



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

SOLVABILIDADE DE SOLUÇÕES VIA
NAGUMO E OSGOOD PARA O PROBLEMA
$$x' = f(t, x)$$

Izaque Pantoja Portugal

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

ABAETETUBA
Junho de 2018

Izaque Pantoja Portugal

SOLVABILIDADE DE SOLUÇÕES VIA NAGUMO E OSGOOD PARA O PROBLEMA

$$x' = f(t, x)$$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, como pré-requisito para a obtenção do Grau de Licenciado Pleno em Matemática, da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

ABAETETUBA

Junho de 2018

Izaque Pantoja Portugal

SOLVABILIDADE DE SOLUÇÕES VIA NAGUMO E OSGOOD PARA O PROBLEMA

$$x' = f(t, x)$$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, como pré-requisito para a obtenção do Grau de Licenciado Pleno em Matemática, da Universidade Federal do Pará.

Aprovada em 28 de Junho de 2018, por

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Fabricio Costa Lobato
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Universidade Federal do Pará

ABAETETUBA
Junho de 2018

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que me deu esperança, fé e amor para continuar mesmo às circunstâncias não sendo favoráveis, a minha família, amigos, professores e a todas as pessoas que me ajudaram direta e indiretamente para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Ao Pai ao Filho e a o Espírito Santo, que sempre se fizeram presentes em minha vida e nunca me deixaram sozinho, mesmo diante das dificuldades e obstáculos da vida, Deus sou grato a ti por isso.

Ao meu amado pai, Manoel Gonçalves Portugal que tinha um sonho de um dia vê pelo menos um de seus filhos formados em uma faculdade, pelos conselhos nos momentos difíceis, por sempre acreditar em mim e me instruir no caminho em que se deve andar, que Deus lhe abençoe.

A minha amada Mãe, Raimunda Duarte Portugal por ser essa mãe dedicada que sempre me incentivou a continuar estudando e por ser minha amiga, e protetora que Deus lhe abençoe.

Aos meus irmãos, João Batista, Débora, Edson, Ednalva, Elias, Eliana, Eunice, Enoque e Eliseu pelo apoio de vocês, e que Deus abençoe a todos .

Ao orientador desta pesquisa, professor Dr. Renato Fabricio Costa Lobato pelo apoio e condução desse meu trabalho, que Deus lhe abençoe e guie todos os seus passos.

Aos professores deste campus, que contribuíram e me ajudaram para que eu chegasse até aqui, que Deus abençoe a todos vocês.

Aos meus grandes amigos, irmãos e colegas de faculdade, Jhonata, Francielton, Leonardo, Francenildo, Diogo, Diego, Ivaldo, Rivaldo, Eliel, Erenilson, Edilson e Geizon com quem me identifiquei e criei grandes laços de amizade, por serem meus parceiros e por me ajudarem quando precisei, que Deus os abençoe.

As minhas amigas e colegas de Faculdade, Kellen, Ivana, Nilda, Ana Carla, Caroline, Viviane e Riviane, com quem me identifiquei e por sempre me ajudarem, que Deus os abençoe.

Aos meus amigos e colegas de pesquisa Rosenildo e Wilson, com quem sempre pude dialogar sobre os assuntos complexos deste trabalho, que Deus os Abençoe.

Aos meus amigos de Ensino Fundamental Isaac, Mikelly, Breno, Rodrigo Lobato e de Ensino Médio, Mauricio, Rodrigo França, Ruama e Denis, que mesmo depois de muito tempo, nunca perderam contato comigo, e sempre acreditaram em mim, que Deus os Abençoe.

Aos colegas e amigos que conheci nesse campus Nadiane, Luiza, Mayane, Wander-son, Giovanni, Amanda, Carla, Marlucia e Layandra, que Deus Abençoe a todos.

A minha grande amiga, Jennifer Macedo com quem criei um laço especial de amizade, companheirismo e cooperação, pelos momentos especiais que passei ao seu lado nesses anos de curso, Deus te abençoe mulher, e que possa realizar os seus sonhos.

"Se fui capaz de ver mais longe, é
porque me apoiei em ombros de
gigantes."

Isaac Newton

Resumo

Este trabalho surgiu do resultado da pesquisa de iniciação científica do livro do renomado Drº Luiz Adauto da Justa Medeiros sobre Equações Diferenciais Ordinárias, visto que em seu livro ele faz um estudo qualitativo da equação diferencial escalar $x' = f(t, x)$, especificamente abordaremos o estudo de unicidade de soluções de uma equação diferencial de primeira ordem de um ponto de vista qualitativo. Para tal exibiremos as definições de solução, e faremos um estudo básico de espaços métricos, com foco em espaços métricos completos e as sequências de Cauchy. Mostramos um pouco da história dos Matemáticos Willian Foog Osgood e Mitio Nagumo e exibimos suas condições de Unicidade para a solução do problema $x' = f(t, x)$.

Palavras-chaves: Unicidade de Solução, Problema de Cauchy, Teorema de Nagumo, Teorema de Osgood.

Abstract

This work appeared of the result of the scientific initiation research of the book of renowned Dr^o Luiz Adauto da Justa Medeiros about Ordinary Differential Equations, because in his book he makes a qualitative study of the differential equation to climb $x' = f(t, x)$, specifically will approach the study of uniqueness of solutions of a differential equation of first order of a qualitative point of view. For such we will exhibit the solution definitions, and we will make a basic study of metric spaces, with focus in complete metric spaces and the sequences of Cauchy. We showed a little of the history of Mathematicians Willian Foog Osgood and Mitio Nagumo and we exhibited their conditions of uniqueness for the solution of the problem $x' = f(t, x)$

Keywords: Uniqueness of solutions, Problem of Cauchy, Theorem of Nagumo, Theorem of Osgood.

Sumário

Introdução	9
1 Fundamentos da Teoria Clássica das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	10
1.1 Breve Relato Histórico	10
1.2 Existência e Unicidade de Soluções	11
1.2.1 Preliminares	11
1.3 Problema de Cauchy	16
2 Introdução aos Espaços Métricos	18
2.1 Definição de Espaços Métricos	18
2.2 Exemplos de Espaços Métricos:	18
2.3 Bolas Abertas	22
2.3.1 Propriedades Básicas das Bolas Abertas	26
2.4 Sequências em Espaços Métricos	29
2.4.1 Sequências - Limite de uma Sequência	29
2.4.2 Sequências em $\mathbb{R}$	31
2.5 Topologia dos Espaços Métricos	32
2.6 Continuidade	33
2.6.1 Funções Uniformemente Contínuas	38
2.7 Conjuntos Compactos	40
2.7.1 Compacidade	40
2.7.2 Continuidade e Compacidade	43
2.7.3 Compacidade e Continuidade Uniforme	44
2.7.4 Abertos e compacidade	45
2.8 Conjuntos Conexos	47
2.8.1 Conexidade	47
2.8.2 Conexos em $\mathbb{R}$ e Conexidade no $\mathbb{R}^n$	50
2.9 Espaços Métricos completos	51
2.9.1 Sequências de Cauchy	51
2.9.2 Espaços Completos	54

2.10	Teorema do Ponto fixo de Banach	54
2.10.1	Aplicação as Equações Diferenciais Ordinárias	57
3	Os Teoremas de Unicidade de Nagumo e Osgood	59
3.1	Um Breve Relato Histórico	59
3.1.1	Mitio Nagumo	59
3.1.2	William Fogg Osgood	61
3.2	O Teorema de Nagumo	62
3.3	O Teorema de Osgood	64
	Considerações Finais	67
A	Apêndice	68
A.1	Completamento de Um Espaço Métrico	68
A.2	Teo. de Exist. de Solução de uma EDO de 1º Ordem	70
	Referências Bibliográficas	80

Introdução

Neste trabalho iremos estudar duas condições de unicidade de solução para a equação diferencial escalar $x' = f(t, x)$, sendo esse um estudo qualitativo. Sabemos que muitos princípios em física e em engenharia são motivados por relações que envolvem quantidades, estas por sua vez estão em constante variação, e as taxas de variação em matemática são expressas por meio de derivadas, que é um pré-requisito para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias. Os estudos até agora realizados no campo das equações diferenciais ordinárias, sem duvida admitiu avanços significativos na historia da humanidade. Avanços estes, ocorridos nas mais diversas áreas do conhecimento, tais como: Física, Química, Biologia e na própria Matemática Pura, isto em nível acadêmico.

Este trabalho está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo é feito uma pequena introdução a teoria clássica das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, apresentando-se um breve relato histórico sobre a origem da mesma, Prosseguindo mostramos a definição de solução e alguns exemplos básicos, em seguida é apresentado o problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (P.V.I.). No capítulo dois é feita uma introdução ao estudo dos espaços métricos, apresentando os principais definições e propriedades, envolvendo métricas, bolas, funções contínuas, conjuntos compactos e espaços métricos completos e atrelados a isso o importante teorema do ponto fixo de Banach e a propriedade que é equivalente a definição de solução da equação diferencial Ordinária $x' = f(t, x)$. No capítulo três é feito um breve relato histórico sobre os matemáticos William Foote Osgood e Mitio Nagumo e após isso é apresentado a demonstração dos teoremas de unicidade de ambos, mostrando suas diferenças. Nas considerações finais constata-se a importância do estudo desse conhecimento matemático e o que se espera com isso.

Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Clássica das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

1.1 Breve Relato Histórico

O estudo das equações diferenciais teve seu início com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibnitz, no último quarto do século XVII para resolver problemas originados por conceitos físicos e geométricos. Estes métodos, na sua evolução, conduziram pouco a pouco à materialização das Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática, que em meados do século XVIII se transformou em uma disciplina independente.

Nesta fase, a procura e análise de soluções tornou-se uma finalidade própria. Também nesta época ficaram conhecidos os métodos elementares de resolução (integração) de vários tipos especiais de equações diferenciais, tais como as de variáveis separáveis, as lineares, as de Bernoulli, as de Clairaut, as de Riccati estudados tradicionalmente, até nossos dias, em muitos cursos introdutórios de Cálculo. A natureza daquilo que era considerado solução foi mudando gradualmente, num processo que acompanhou e, às vezes, propiciou o desenvolvimento do próprio conceito de função. Inicialmente buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares, isto é, polinomiais, racionais, trigonométricas e exponenciais. Posteriormente, passou-se a considerar satisfatório expressar a solução na forma de uma integral (quadratura) contendo operações elementares envolvendo estas funções, ainda que a mesma não admitisse uma expressão em termos destas. Quando estes dois caminhos deixaram de resolver os problemas focalizados, surgiram as soluções expressas por meio de séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência das mesmas). como descreve em [3].

Em fins do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das

disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para a pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros expandiram notavelmente o conhecimento dentro do Cálculo das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica de Fluidos, etc. Nesta época iniciou-se também a descoberta das relações das equações diferenciais com as funções de variável complexa, séries de potências e trigonométricas e funções especiais (conhecidas posteriormente como de Bessel, etc.). O grau que o conhecimento matemático atingiu nesta primeira fase ficou registrado na obra de Euler “*Institutiones Calculi Integralis*” em quatro volumes, o último deles publicado em 1794.

(Sotomayor, Jorge, 1979, introd. livro).

No século XIX os fundamentos da Análise Matemática experimentaram uma revisão e reformulação gerais visando maior rigor e exatidão. Assim, os conceitos de limite, derivada, convergência de séries numéricas e séries de funções e outros processos infinitos foram definidos em termos aritméticos. A integral, que no século anterior era concebida como primitiva, foi definida como limite de uma sequência de somas. Este movimento de fundamentação não deixou de atingir as equações diferenciais. Enquanto no século anterior procurava-se uma solução geral para uma dada equação diferencial, passou-se a considerar como questão prévia em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Este é o problema de Cauchy. Tomava-se então uma classe ampla de equações diferenciais, como as lineares, por exemplo, para as quais a existência e unicidade das soluções estava aceita e procuravam-se propriedades gerais destas soluções a partir de características das funções que definiam a equação diferencial.

1.2 Existência e Unicidade de Soluções

1.2.1 Preliminares

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times E$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $E = \mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano n -dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times E$ será denotado por (t, x) tal que $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em E ; salvo menção em contrário, adotaremos em $\mathbb{R} \times E$ a norma:

$$|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$$

onde $|x|$ denota uma norma em E , por exemplo

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \text{ ou } |x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \text{ ou ainda } |x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Seja $f : \Omega \longrightarrow E$ uma aplicação continua e seja I um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 1. (Solução) Uma função diferenciável $\varphi = I \rightarrow E$ chama-se *solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

no intervalo I se:

- i) o gráfico de φ em I , isto é, $G_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω
- ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

E as denotaremos por:

$$\frac{d\varphi^-}{dt} \text{ e } \frac{d\varphi^+}{dt}$$

A equação (1.1) chama-se *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x) \quad (1.2)$$

Sejam $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ as componentes de $f : \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ com a função $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, é uma solução de (1.1) se e somente se cada φ_i é diferenciável em I , $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

para todo $t \in I$

Por esta razão diz-se que a equação diferencial "vetorial" (1.1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

Exemplo 1. $\Omega = I \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = g(t)$ onde g é uma função contínua no intervalo I ; se e somente se

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t g(s) ds$$

onde $t_0 \in I$ e c é uma constante.

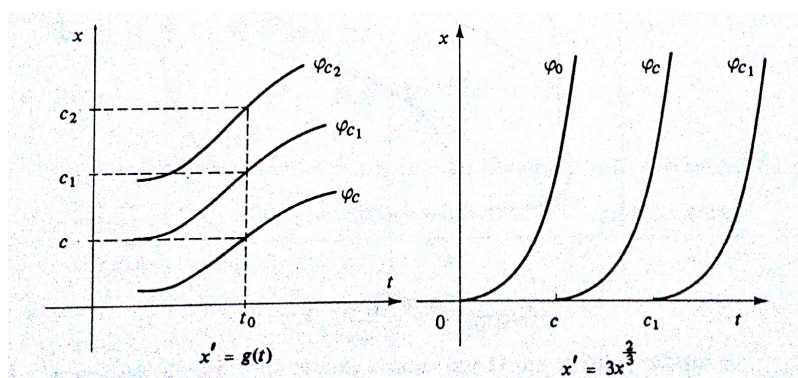
Exemplo 2. $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c = \begin{cases} (t - c)^3, & \text{se } t \geq c, \\ 0, & \text{se } t \leq c. \end{cases}$$

é uma solução da equação $x' = 3x^{2/3}$ em $I = \mathbb{R}$ como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) acima.

Mas a função constante $\varphi = 0$ também é solução da equação, ver Figura 1.1

Figura 1.1: Gráfico da função $x' = g(t)$ e $x' = 3x^{2/3}$



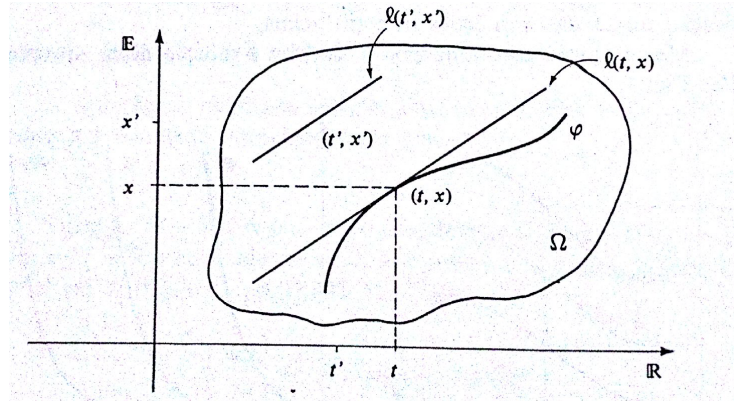
Fonte: Sotomayor, Jorge(1979, p.5)

Estes exemplos ilustram o fato de que as equações diferenciais possuem em geral uma infinidade de soluções. Porém, no exemplo 1, em cada ponto de Ω passa uma única solução; isto é, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução φ , tal que $\varphi_{t_0} = x_0$. O mesmo não acontece no exemplo 2; neste caso em cada ponto da forma $(t_0, 0)$ passa uma infinidade de soluções. Sob hipóteses bem gerais sobre f — por exemplo se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em Ω — existe uma e só uma solução φ de (1.1) num intervalo que contém t_0 e tal que $\varphi_{t_0} = x_0$. Uma tal φ será chamada de *solução do problema com dados iniciais* (t_0, x_0) para a equação (1.1). Este problema é também conhecido como *problema de Cauchy* e será denotado abreviadamente por $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ Observação. A equação (1.2) é equivalente à equação integral(falaremos sobre isso mais a frente neste trabalho).

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Isto é, se $t_0 \in I$, uma função contínua $\varphi : I \rightarrow E$ e cujo gráfico está contido em Ω é solução de (1.3) se e só se é solução de (1.2). Isto decorre do teorema fundamental do cálculo. A equação (1.1) (ou (1.2)) admite a seguinte interpretação geométrica ver Figura (1.2)

Figura 1.2: Grafico da Solução Genérica



Fonte: Sotomayor, Jorge(1979, p.6)

Exemplo 3. Seja $\Omega = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$ e $f(t, x) = f(x)$. Suponha que f é contínua e não se anula em (a_1, a_2) . Dados $x_0 \in (a_1, a_2)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, calcule a solução para o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Solução:

Se φ é uma solução de (1.5), então:

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \text{ e } \varphi(t_0) = x_0 \quad (1.6)$$

$$\text{donde segue-se: } \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1 \quad (1.7)$$

Seja $F : (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $F(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\varsigma}{f(\varsigma)}$ Vê-se facilmente que a função: $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$, no intervalo (a_1, a_2) . Este fato, prova que F admite inversa (Pelo teorema de derivação de funções inversas).

Teremos então a seguinte aplicação:

$$F^{-1} : (b_1, b_2) \rightarrow (a_1, a_2), \text{ onde } (b_1, b_2) \subset \mathbb{R}$$

De (1.7) resulta

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

isto é

$$(F \circ \varphi)'(t) = 1 \quad (1.8)$$

Integrando (1.8) de t_0 a t , obtemos:

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0$$

e como $F(\varphi(t_0)) = F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} = 0$ resulta que

$$F(\varphi(t)) = t - t_0$$

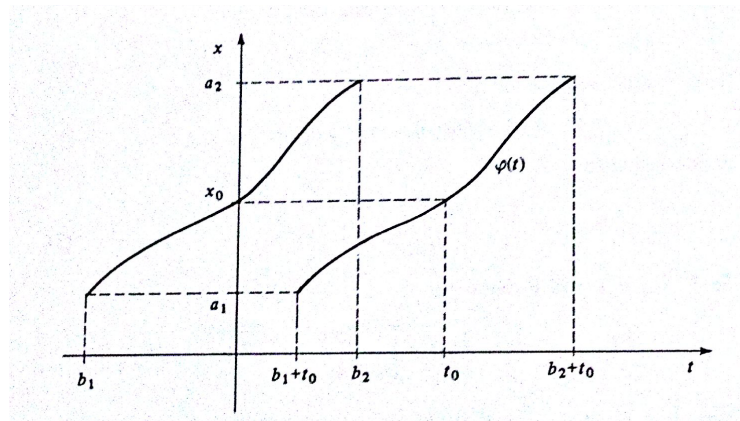
logo a solução de (1.5) é dada por:

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0), \text{ com } t \in (t_0 + b_1, t_0 + b_2)$$

Facilmente observa-se que a solução é única (aplicando a bijetividade da inversa).

Veja o esboço do grafico, com uma translação horizontal de t_0 ver Figura 1.3

Figura 1.3: Grafico da $\varphi(t)$ com translação horizontal de t_0



Fonte: Sotomayor, Jorge(1979, p.8)

Exemplo 4. Equações de Variáveis Separáveis

Consideremos o Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = g(t)f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Onde g e f são contínuas em intervalos abertos (t_1, t_2) e (a_1, a_2) respectivamente, e f não se anula em (a_1, a_2) .

Solução: Procedendo como no exemplo anterior (que é o caso particular em que $g(t) \equiv 1$) se φ é solução de (1.9), obtemos:

$$\varphi'(t) = g(t)f(\varphi(t))$$

Isto é

$$g(t) = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = (F \circ \varphi)(t) \quad (1.10)$$

Integrando (1.10) de t_0 a t resulta em:

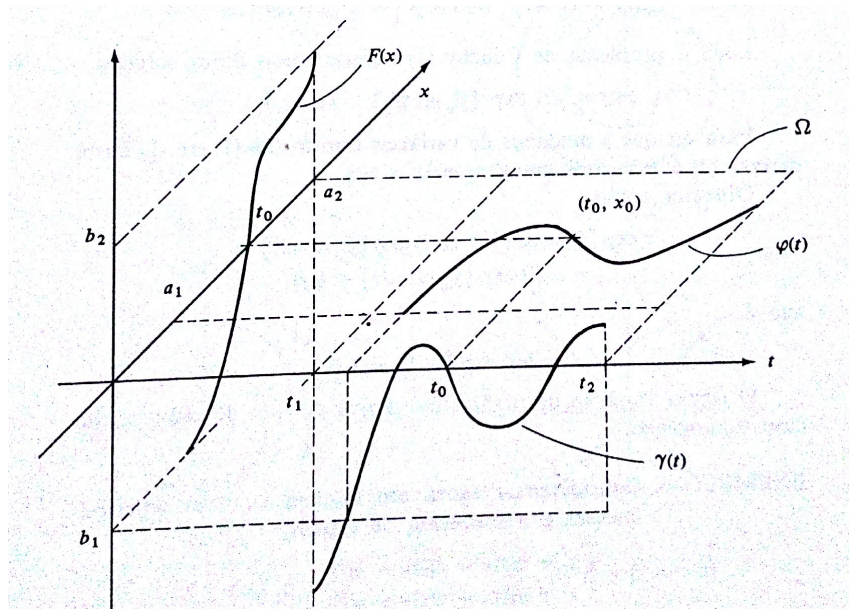
$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau < b_2$$

Assim sendo, a solução de (1.10), dada por:

$$\varphi(t) = F^{-1} \left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right) \quad (1.11)$$

Vejamos graficamente em Figura 1.4

Figura 1.4: Grafico de Equações de variaveis separaveis



Fonte: Sotomayor, Jorge (1979,p.9)

Nota 1. Note que a solução obtida, é dada implicitamente, para constantes de integração apropriadas, pela relação:

$$\int g(t) dt = \int \frac{dx}{f(x)}$$

entre as integrais indefinidas.

1.3 Problema de Cauchy

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e Ω uma parte aberta de $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$. Consideremos uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(t, x) \in \Omega \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$.

Estaremos interessados, no estudo das equações:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.12)$$

Denomina-se solução da equação (1.12) no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a uma aplicação

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad (t \in I \longrightarrow \varphi(t) = x(t) \in \mathbb{R})$$

Tal que o gráfico esteja contido em Ω e se tenha

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall \quad t \in I$$

Diz-se que a (1.12) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. O problema que se impõe, inicialmente, é o de procurar condições gerais sobre a aplicação f , afim de que (1.12) possua pelo menos uma solução. Resolvida esta etapa do problema, deseja-se saber em que condições podemos garantir a unicidade. Em busca das soluções das questões anteriores, Cauchy formulou o problema seguinte:

Dado um ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$, demonstrar a existência de uma solução $x = \varphi(t)$ de $x' = f(t, x)$, passando por (t_0, x_0) . Este problema denomina-se *problema de Cauchy* para a equação (1.12). Formulado de maneira precisa, o problema de Cauchy consiste em dado $(t_0, x_0) \in \Omega$, demonstrar a existência de $x = \varphi(t)$, com gráfico contido em Ω tal que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in I \tag{1.13}$$

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{1.14}$$

A seguir, daremos a base e alguns métodos clássicos Para resolver o problema de Cauchy.

Capítulo 2

Introdução aos Espaços Métricos

2.1 Definição de Espaços Métricos

Definição 2. Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e indiquemos $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d .

Dizemos que d é uma *métrica* sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) > 0$, e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade triangular)

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de *distância* de x a y . A um par (M, d) onde d é a métrica sobre M , é o que chamamos de *espaço métrico*.

Definição 3. Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $S \subset M$ ($S \neq \emptyset$) se considerarmos a restrição $d_1 = d|_S$, obviamente d_1 é uma métrica sobre S e assim obtemos, (S, d_1) .

Nessas condições dizemos que S é um *Subespaço* do espaço métrico M e que a métrica d_1 , foi induzida por d sobre M . Em geral indica-se a *métrica do subespaço* do mesmo modo que a métrica de M , isto é faz-se $d_1 = d$.

Proposição 1. Se x, y e z são pontos genéricos de um espaço métrico (M, d) , então $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Ver a demonstração em [1]

2.2 Exemplos de Espaços Métricos:

Exemplo 5. Métrica discreta ou Métrica zero-um: Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d : M \times M \implies \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$d(x, x) = 0 \ (\forall x \in M) \text{ e } d(x, y) = 1 \text{ (sempre que } x \neq y).$$

O espaço assim obtido é às vezes chamado *espaço discreto*.

Exemplo 6. A Reta Usual: Considerando-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $d(x, y) = |x - y|$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 7. Espaços Vetoriais Normados: Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto E sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna.

$(u, v) \longmapsto u + v$ (adição), e uma externa, de $\mathbb{R} \times E$ em E , $(\alpha, u) \longmapsto \alpha \cdot u$ (Multiplicação por escalares). Para as quais se verificam as seguintes condições:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w$ em E .
2. $u + v = v + u$, $\forall u, v$ em E
3. $\exists 0 \in E$ de modo que $0 + u = u \ \forall u \in E$
4. $\forall u \in E$, $\exists (-u) \in E$ de maneira que $u + (-u) = 0$, ou seja E é um grupo Abelianos em relação a adição e, ainda.
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in E$.
7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in E$
8. $1 \cdot u = u$, $\forall u \in E$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados *vetores*.

Definição 4. (Norma) Uma *norma* sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $u \in E$ um número real não negativo, indicado por $\|u\|$, e chamado *norma* de u de maneira que:

1. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2. $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \in E$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in E$.

Um *espaço vetorial normado real* é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica sobre E .

Exemplo 8. Espaços de Funções Reais Limitadas: Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se diz *limitada* se existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $|f(x)| < k$, para qualquer $x \in X$. Indiquemos por $\beta(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$. Para quaisquer $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ se definirmos $f + g$, $\alpha \cdot f$ e $\|f\|$ do seguinte modo:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$
2. $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$

O conjunto $\beta(X; \mathbb{R})$ se torna um *espaço vetorial normado*. Nos detalhes envolvidos nessa afirmação só verificaremos aqueles que dizem respeito a norma. Notemos que de início $\|f\|$ está bem definida visto que o $\sup\{f(x); x \in X\}$ existe pelo fato de que f é limitada. Além disso $\|f\| \in \mathbb{R}_+$ para qualquer $f \in \beta(X; \mathbb{R})$, o que é óbvio.

1. $\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0 \forall x \in X \iff f(x) = 0, \forall x \in X \iff f \equiv 0$.
2. $\|\alpha \cdot f\| = |(\alpha \cdot f)(x)| = |\alpha \cdot f(x)| = |\alpha| \cdot |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\|$
3. Dadas $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$, então para qualquer $x \in X$:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in X\} + \sup\{|g(x)|; x \in X\}$$

Como esta última soma é constante, é ela uma cota superior do conjunto

$$\{|f(x) + g(x)|; x \in X\} \text{ e então:}$$

$$\{|f(x) + g(x)|; x \in X\} \leq \sup\{|f(x)|; x \in X\} + \sup\{|g(x)|; x \in X\}$$

ou seja:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

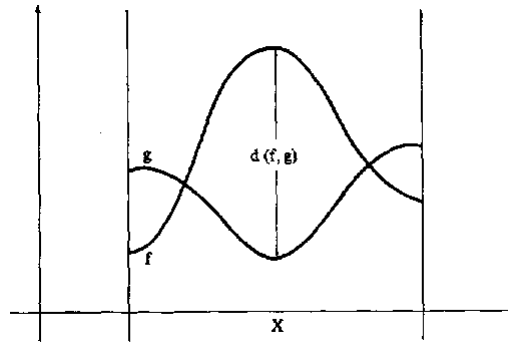
Logo $\beta(X; \mathbb{R})$ é um espaço métrico. A métrica induzida pela norma em questão é dada por:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}$$

para qualquer $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$.

A distância entre duas funções, segundo essa métrica pode ser visualizada na Figura 2.1 a seguir:

Figura 2.1: Grafico da Distância entre duas funções



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.45)

Exemplo 9. Espaço de Funções Reais Contínuas Num Intervalo Fechado: Para um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$. Indiquemos $\zeta[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$. Com relação à adição de funções e a multiplicação de uma função por um escalar (número real), definidas naturalmente como no exemplo anterior, $\zeta[a, b]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. E a função:

$$f \mapsto \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

É uma norma sobre esse espaço uma vez que $\|f\| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \zeta[a, b]$ e

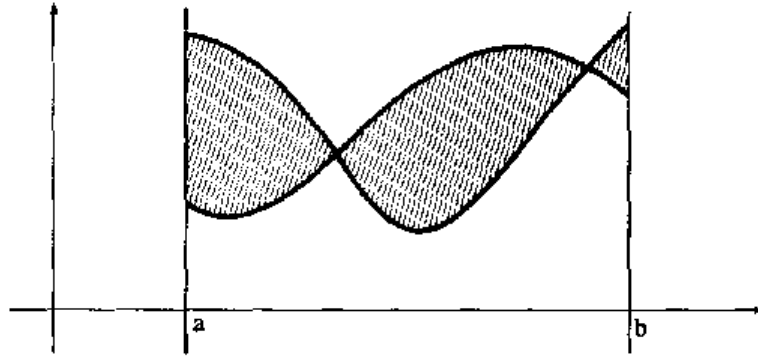
1. $\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0, \forall x \in [a, b]$ (pois $|f(x)|$ define uma função contínua)
 $\iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \iff f \equiv 0$
2. $\|\alpha \cdot f\| = \int_a^b |(\alpha \cdot f)(x)| dx = \int_a^b |\alpha| \cdot |f(x)| dx = |\alpha| \cdot \int_a^b |f(x)| dx = |\alpha| \cdot \|f\|$
3. $\|f + g\| = \int_a^b |(f + g)(x)| dx = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx$
 $= \|f\| + \|g\|.$

Assim $\zeta[a, b]$ é um espaço métrico sendo sua métrica definida da seguinte maneira:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

para quaisquer $f, g \in \zeta[a, b]$.

A distância entre duas funções $f, g \in \zeta[a, b]$ está ilustrado na Figura 2.2 abaixo:

Figura 2.2: Grafico da distância das funções $f, g \in \zeta[a, b]$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.46)

Exemplo 10. Um subespaço de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$: Já vimos Exemplo (9) que o conjunto $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitados, é um espaço vetorial normado e, portanto, um espaço métrico. Como porém $\zeta[a, b]$, (conjunto das funções reais definidas num intervalo $[a, b]$), é um subconjunto de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ visto que toda função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então $\zeta[a, b]$ é um espaço métrico em relação a métrica definida por:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [a, b]\}$$

para quaisquer $f, g \in \zeta[a, b]$.

2.3 Bolas Abertas

Definição 5. Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola aberta de centro p e raio ϵ , que indicaremos por $B(p, \epsilon)$, é o seguinte subconjunto de M :

$$B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\}$$

A seguir mostraremos alguns exemplos:

Exemplo 11. Bolas num espaço cuja a métrica é a "zero-um": Seja (M, d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:

1. $0 < \epsilon \leq 1$. Neste caso $B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\} = \{p\}$ porque o único ponto cuja a distância a p é menor do que 1 é o próprio p .
2. $1 < \epsilon$. Quando isto acontece, $B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão à uma distância de p igual a zero ou igual a um, e portanto, menor que ϵ .

Exemplo 12. Bolas na Reta Usual: Na reta a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e o raio ϵ é o conjunto $B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid |x - p| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \epsilon < x < p + \epsilon\} =]p - \epsilon, p + \epsilon[$.

Exemplo 13. Bolas no Espaço $\mathbb{R}^2$ Lembremos que no espaço $\mathbb{R}^2$ foram já definidas três métricas, a saber para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

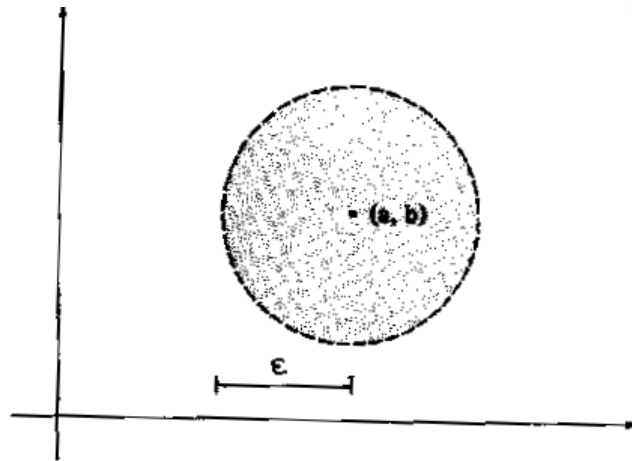
$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Sendo $p = (a, b)$ este ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, segundo a métrica D , é o conjunto

$$B(p, \epsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | (X - a)^2 + (Y - b)^2 < \epsilon^2\}$$

cujo gráfico é um aberto, conforme a figura 2.3 a seguir

Figura 2.3: Gráfico relativo a métrica D



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.51)

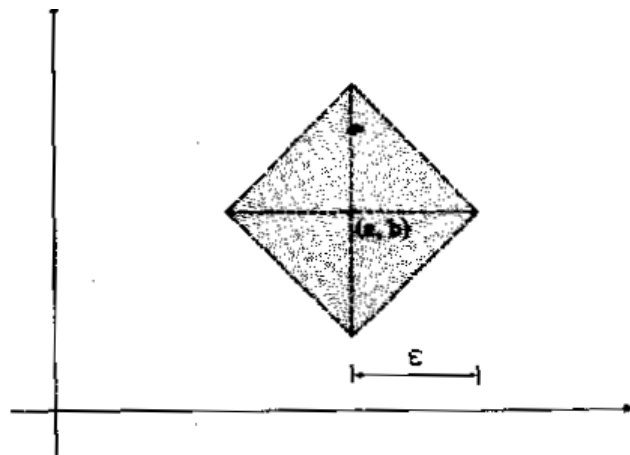
Quando a métrica for D_1 , uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$ é o conjunto

$$B(p, \epsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | |X - a| + |Y - b| < \epsilon\}$$

Ora, o gráfico da relação dada por

$$|X - a| + |Y - b| < \epsilon$$

é um quadrado aberto (sem os lados) de diagonais paralelos aos eixos coordenados e de medida igual a 2ϵ , com centro em $p = (a, b)$. Ver figura 2.4

Figura 2.4: Grafico relativo a métrica D_1 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.51)

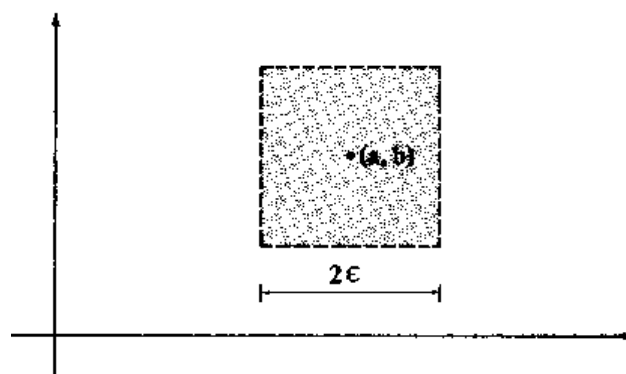
Por ultimo, quando se tratar da métrica D_2 , temos

$$B(p, \epsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|X - a|, |Y - b|\} < \epsilon\}$$

é o gráfico da relação

$$\max\{|X - a|, |Y - b|\} < \epsilon$$

que representa no plano a bola $B(p, \epsilon)$ é o interior de um quadrado de centro $p = (a, b)$, cujos lados são paralelos nos eixos coordenados e têm medida igual a 2ϵ .

Figura 2.5: Grafico relativo a métrica D_2 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.52)

Ou seja, $B(p, \epsilon) =]a - \epsilon, a + \epsilon[\times]b - \epsilon, b + \epsilon[$.

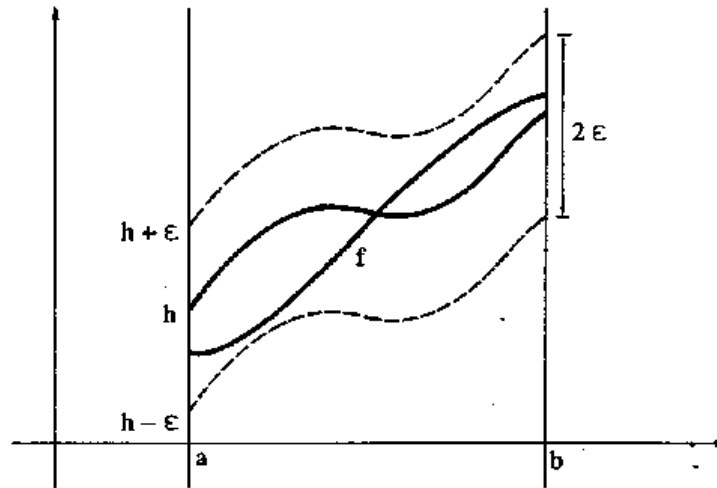
Exemplo 14. (Bolas no Espaço das Funções $\zeta[a, b]$ com a Métrica do Supremo)

Já vimos que a função dada por

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

para quaisquer, $f, g \in \zeta[a, b]$, é uma métrica sobre esse conjunto. Veremos agora que é possível visualizar uma bola aberta desse espaço através dos gráficos das funções que a ela pertencem. Uma bola $B(h, \epsilon)$ é formada pelas funções cujos gráficos se situam na região do plano em que $a \leq x \leq b$, estritamente entre os gráficos de $h + \epsilon$ e $h - \epsilon$, conforme figura abaixo.

Figura 2.6: Grafico relativo a métrica do Supremo



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.52)

De fato, se $f \in B(h, \epsilon)$, então $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < \epsilon$ e daí temos

$$|f(x) - h(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$$

o que mostra que f tem seu gráfico na região citada. Por outro lado, se $f \in \zeta[a, b]$ é uma função cujo gráfico está localizado nessa região, temos

$$|f(x) - h(x)| < \epsilon$$

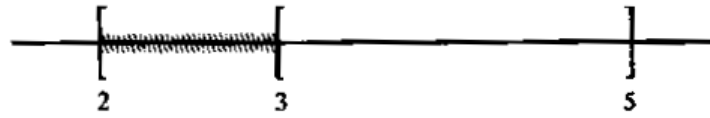
para todo $x \in [a, b]$, e da continuidade das funções consideradas decorre que

$$\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < \epsilon$$

o que prova que $f \in B(h, \epsilon)$.

Exemplo 15. (Bolas abertas num subespaço) Seja (M, d) um espaço métrico. Consideremos um subespaço $N \subset M$. Dado então $p \in N$, o que é uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, em relação a N ? Por definição é o conjunto $B = \{x \in N | d(x, p) < \epsilon\}$. Portanto $B = B(p, \epsilon) \cap N$.

Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$ (métrica usual) e se $N = [2, 5]$, então a bola de centro 2 e raio $\epsilon = 1$, em relação a N , é o intervalo $[2, 3[$. Ver figura 2.7 abaixo:

Figura 2.7: Gráfico da reta $\mathbb{N} = [2, 5]$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.53)

Definição 6. (Ponto Isolado) Dado um espaço métrico (M, d) , um ponto $p \in M$ se diz *ponto isolado* de M se existe $\epsilon > 0$ de maneira que

$$B(p, \epsilon) = \{p\}$$

2.3.1 Propriedades Básicas das Bolas Abertas

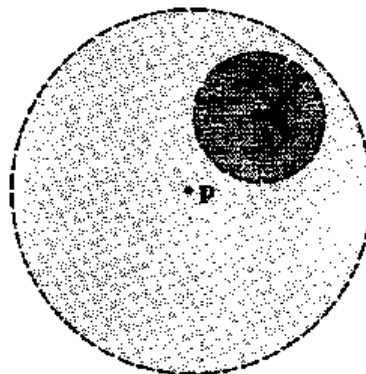
As propriedades a seguir referem-se a bolas genéricas $B(p, \epsilon)$ de um espaço métrico arbitrário (M, d)

1. Dadas $B(p, \epsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\epsilon \leq \delta$, então $B(p, \epsilon) \subset B(p, \delta)$

Demonstração. Se $x \in B(p, \epsilon)$, então $d(x, p) < \epsilon$. Como $\epsilon < \delta$, concluímos que $d(x, p) < \delta$ e portanto que $x \in B(p, \delta)$. $\square$

2. Dado $q \in B(p, \epsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \epsilon)$.

Demonstração. Tomemos $\delta = \epsilon - d(p, q)$, conforme indica a intuição, e mostremos que efetivamente $B(q, \delta) \subset B(p, \epsilon)$. Seja $x \in B(q, \delta)$. Ver figura 2.8 abaixo

Figura 2.8: Gráfico da $B(p, \epsilon)$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.55)

À desigualdade triangular nos garante que

$$d(x, p) < d(x, q) + d(q, p)$$

Como $d(x, q) < \delta = \epsilon - d(p, q)$, então

$$d(x, p) < \epsilon - d(p, q) + d(p, q) = \epsilon$$

o que garante que $x \in B(p, \epsilon)$. □

3. Sejam $B(p, \epsilon)$ e $B(q, \delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$, então existe $\lambda > 0$ tal que

$$B(t, \lambda) \subset B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$$

.

Demonstração. Devido a (1) existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que:

$$B(t, \lambda_1) \subset B(p, \epsilon) \text{ e } B(t, \lambda_2) \subset B(q, \delta)$$

Se $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, então $B(t, \lambda)$ está contida tanto em $B(t, \lambda_1)$ como em $B(t, \lambda_2)$ e portanto

$$B(t, \lambda) \subset B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$$

.

□

4. Sejam p e q dois pontos, disjuntos entre si, de um espaço M . Se $d(p, q) = \epsilon$, então

$$B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\epsilon}{2}\right) = \emptyset$$

Demonstração. Suponhamos que exista $x \in B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Então $x \in B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$ e $x \in B\left(q, \frac{\epsilon}{2}\right)$ e portanto $d(x, p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x, q) < \frac{\epsilon}{2}$. Donde considerando a desigualdade triangular:

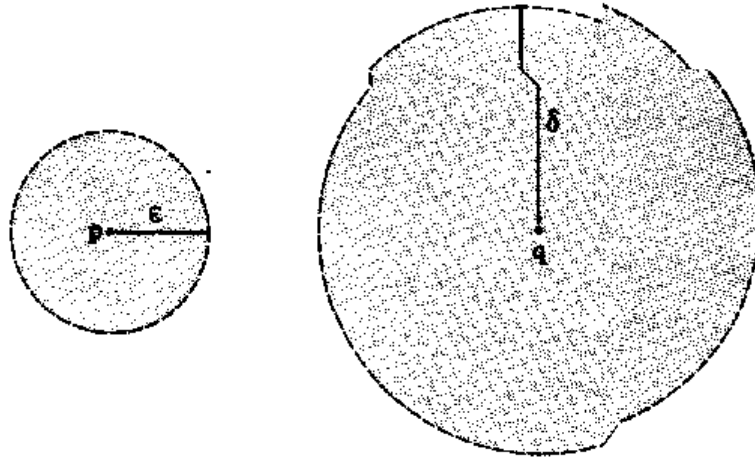
$$\epsilon = d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

o que é absurdo. □

5. Dadas as bolas $B(p, \epsilon)$ e $B(q, \delta)$, se $\epsilon + \delta \leq d(p, q)$, então:

$$B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta) = \emptyset$$

Demonstração. Ver figura 2.9 abaixo:

Figura 2.9: Grafico da $B(p, \epsilon)$ e $B(p, \delta)$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.56)

Suponhamos o contrário, ou seja, que existe um ponto $x \in B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$. Então $d(x, p) < \epsilon$ e $d(x, q) < \delta$ e portanto

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \epsilon + \delta \leq d(p, q)$$

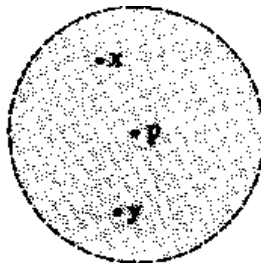
O que é impossível. □

6. O diâmetro de uma bola $B(p, \epsilon)$ é menor que ou igual a 2ϵ , isto é $d(B(p, \epsilon)) \leq 2\epsilon$.

Demonstração. Sejam x e y pontos arbitrários de $B(p, \epsilon)$. Então:

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

. Ver figura 2.10.

Figura 2.10: Grafico da $B(p, \epsilon)$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.57)

Donde: $\sup\{d(x, y) | x, y \in B(p, \epsilon)\} < 2\epsilon$, ou seja, $d(B(p, \epsilon)) < 2\epsilon$. □

2.4 Sequências em Espaços Métricos

2.4.1 Sequências - Limite de uma Sequência

Seja (M, d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \mapsto x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M , é chamada *sequência de elementos de M* e a notação para se indicar uma tal sequência é $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou resumidamente (x_n) . Devemos distinguir o conjunto dos termos da sequência da sequência propriamente dita.

Dada a sequência (x_n) , cada imagem x_n é chamado *termo da sequência*. Assim o conjunto dos termos dessa sequência é $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ e a conceituação aqui é bem diferente da de sequência. Dada uma sequência (x_r) em M , se $\{r_1, r_2, \dots\} \subset \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < \dots$, então a aplicação dada por $r_i \mapsto x_{r_i}$ é indicado por $(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \dots)$ e recebe o nome de *subsequência de x_r* .

Definição 7. Seja (M, d) um espaço métrico. dizemos que um ponto $p \in M$ é *limite de uma sequência (x_n)* de pontos de M se, para toda bola $B(p, \epsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$n \geq r \implies (x_n) \in B(p, \epsilon)$$

para indicar que p é limite da sequência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$ ou ainda, $x_n \mapsto p$. Dizemos, para exprimir este fato, que (x_n) é um *sequência convergente* ou que (x_n) *converge* para p .

Proposição 2. Uma sequência (x_n) de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um índice r de maneira que

$$n \geq r \implies d(x_n, p) < \epsilon$$

Demonstração. Por def: é evidente pois $x_n \in B(p, \epsilon) \iff d(x_n, p) < \epsilon$ □

Nota 2. É claro, em vista da definição, que se $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ converge para p , então, para qualquer índice r , a subsequência $(x_r, x_{r+1}, \dots)$ também converge para p .

Proposição 3. (Unicidade do Limite) Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M . Então é *único* o limite dessa sequência.

Demonstração. Suponhamos $\lim(x_n) = p$ e $\lim(x_n) = q$. Se $p \neq q$, então $\epsilon = \frac{d(p, q)}{2}$ é maior do que zero e portanto existem índices r, s de maneira que:

$$n \geq r \implies d(x_n, p) < \epsilon$$

$$n \geq s \implies d(x_n, q) < \epsilon$$

Tomando $t = \max\{r, s\}$, então

$$n \geq t \implies (d(x_n, p) < \epsilon \text{ e } d(x_n, q) < \epsilon)$$

Daí para todo $n \geq t$:

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(p, q)$$

O que é absurdo. □

Proposição 4. Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p .

Demonstração. Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots)$ uma subsequência da sequência dada e consideremos $\epsilon > 0$. Da hipótese de que $\lim x_n = p$ decorre que existe um k tal que

$$n \geq k \implies d(x_n, p) < \epsilon$$

Ora, como cada $r_i \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r_2 < \dots$, então existe $r_t > k$ e portanto, para todo $r_i \geq r_t$, vale a relação

$$d(x_{r_i}, p) < \epsilon$$

com o que fica provado que $\lim x_{r_i} = p$. □

Nota 3. A recíproca da proposição (4) obviamente não é válida. Em $\mathbb{R}$, por exemplo, a sequência $(1, 2, 1, 2, \dots)$ não é convergente enquanto que suas subsequências $(1, 1, 1, \dots)$ e $(2, 2, 2, \dots)$ são convergentes.

Definição 8. (Sequência Limitada) Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico M se diz *limitada* se o conjunto $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$, para quaisquer termos x_r e x_s da sequência dada.

Proposição 5. Toda sequência convergente é limitada

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de um espaço M , convergente para $p \in M$. Dada a bola $B(p, 1)$, existe então um índice r tal que

$$n \geq r \implies x_n \in B(p, 1)$$

Seja $k > \max\{1, k\}$. Então todos os pontos do conjunto $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ pertencem a essa bola e portanto, para quaisquer termos x_i e x_j da sequência:

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2\epsilon$$

O que prova ser a sequência (x_n) limitada. $\square$

Nota 4. Nem toda sequência limitada é convergente. De fato em $\mathbb{R}$ a sequência $(1, 2, 1, 2, \dots)$ é obviamente limitada mas não é convergente.

2.4.2 Sequências em $\mathbb{R}$

No espaço $\mathbb{R}$ têm muito interesse as chamadas *sequências monótonas* que compreendem os seguintes tipos:

Definição 9. (Sequências Monótonas) *Crescentes* são as sequências (x_n) tais que têm-se $x_r \leq x_{r+1}$ para qualquer índice r . Se $x_r < x_{r+1}$, para todo $r \geq 1$, então (x_n) se diz *estritamente crescente*. *Decrescentes* são as sequências (x_n) tais que $x_{r+1} \leq x_r$, para qualquer índice r . Se $x_{r+1} < x_r$, para todo $r \geq 1$, então (x_n) se diz *estritamente decrescente*.

Proposição 6. Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.

Demonstração. Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \dots < p$ e seja $p = \sup\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$. Provaremos que $\lim x_n = p$. Dado $\epsilon > 0$, não se pode ter $x_n \leq p - \epsilon$ para todo índice n pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto $\{x_n\}$ menor do que p . Donde, para um certo índice r tem-se $p - \epsilon < x_r < p$ e daí

$$p - \epsilon < x_n < p + \epsilon$$

para todo $n \geq r$, ou seja

$$n \geq r \implies |x_n - p| < \epsilon$$

Isto vem garantir nossa afirmação de que $\lim x_n = p$. A demonstração no caso de uma sequência decrescente é análoga. $\square$

Proposição 7. Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo desse conjunto.

Demonstração. Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 > x_2 > \dots > a$ e seja $a = \inf\{x_n | n = 1, 2, \dots\}$. Provaremos que $\lim x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, não se pode ter $a + \epsilon \leq x_n$ para todo índice n pois isto significaria a existência de um limite inferior do conjunto $\{x_n\}$ maior do que a . Donde, para um certo índice b tem-se $a \leq x_b < a + \epsilon$ e daí

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

para todo $n \geq b$, ou seja

$$n \geq b \implies |x_n - a| < \epsilon$$

Isto vem garantir nossa afirmação de que $\lim x_n = a$. A demonstração no caso de uma sequência decrescente é análoga. $\square$

Proposição 8. (*Conservação do sinal*)

1. Se (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ e se $\lim x_n = p$, $p > 0$ então existem um índice r e uma constante $c > 0$ de maneira que $x_n > c$, para todo $n \geq r$.
2. Se $\lim x_n = p < 0$, então existe uma constante $c < 0$ e existe um índice r tal que $x_n < c$ para todo $n \geq r$.

Demonstração. 1. Tomemos $\epsilon = \frac{p}{2}$. Então existe um índice r tal que para $n \geq r$ se tem $|x_n - p| < \frac{p}{2}$, ou seja, $-\frac{p}{2} < x_n - p < \frac{p}{2}$. Donde (somando p): $\frac{p}{2} < x_n$, para qualquer $n \geq r$. Então basta tomar $c = \frac{p}{2}$

2. Neste caso a demonstração é semelhante: é só tomar $\epsilon = \frac{|p|}{2}$ e veremos que $c = \frac{p}{2}$ verificará a condição proposta, a partir de um certo termo. $\square$

2.5 Topologia dos Espaços Métricos

Definição 10. (Conjunto Aberto) Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz *aberto* se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.

Proposição 9. Seja $\mathfrak{A}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d) . Então:

- $\emptyset, M \in \mathfrak{A}$
- $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M ou seja, se cada $A_i \in \mathfrak{A}$, então $\bigcup A_i \in \mathfrak{A}$.

Ver demonstração em [1]

Definição 11. (Ponto Interior) Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado de *ponto interior* ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado de *interior* de A e é indicado por A° . É claro que $A^\circ \subset A$.

Definição 12. Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz *fechado* se, e somente se, F^c é aberto.

Proposição 10. Seja $\mathfrak{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M . Então:

1. $\emptyset, M \in \mathfrak{F}$
2. $H, F \in \mathfrak{F} \implies H \cup F \in \mathfrak{F}$
3. Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M , então $\bigcap F_i \in \mathfrak{F}$.

Ver demonstração em [1]

Definição 13. (Ponto Aderente) Seja A um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $p \in M$ se diz *ponto aderente* ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale a relação

$$B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Definição 14. (Ponto de Acumulação) Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M . Diz-se que um ponto $p \in M$ é *ponto de acumulação* de A se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, a interseção

$$(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap A$$

é um conjunto infinito. Quer dizer que toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A , distintos do ponto p .

Nota 5. O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de *Conjunto Derivado* de A e se indica por A' .

2.6 Continuidade

Lembramos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto p se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

Intuitivamente: estão "arbitrariamente" próximos de $f(p)$ os valores de f correspondentes a pontos "suficientemente" próximos de p . A definição a seguir é motivada pelo que acabamos de lembrar

Definição 15. Sejam M e N espaços métricos (cujas métricas, por comodidade, indicaremos pelo mesmo símbolo d). Uma função $f : M \rightarrow N$ se diz *continua* no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

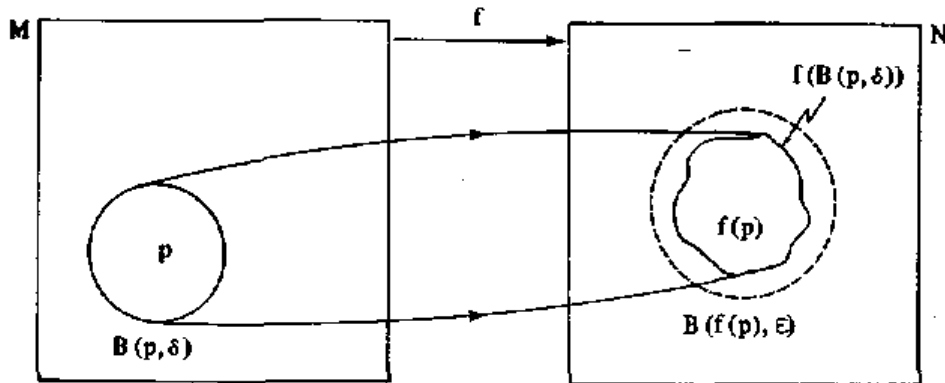
Dizer que f é continua significa que f é contínua em todos os pontos de M .

Proposição 11. Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$$

Ver figura 2.11 abaixo:

Figura 2.11: Gráfico relativo a $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.90)

Demonstração.

($\Rightarrow$) Dada a bola $B(f(p), \epsilon)$, considerando o seu raio ϵ , existe, por hipótese, $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

Considerando a bola $B(p, \delta)$ mostremos que sua imagem direta por f está contida em $B(f(p), \epsilon)$. De fato, se $y \in f(B(p, \delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$. Daí $d(x, p) < \delta$ o que implica $d(f(x), f(p)) < \epsilon$. Assim $y = f(x) \in B(f(p), \epsilon)$.

($\Leftarrow$) Ver demonstração em [1] □

Proposição 12. Seja $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ uma função contínua. Se d_1 e d'_1 são métricas sobre M e N respectivamente, tais que $d \sim d_1$, e $d' \sim d'_1$, então também é contínua a função

$$f : (M, d_1) \rightarrow (N, d'_1).$$

Ver demonstração em [1]

Exemplos:

- (A) Uma *imersão isométrica* é qualquer aplicação $f : M \rightarrow N$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$. Toda imersão isométrica é contínua porque, para qualquer $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos:

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \epsilon$$

qualquer que seja $p \in M$. Observemos que uma imersão isométrica é injetora pois

$$f(x) = f(y) \implies d(f(x), f(y)) = 0 \implies d(x, y) = 0 \implies x = y.$$

Em particular são contínuas as *isometrias* que são as imersões isométricas sobrejetoras. Vejamos algumas imersões isométricas (logo funções contínuas) importantes:

- (i) As inclusões $j : X \implies M$, definidas por $j(x) = x$, $\forall x \in X$, sendo X um subespaço de M , pois para quaisquer $x, y \in X$

$$d(j(x), j(y)) = d(x, y)$$

Em particular a aplicação idêntica $id_M : M \implies M$ é contínua por ser uma imersão isométrica (na verdade uma isometria).

- (ii) Num produto cartesiano $M \times N$ de dois espaços métricos consideremos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2). Para cada $a \in M$ é uma imersão isométrica a aplicação $j_a : N \longrightarrow M \times N$ dada por $j_a(y) = (a, y)$. De fato, para quaisquer

$$y_1, y_2 \in N : D(j_a(y_1), j_a(y_2)) = D((a, y_1), (a, y_2)) = \sqrt{d(a, a)^2 + d(y_1, y_2)^2} = d(y_1, y_2)$$

Analogamente, para cada $b \in N$, $j_b : M \implies M \times N$ definida por $j_b(x) = (x, b)$ é também uma imersão isométrica.

- (iii) As translações num espaço vetorial normado E , definidas para cada $a \in E$ do seguinte modo: $T_a(x) = x + a$, $\forall x \in E$. De fato, para quaisquer $x, y \in E$:

$$d(T_a(x), T_a(y)) = \|T_a(x) - T_a(y)\| = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

Observemos que uma translação é sempre sobrejetora pois, dado $z \in E$, considerando $x = z - a$ temos

$$T_a(x) = x + a = z - a + a = z$$

Logo as translações são isometrias.

- (B) As *contrações fracas* são aplicações $f : M \longrightarrow N$ tais que:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Toda contração fraca é uma aplicação contínua pois, dado

$\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$, então

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) \leq d(x, p) < \delta = \epsilon$$

para todo $p \in M$. Daremos exemplos a seguir de algumas contrações fracas importantes:

- (i) Se $M_1, \dots, M_n$ são espaços métricos, considerando sobre $M = M_1 \times \dots \times M_n$, a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), as projeções $p_i : M \longrightarrow M_i$ são contrações fracas pois, para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em M temos:

$$d(p_i(x), p_i(y)) = d(x_i, y_i) \leq \sqrt{d(x_i, y_i)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2} = D(x, y)$$

- (ii) Se E é um espaço vetorial normado a adição $s : E \times E \longrightarrow E$ definida por $s(x, y) = x + y$ é uma contração fraca, posto que

$$\begin{aligned} d(s(x_1, y_1), s(x_2, y_2)) &= d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\| \\ &= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = D_1((x_1, y_1); (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

- (iii) As aplicações constantes $f : M \longrightarrow N$, $f(x) = k$, para todo $x \in M$, pois $d(f(x), f(y)) = d(k, k) = 0 \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.
- (C) As aplicações lipschitzianas são aplicações $f : M \longrightarrow N$ para as quais existe uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Toda aplicação lipschitziana é continua pois, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ então:

$$d(x, p) < \delta \implies d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

para qualquer $p \in M$. Vejamos um exemplo importante:

- (i) Dado um espaço vetorial normado E , cada escalar $\alpha \neq 0$ determina uma *homotetia* $h_\alpha : E \longrightarrow E$ definida por $h_\alpha(x) = \alpha x$, $\forall x \in E$. Tomemos $c > 0$ de maneira que $c \geq |\alpha|$. Temos então, para quaisquer $x, y \in E$:

$$d(h_\alpha(x), h_\alpha(y)) = d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| \leq c \|x - y\| = cd(x, y)$$

e portanto h é lipschitziana (logo contínua).

Definição 16. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ se diz *localmente lipschitziana* se, para cada

ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p, \lambda)$ de maneira que a restrição de f a essa bola é lipschitziana.

Mostremos que uma aplicação localmente lipschitziana é contínua.

De fato, se $p \in M$, existe uma bola $B = B(p, \lambda)$ e existe uma constante $c > 0$ de modo que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, $\forall x, y \in B$. Assim, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$, com $\epsilon > 0$ arbitrário, tomemos $\delta > 0$ de maneira que $\delta < \lambda$ e $\delta < \frac{\epsilon}{c}$. Isto posto teremos:

$$\begin{aligned} d(x, p) < \delta &\implies d(x, p) < \lambda \implies x \in B(p, \lambda) \implies d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) \\ &\implies d(f(x), f(p)) < c\delta \implies d(f(x), f(p)) < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon. \end{aligned}$$

Veremos a seguir alguns exemplos importantes de aplicações localmente lipschitzianas:

- (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \geq 1$ é um número natural dado.

Dada uma bola $B = B(p, \lambda)$, seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < b$, para qualquer $x \in B$. Devido ao *teorema de valor médio*, se $x, y \in B$, $x \neq y$, existe $t \in \mathbb{R}$, situado entre x e y , de maneira que $f(x) - f(y) = f'(t)(x - y) = nt^{n-1}(x - y)$. Daí

$$|f(x) - f(y)| = n|t|^{n-1}|x - y| < nb^{n-1}|x - y|, \quad \forall x, y \in B.$$

- (ii) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Tomemos inicialmente $p > 0$ e consideremos uma bola $B = B(p, \lambda) \subset \mathbb{R}_+^*$. Supondo $p - \lambda = a > 0$ teremos:

$$\forall x, y \in B, \quad |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y - x|}{|x||y|} < \frac{1}{a^2}|y - x|$$

o que mostra que f , restrita a B , é lipschitziana.

Para $p < 0$ a demonstração é análoga.

- (iii) A multiplicação por escalares $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ num espaço vetorial normado E é localmente lipschitziana. Provaremos esta afirmação usando sobre $\mathbb{R} \times E$ a métrica D_1 da soma.

Dado uma bola $B = B(p, \lambda)$, onde p é um ponto arbitrário de $\mathbb{R} \times E$, existe uma bola de centro na origem $0 = (0, 0)$ e raio conveniente δ de maneira que $B \subset B(0, \delta)$. (De fato, basta tomar $\delta = d(0, p) + \lambda$.) Assim, dados dois pontos arbitrários (α, u) e (β, v) da bola B , como estes pontos estão na bola $B(0, \delta)$, valem as relações:

$$|\alpha| + \|u\| < \delta \quad \text{e} \quad |\beta| + \|v\| < \delta$$

e daí

$$\|u\| < \delta \quad \text{e} \quad |\beta| < \delta$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(m(\alpha, u); m(\beta, v)) &= d(\alpha u, \beta v) = \|\alpha u - \beta v\| = \|\alpha u - \beta u + \beta u - \alpha v\| = \|(\alpha - \beta)u + \beta(u - v)\| \\ &\leq |\alpha - \beta| \|u\| + |\beta| \|u - v\| < \delta |\alpha - \beta| + \delta \|u - v\| = \delta (|\alpha - \beta| + \|u - v\|) = \delta D_1((\alpha, u); (\beta, v)) \end{aligned}$$

o que mostra que m é lipschitziana em cada bola aberta de $\mathbb{R} \times E$.

Proposição 13. Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência (x_n) de pontos de M convergir para p acarretar que $(f(x_n))$ converge para $f(p)$. Ou seja: se, e somente se, $x_n \rightarrow p$ acarreta $f(x_n) \rightarrow f(p)$.

Ver demonstração em [1]

Proposição 14. Dada a função $f : M \rightarrow N$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) f é contínua
- b) Para todo $q \in N$ e todo $\lambda > 0$, $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é um subconjunto aberto de M
- c) Para todo aberto G de espaço N , $f^{-1}(G)$ é um aberto de M
- d) Para todo fechado F do espaço N , $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M .

Ver demonstração em [1]

Corolário 1. Sejam M e N espaços métricos. Se F e L são subconjuntos fechados de M tais que $M = F \cup L$ e se $f : M \rightarrow N$ é tal que $g = f|_F$ e $h = f|_L$ são contínuas, então f também é contínua.

Ver demonstração em [1]

2.6.1 Funções Uniformemente Contínuas

Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua num ponto $p \in M$. Como sabemos, dado então $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que $d(f(x), f(p)) < \epsilon$ para todo $x \in B(p, \delta)$. Este δ depende, em geral, não só de ϵ como também do ponto p . Há casos porém em que ϵ depende apenas de δ , ou seja, pode-se usar o mesmo δ em todos os pontos de M , no seguinte sentido:

Definição 17. Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \rightarrow N$ se diz *uniformemente contínua* se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall x, y \in M$$

Intuitivamente isso significa que estão "arbitrariamente próximos" entre si dois valores de f correspondentes a dois pontos de M "suficientemente próximos" entre si. É claro, ademais, que toda função uniformemente contínua é também contínua. A recíproca disto não vale como veremos.

Exemplo 16. As aplicações lipschitzianas $f : M \longrightarrow N$ são uniformemente contínuas.

Demonstração. De fato, se $c > 0$ é a constante de Lipschitz de f , então

$$d(f(x), f(y)) < cd(x, y), \quad \forall x, y \in M$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ a definição se verifica, como é óbvio. Em particular as *contrações fracas* são todas uniformemente contínuas. $\square$

Exemplo 17. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é chamada *contração* se existe um número real k , $0 < k < 1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) < kd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Se $k = 0$, f é constante e portanto é uma contração fraca. Se $k > 0$, então f é lipschitziana. Então as contrações são sempre funções uniformemente contínuas.

Exemplo 18. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \frac{1}{t}$, não é uniformemente contínua, embora em cada ponto $p \in \mathbb{R}$ existe uma bola $B(p, \epsilon)$ tal que a restrição de f a essa bola é uniformemente contínua. Mostremos apenas que f não é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $\epsilon = 1$. Para qualquer $\delta > 0$ existem números naturais não nulos, n e $n+1$ de maneira que $\frac{1}{n(n+1)} < \delta$. Façamos $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{n+1}$. Então $|x-y| = \frac{1}{n(n+1)}$ e, no entanto,

$$|f(y) - f(x)| = \left| \left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} \right) - n^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > \epsilon.$$

$\square$

Proposição 15. Sejam d e d_1 métricas sobre M para as quais existem números reais $r, s > 0$ de maneira que:

$$rd(x, y) < d_1(x, y) < sd(x, y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Então $f : (M, d) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua se, e somente se, $f : (M, d_1) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

Proposição 16. Sejam d' e d'_1 métricas sobre N tais que, para certas constantes $r, s \in \mathbb{R}^*$, valem as relações:

$$rd'(x, y) \leq d'_1(x, y) \leq sd'(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in N$. Então têm-se $f : (M, d) \longrightarrow (N, d')$ é uniformemente contínua se, e somente se, $f : (M, d) \longrightarrow (N, d'_1)$ é uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

Nota 6. As duas proposições acima nos garantem, em particular, que quando o domínio ou o contradomínio de uma função f for um produto cartesiano de espaços métricos, é indiferente usar uma qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2 nesse produto, a fim de verificar a continuidade uniforme de f . Quer dizer, se f for uniformemente contínua em relação a uma dessas métricas, também o será em relação as outras e vice-versa.

Proposição 17. Se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ são uniformemente contínuas, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ também é uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

Corolário 2. A restrição de uma função uniformemente contínua $f : M \longrightarrow N$ a um subespaço $X \subset M$ é também uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

Proposição 18. Uma função $f : M \longrightarrow N_1 \times \dots \times N_r$ definida por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$, $\forall x \in M$, é uniformemente contínua se, e somente se, cada função $f_i : M \longrightarrow N_i$, ($i = 1, 2, \dots, r$) é uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

Corolário 3. Se $f_1 : M_1 \longrightarrow N_1, \dots, f_r : M_r \longrightarrow N_r$ são uniformemente contínuas, então:

$$f : M_1 \times \dots \times M_r \longrightarrow N_1 \times \dots \times N_r,$$

definida por $f(x_1, \dots, x_r) = (f_1(x_1), \dots, f_r(x_r))$ é uniformemente contínua.

Ver demonstração em [1]

2.7 Conjuntos Compactos

2.7.1 Compacidade

Definição 18. Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é *compacto* se, para toda sequência (x_n) de pontos de K , existe uma subsequência (x_{n_j}) que converge para um ponto $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) se diz compacto se o conjunto M é compacto.

Exemplo 19. Todo conjunto finito.

Demonstração. Se K é finito e $(x_1, x_2, \dots)$ é uma sequência de pontos de K , então existe um termo x_r tal que $(x_r, x_r, \dots)$ é uma subsequência da sequência dada. Como a sequência $(x_r, x_r, \dots) \longrightarrow x_r$, então fica provada nossa afirmação. $\square$

Exemplo 20. Na reta real todo intervalo $[a, b]$

Demonstração. De fato, seja $(x_1, x_2, \dots)$ uma sequência de pontos de $[a, b]$ e consideremos a sequência $(s_1, s_2, \dots)$, onde

$$S_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Obviamente tem-se:

$$a \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq b$$

e portanto, se $s = \sup\{S_n\}$, então $s = \lim S_n$. Assim, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe um índice n tal que $|S_n - S| < \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_1$. Considerando algum índice $m > n_1$, como $S_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, existe um índice $i_1 \geq m$ de modo que $|x_{i_1} - S_m| < \frac{1}{2}$. Daí então

$$|x_{i_1} - S| \leq |x_{i_1} - S_m| + |S_m - S| < 1$$

Analogamente, para $\epsilon = \frac{1}{4}$ existe um índice n_2 tal que $|S_n - S| < \frac{1}{4}$ para todo $n \geq n_2$

Tomando um índice m tal que $m > n_2$ e $m > i_1$, sendo $S_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, existe um índice $i_2 \geq m$ (logo $i_2 > n_2$ e $i_2 > i_1$) de maneira que $|x_{i_2} - S_m| < \frac{1}{4}$. Donde então

$$|x_{i_2} - S| \leq |x_{i_2} - S_m| + |S_m - S| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dessa forma obtemos uma sequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$ que é subsequência de $(x_1, x_2, \dots)$ e tal que

$$|x_{i_r} - S| < \frac{1}{2^{r-1}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

Como $\lim \left(\frac{1}{2^{r-1}} \right) = 0$, então $\lim(x_{i_r} - S) = 0$ e portanto

$$\lim x_{i_r} = S.$$

$\square$

Proposição 19. Seja M um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M tais que F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F também é compacto.

Ver demonstração em [1]

Proposição 20. Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado.

Ver demonstração em [1]

Proposição 21. Sejam M e N espaços métricos e seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ também é compacto.

Ver demonstração em [1]

Proposição 22. Sejam M e N espaços métricos e consideremos sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas equivalentes D, D_1 ou D_2 . Se K e L são subconjuntos de M e N , respectivamente, então $K \times L$ é compacto se, e somente se, K e L são compactos.

Ver demonstração em [1]

Corolário 4. Se $K_1, K_2, \dots, K_n$ são respectivamente subconjuntos compactos dos espaços métricos $M_1, M_2, \dots, M_n$, e se em $M = M_1 \times \dots \times M_n$ consideramos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), então $K = K_1 \times \dots \times K_n$ é compacto se, e somente se, $K_1, K_2, \dots, K_n$ são compactos.

Ver demonstração em [1]

Definição 19. Um subconjunto de A de um espaço métrico M se diz *totalmente limitado* se, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n \in A$ de maneira que:

$$A \subset B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon).$$

É claro que um subconjunto totalmente limitado é limitado.

Proposição 23. Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é totalmente limitado.

Demonstração. Suponhamos K compacto e não totalmente limitado. Então existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$K \not\subset B(x_1, \epsilon), \forall x_1 \in K$$

$$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon), \forall x_2 \in K - B(x_1, \epsilon)$$

$$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup B(x_3, \epsilon), \forall x_3 \in K - (\cup B(x_i, \epsilon)) \ (i = 1, 2)$$

...

Formemos agora a sequência $(x_1, x_2, \dots)$ de maneira que $x_1 \in K, x_2 \in K - B(x_1, \epsilon), \dots$ o que nos é possibilitado pelas considerações anteriores. Como seus termos estão em K , que é compacto, (x_n) admite uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots) \longrightarrow p \in K$. Como os termos (x_{n_i}) são distintos entre si, a bola aberta $B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$ contém infinitos desses termos. Assim, tomando

$$x_r, x_s \in B\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

de maneira que $x_r \neq x_s$ e $r < s$, temos:

$$d(x_r, x_s) \leq d(x_r, p) + d(p, x_s) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

isto nos mostra que $x_s \in B(x_r, \epsilon)$ o que é absurdo. $\square$

Corolário 5. Todo subconjunto compacto de um espaço métrico M é limitado.

Ver demonstração em [1]

Nota 7. Não vale a recíproca do corolário acima. De fato, consideremos num conjunto infinito M a métrica zero-um. Obviamente M é limitado de $d(M) = 1$. Mas se considerarmos uma sequência $(x_1, x_2, \dots)$ em M tal que $x_i \neq x_j$, sempre que $i \neq j$, nenhuma subsequência de (x_n) converge pois, como já vimos, as sequências convergentes neste caso são as estacionárias. Logo M não é compacto embora seja limitado.

2.7.2 Continuidade e Compacidade

Proposição 24. Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico M . Para toda função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ existem então $a, b \in A$ de maneira que

$$f(a) = \inf f(A) \text{ e } f(b) = \sup f(A)$$

Demonstração. Sendo A compacto, então $f(A)$ também o é já que f é contínua. Daí, como $f(A)$ é subconjunto de $\mathbb{R}$, $f(A)$ é fechado e limitado. Deste último fato decorre que existem

$$u = \inf f(A) \text{ e } v = \sup f(A)$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $y_1, y_2 \in f(A)$ de maneira que:

$$u \leq y_1 < u + \epsilon \text{ e } v - \epsilon < y_2 \leq v$$

o que acarreta

$$]u - \epsilon, u + \epsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

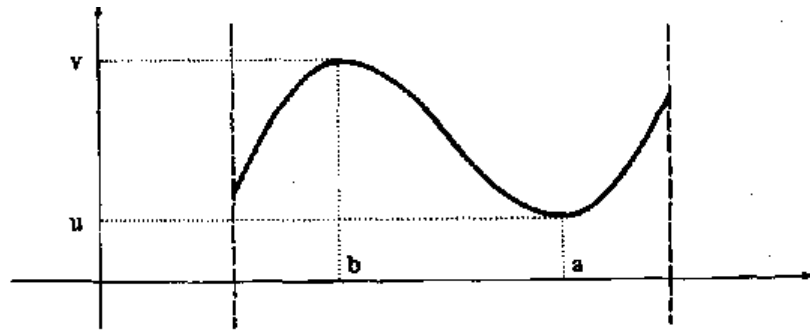
e

$$]v - \epsilon, v + \epsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

e portanto que $u, v \in f(A)$. Como porém $f(A) = \overline{f(A)}$, pois $f(A)$ é fechado, então $u, v \in f(A)$ e portanto existem $a, b \in A$ tais que:

$$f(a) = \inf f(A) \text{ e } f(b) = \sup f(A)$$

Ver figura 2.12 abaixo: $\square$

Figura 2.12: Grafico relativo a $f(a) = \inf f(a)$ e $f(b) = \sup f(a)$ 

Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.123)

2.7.3 Compacidade e Continuidade Uniforme

Proposição 25. Toda aplicação contínua de um espaço métrico compacto num espaço métrico N qualquer é uniformemente contínua.

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, para algum $\epsilon_0 > 0$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$, haveria elementos $x_k, y_k \in M$ de maneira que

$$d(x_k, y_k) < \frac{1}{k} \text{ e } d(f(x_k), f(y_k)) \geq \epsilon_0$$

Da compacidade de M segue que existe uma subsequência (x_{k_j}) de (x_k) tal que $x_{k_j} \rightarrow p \in M$. Mostremos que $y_{k_j} \rightarrow p$. De fato, dado $\epsilon > 0$ temos que

$$d(x_{k_j}, p) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ a partir de um índice } k_{j_1}$$

e

$$\frac{1}{k_j} < \frac{\epsilon}{2}, \text{ a partir de um índice } k_{j_2}$$

Se k_{j_0} é o maior desses dois índices, então, $\forall k_j \geq k_{j_0} : d(y_{k_j}, p) \leq d(y_{k_j}, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, p) < \frac{1}{k_j} + d(x_{k_j}, p) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Como f é contínua, então

$$\lim f(x_{k_j}) = f(p) = \lim f(y_{k_j})$$

e daí, para uma infinidade de índices k_j :

$$d(f(x_{k_j}), f(y_{k_j})) \leq d(f(x_{k_j}), f(p)) + d(f(p), f(y_{k_j})) < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0$$

o que é absurdo. □

2.7.4 Abertos e compacidade

Seja M um espaço métrico e seja A um subconjunto de M . Uma *cobertura aberta* de A é uma família $\mathcal{F} = (G_i)$ de subconjuntos abertos de M tal que $\bigcup G_i \supset A$. Caso exista uma subfamília $\mathcal{F}' = (G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n})$ de $\mathcal{F}$ tal que $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \supset A$, então dizemos que é uma *subcobertura finita* de A . Se para toda cobertura aberta de A existe uma subcobertura finita de A dizemos que para este subconjunto vale a propriedade, (ou a condição de *Heine-Borel*). Nosso objetivo nesta subseção é mostrar que num espaço métrico a condição de Heine-Borel equivale à compacidade.

Dizer que para um espaço métrico (M, d) vale a condição de Heine-Borel significa dizer que para o conjunto M vale tal condição.

Proposição 26. Todo espaço métrico que satisfaz a condição de Heine-Borel é compacto.

Demonstração. Seja M um espaço métrico que satisfaz a condição de Heine-Borel e consideremos uma sequência (x_n) de pontos de M . Há dois casos a considerar:

i) $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ é finito

Quando isto acontece há pelo menos um elemento $x_r \in A$ de modo que $(x_r, x_r, \dots)$ é uma subsequência de (x_n) ; como esta subsequência converge, fica provada a proposição neste caso.

(ii) A é infinito

Mostraremos primeiro que neste caso $A' \neq \emptyset$. De fato, se $A' = \emptyset$, devido à fórmula $\overline{A} = A \cup A'$ teríamos que $A = \overline{A}$ o que equivale a A ser fechado. Considerando então uma cobertura aberta $\mathcal{F} = (G_j)$ de A , então $\mathcal{F}_1 = (G_i \cup A^c)$ é uma cobertura aberta de M (pois A^c é aberto) e, portanto, existem índices $i_1, \dots, i_n$ de modo que

$$(G_{i_1} \cup A^c) \cup \dots \cup (G_{i_n} \cup A^c) \subset M = A \cup A^c$$

Donde $G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n} \supset A$ e portanto a suposição de que $A' = \emptyset$ nos leva à conclusão de que A também deve satisfazer a condição de Heine-Borel. Mas como $p \notin A'$, para qualquer $p \in M$, então existe um aberto H_p de modo que $(H_p - p) \cap A = \emptyset$ ou, o que é equivalente, $H_p \cap A = \emptyset$ ou $H_p \cap A = p$, para cada um dos elementos de M . Sendo porém $(H_p)_{p \in M}$ uma cobertura aberta de M , e portanto de A , existem então $p_1, p_2, \dots, p_n \in M$ de modo que

$$A \subset (H_{p_1} \cup H_{p_2} \cup \dots \cup H_{p_n})$$

Mas a inclusão acima é um absurdo já que A é infinito ao passo que cada H_{p_i} contém no máximo um elemento de A . Assim somos levados à conclusão de que $A' \neq \emptyset$. Tomando então $q \in A'$, como A é infinito, existe uma subsequência de (x_n) que converge para q .

□

Para provarmos a recíproca da proposição anterior tomaremos como Lema o seguinte resultado.

Lema 1. Seja M um espaço métrico compacto. Se $\mathcal{F} = (G_i)$ é uma cobertura aberta de M , existe então um número real $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in M$ e para um conveniente G_r de $\mathcal{F}$ vale a inclusão $B(x, \epsilon) \subset G_r$.

Demonstração. Supondo falsa essa afirmação, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in M$ de modo que $B(x, \epsilon) \not\subset G_i$, para qualquer índice i . Assim existiria uma sequência $(x_1, x_2, \dots)$ de pontos de M de modo que

$$\begin{aligned} B(x_1, 1) &\not\subset G_i, \quad \forall G_i \\ B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) &\not\subset G_i, \quad \forall G_i \\ B\left(x_3, \frac{1}{3}\right) &\not\subset G_i, \quad \forall G_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vejamos as duas possibilidades que podem ocorrer com o conjunto dos termos da sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ obtida acima:

(i) $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é finito

Quando isto ocorre é porque existe $p \in M$ tal que $x_n = p$ para infinitos índices. Como $p \in M$, então $p \in G_r$ para um certo r , e como G_r é aberto existe $\delta > 0$ tal que

$$p \in B(p, \delta) \subset G_r$$

Tomando então $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = p$ e $\frac{1}{n} < \delta$, teremos o seguinte absurdo:

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \subset B(p, \delta) \subset G_r.$$

(ii) A é infinito

Neste caso, se $p \in M$ é um ponto de M para o qual converge uma subsequência de (x_n) , então $p \in A'$. Analogamente ao caso anterior existe G_r em $\mathcal{F}$ e existe $\delta > 0$ de modo que

$$p \in B(p, \delta) \subset G_r$$

Existindo infinitos pontos de A em $B(p, \frac{\delta}{2})$ podemos tomar $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(p, \frac{\delta}{2})$ e $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ e assim teremos

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset B(p, \delta).$$

De fato, se $a \in B(x_n, \frac{1}{n})$ então $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ e daí

$$d(a, p) \leq d(a, x_n) + d(x_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

o que vem garantir que $a \in B(p, \delta)$. Como porém $B(p, \delta) \subset G_r$, obtemos a seguinte contradição:

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset G_r$$

□

Nota 8. Um número $\epsilon > 0$ conforme a proposição acima é chamado número de *Lebesgue* da cobertura $\mathcal{F}$.

Proposição 27. Todo espaço métrico compacto satisfaz a condição de Heine-Borel.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = (G_i)$ uma cobertura de um espaço métrico compacto M e indiquemos por ϵ um número de Lebesgue de $\mathcal{F}$. Devido à proposição 23 existem elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ de modo que

$$B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon) \subset M$$

Por outro lado a proposição anterior garante que existem em $\mathcal{F}$ conjuntos $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}$ tais que:

$$G_{i_1} \subset B(x_1, \epsilon), \dots, G_{i_n} \subset B(x_n, \epsilon)$$

Donde

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \subset M$$

□

2.8 Conjuntos Conexos

2.8.1 Conexidade

Definição 20. (Espaço Desconexo) Um espaço métrico (M, d) se diz *desconexo* quando existem dois conjuntos abertos G e H , ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Neste caso dizemos que o par de abertos G e H forma uma desconexão de M e indicamos tal fato por $M = G|H$.

Um espaço *conexo* é um espaço que não é desconexo. Portanto, dizer que M é conexo significa dizer que não existe nenhuma desconexão de M . Um subconjunto $A \subset M$ se diz conexo quando o subespaço (A, d) , onde d é a métrica induzida sobre A pela métrica de M , é conexo.

Nota 9. Na definição acima de espaço desconexo é claro que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$ implica $G = H^c$ e $H = G^c$ e portanto G e H são também conjuntos fechados.

Exemplo 21. Seja M um conjunto com mais da que um elemento e consideremos sobre M a métrica "zero-um". Mostremos então que (M, d) é desconexo. De fato, para todo $a \in M$ são abertos e não vazios os subconjuntos $G = \{a\}$ e $H = G^c = M - \{a\}$ e obviamente $M = G \cup H$.

Exemplo 22. O subconjunto $\{0, 1\}$ de $\mathbb{R}$ é desconexo. Tomemos $U = \{0\}$ e $V = \{1\}$. É claro que U e V são disjuntos, são ambos não vazios e sua união é o conjunto dado. Como

$$U = \left] -1, \frac{1}{2} \right[\cap \{0, 1\} \text{ e } V = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\cap \{0, 1\}$$

então U e V são ambos abertos em $\{0, 1\}$, o que completa a justificativa.

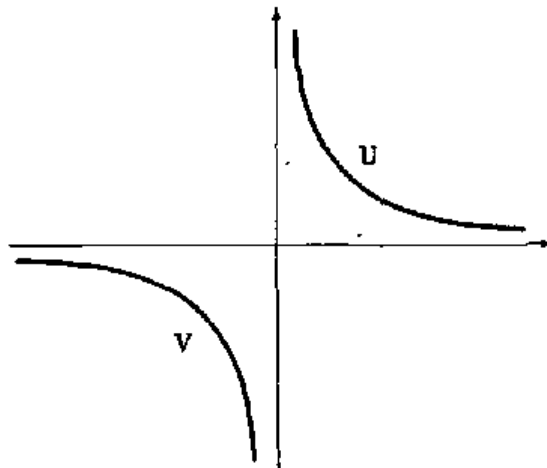
Exemplo 23. Todo subconjunto unitário de um espaço métrico M é conexo.

Exemplo 24. No $\mathbb{R}^2$ o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ é desconexo. De fato, sendo $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$ e $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y < 0\}$, então os subconjuntos

$$U = \mathbb{R}^2 \cap G \text{ e } V = \mathbb{R}^2 \cap H$$

formam uma desconexão de A . Ver figura 2.13 abaixo:

Figura 2.13: Grafico relativo aos conjuntos G e H



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.134)

Mostremos agora que o espaço $\{0, 1\}$ lido no exemplo 22 acima não só é desconexo, como vimos, mas também representa, de um certo modo, todos os espaços desconexos.

Proposição 28. Um espaço M é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0, 1\}$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese existem abertos G e H do espaço de maneira que $M = G \cup H$. Consideremos $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(x) = 0, \forall x \in G$, e $f(x) = 1$ sempre que $x \in H$. É claro que f é sobrejetora uma vez que $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$. E f é contínua porque, considerando os abertos de $\{0, 1\}$ que são $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, todos têm como imagem inversa por f um aberto de M posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = G, f^{-1}(\{1\}) = H$ e $f^{-1}(\{0, 1\}) = M$.

($\Leftarrow$) Por hipótese existe uma sobrejeção contínua $f : M \rightarrow \{0, 1\}$. Assim, são abertos não vazios $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Como, ainda,

$$G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{e } G \cup H = f^{-1}(\{0, 1\}) = M, \text{ então } M = G \cup H.$$

□

Corolário 6. Um espaço M é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas de M em $\{0, 1\}$ são as constantes.

Ver demonstração em [1]

Proposição 29. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N .

Demonstração. Suponhamos $f(M)$ desconexo. Existe então $g : f(M) \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Sendo então

$$f_1 : M \rightarrow f(M)$$

Definida por $f_1(x) = f(x), \forall x \in M$, f_1 é obviamente sobrejetora e é contínua pelo fato de que f é contínua. Portanto a função $g \circ f_1 : M \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é absurdo pois M é conexo. □

Proposição 30. Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.

Demonstração. Se $A \cup B$ fosse desconexo existiria uma função $f : A \cup B \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Seja $p \in A \cap B$ e vamos supor $f(p) = 0$. Então existe $q \in A \cup B$ de maneira que $f(q) = 1$. Supondo por exemplo que $q \in A$, então a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua (restrição de uma função contínua) e sobrejetora ($(f|_A)(p) = 0$ e $(f|_A)(q) = 1$). Mas isto é absurdo, visto que A é conexo. □

Proposição 31. Seja M um espaço métrico tal que, para quaisquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então M é conexo.

Demonstração. Suponhamos que existisse $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Considerando então $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$, seja $A \subset M$ um subconjunto conexo tal que $p, q \in A \subset M$ (existe por hipótese). Logo a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é contrário à hipótese. $\square$

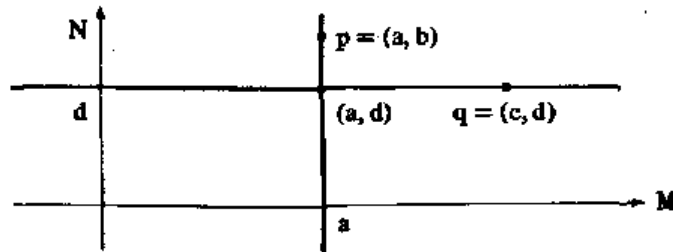
Proposição 32. Dados dois espaços métricos M e N , então $M \times N$ é conexo se, e somente se, M e N são conexos.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Como as projeções p_1 e p_2 são contínuas e $p_1(M \times N) = M$ e $p_2(M \times N) = N$, então o fato de $M \times N$ ser conexo acarreta a conexidade de M e N

($\Leftarrow$) Sejam $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ pontos arbitrários do espaço $M \times N$. Como $\{a\} \times N$ é conexo pois homeomorfo a N (a aplicação definida por $y \rightarrow (a, y)$ é um homeomorfismo de N no subespaço $\{a\} \times N$), $M \times d$ também conexo e vale a relação $(\{a\} \times N) \cap (M \times \{d\}) \neq \emptyset$ então $(\{a\} \times N) \cup (M \times \{d\})$ é conexo. Assim, para quaisquer $p, q \in M \times N$, existe um subconjunto conexo de $M \times N$ que contém esses pontos. A proposição anterior nos garante então que $M \times N$ é conexo. Ver figura 2.14 abaixo: $\square$

Figura 2.14: Gráfico relativo ao conjunto $M \times N$



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.135)

Corolário 7. Um produto $M = M_1 \times \dots \times M_n$ de espaços métricos é conexo se, e somente se, cada $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ é conexo.

Ver demonstração em [1]

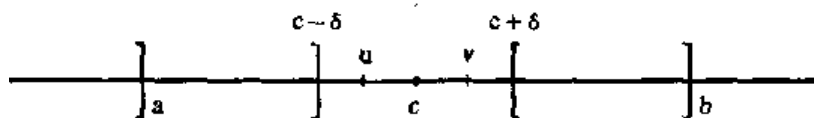
2.8.2 Conexos em $\mathbb{R}$ e Conexidade no $\mathbb{R}^n$

Veremos a seguir que no espaço métrico $\mathbb{R}$, conexo é o mesmo que intervalo ou unitário.

Proposição 33. Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ é a usual, então são conexos todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Demonstração. Faremos a demonstração para um intervalo $]a, b] = J$. Se J fosse desconexo existiria $f : J \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Podemos supor $f(b) = 1$ pois, caso contrário, tomando $g(x) = 1 - f(x)$ (também contínua e sobrejetora) teríamos $g(b) = 1$. Seja $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$. Como f é contínua em c , para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ de modo que $|x - c| < \delta$ ($a < x \leq b$) acarreta $|f(x) - f(c)| < 1$. Disto então resulta que $f(x) = f(c)$, para todo $x \in J$ tal que $c - \delta < x < c + \delta$.

Figura 2.15: Gráfico do intervalo $[a, b]$



Fonte: Domingues, Hygino(1982, p.136)

Ora, sendo $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$, existe $u \in J$ de modo que

$$c - \delta < u \leq c$$

e $f(u) = 0$, do que resulta então que $f(c) = 0$. Por outro lado, tomando $v \in J$ de maneira que se tenha

$$c < v < c + \delta$$

Então $f(v) = 1$ e daí $f(c) = 1$ o que é absurdo. $\square$

Corolário 8. São conexos em $\mathbb{R}$ todos os intervalos do tipo $]a, b[, [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, a[ou]-\infty, a]$.

Ver demonstração em [1]

Corolário 9. Os espaços $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) são conexos.

Demonstração. Ora, como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a qualquer bola aberta $]^{-}a, a[$ e como estas são conexas, então $\mathbb{R}$ é conexo. O corolário da proposição 32 nos garante então a conexidade de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. $\square$

2.9 Espaços Métricos completos

2.9.1 Sequências de Cauchy

Vejamos uma propriedade importante das sequências convergentes. Se (x_n) é uma sequência convergente de um espaço métrico M e se $\lim x_n = p$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice i tal que:

$$n \geq r \implies d(x_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

Como porém

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(p, x_n)$$

então

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Assim obtivemos uma condição sobre os termos da sequência na qual não intervém o limite p dessa sequência. Intuitivamente essa condição significa que as distâncias entre os termos da sequência se tomam arbitrariamente pequenos, para índices convenientemente grandes.

Definição 21. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que:

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Nossas Observações iniciais nos permitem enunciar a seguinte proposição:

Proposição 34. Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

Ver demonstração em [1]

Nota 10. A recíproca da proposição 34 não é válida. Ou seja, uma sequência de Cauchy de um espaço M pode não convergir em M .

Proposição 35. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado E . Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.

Demonstração. Tomando $\epsilon = 1$ existe um índice r tal que:

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1$$

Em particular $\|x_m - x_r\| < 1$, para todo $m \geq r$. Mas

$$\|x_m\| = \|x_m - x_r + x_r\| \leq \|x_m - x_r\| + \|x_r\|$$

e portanto, para todo $m \geq r$:

$$\|x_m\| < 1 + \|x_r\|$$

Seja $\lambda > \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{r-1}\|, 1 + \|x_r\|\}$. Então, para todo índice n

$$d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda$$

o que prova que $x_n \in B(0, \lambda)$, $\forall n \geq 1$. □

Nota 11. Obviamente não vale a recíproca dessa proposição.

Proposição 36. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M . Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $p \in M$, então $\lim x_n = p$.

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ uma subsequência conforme o enunciado. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice n_k tal que:

$$n_i \geq n_k \implies d(x_{n_i}, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

Por outro lado, sendo (x_n) sequência de Cauchy, existe um índice s tal que:

$$m, n \geq s \implies d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Sendo $t = \max\{n_k, s\}$, considerando um índice $n_j > t$ (sempre existe), temos então que:

$$n \geq t \implies d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \epsilon$$

o que garante a convergência de (x_n) para o ponto p . □

Corolário 10. Se d e d' são métricas uniformemente equivalentes sobre M , então as sequências de Cauchy de (M, d) e de (M, d') são as mesmas.

Ver demonstração em [1]

Proposição 37. Se M e N são espaços métricos, para que uma sequência $((x_n, y_n))$ de pontos de $M \times N$ seja uma sequência de Cauchy neste espaço é necessário e suficiente que (x_n) e (y_n) sejam sequências de Cauchy em M e N , respectivamente.

Demonstração. Naturalmente o enunciado se refere a qualquer das métricas usuais em $M \times N$ indistintas no que tange à convergência.

($\implies$) Seja $\epsilon > 0$. Existe então $\delta > 0$ de maneira que:

$$m, n \geq r \implies D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) = d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \epsilon$$

Daí então:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \text{ e } d(y_m, y_n) < \epsilon$$

para quaisquer $m, n \geq r$ e portanto (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy.

($\impliedby$) Para todo $\epsilon > 0$ existem por hipótese r e s tais que:

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2} (\forall m, n \geq r) \text{ e } d(y_m, y_n) < \frac{\epsilon}{2} (\forall m, n \geq s)$$

. Considerando $t = \max\{r, s\}$ temos então que:

$$m, n \geq t \implies D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) < \epsilon.$$

□

A generalização do resultado acima para um produto $M = M_1 \times \dots \times M_n (n > 1)$ de espaços métricos é imediata.

2.9.2 Espaços Completos

Proposição 38. Toda sequência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$

Ver demonstração em [1]

Definição 22. Um espaço métrico M é chamado *completo* se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M .

Proposição 39. Sejam M e N espaços métricos. Então o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.

Ver demonstração em [1]

Corolário 11. O espaço $\mathbb{R}^n$ é completo

Ver demonstração em [1]

Proposição 40. Todo espaço métrico compacto é completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico compacto M . Da compacidade de M resulta que existe uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ que converge para um ponto $p \in M$. Mas se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência converge para o mesmo ponto. Logo $x_n \longrightarrow p$ e portanto M é completo. □

2.10 Teorema do Ponto fixo de Banach

Arelado ao estudos de Espaços Métricos Completos, agora apresentaremos um importante resultado o *Teorema do Ponto fixo de Banach*.

Teorema 1. (Teorema do Ponto fixo de Banach) Seja (E, d) um espaço métrico completo. Se $T : (E, d) \longrightarrow (E, d)$ for uma contração de E , então T possui um único ponto fixo.

Demonstração. Seja x um ponto qualquer de E , e consideremos a sequência (x_n) de pontos de E , de modo que possamos definir da seguinte maneira:

$$x_2 = T(x_1), x_3 = T(x_2), \dots, x_n = T(x_{n-1})$$

Provaremos que x_n converge em E .

De fato, têm-se:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_n) \quad (2.1)$$

Usamos a desigualdade triangular acima, assim sabemos que por definição de sequência, têm-se:

$$d(x_{m+1}, x_{m+2}) = d(T(x_m), T(x_{m+1}))$$

E pelo fato de T ser contração temos $d(T(x_m), T(x_{m+1})) \leq k \cdot d(x_m, x_{m+1})$, assim têm-se:

$$d(x_{m+1}, x_{m+2}) = d(T(x_m), T(x_{m+1})) \leq k \cdot d(x_m, x_{m+1})$$

$$d(x_{m+2}, x_{m+3}) = d(T(x_{m+1}), T(x_{m+2})) \leq k \cdot d(x_{m+1}, x_{m+2}) \leq k \cdot k \cdot d(x_m, x_{m+1}) \leq k^2 \cdot d(x_m, x_{m+1})$$

Rekursivamente, obtêm-se que:

$$d(x_{m+p-1}, x_{m+p}) = d(T(x_{m+p-2}), T(x_{m+p-1})) \leq k \cdot d(x_{m+p-2}, x_{m+p-1}) \leq k^{p-1} \cdot d(x_{m+1}, x_m)$$

Como desejamos calcular a $d(x_{n-1}, x_n)$ Sendo $n > m$, vamos supor $n = m + p$, assim obtêm-se

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq k^{n-m-1} \cdot d(x_m, x_{m+1})$$

e, conseqüentemente (2.1) se escreve sobre a forma:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + k \cdot d(x_m, x_{m+1}) + k^2 \cdot d(x_m, x_{m+1}) + \dots + k^{n-m-1} \cdot d(x_m, x_{m+1})$$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) \leq (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-m-1})$$

Observe que sendo $0 < k < 1$ é uma P.G. convergente pois o quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente é sempre o mesmo (constante). Então podemos usar o seguinte resultado:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^{n-m-1} = \frac{1}{1-k}, \quad 0 < k < 1$$

resultado daí segue:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-k} \cdot d(x_m, x_n) \quad (2.2)$$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{d(x_m, x_n)}{1 - k}$$

observe que

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq k \cdot d(x_1, x_2)$$

$$\vdots$$

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(T(x_{m-1}), T(x_m)) \leq k^{m-1} \cdot d(x_1, x_2)$$

que substituindo em (2.2) as equações:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1 - k} \cdot k^m \cdot d(x_0, x_1)$$

passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ em ambos os lados temos:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{k^m}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1) \right) \\ &\leq d(x_0, x_1) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k^m}{1 - k} = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \leq 0 \end{aligned}$$

Isso resulta que quando $m, n \rightarrow \infty$, $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ provando que (x_n) é de Cauchy, consequentemente é convergente por que E é completo.

Agora vamos mostrar que $\xi = \lim x_n$ é ponto fixo de T . De fato $x_n = T(x_{n-1})$, e tomando o limite em ambos os lados temos que: $\lim x_n = \lim T(x_{n-1})$ Como T é uma contração, é contínua e pela continuidade do limite temos que:

$$\lim x_n = T(\lim(x_{n-1}))$$

$$\xi = T(\xi)$$

Agora devemos provar que ξ é o único ponto fixo de T . Suponhamos que exista um outro ponto fixo ς temos então:

$$d(T(\xi), T(\varsigma)) \leq k \cdot d(\xi, \varsigma)$$

Porém como ξ, ς são pontos fixos então:

$$d(\xi, \varsigma) \leq k \cdot d(\xi, \varsigma) \implies d(\xi, \varsigma) - k \cdot d(\xi, \varsigma) \leq 0 \implies (1 - k) \cdot d(\xi, \varsigma) \leq 0$$

Sendo $1 - k > 0$ pois $0 < k < 1 \implies d(\xi, \varsigma) \leq 0$ por definição de métrica temos $\xi = \varsigma$. □

A hipótese do teorema 1 pode ser enfraquecida, para obtermos um resultado mais geral. Veja o seguinte teorema:

Teorema 2. Existe um único ponto fixo de T se alguma potencia de T for contração

Demonstração. De fato, suponhamos T^m uma contração para algum natural m . Assim, pelo, Teorema 1, T^m possui um único ponto fixo φ isto é; $T^m(\varphi) = \varphi$ têm-se:

$$\varphi = \lim_{p \rightarrow \infty} (T^m)^p(x)$$

Sendo T continua, resulta que:

$$T(\varphi) = T \left(\lim_{p \rightarrow \infty} (T^m)^p(x) \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} (T^m)^p(T(x))$$

Queremos demonstrar que $d(T(\varphi), \varphi) = 0$ ou seja, $T(\varphi) = \varphi$. Com efeito, sendo T^m uma contração segue que, T^{mp} será também contração $\forall p \in \mathbb{N}$. Obtém-se:

$$d((T^m)^p(T(x)), (T^m)^p(x)) \leq \cdot d(T(x), x)$$

E usando indução sobre p , que:

$$d([T^m]^p(T(x)), [T^m]^p(x)) \leq k^p(d[T^m](T(x)), T^m(x)) \leq k^p d(T(x), x)$$

Segue o requerido □

2.10.1 Aplicação as Equações Diferenciais Ordinárias

Agora com o aprofundamento do estudo de espaços métricos completos, aplicaremos os resultados anteriores para demonstrar a existência ver apêndice A e unicidade de solução do problema de Cauchy (1.13)+(1.14) visto no capítulo 1. Antes porém, imporemos à aplicação f certas condições.

Definição 23. Diz-se que uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana relativamente a x , uniformemente em relação a t , quando existe uma constante $k > 0$ tal que:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$$

para todo par $(t, x_1), (t, x_2)$ em Ω (aberto do $\mathbb{R}^2$).

Nota 12. Diz-se que f é localmente lipschitziana em relação a x , uniformemente em relação a t , em um aberto Ω , quando cada ponto de Ω possui uma vizinhança na qual f é lipschitziana em relação a x , uniformemente em relação a t . No que segue omitiremos a sentença uniformemente em relação a t , e diremos simplesmente função lipschitziana em relação a x .

Suponhamos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ seja continua, sendo Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$. Consideremos uma aplicação $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está contido em Ω . Tem-se a seguinte proposição:

Proposição 41. Para que $x = \varphi(t)$ seja solução do problema de Cauchy (1.13)+(1.14) é necessário e suficiente que $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma solução contínua da equação integral.

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds \quad (2.3)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) (**Necessidade**): De fato, seja φ uma solução de (1.13)+(1.14). Então φ que está definida no intervalo $I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, o mesmo se verificando para a

$$g(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in I$$

Integrando

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad x_0 = \varphi(t_0) \text{ de } t_0 \text{ a } t$$

obtém-se a equação (2.3)

($\Leftarrow$) (**Suficiência**): Reciprocamente, se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ for uma solução contínua de (2.3) obtém-se a (1.13) derivando (2.3) relativamente a t ou seja:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds$$

derivando temos que:

$$\varphi'(t) = \left[x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds \right]'$$

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (2.3)$$

e obtém-se a (1.14) calculando $\varphi(t_0)$ ou seja

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s)) \, ds = x_0$$

e pelo teorema fundamental do calculo e como a integral em um intervalo degenerado tem valor zero. Obtendo-se a (1.14).

□

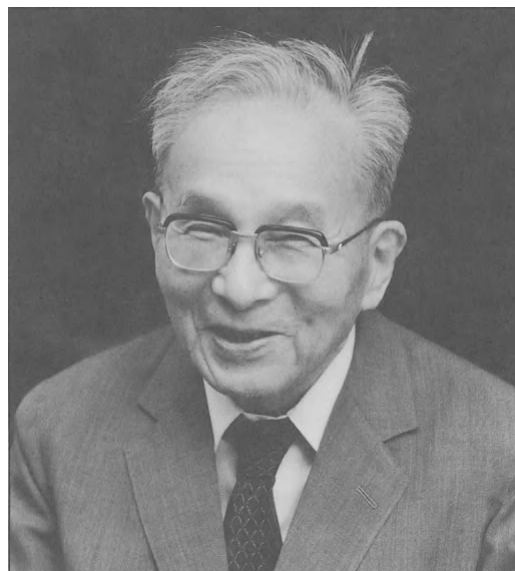
Capítulo 3

Os Teoremas de Unicidade de Nagumo e Osgood

3.1 Um Breve Relato Histórico

3.1.1 Mitio Nagumo

Figura 3.1: Foto de Mitio Nagumo



Fonte: Yamaguti, M., Nirenberg, L., Mizohata, S., Sibuya, Y.1993, capa)

O Professor Mitio Nagumo nasceu em 07 de Maio de 1905 foi um matemático japonês e iniciou sua carreira matemática como pesquisador ativo em equações diferenciais sobre a orientação do falecido professor Takuji Yosie na Universidade Imperial de Tóquio, que, na época, era um dos lugares mais ativos do mundo no campo das equações diferenciais. Seu primeiro trabalho foi publicado em 1926, quando ele era um estudante de 21 anos. Neste trabalho, ele deu uma condição suficiente, conhecida como condição de Nagumo,

para a singularidade da solução de equações diferenciais ordinárias. Ele também publicou cinco artigos sobre problemas em equações diferenciais ordinárias em seus anos de escola. Naquela época, não apenas a matemática, mas também muitas ciências no Japão foram profundamente influenciadas pela Alemanha e seus primeiros trabalhos, foram escritos em alemão. Depois de graduar-se na Universidade Imperial de Tóquio, continuou sua pesquisa na universidade como pós-graduando, escrevendo três artigos conjuntos com o professor Masuo Hukuhara sobre a estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Podemos ver a forma como o professor Nagumo trabalhava mencionada em [4].

O professor Nagumo era um excelente pesquisador e foi um ótimo professor de matemática. Antes de cada palestra, ele dava aos alunos resumos impressos, que ele mesmo digitava. Suas palestras, dadas em voz baixa, eram ricas em conteúdo. Nos anos 1950 e 1960, muitos jovens matemáticos participaram de seus seminários; eles formaram a "Escola Nagumo". Naquela época, os seminários da Escola Nagumo eram geralmente abertos por conversas com o professor Nagumo, e todos os participantes gostavam muito dessas ocasiões. O professor Nagumo teve grande prazer em ter uma atmosfera na qual jovens estudantes de matemática pudessem escolher livremente seus assuntos e ter discussões livres uns com os outros. Muitos co-autores dos trabalhos conjuntos do professor Nagumo eram estudantes na época.

(Yamaguti, M., Nirenberg, L., Mizohata, S., Sibuya, Y.1993, p.463, tradução nossa).

No final dos anos 50, o Sr. Hiroki Tanabe, o Sr. Taira Shirota e outros se juntaram à "Escola Nagumo". O Sr. Kumano-go, mais tarde sucessor do Professor Nagumo, tornou-se seu aluno. Kumano-go tornou-se um dos pioneiros da teoria dos operadores pseudo-diferenciais. Infelizmente, ele faleceu aos 47 anos, em 1982. Este foi o evento mais infeliz da vida matemática do professor Nagumo. Em 1960, o professor Nagumo visitou a Universidade do Rio Grande do Sul no Brasil. Como dito anteriormente, nos primeiros dias do Professor Nagumo, seus trabalhos, com exceção de vários trabalhos conjuntos, foram escritos em alemão. De 1949 a 1950, ele publicou sete artigos em Esperanto. Ele tinha um forte interesse pelo esperanto e tentou promover seu uso no mundo da matemática. Após esse período, todos os seus trabalhos, com exceção de vários trabalhos conjuntos em francês, foram publicados em inglês. Em geral, embora seus trabalhos tenham um caráter elementar, para que se possa lê-los com pouco conhecimento preliminar, encontram-se ideias brilhantes.

Depois de se aposentar da Universidade de Osaka, o professor Nagumo transferiu-se para a Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Sophia, em Tóquio. Ele escreveu dois artigos conjuntos sobre problemas de Cauchy com seu aluno nessa universidade. Ele se aposentou da Universidade Sophia aos 70 anos de idade, onde viveu em silêncio em Koganei, em Tóquio, desfrutando de pintura a óleo e matemática. O professor Nagumo, faleceu em 06 de fevereiro de 1995 aos 89 anos deixando vários trabalhos que influenciaram a muitos matemáticos no campo das equações diferenciais.

3.1.2 William Fogg Osgood

Figura 3.2: Foto de Willian Foog Osgood



Fonte: Office of the Home Secretary, National Academy of Sciences of the united states.2002, p.246)

Nasceu em Boston em 10 de março de 1864 e faleceu a 22 de julho de 1943 em Belmont, foi um matemático estadunidense. Em sua formação matemática, dedicou seus principais esforços ao campo da Convergência de Sucessões de Funções, ao Cálculo de Variações e a Teoria das Equações Diferenciais. Em seu país natal, desenvolveu o rigor da Análise Matemática. Osgood defendeu sua Tese de Doutorado em 1890, na Alemanha, intitulada:

Zur Theorie de zum algebrischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Ableschen Functionen.

Quando Osgood regressou da Alemanha para assumir posições na Universidade de Harvard, descobriram que o Departamento de Matemática era como um colégio provinciano. Ele continha indivíduos de excelência, no entanto, dificilmente poderia ter fornecido um treinamento real avançado, no âmbito da matemática moderna. Então, em poucas décadas, tornou-se um dos departamentos mais importantes do país, com um lugar respeitável no mundo matemático. Tal fato, decorreu naturalmente em grande parte, devido a um movimento geral da Educação Americana, e cada membro do supracitado departamento, teve seu quinhão neste processo. Mas, se o crédito do crescimento extremo do mesmo pode ser dada a qualquer homem, William Foog Osgood foi sem dúvida aquele. Sua influência foi exercida sobre o ensino em todos os níveis, sobre a valorização da pesquisa, e talvez o mais importante de tudo, em fazer de sua vida uma devoção a qualificação de seus alunos. Osgood era incansável, sua missão sempre foi elevar o último de seus estudantes a altura do assunto ministrado. Falava a linguagem do aluno, sempre atento as suas dificuldades. William Foog não poupou esforços, paciente em trazê-lo para ver o que Matemática realmente é: o agente poderoso de iluminação do ambiente físico do mundo, e as gemas da razão humana. Osgood foi uma combinação de sábio mestre e amigo cordial. Este cavalheiro da velha escola, cujo encanto e dignidade fazia do seu conhecimento não apenas um prazer, mas uma honra, era tão inclinado a ver o melhor nos homens, que ele trouxe o seu melhor. Há muitos com quem a memória de Osgood habitará: com todos

aqueles que têm caído herdeiro à sua herança intelectual, com seus antigos alunos, para quem trouxe o espírito leal da ciência, com seus contemporâneos. E também com alguns outros, em cujas vidas ele entrou como uma luz genial de inspiração.

3.2 O Teorema de Nagumo

A fim de se demonstrar o Teorema de Unicidade de Nagumo, precisamos a priori de um Lema, devido a Hille. Assim o teorema supracitado, torna-se uma consequência do lema mencionado. Vejamos:

Lema 2. (devido a Hille) Seja g uma aplicação, tal que: $g \in C(0, a)$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$. Então:

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^t \frac{g(s)}{s} ds \implies g \equiv 0$$

Demonstração. Seja $\varphi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{g(s)}{s} & \text{se } s \neq 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

Observe que: Sendo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s) - 0}{s - 0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s) - g(0)}{s - 0} = g'(0) = 0$$

Conclui-se desta forma, que a aplicação φ é continua no intervalo fechado $[0, a]$.

Agora considere

$$F(t) = \int_0^t \varphi(s) ds, t \in [0, a]$$

É fácil ver que existe F' , posto que $F' = \varphi$, $F(0) = 0$ e mais:

$$F'(t) = \varphi(t) = \frac{g(t)}{t} \text{ se } t \neq 0$$

Como, por hipótese, $g(t) \leq F(t)$ em $(0, a]$, obtemos: $F'(t) = \frac{g(t)}{t} \leq \frac{F(t)}{t}$ em $(0, a]$, posto que $t \neq 0$. Por outro lado, note que:

$$\left[\frac{F(t)}{t} \right]' = \frac{F'(t) \cdot t - F(t) \cdot t'}{t^2} = \frac{F'(t) \cdot t - F(t)}{t^2} = \frac{\frac{g(t)}{t} \cdot t - F(t)}{t^2}$$

Mas como, $g(t) \leq F(t)$, segue que:

$$\left[\frac{F(t)}{t} \right]' \leq 0, \text{ com } t \text{ em } (0, a]. \text{ Com isso conclui-se que: } \frac{F(t)}{t} \text{ decresce em } (0, a].$$

Note ainda que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(0) = \varphi(0) = 0$$

Para finalizarmos a demonstração, basta seguirmos a sequência:

$$F \geq 0 \implies F = 0 \implies g = 0$$

Com efeito, consideremos t um ponto arbitrário de $[0, a]$ e ϵ , tal que: $0 < \epsilon < t \leq a$. Como $\frac{F(t)}{t}$ decresce e $F(t) \geq 0$, podemos escrever:

$$0 < \frac{F(t)}{t} \leq \frac{F(\epsilon)}{\epsilon}$$

Façamos $\epsilon \rightarrow 0$, isto é:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\epsilon)}{\epsilon}$$

Por outro lado, pelo fato de que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\epsilon)}{\epsilon} = 0$ e pelo Teorema do Confronto, têm-se:

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} = \frac{F(t)}{t}$$

Desde que $t \neq 0$, $\frac{F(t)}{t} = 0 \implies F(t) = 0 \quad \forall t \in (0, a]$. Isto finda a demonstração, uma vez que:

$$0 = F(t) = \int_0^t \varphi(s) ds = \int_0^t \frac{g(s)}{s} ds, \quad \text{e:}$$

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^t \frac{g(s)}{s} ds = 0 \quad \text{ou seja } g \equiv 0$$

□

Teorema 3. (Nagumo): Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma função contínua, tal que, se tenha

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1}{|t - t_0|} \cdot |x_1 - x_2|$$

para quaisquer que sejam $(t, x_1), (t, x_2)$ interiores a Ω . Então a equação: $x' = f(t, x)$, possui uma única solução definida em uma vizinhança de t_0 e que passa por (t_0, x_0) .

Demonstração. Sejam $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ duas soluções para o problema

$$x' = f(t, x)$$

e que passam por (t_0, x_0) . Temos então que:

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \quad t_0 \leq t \in I \quad (3.1)$$

e

$$x_2(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) ds \quad t_0 \leq t \in I \quad (3.2)$$

Fazendo (3.1)-(3.2) e aplicando o módulo da integral:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando-se as hipóteses em (3.3), podemos escrever:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_{t_0}^t \frac{1}{|s - t_0|} \cdot |x_1(s) - x_2(s)| ds \quad (3.4)$$

Agora façamos em (3.4) $g(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$, note que $0 \leq g(t)$ Escrevamos também: $|s - t_0| = h$, isto resulta em:

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{|s - t_0|} \cdot |x_1(s) - x_2(s)| ds = \int_0^{|t-t_0|} \frac{1}{h} \cdot |x_1(h) - x_2(h)| dh \quad s > t_0$$

Podemos finalmente escrever (3.4), como:

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^T \frac{g(h)}{h} dh, \quad \text{onde } T = |t - t_0| \quad (3.5)$$

Aplicando em (3.5) o Lema de Hille obtém-se:

$$g(t) = 0 \implies |x_1(t) - x_2(t)| = 0 \implies x_1(t) = x_2(t)$$

□

3.3 O Teorema de Osgood

Definição 24. Seja $w = w(z)$ uma função real, definida positiva, para todo real $z \geq 0$. Diz-se que w é uma *função admissível*, se ela for estritamente crescente, $w(0) = 0$ e

$$\int_{\epsilon}^a \frac{dz}{w(z)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{quando } \epsilon \longrightarrow 0, \epsilon > 0$$

A fim de se demonstrar o Teorema de Unicidade de Osgood, precisamos a priori de um Lema. Assim o teorema supracitado, torna-se uma consequência do lema mencionado. Vejamos:

Lema 3. Seja $w = w(z)$ uma função admissível. Se $g \in C[0, a]$ for tal que:

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^t w[g(s)] \, ds \quad 0 \leq t \leq a$$

então $g \equiv 0$

Demonstração. A prova, far-se-a por contradição, para tanto, considere $g \neq 0$. Seja $h : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(t) = \max_{0 \leq s \leq t} g(s)$, têm-se que $g(t) \leq h(t)$, para cada $0 \leq t \leq a$. Existe $0 \leq t_1 \leq t$, tal que: $h(t) = g(t_1)$. Temos então:

$$g(t) \leq h(t) = g(t_1) \leq \int_0^{t_1} w[g(s)] \, ds \leq \int_0^t w[g(s)] \, ds \leq \int_0^t w[h(s)] \, ds$$

Então, desde que w é estritamente crescente, nós obtemos:

$$w[h(t)] \leq w \left[\int_0^t w[h(s)] \, ds \right]$$

Façamos $\rho(s) = w[h(s)]$, daí:

$$\rho(t) \leq w \left[\int_0^t \rho(s) \, ds \right]$$

Resulta então, $0 < \epsilon < a$ que:

$$\int_\epsilon^a \frac{\rho(t)}{w \left[\int_0^t \rho(s) \, ds \right]} dt \leq \int_\epsilon^a \frac{w \left[\int_0^t \rho(s) \, ds \right]}{w \left[\int_0^t \rho(s) \, ds \right]} dt$$

Segue-se então que:

$$\int_\epsilon^a \frac{\rho(t)}{w \left[\int_0^t \rho(s) \, ds \right]} dt \leq \int_\epsilon^a 1 dt = a - \epsilon < a$$

Agora vamos fazer $v(t) = \int_0^t \rho(s) \, ds$, segue que:

$$\frac{dv}{dt} = \rho(t)$$

Aplicando-se este resultado, na última desigualdade, obtemos:

$$\int_{\epsilon}^a \frac{dv}{w[v]} < a$$

O que é uma contradição, posto que, sendo w uma função admissível, a integral diverge, quando $\epsilon \rightarrow 0$. $\square$

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte.

Teorema 4. (Teorema de Osgood): Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq w[|x_1 - x_2|]$$

para quaisquer $(t, x_1), (t, x_2)$ interiores a Ω , t em uma vizinhança de t_0 , sendo w uma função admissível. Então a equação: $x' = f(t, x)$, possui uma única solução contínua passando por (t_0, x_0) .

Demonstração. Realmente, sejam x_1, x_2 , duas soluções contínuas de $x' = f(t, x)$, passando por (t_0, x_0) . Fazendo consoante a prova do Teorema de Nagumo, tem-se:

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \quad t_0 \leq t \in I \quad (3.6)$$

e

$$x_2(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) ds \quad t_0 \leq t \in I \quad (3.7)$$

Fazendo (3.6)-(3.7) e aplicando o módulo da integral:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicamos em (3.8) as hipóteses do Teorema de Osgood. Isto resultará em:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_{t_0}^t w[|x_1(s) - x_2(s)|] ds \quad (3.9)$$

Agora façamos em (3.9)

$$g(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$$

note que $0 \leq g(t)$ Segue do (Lema 3), o requerido $\square$

Considerações Finais

Neste trabalho, tivemos a oportunidade de estudar um pouco da teoria clássica das Equações Diferenciais Ordinárias, com foco nas condições de Unicidade de Solução do problema $x' = f(t, x)$, na qual podemos ver as contribuições dos matemáticos Willian Foog Osgood e Mitio Nagumo e ver um pouco da história de ambos.

Ao se fazer um estudo qualitativo de soluções do problema de Cauchy, percebe-se que em cada problema a existência e unicidade de solução devem satisfazer as condições impostas sobre as mesmas e podendo assim resolver questões como a do conceito de solução adotado em cada problema e principalmente, que outras propriedades satisfazem esta solução no interior do domínio e no contorno.

Produzir este trabalho foi desafiador, uma vez que não tive a oportunidade de estudar esse assunto na graduação, e como em todo trabalho tive diversas dificuldades, mais que me ajudaram a amadurecer e perceber que o trabalho de pesquisador, além de desafiador pode ser prazeroso e por esse motivo me fez adquirir experiência.

A quem possa interessar espera-se poder contribuir com este trabalho a outras pessoas que tenham o desejo pelo estudo dessa teoria, e se aprofundar na história e nos teoremas desses renomados matemáticos.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Completamento de Um Espaço Métrico

O espaço $\mathbb{Q}$ não é completo como já provamos. A construção de $\mathbb{R}$, à partir de $\mathbb{Q}$, representa o que se chama um *completamento* de $\mathbb{Q}$. Intuitivamente isso pode ser interpretado do seguinte modo: $\mathbb{R}$ é a ampliação de $\mathbb{Q}$ obtida acrescentando-se a este corpo os limites de sequências de Cauchy racionais que a ele não pertencem. E vale ainda a relação: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Veremos a seguir que, dado um espaço métrico, é sempre possível completá-lo.

Definição 25. Um completamento de um espaço métrico (M, d) é um par $(\widehat{M}, D); f$, onde $(\widehat{M}, D)$ é um espaço métrico completo, $f : M \longrightarrow \widehat{M}$ é uma imersão isométrica e $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$ (isto é, $\overline{f(M)} = \widehat{M}$).

Lema 4. Seja (M, d) um espaço métrico. Se existe um subconjunto não vazio $A \subset M$ tal que $\widehat{A} = M$ e toda sequência de Cauchy de pontos de A converge em M , então M é completo.

Demonstração. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M , para todo $\epsilon > 0$ existe um índice r tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{3}$ para quaisquer $m, n \geq r$. O fato de A ser denso em M garante por outro lado que, para cada índice $i > 1$, existe $y_i \in A$ de maneira que $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$. Assim, se s é um índice maior que r e maior que $\frac{3}{\epsilon}$, para $m, n \geq s$ vale então:

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{m} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

O que mostra que (y_n) é uma sequência de Cauchy em A . Como as sequências de Cauchy em A convergem em M , existe $p \in M$ tal que $\lim y_n = p$. Mostremos que (x_n) também converge para p o que concluirá a demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim y_n = p$, existe t tal que:

$$n \geq t \implies d(y_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

Daí, para todo $n > \max \left\{ t, \frac{2}{\epsilon} \right\}$, vamos ter:

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Teorema 5. Todo espaço métrico (M, d) admite um completamento.

Demonstração. Como a demonstração é longa nós a faremos por partes para melhor podermos nos situar durante o seu desenvolvimento.

(A) Construção do Espaço $\widehat{M}$

No conjunto S das sequências de Cauchy em M define-se a relação:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim(x_n, y_n) = 0$$

A relação $\sim$ é de equivalência. Verifiquemos apenas a validade da propriedade transitiva.

Se $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$, então $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, z_n) = 0$. Como porém

$$0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

para todo $n \geq 1$, então:

$$0 \leq \lim d(x_n, z_n) \leq \lim [d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)] = 0$$

e portanto $\lim d(x_n, y_n) = 0$ o que significa $(x_n) \sim (z_n)$. Seja $\widehat{M} = S / \sim$, para cada $\alpha, \beta \in \widehat{M}$, definamos

$$D(\alpha, \beta) = \lim d(x_n, y_n)$$

onde (x_n) e (y_n) pertencem, respectivamente, às classes α e β . Sem dificuldades maiores prova-se que D é uma métrica sobre $\widehat{M}$. Mostremos apenas que D está bem definida.

Se $(x'_n) \sim (x_n)$ e $(y'_n) \sim (y_n)$, então

$$d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$$

e daí decorre:

$$\lim d(x'_n, y'_n) \leq \lim d(x_n, y_n)$$

Analogamente se obtém que:

$$\lim d(x_n, y_n) \leq \lim d(x'_n, y'_n)$$

Donde: $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n)$.

(B) Construção da Isometria de f .

Para cada sequência $(x_n) \in S$, se $x_n = a$, para todo índice n , indicaremos por $\alpha(a)$ a classe de equivalência a que pertence (x_n) . A aplicação $f : M \longrightarrow M$ definida através da fórmula $f(a) = \alpha(a)$, para todo $a \in M$, é uma imersão isométrica pois, para quaisquer $a, b \in M$:

$$D(f(a), f(b)) = D(\alpha(a), \alpha(b)) = \lim(d(a, b)) = d(a, b).$$

(C) $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$

Dado $\alpha \in \widehat{M}$ seja $(x_n) \in \alpha$. Tomando $\epsilon > 0$ existe então r tal que, para quaisquer $m, n \geq r$, $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para $a = x_{r+1}$ teremos:

$$\begin{aligned} D(\alpha, \alpha(a)) &= \lim(d(x_l, x_{r+1}); \dots; d(x_r, x_{r+1}); \dots) \\ &= \lim(d(x_r, x_{r+1}); d(x_{r+1}, x_{r+1}); d(x_{r+2}, x_{r+1}); \dots) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

E portanto $\alpha(a) = f(a) \in B_D(\alpha, \epsilon)$.

(D) M é completo

Seja $(\beta_n) = (\alpha(a_n))$ uma sequência de Cauchy em $f(M)$. Como

$$D(\beta(n), \beta(n)) = d(a_m, a_n)$$

então (a_n) é uma sequência de Cauchy em M . Sendo λ a classe de equivalência a que pertence (a_n) , provemos que $\lambda = \lim \beta(n)$. Dado $\epsilon > 0$, o fato de (a_n) ser de Cauchy garante que existe um índice r tal que:

$$m, n \geq r \implies d(a_m, a_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, para todo $n \geq r$ temos:

$$D(\beta(n), \lambda) = \lim(d(a_n, a_1); d(a_n, a_2); \dots; d(a_n, a_r); \dots) = \lim(d(a_n, a_r); d(a_n, a_{r+1}); \dots) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e portanto $\lim \beta(n) = \lambda$. Que M é completo é decorrência então do lema anterior. $\square$

A.2 Teoremas de Existência de Solução de uma EDO de 1º Ordem

Como em nosso trabalho admitimos a existência da solução como pré-requisito, devemos agora adicionar dois Teoremas que comprovam a existência da Solução de uma EDO de 1º ordem.

Teorema 6. Seja f uma aplicação numérica definida e continua no retângulo

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\} \text{ de centro } (t_0, x_0)$$

e suponhamos f Lipschitziana em relação a x , uniformemente em relação a t , neste retângulo. Então o problema de Cauchy (1.13)+(1.14) possui uma única solução definida em uma vizinhança I de t_0

Demonstração. Sendo f continua no retângulo, segue-se que f é limitada, ou seja, $|f| < M$. Seja $r = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ e consideremos a coleção das aplicações numéricas continuas $\varphi : I_r \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I_r = (t_0 - r, t_0 + r)$, satisfazendo às seguintes condições:

- 1) $\varphi(t_0) = x_0$
- 2) $|\varphi(t) - x_0| \leq b$

Para duas funções quaisquer $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ definamos a distancia por

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

sendo $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup_{t \in I_r} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$, por definição. Daí resulta que a coleção de funções definida anteriormente, torna-se um espaço métrico completo, o qual representaremos por $C^*(I_r)$. Consideremos a aplicação T definida em $C^*(I_r)$ por

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds, \quad [t_0, t] \subset I_r \quad (\text{A.1})$$

Vejamos que realmente $(T\varphi) \in C^*(I_r)$. Sendo f continua, segue-se que $T\varphi$ é continua em I_r . Tem-se:

- 1) $(T\varphi)(t_0) = x_0$
Seja $(T\varphi)(t)$ definida em (A.1), segue então que

$$(T\varphi)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))ds, \quad [t_0, t] \subset I_r$$

Pelo teorema fundamental do Calculo sabemos que toda integral que tem um intervalo degenerado têm valor igual a zero, então

$$(T\varphi)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))ds, \quad [t_0, t] \subset I_r$$

$$(T\varphi)(t_0) = x_0$$

- b) $|(T\varphi)(t) - x_0| \leq b$

$$|(T\varphi)(t) - x_0| = \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x_0 \right| = \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - \cancel{x_0} \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right|$$

Pela desigualdade integral temos:

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq Mr < M \frac{b}{M} < b$$

provando assim que $(T\varphi) \in C^*(I_r)$. Tendo em vista a proposição 41, para demonstrar o teorema, é suficiente demonstrarmos que T é uma contração. De fato,

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(t) - (T\psi)(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - \left[x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right] \right| \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| = \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| = \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \end{aligned}$$

Pelo fato de f ser Lipschitziana têm-se que:

$$\int_{t_0}^t |k(\varphi(s)) - (\psi(s))| ds \leq k \int_{t_0}^t |(\varphi(s)) - (\psi(s))| ds$$

Daí resulta que

$$d(T\varphi, T\psi) \leq Kr d(\varphi, \psi)$$

Portanto, tomando r tal que $kr < 1$, conclui-se que T é uma contração, logo pelo Teorema 1 possui um único ponto fixo, isto é, existe uma única função $x = x(t)$ em $C^*(I_r)$ tal que $Tx = x$, ou seja, tal que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt$$

Afim de eliminar a condição $kr < 1$, demonstraremos que a aplicação T definida por (A.1) satisfaz as condições do Teorema 2 isto é, existe um número natural n tal que T^n é uma contração. Todavia, demonstraremos que existe um número natural n tal que T^n é uma contração, para todo $m \geq n$. Inicialmente, vamos comparar os números

$d(T^n(x), T^n(y))$ e $d(x, y)$, sendo x, y elementos de $C^*(I_r)$. Tem-se:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

Por definição. Façamos $x = x_1$ e

$$x_2(t) = (Tx_1)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))ds$$

$$x_3(t) = (Tx_2)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))ds = (T(Tx_1))(t) = (T^2x_1)(t)$$

De um modo geral, pondo $T^n x_1 = x_n$, obtém-se

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds$$

para todo intervalo $(t_0, t) \subset I_r$. Segue-se, daí, sendo f Lipschitziana, que

$$\begin{aligned} |x_n(t) - y_n(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds - \left[x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds \right] \right| \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds \right| \\ &= \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-1}(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-1}(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^t |k(x_{n-1}(s) - y_{n-1}(s))|ds \leq k \int_{t_0}^t |(x_{n-1}(s)) - (y_{n-1}(s))|ds \end{aligned}$$

Seja

$$x_{n-1}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi))d\xi$$

e

$$y_{n-1}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-2}(\xi))d\xi$$

temos então:

$$\begin{aligned} |x_{n-1}(s) - y_{n-1}(s)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi))d\xi - \left[x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-2}(\xi))d\xi \right] \right| \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi))d\xi - x_0 - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-2}(\xi))d\xi \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi)) d\xi - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-2}(\xi)) d\xi \right| = \left| \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi)) d\xi - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-2}(\xi)) d\xi \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-2}(\xi)) - f(\xi, y_{n-2}(\xi)) d\xi \right| \leq \int_{t_0}^s |f(\xi, x_{n-2}(\xi)) - f(\xi, y_{n-2}(\xi))| d\xi \\
&\leq \int_{t_0}^s |k(x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi))| d\xi \leq k \int_{t_0}^s |(x_{n-2}(\xi)) - (y_{n-2}(\xi))| d\xi
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
|x_n(t) - y_n(t)| &\leq k \int_{t_0}^t |x_{n-1}(s) - y_{n-1}(s)| ds \leq k \int_{t_0}^t \left[k \int_{t_0}^s |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi \right] ds \\
|x_n(t) - y_n(t)| &\leq k^2 \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi \right] ds
\end{aligned}$$

Definindo φ por

$$\varphi(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi$$

Vem:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq k^2 \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

Integrando por partes, tem-se:

Seja $u = \varphi(s) \implies du = \varphi'(s) ds$; $dv = ds \implies v = s$ assim obtém-se:

$$\int_{t_0}^t u dv = [uv]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t v du \implies \int_{t_0}^t \varphi(s) ds = [\varphi(s)s]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t s \varphi'(s) ds$$

Para descobrirmos $\varphi'(s)$, utilizaremos o Método de Leibniz assim temos:

$$\varphi(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi$$

Onde φ é a primitiva da função $g = |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)|$, assim aplicando o método de Leibniz:

$$\begin{aligned}
\varphi'(s) &= g(s)s' - g(t_0)t'_0 = |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)|s' - |x_{n-2}(t_0) - y_{n-2}(t_0)|t'_0 \\
&= |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| - |x_0 - x_0|t'_0 = |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| \cancel{- |x_0 - x_0|t'_0} \\
&\implies \varphi'(s) = |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)|
\end{aligned}$$

Agora prosseguindo com a demonstração:

$$\int_{t_0}^t \varphi(s) ds = \left[s \int_{t_0}^s |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi \right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t s |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds$$

$$\begin{aligned}
 &= t \int_{t_0}^t |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi - \cancel{t_0 \int_{t_0}^{t_0} |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi} - \int_{t_0}^t s |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\
 \int_{t_0}^t \varphi(s) ds &= t \int_{t_0}^t |x_{n-2}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi - \int_{t_0}^t s |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds = \int_{t_0}^t (t-s) |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\
 \int_{t_0}^t \varphi(s) ds &= \int_{t_0}^t (t-s) |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds
 \end{aligned}$$

têm-se:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq k^2 \int_{t_0}^t (t-s) |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds$$

repetindo o argumento

Seja

$$x_{n-2}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) d\xi$$

e

$$y_{n-2}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi$$

temos então:

$$\begin{aligned}
 |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) d\xi - \left[x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi \right] \right| \\
 &= \left| x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) d\xi - x_0 - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi \right| \\
 &= \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) d\xi - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi \right| = \left| \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) d\xi - \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-3}(\xi)) - f(\xi, y_{n-3}(\xi)) d\xi \right| \leq \int_{t_0}^s |f(\xi, x_{n-3}(\xi)) - f(\xi, y_{n-3}(\xi))| d\xi \\
 &\leq \int_{t_0}^s |k(x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi))| d\xi \leq k \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)| d\xi
 \end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 |x_n(t) - y_n(t)| &\leq k^2 \int_{t_0}^t (t-s) |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)| ds \leq k^2 \int_{t_0}^t (t-s) \left[k \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)| d\xi \right] ds \\
 |x_n(t) - y_n(t)| &\leq k^3 \int_{t_0}^t \left[(t-s) \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)| d\xi \right] ds
 \end{aligned}$$

Definindo γ por

$$\gamma(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)| d\xi$$

Vem:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq k^3 \int_{t_0}^t (t-s) \gamma(s) ds$$

Integrando por partes, tem-se:

Seja $a = \gamma(s) \implies da = \gamma'(s)ds$; $db = (t-s)ds \implies b = \left(ts - \frac{s^2}{2}\right)$ assim obtém-se:

$$\int_{t_0}^t adb = [ab]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t bda \implies \int_{t_0}^t (t-s)\gamma(s)ds = \left[\gamma(s) \left(ts - \frac{s^2}{2}\right)\right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left(ts - \frac{s^2}{2}\right) \gamma'(s)ds$$

Para descobrirmos $\gamma'(s)$, utilizaremos o Método de Leibniz assim temos:

$$\gamma(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|d\xi$$

Onde γ é a primitiva da função $h = |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|$, assim aplicando o método de Leibniz:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= h(s)s' - h(t_0)t'_0 = |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|s' - |x_{n-3}(t_0) - y_{n-3}(t_0)|t'_0 \\ &= |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)| - |x_0 - x_0|t'_0 = |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)| - |x_0 - x_0|t'_0 \\ &\implies \gamma'(s) = |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)| \end{aligned}$$

Agora prosseguindo com a demonstração:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (t-s)\gamma(s)ds &= \left[\left(ts - \frac{s^2}{2}\right) \int_{t_0}^s |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|d\xi\right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left(ts - \frac{s^2}{2}\right) |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds \\ &= \left(t^2 - \frac{t^2}{2}\right) \int_{t_0}^t |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|d\xi - \int_{t_0}^t \left(ts - \frac{s^2}{2}\right) |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds \\ &= \left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{t_0}^t |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|d\xi - \int_{t_0}^t \left(\frac{2ts - s^2}{2}\right) |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{t^2 - 2ts + s^2}{2}\right) |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds \\ \int_{t_0}^t (t-s)\gamma(s)ds &= \int_{t_0}^t \left(\frac{(t-s)^2}{2}\right) |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds \end{aligned}$$

têm-se:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^3}{2} \int_{t_0}^t (t-s)^2 |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds$$

repetindo o argumento novamente

Seja

$$x_{n-3}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, x_{n-4}(\xi))d\xi$$

e

$$y_{n-3}(s) = x_0 + \int_{t_0}^s f(\xi, y_{n-4}(\xi))d\xi$$

temos então:

$$|x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)| \leq \int_{t_0}^s |k(x_{n-4}(\xi) - (y_{n-4}(\xi)))| d\xi \leq k \int_{t_0}^s |(x_{n-4}(\xi)) - (y_{n-4}(\xi))| d\xi$$

Assim temos:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^3}{2} \int_{t_0}^t (t-s)^2 |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)| ds$$

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^3}{2} \int_{t_0}^t (t-s)^2 k \int_{t_0}^s |(x_{n-4}(\xi)) - (y_{n-4}(\xi))| d\xi ds$$

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^4}{2} \int_{t_0}^t (t-s)^2 \int_{t_0}^s |(x_{n-4}(\xi)) - (y_{n-4}(\xi))| d\xi ds$$

Definindo λ por

$$\lambda(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-4}(\xi) - y_{n-4}(\xi)| d\xi$$

Vem:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^4}{2} \int_{t_0}^t (t-s)^2 \lambda(s) ds$$

Integrando por partes, tem-se:

Seja $u = \lambda(s) \implies du = \lambda'(s)ds$; $dv = (t-s)^2 ds \implies v = \left(t^2s - ts^2 + \frac{s^3}{3}\right)$ assim obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t u dv &= [uv]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t v du \\ \implies \int_{t_0}^t (t-s)^2 \lambda(s) ds &= \left[\lambda(s) \left(t^2s - ts^2 + \frac{s^3}{3} \right) \right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left(t^2s - ts^2 + \frac{s^3}{3} \right) \lambda'(s) ds \end{aligned}$$

Para descobrirmos $\lambda'(s)$, utilizaremos o Método de Leibniz assim temos:

$$\lambda(s) = \int_{t_0}^s |x_{n-4}(\xi) - y_{n-4}(\xi)| d\xi$$

Onde λ é a primitiva da função $j = |x_{n-3}(\xi) - y_{n-3}(\xi)|$, assim aplicando o método de Leibniz:

$$\lambda'(s) = |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)|$$

Agora prosseguindo com a demonstração:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t (t-s)^2 \lambda(s) ds \\ &= \left[\left(t^2s - ts^2 + \frac{s^3}{3} \right) \int_{t_0}^s |x_{n-4}(\xi) - y_{n-4}(\xi)| d\xi \right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left(t^2s - ts^2 + \frac{s^3}{3} \right) |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{t^3}{3}\right) \int_{t_0}^t |x_{n-4}(\xi) - y_{n-4}(\xi)| d\xi - \int_{t_0}^t \left(t^2 s - ts^2 + \frac{s^3}{3}\right) |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)| ds \\
&= \int_{t_0}^t \left(\frac{t^3 - 3ts^2 + 3ts^2 - s^3}{3}\right) |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)| ds \\
&= \int_{t_0}^t (t-s)^2 \lambda(s) ds = \int_{t_0}^t \left(\frac{(t-s)^3}{3}\right) |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)| ds
\end{aligned}$$

têm-se:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^4}{3!} \int_{t_0}^t (t-s)^3 |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)| ds$$

e repetindo o argumento $(n-1)$ vezes obtém-se:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^{n-1}}{(n-2)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-2} |x_1(s) - y_1(s)| ds \quad \forall n \geq 2; n \in \mathbb{N}$$

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^{n-1}}{(n-2)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-2} \|x_1 - y_1\| ds \leq \frac{k^{n-1}}{(n-2)!} \|x_1 - y_1\| \int_{t_0}^t (t-s)^{n-2} ds$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t (t-s)^{n-2} ds &= \left[\frac{(t-s)^{n-1}}{n-1} \right]_{t_0}^t = \left[\frac{(t-t)^{n-1}}{n-1} - \frac{(t-s)^{n-1}}{n-1} \right] = \left[\frac{(t-t)^{n-1}}{n-1} - \frac{(t-t_0)^{n-1}}{n-1} \right] \\
&= -\frac{(t-t_0)^{n-1}}{n-1} = \frac{(t_0-t)^{n-1}}{n-1}
\end{aligned}$$

continuando a demonstração:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^{n-1}}{(n-2)!} \|x_1 - y_1\| \frac{(t_0-t)^{n-1}}{n-1}$$

Como $[t_0, t] \subset I_r$ de raio r então:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{k^{n-1}}{(n-2)!} \|x_1 - y_1\| \frac{(r)^{n-1}}{n-1} \leq \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} r^{n-1} \|x_1 - y_1\| \leq \frac{kr^{n-1}}{(n-1)!} \|x_1 - y_1\|$$

Como $x_n = (T^{n-1}x)$, $y_n = (T^{n-1}y)$, $x = x_1$ e $y = y_1$

Assim

$$|T^{n-1}x - T^{n-1}y| \leq \frac{(kr)^{n-1}}{(n-1)!} \|x - y\|$$

Fazendo $n = (n-1)$ temos

$$|T^n x - T^n y| \leq \frac{(kr)^n}{n!} \|x - y\|$$

Sendo $\frac{(kr)^n}{n!}$ o termo geral de uma série numérica convergente. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(kr)^n}{n!} = 0$$

Dessa forma, a partir de um certo n e para todo $m > n$ tem-se que

$$0 < \frac{(kr)^n}{n!} < 1$$

O que implica dizer que T^n é uma contração em $C^*(I_r)$, aplicando o teorema 2 resulta que T possui um único ponto fixo. $\square$

Teorema 7. Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \rightarrow R$ uma aplicação continua e localmente Lipschitziana. Por cada ponto (t_0, x_0) de Ω passa uma e somente uma solução do problema de Cauchy (1.13)+(1.14).

Demonstração. Seja (t_0, x_0) um ponto qualquer de Ω . Sendo f continua e localmente Lipschitziana em Ω , existe uma vizinhança V de (t_0, x_0) na qual f é limitada e uniformemente Lipschitziana. Consideremos os números

$$M = \sup_V |f(t, x)| \text{ e } K = \sup_V \left| \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} \right|, \quad x_1 \neq x_2.$$

Seja R_0 um retângulo com centro em (t_0, x_0) e diagonais $x - x_0 = \pm M(t - t_0)$ contido em V . Representemos por I_0 a projeção de R_0 sobre a reta $x = 0$ e seja l_0 a metade da amplitude de I_0 . A projeção de R_0 sobre a reta $t = 0$ é o intervalo $[x_0 - Ml_0, x_0 + Ml_0]$. Seja $C(I_0)$ o espaço métrico das aplicações $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, com a métrica do supremo. Consideremos o subespaço $C^*(I_0)$ de $C(I_0)$ constituído pelas funções x tais que

- 1) $x(t_0) = x_0$
- 2) $x_0 - Ml_0 \leq x(t) \leq x_0 + Ml_0$

Sendo $C^*(I_0)$ um subespaço fechado, segue-se que $C^*(I_0)$ é completo. Consideremos a aplicação T definida em $C^*(I_0)$ do seguinte modo:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Temos que T é uma aplicação de $C^*(I_0)$ em $C^*(I_0)$.

De fato:

$$(Tx)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = x_0 + \cancel{\int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds} = x_0$$

Também tem-se:

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - x_0 \right| = \left| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \cancel{- x_0} \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq M(t - t_0) \leq Ml_0 \end{aligned}$$

Para verificarmos que T é uma contração, segue-se um método análogo ao da demonstração do Teorema 6. Tomadas duas funções quaisquer $x_1, x_2 \in S$ constata-se que

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq Kl_0 \|x_1 - x_2\|$$

Logo, tomando l_0 tal que $Kl_0 < 1$, encontra-se um intervalo com centro em x_0 , no qual esta definida a solução do problema. Podemos eliminar a hipótese $Kl_0 < 1$, provando que existe um número natural n tal que T^n seja uma contração. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] DOMINGUES, H. Hygino **Espaços métricos e Introdução a Topologia**. 1º edição. São Paulo: Atual, 1982.
- [2] LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol.1**. 10º edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [3] SOTOMAYOR, J.M. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. 3º edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Projeto Euclides, 1979.
- [4] YAMAGUTI, M., NIRENBERG, L., MIZOHATA, S., SIBUYA, Y. **Mitio Nagumo Collected Papers**. 1º edition. Tokyo: Springer Japan, 1993.
- [5] Office of the Home Secretary, National Academy of Sciences of the united states **Biographical Memoirs: V.81 (Biographical Memoirs: A Series)**. 1º edition. Washington, D.C.: National Academy Press, 2002.
- [6] OSGOOD, W. F. **Monatshefte für Mathematik und Physik V.9, Page 331**. Berlin: Springer Verlag GmbH, 1898.
- [7] LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol.2**. 1º edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.