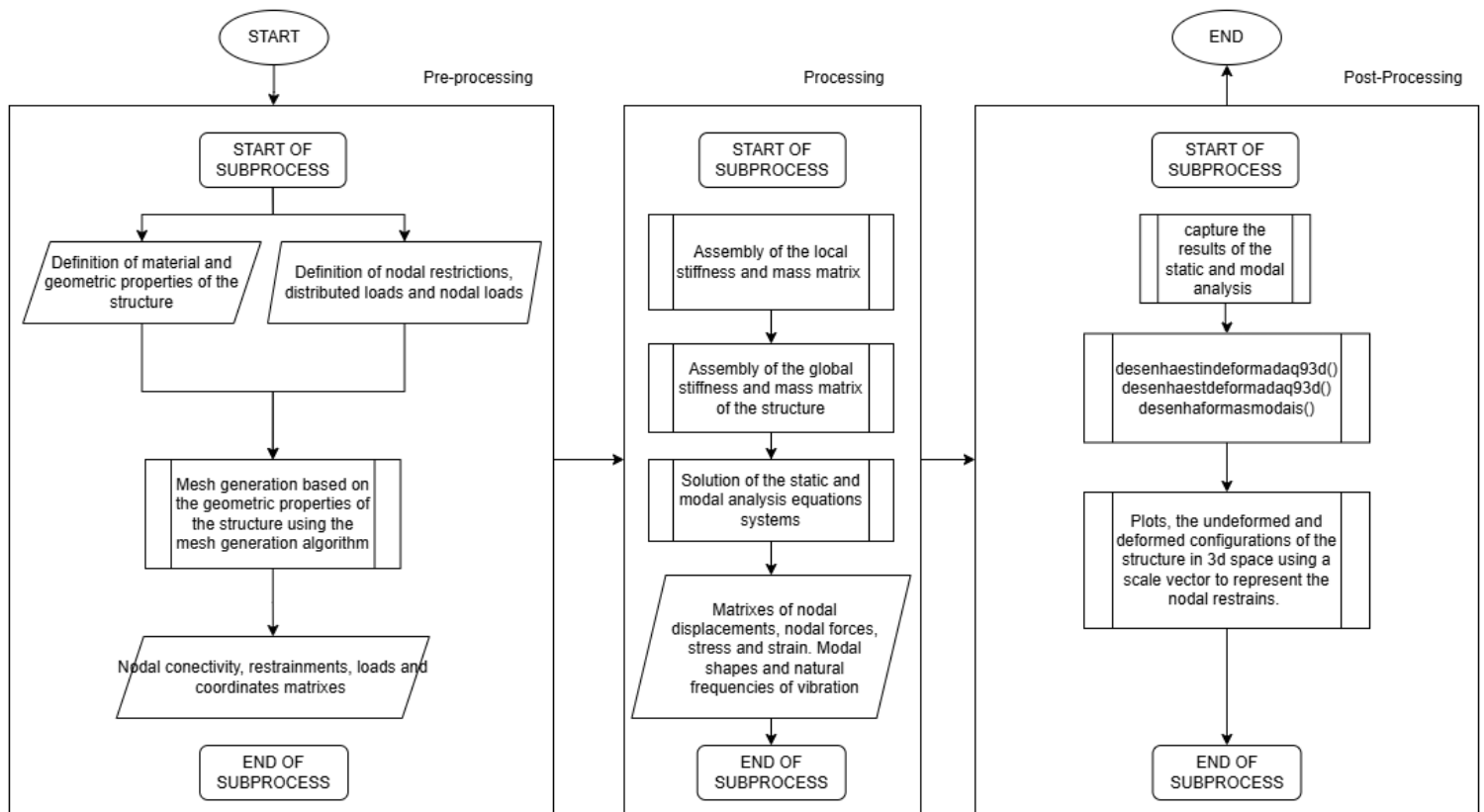


Figura 8 - Fluxograma do programa

Na Figura 8 pode-se visualizar o fluxograma do programa de elementos finitos, que é subdividido em 3 etapas principais, iniciando pela etapa de pré-processamento, onde, define-se as principais variáveis do problema como os carregamentos, restrições nodais e a geometria da estrutura de análise. Para que a geometria descrita possa ser devidamente dividida em elementos finitos, executa-se um algoritmo gerador de malha.

Após a formulação das matrizes de rigidez $[K_e]$ e de massa $[M_e]$ de cada elemento, é necessário realizar o processo de **montagem global** da estrutura. Esse procedimento consiste em reunir as contribuições locais de cada elemento em um sistema global coerente, levando em consideração a correspondência entre os graus de liberdade locais e os graus de liberdade globais da estrutura

A **matriz de rigidez global** $[K]$ e a **matriz de massa global** $[M]$ da estrutura são formadas por meio da contribuição dos graus de liberdade locais de cada elemento com os nós correspondentes nos graus de liberdade globais da estrutura. Esse processo de contribuição é guiado pela matriz de incidência cinemática de cada elemento.

De modo semelhante, o **vetor de cargas nodais** P é montado a partir das cargas aplicadas em cada elemento, considerando a contribuição de cada nó. Este vetor representa os esforços externos atuando nos graus de liberdade da estrutura e incorpora, além das cargas concentradas, as condições de contorno impostas à estrutura.

4.1 Solução Estática

A solução do problema estático consiste na resolução do sistema de equações algébricas lineares da forma:

$$P = K \cdot U \quad (25)$$

onde:

- K é a matriz global de rigidez da estrutura;
- U é o vetor de deslocamentos nodais globais;
- P é o vetor de forças nodais aplicadas.

O sistema apresentado na Equação 25 é resolvido após a aplicação das **condições de contorno**, que impõem restrições aos deslocamentos em nós previamente definidos. A aplicação dessas restrições implica em modificações nas linhas e colunas correspondentes da matriz [K], bem como nos termos do vetor {P}, eliminando os graus de liberdade restritos.

Uma vez resolvido o sistema, obtém-se o vetor {Dl}, que fornece os deslocamentos nos nós da estrutura. Com esses valores, é possível calcular as **reações de apoio** por meio da relação:

$$Pr = Krl \cdot Dl \quad (26)$$

em que:

- [Krl] representa a submatriz de rigidez associada aos graus de liberdade restritos (r) e livres (l);
- {Dl} são os deslocamentos nos graus de liberdade livres.

4.2 Solução Dinâmica

Montada as matrizes de rigidez K e de massa M da estrutura e aplicadas as restrições, a solução dinâmica é calculada por meio de um problema de autovetor e autovalor, sendo os autovetores as formas modais de vibração da estrutura e os autovalores as suas frequências naturais.

$$K\Phi = M\Phi\Omega \quad (27)$$

A análise modal tem como objetivo determinar as **frequências naturais** e as **formas modais de vibração** da estrutura. Para isso, é formulado o seguinte problema de autovalores:

$$[K] \cdot \{\phi\} = \omega^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \quad (28)$$

onde:

- ω representa a frequência natural (rad/s);
- $\{\phi\}$ é o vetor dos autovetores, ou seja, as **formas modais** da estrutura;
- ω^2 são os autovalores associados.

A solução deste sistema fornece os pares $(\omega_n, \{\phi_n\})$ correspondentes à frequência e à forma modal de cada modo de vibração. Esses resultados são fundamentais para a caracterização dinâmica da estrutura e para a identificação de possíveis ressonâncias quando submetida a carregamentos dinâmicos.

A precisão na determinação das frequências e formas modais depende da **qualidade da malha**, do **tipo de elemento utilizado** e da **consistência das matrizes de rigidez e massa**. Neste trabalho, a combinação do elemento Q9 com matriz de massa consistente garante uma boa representatividade dos modos estruturais, inclusive nos casos de placas espessas.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS SOLUCIONADOS PELO PROGRAMA

A fim de validar o programa desenvolvido para a análise estática e modal de placas via Método dos Elementos Finitos com o elemento Q9, foram realizados ensaios numéricos baseados em exemplos consagrados na literatura. Os resultados obtidos pelo código em MATLAB foram comparados tanto com soluções analíticas quanto com simulações realizadas em softwares comerciais, como o SAP2000 e o ABAQUS.

5.1 Análise Estática: Viga Engastada-Livre

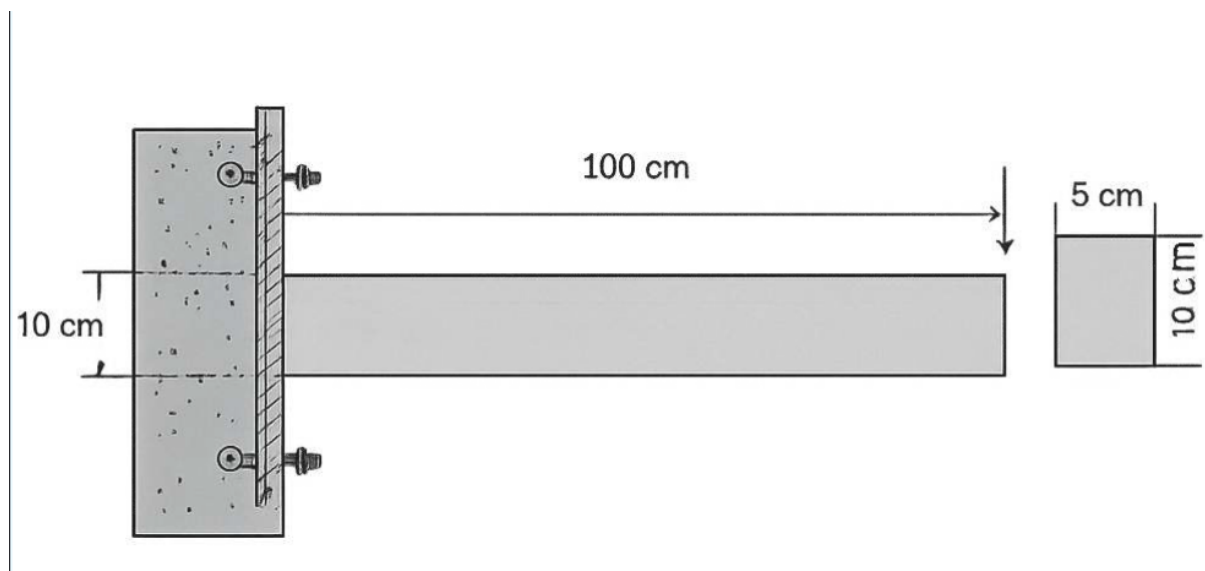


Figura 9 – Viga modelada (Unidades em cm)

O primeiro caso de estudo envolve a análise estática de uma viga do tipo engastada-livre (cantiléver), demonstrada na Figura 9, sujeita a uma carga de 20kN aplicada na extremidade livre. A viga foi modelada como uma placa utilizando diferentes níveis de refinamento na malha

com elementos Q9 e um estudo de convergência da malha foi realizado, conforme demonstrado na Figura 10, adicionalmente, a malha gerada pelo programa pode ser observada na figura 11

De acordo com TIMOSHENKO & GERE[1994], podemos calcular o deslocamento transversal da viga modelada através da equação:

$$\delta = \frac{PL^4}{8EI} \quad (29)$$

onde:

- P é a carga aplicada;
- L é o comprimento da viga;
- E é o módulo de elasticidade;
- I é o momento de inércia da seção transversal.

No. of elem.	Displacement (m)	Increment (m)	Rel. increm. (%)	Theor. value (m)
4	0.0036482	3.65E-03	—	
8	0.0037923	1.44E-04	3.80	
16	0.0038200	2.85E-05	0.75	
32	0.0038207	-1.00E-07	0.00	
64	0.0038285	7.80E-06	0.20	0.00383
128	0.0038309	2.40E-06	0.06	
256	0.0038309	0.00E+00	0.00	
384	0.0038315	6.00E-07	0.02	
512	0.0038317	2.00E-07	0.01	

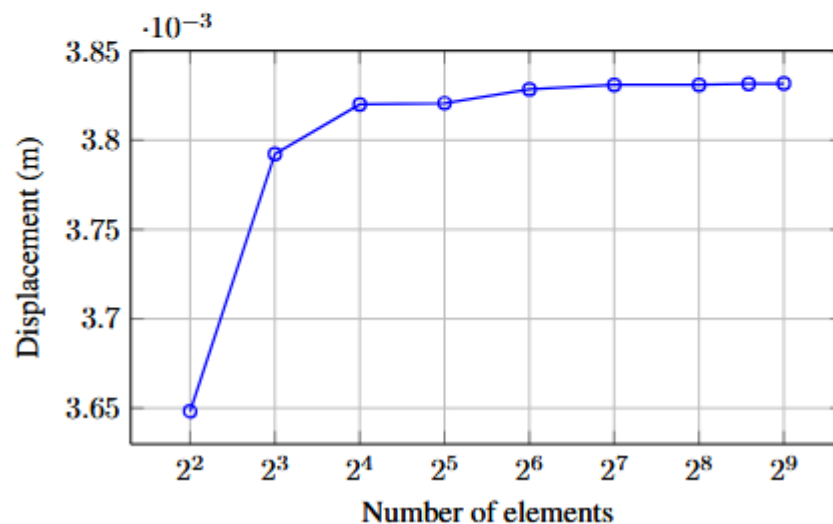


Figura 10 - Análise de convergência utilizada para a malha

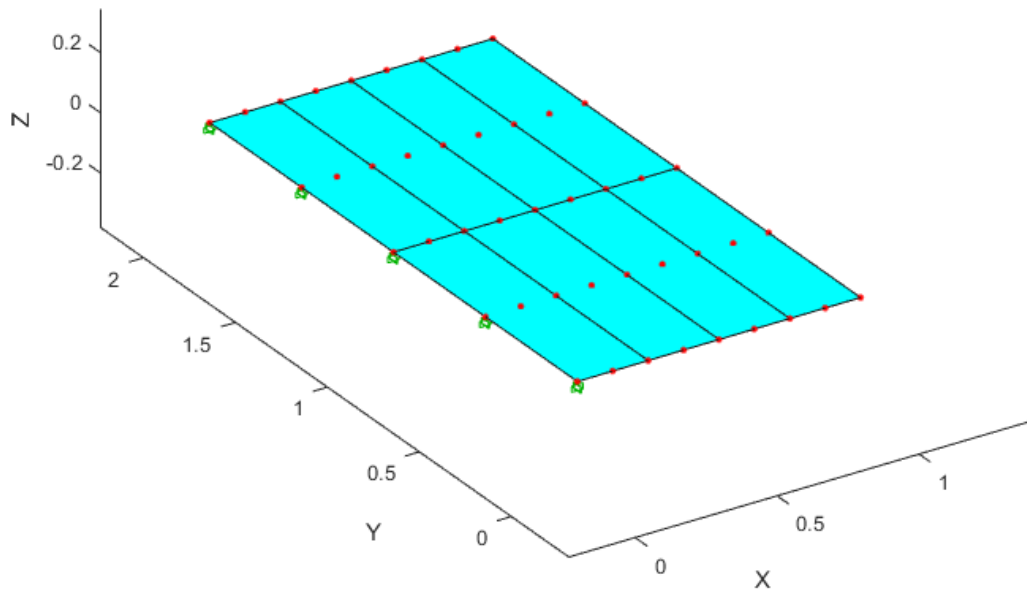


Figura 11 - Malha gerada pelo programa

5.2 Análise Modal: Frequências Naturais e Formas Modais

A validação da análise modal foi conduzida a partir de dois estudos distintos:

1. **Estudo 1 – Viga Engastada-Livre:** Frequências naturais comparadas com os resultados apresentados por L. Mierovich (2001);
2. **Estudo 2 – Viga Esbelta com Geometria Fina:** Validação baseada na dissertação de M. Menão, com posterior comparação com simulações realizadas no software ABAQUS.

Para a validação da teoria de L.MIEROVICH, a viga modelada foi a apresentada na Figura 9 enquanto para a verificação proposta por M.MENÃO, a viga implementada é a apresentada na Tabela 1

Propriedades da seção Transversal (M.MENÃO)	
Tipo	Retangular
Espessura(t)	0,00121 m
Largura(b)	0,024 m
Comprimento	0,38 m
Material	Aço LN28
Peso Específico	7850 kg/m ³
Mod.Elasticidade	210 Gpa
Poisson	0,3

Tabela 1- Viga modelada para verificação de M.MENÃO

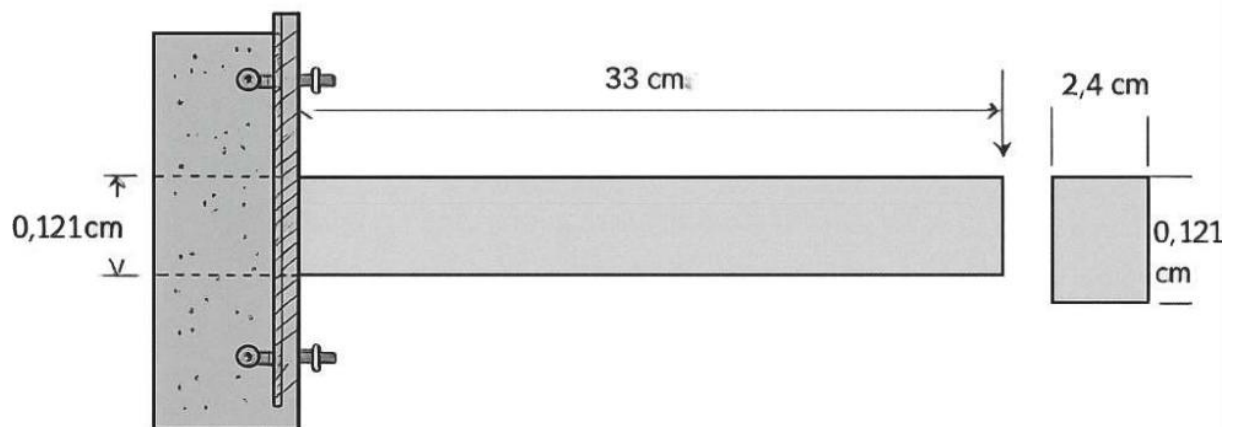


Figura 12 - Viga Modelada para Solução Dinâmica

Além das verificações analíticas apresentadas acima, também se realizou um comparativo com o software comercial de elementos finitos SAP 2000, utilizando a viga apresentada na Figura 9 para avaliar a performance ao tentar atingir os valores da solução analítica de L.MIEROVICH[6].

De acordo com L.MIEROVICH, podemos calcular as 3 primeiras frequências naturais de uma viga engasta de acordo com as equações abaixo:

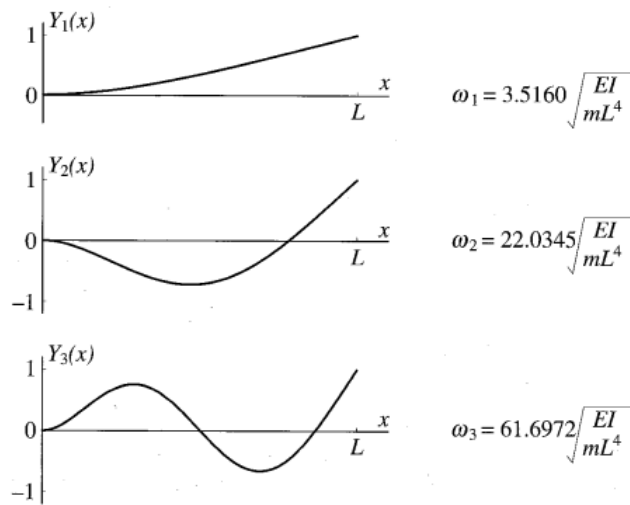


Figura 13 - Frequências naturais de uma viga engastada e livre, L.MIEROVICH, *Fundamentals of Vibration*[2001]

As três primeiras frequências naturais calculadas para o caso de Mierovich são apresentadas na Tabela 2:

Forma Modal	Frequência em Hz			Dif p/ analítico (%)	
	SAP	Mierovich	MATLAB	MATLAB	SAP
1	8.345	8.382	8.381	0,011930327	0.44
2	52.134	52.529	52.588	-0,11231891	0.00751
3	145.521	147.081	147.59	0.3460	1.060

Tabela 2 - Resultados da solução analítica de L.MIEROVICH

Segundo FAHY & WALKER[2004] e BISHOP & JOHNSON[1960], as equações que determinam os modos de vibração e as frequências naturais são descritas nas equações abaixo:

$$f_n = \sqrt{\frac{\rho S}{EI}} K_{nb}^2 \quad (30)$$

$$\psi_n(x) = [\cosh(K_{nb} \cdot x) - \cos(K_{nb} \cdot x)] - \frac{\sinh(K_{nb} \cdot L) - \sin(K_{nb} \cdot L)}{\cosh(K_{nb} \cdot L) - \cos(K_{nb} \cdot L)} \cdot [\sinh(K_{nb} \cdot x) - \sin(K_{nb} \cdot x)] \quad (31)$$

Onde:

- n = modo de vibração;
- $K_{nb} = \frac{\pi(2n-1)}{2}$ é o número de ondas à flexão a partir de $n=6$
- $\psi_n(x)$ é o modo de vibrar da n -ésima frequência natural

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos para o caso de Menão, calculados com base na teoria apresentada por FAHY & WALKER[2004] e BISHOP & JOHNSON[1960] comparando com os valores calculados analiticamente.

Frequência em Hz			Dif p/ analítico (%)
Forma Modal	Menão	MATLAB	MATLAB
1	7,00	7,037	-0,522857143
2	43,90	44,136	-0,537585421
3	122,80	123,830	0.3460

Tabela 3 - Resultados da solução analítica de M.MENÃO

As formas modais obtidas com o programa em MATLAB foram comparadas visualmente com os resultados do SAP2000 (caso Mierovich) e do ABAQUS (caso Menão). A Figura 14 e Figura 15 apresentam os modos de vibração para os dois modelos, evidenciando boa correspondência nas amplitudes relativas e nos padrões modais, reforçando a adequação do modelo desenvolvido.

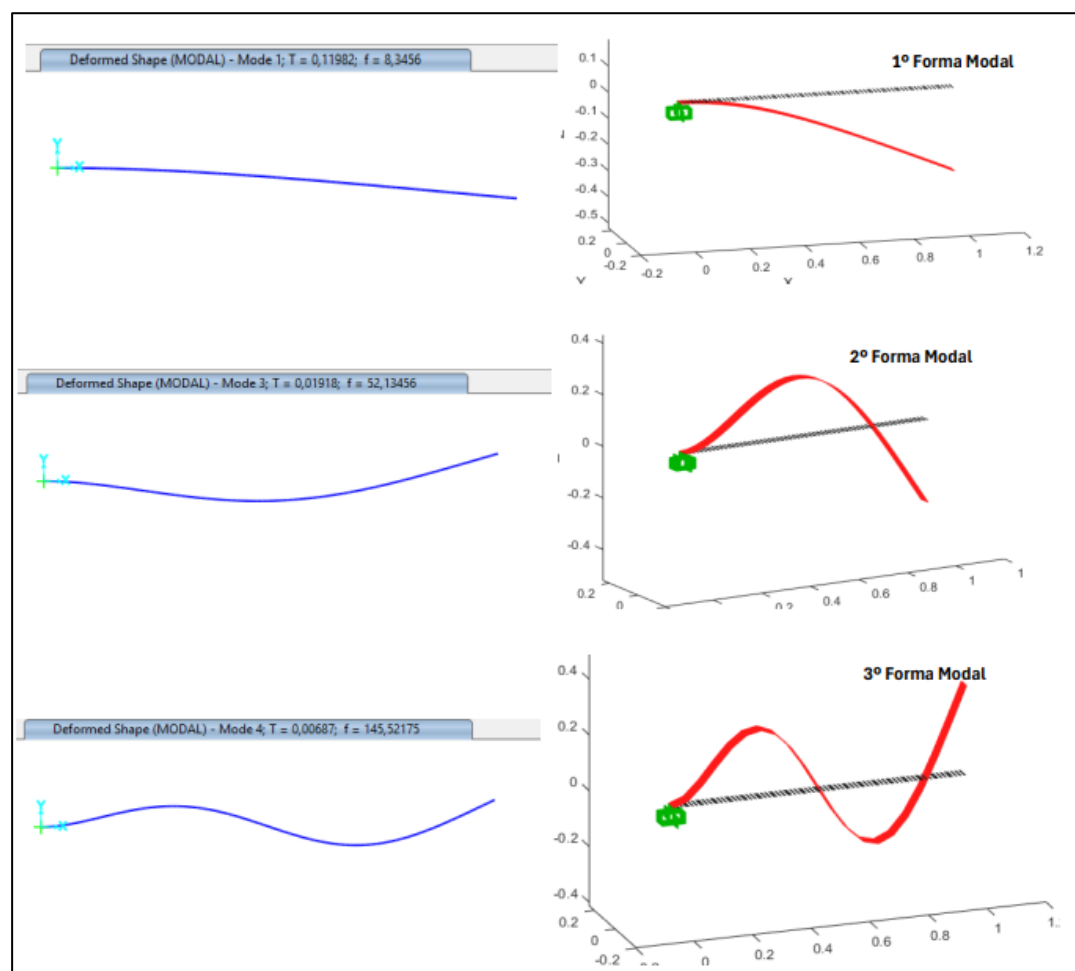


Figura 14 - Formas Modais SAP2000 / MATLAB

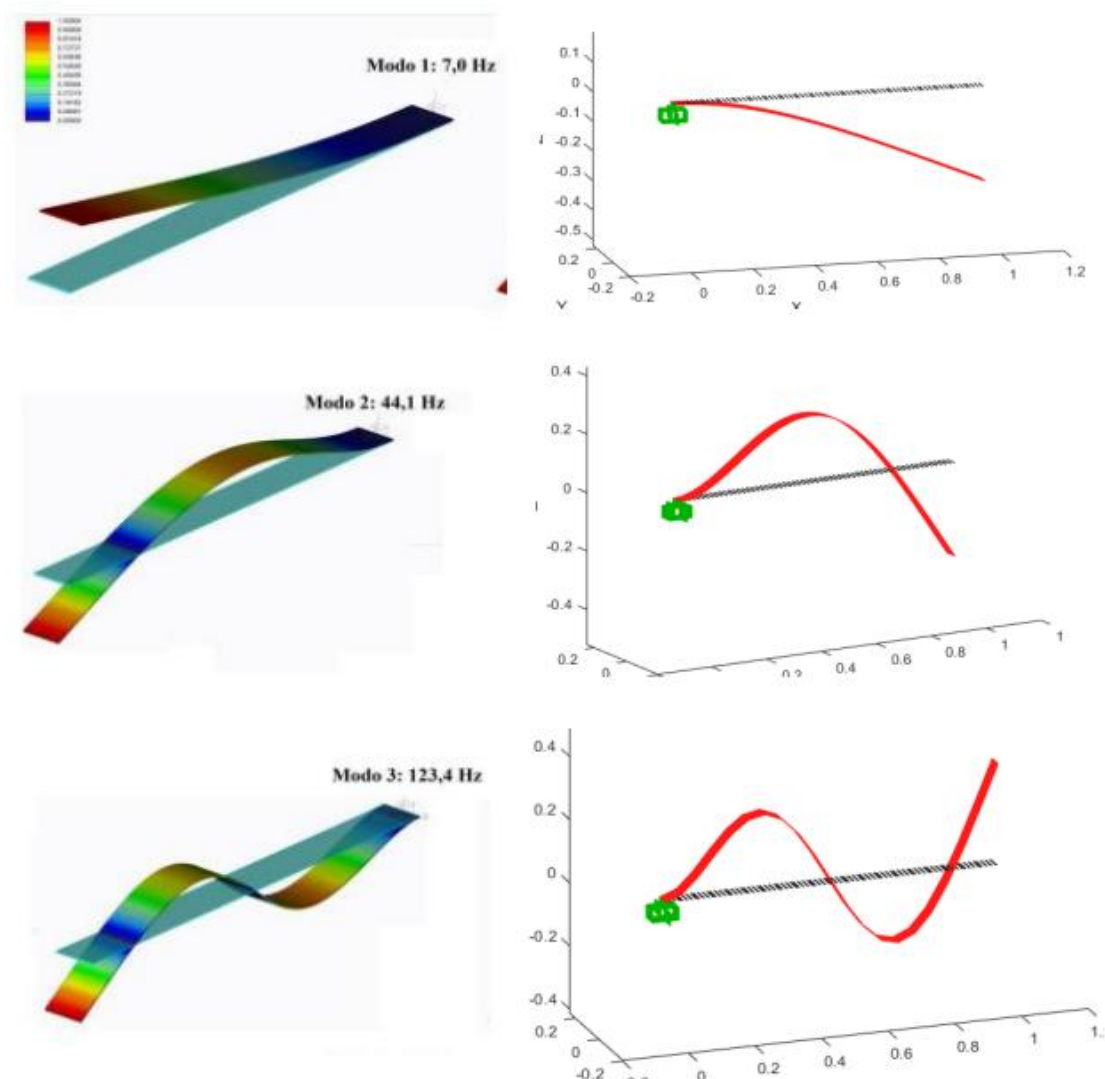


Figura 15 - Formais modais ABAQUS/MATLAB

6 Conclusões

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento de um programa computacional educacional, implementado em MATLAB, para a análise estática e modal de placas planas utilizando o Método dos Elementos Finitos. A formulação adotada baseia-se na teoria de placas de Mindlin-Reissner, sendo aplicada a um elemento quadrilateral de nove nós (Q9), o qual incorpora três graus de liberdade por nó: deslocamento transversal e rotações em torno dos eixos xxx e yyy . O programa foi validado por meio de exemplos clássicos da literatura e comparações com softwares comerciais amplamente utilizados, como SAP2000 e ABAQUS. Os resultados demonstraram excelente concordância tanto para os deslocamentos estáticos quanto para as frequências naturais e formas modais, atestando a precisão e robustez da formulação implementada.

Além disso, a estrutura do código foi desenvolvida com fins didáticos, visando fornecer aos estudantes uma ferramenta de apoio no estudo do Método dos Elementos Finitos e da Dinâmica das Estruturas. Ao permitir a análise de casos reais com base em uma formulação rigorosa e bem documentada, o programa estimula a compreensão dos conceitos fundamentais da mecânica estrutural computacional.

A flexibilidade do modelo, aliada à clareza do código e à facilidade de manipulação no ambiente MATLAB, torna esta ferramenta especialmente útil em disciplinas de graduação e pós-graduação. Espera-se que o trabalho contribua para a formação de engenheiros com maior domínio das técnicas numéricas modernas e com capacidade crítica para avaliar e aplicar modelos computacionais com fundamento teórico sólido.

Adicionalmente, o presente trabalho foi publicado pelo International Journal of Mechanical Engineering Education, e está disponível para consulta pública

<https://doi.org/10.1177/03064190261446962>

O código em MATLAB do programa apresentado pode ser obtido através do repositório público no github <https://github.com/Eduardoudantas/femlab>

7 REFERÊNCIAS

- [1] BISHOP, R. E. D.; JOHNSON, D. C. *The Mechanics of Vibration*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
- [2] COOK, R. D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [3] COOK, R. D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [4] FAHY, F. J.; WALKER, J. G. *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration*. CRC Press, 2004.
- [5] GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. *Mechanics of Materials*. 4th ed. Boston: PWS Publishing, 1994.
- [6] MIEROVICH, L. *Fundamentals of Vibration*. Nova York: McGraw-Hill, 2001.
- [7] MENÃO, M. M. *Análise Modal de Placas com Elementos Finitos em MATLAB*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Estrutural) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020. (ou substitua pelo dado correto da dissertação consultada)
- [8] TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.
- [9] WANG, Bin; BAI, Jiantao; LU, Shanbin; ZUO, Wenjie. *An open source MATLAB solver for contact finite element analysis*. [S. l.], 2023. *Advances in Engineering Software*
- [10] RICHARD, Benjamin et al. *CastLab: an object-oriented finite element toolbox within the Matlab environment for educational and research purposes in computational solid mechanics*. **Advances in Engineering Software**, [S. l.], v. 188, p. 103564, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2023.103564>.
- [11] SMITH, T. V.; NAGARAJ, K. V. *MATLAB automated higher-order tetrahedral mesh generator for CAD geometries and a finite element application with the subparametric mappings*. **SoftwareX**, [S. l.], v. 23, p. 101480, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2023.101480>.
- [12] KOKO, Jonas. *A Matlab mesh generator for the two-dimensional finite element method*. **Applied Mathematics and Computation**, [S. l.], v. 250, p. 650–664, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.041>

- [13] **MINDLIN, R. D.** Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, n. 1, p. 31–38, 1951.
DOI: 10.1115/1.4010217
- [14] Resende, C.H.B., Lopes, P.C., Rangel, R.L., Muñoz, L.F.P. and Martha, L.F. (2023) An Educational GUI-Based Software for Dynamic Analysis of Framed Structural Models. *Journal of Software Engineering and Applications*, 16, 265-286.
<https://doi.org/10.4236/jsea.2023.167014>
- [15] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. *Análise Numérica*. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- [16] **MOURA, Daniel Moutinho de.** *Análise de placas baseada na teoria de Mindlin, utilizando o método dos elementos finitos através do MATLAB*. 2002. Trabalho de Conclusão de Curso — Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2002.