



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ISADORA AUGUSTA SANTANA DE MACEDO

**MODELAGEM E IMAGEAMENTO UTILIZANDO DIFERENÇAS
FINITAS**

BELÉM
2014

ISADORA AUGUSTA SANTANA DE MACEDO

**MODELAGEM E IMAGEAMENTO UTILIZANDO DIFERENÇAS
FINITAS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Geofísica do
Instituto de Geociências da Universidade
Federal do Pará em cumprimento as
exigências para obtenção do título de
Bacharel em Geofísica
Área de Concentração: Métodos Sísmicos
Orientador: Jessé Carvalho Costa

BELÉM
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro Garcia de Montalvão

- M141m Macedo, Isadora Augusta Santana de
Modelagem e imageamento utilizando diferenças finitas. /
Isadora Augusta Santana de Macedo – 2014
73 f. : il.
Orientador: Jessé Carvalho Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal
do Pará, Instituto de Geociências, Faculdade de Geofísica, Belém, 2014.
1. Geofísica Aplicada. 2. Modelagem Sísmica. 3. Imageamento.
4. Teoremas de Reciprocidade. 5. Migração Reversa no Tempo. I.
Título.

CDD 22. ed.: 551

ISADORA AUGUSTA SANTANA DE MACEDO

**MODELAGEM E IMAGEAMENTO UTILIZANDO DIFERENÇAS
FINITAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências
da Universidade Federal do Pará em cumprimento
as exigências para obtenção do título de Bacharel
em Geofísica.

Data de Aprovação: 12 de março de 2014

Conceito: EXC

Banca Examinadora:

Prof. Jessé Carvalho Costa - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Prof. Cristiano Mendel Martins
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

M.Sc. Wildney Wallacy da Silva Vieira
Mestre em Geofísica
Universidade Federal do Pará

BELÉM
2014

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Jessé Costa pela dedicação e paciência tão grandiosas quanto sua capacidade intelectual.

Ao corpo docente da faculdade de Geofísica responsável pela minha formação, em especial à Prof. Dr. Ellen Gomes cujo profissionalismo foi essencial na oportunidade de ter um ano estudando no exterior e ao Prof. Dr. Marcos Welby pelo bom humor e por toda a base de cálculo concedida.

À todos da turma de 2009 que muito contribuíram para eu ser uma estudante e uma pessoa melhor e por fazerem com que saíssem risadas das situações mais difíceis.

Ao Fernando por ter sido minha dupla em quase todos os trabalhos ao longo do curso, pela amizade e suporte essenciais para que esse trabalho fosse concluído.

Aos amigos Léo e Matheus, pela amizade desde o primeiro dia de aula; ao Boris, Cristiano e Kauê pelo apoio (e desapoio), amizade e por aguentarem minhas reclamações com tanta paciência e bom humor.

Às minhas amigas Raiza, Isabela, Jéssica e Roberta pela preocupação e torcida há mais de uma década.

À minha avó Lúcia por fazer tudo o que pode dentro de sua fé e de suas limitações para me ajudar.

Aos meus pais Zé Macedo e Deolinda e ao meu irmão Bernardo por compartilharem das minhas alegrias e frustrações, serem a minha maior torcida e acreditarem em mim até mais do que deveriam.

RESUMO

Uma vez escolhido um modelo matemático com o propósito de simular a propagação de ondas sísmicas em um meio, é possível realizar a *Modelagem Sísmica* e a *Migração Reversa no Tempo*, simulações numéricas baseadas nos teoremas de reciprocidade, no estabelecimento de um modelo matemático e na solução numérica da equação da onda. Este trabalho faz um estudo da modelagem sísmica por diferenças finitas, condições de estabilidade e estratégias que visam reduzir a dispersão numérica através da otimização dos operadores de diferenças finitas, além de uma revisão dos fundamentos teóricos da modelagem e migração reversa no tempo utilizando a equação acústica da onda. Os experimentos numéricos do algoritmo de RTM mostram a robustez dessa migração em relação a erros nos modelos de velocidades ainda que na presença de fortes variações laterais de velocidade e a limitação do uso deste tipo de migração em análises de velocidade.

Palavras-chaves: geofísica aplicada. modelagem sísmica. imageamento. teoremas de reciprocidade. migração reversa no tempo

ABSTRACT

Once a mathematical model is chosen in order to simulate a seismic wave propagation, it is possible to perform a *Seismic Modeling* and a *Reverse Time Migration*, both numerical simulations based on the reciprocal relations, on the establishing of a mathematical model and on the numerical solution of the acoustic wave equation. This work is a study of the seismic modeling by finite difference schemes, of the stability conditions, simple strategies to reduce the numerical dispersion by the optimization of finite difference operators and also of the theory of the modeling and reverse time migration using the acoustic wave equation. The numerical experiments show how robust is the RTM with respect to errors in the velocity model even in strong lateral velocity variation and the limitation in using this type of migration in velocity analysis.

Key words: applied geophysics. acoustic modeling. seismic imaging. reciprocal relations. reverse time migration

Lista de ilustrações

Figura 1 – Domínio V onde um estado acústico é produzido por uma fonte em \mathbf{x}_0 e o outro estado produzido pela função de Green em \mathbf{x}' . Fonte: do autor	28
Figura 2 – Malha de discretização regular. Fonte: do autor	33
Figura 3 – Ilustração dos esquemas estáveis e instáveis. O triângulo azul indica o domínio abrangido pela malha e a região sombreada as informações que podem ser repassadas ao campo de pressão em $p(x, y, t + \Delta)$. Fonte: do autor	38
Figura 4 – Curvas de dispersão.	40
Figura 5 – Relação entre o comprimento do operador de diferenças finitas para a primeira derivada espacial e o número de pontos da malha por comprimento de onda encontrado por Holberg. As curvas foram plotadas para diferentes valores de precisão mínima.	43
Figura 6 – Geometria de levantamento sísmico CMP: ponto iluminado na interface é o ponto médio entre a fonte e o receptor. Fonte: do autor	47
Figura 7 – Modelo de velocidade Marmousi sem suavização	59
Figura 8 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização	59
Figura 9 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 100 vezes	60
Figura 10 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 100 vezes	60
Figura 11 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 500 vezes	60
Figura 12 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 500 vezes	61
Figura 13 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 1000 vezes	61
Figura 14 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes	62
Figura 15 – Modelo de velocidade Sigsbee sem suavização	62
Figura 16 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização	63
Figura 17 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 50 vezes	63
Figura 18 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes	63
Figura 19 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 1000 vezes	64
Figura 20 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes	64
Figura 21 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 1500 vezes	65
Figura 22 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes	65

Figura 23 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização com zoom nas regiões abaixo do domo salino	66
Figura 24 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes com zoom nas regiões abaixo do domo salino	66
Figura 25 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 100 vezes zoom nas regiões abaixo do domo salino	67
Figura 26 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes com zoom nas regiões abaixo do domo salino	67
Figura 27 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização com ênfase nos pontos difratores iluminados	68
Figura 28 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados	68
Figura 29 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados	69
Figura 30 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	TEOREMAS DE RECIPROCIDADE	12
2.1	Relação de Reciprocidade do tipo Convolução	14
2.2	Relação de Reciprocidade do tipo Correlação	19
2.3	Função de Green	23
2.4	Consequências dos Teoremas de Reciprocidade	26
2.4.1	Propagação Direta dos Campos de Onda - Modelagem Acústica	26
2.4.2	Reversão temporal	28
3	SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA	32
3.1	Equação da Onda Acústica	32
3.2	Discretização por Diferenças Finitas	33
3.3	Cálculo dos Operadores de Diferenças Finitas	34
3.4	Consistência, Estabilidade e Convergência dos Esquemas de Diferenças Finitas	36
3.4.1	Análise de Estabilidade de Von Neumann	37
3.5	Erro de Diferenças Finitas: Análise da Dispersão Numérica	39
3.5.1	Minimização dos Erros de Diferenças Finitas	40
3.6	Condições de Fronteira	43
4	IMAGEAMENTO UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA ONDA	46
4.1	Migração Sísmica Pré-Empilhamento	46
4.2	Migração Reversa no Tempo Pré-Empilhamento	48
4.2.1	Propagação Reversa no Tempo dos Campos de Onda	48
4.2.2	Condição de Imagem	51
5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	56
5.1	Modelos de Velocidade: Marmousi e Sigsbee	56
5.2	Suavização dos Modelos de Velocidade	57
5.3	Resultados da modelagem e RTM	59
6	CONCLUSÕES	70
7	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

A Terra é bastante heterogênea e a geofísica de exploração visa investigar a subsuperfície com a maior acuidade possível. O ideal seria mapear o planeta de modo que se pudesse atingir escalas cada vez menores, no entanto, a realidade da geofísica de exploração está longe desse feito.

Os levantamentos sísmicos são capazes de fornecer informações a respeito das estruturas geológicas presentes em subsuperfície. Arranjos de fontes emitem pulsos que se propagam pelo interior da Terra - obedecendo as leis de reflexão e refração - e são captados pelas estações de receptores. O sinal registrado pelos receptores possuem informações sobre a onda propagada e suas mudanças conforme a frente de onda passa por uma interface na qual haja mudanças nas propriedades físicas do meio de propagação.

Existem diferentes modelos matemáticos que podem ser adotados para simular a propagação de ondas sísmicas em um meio e, uma vez escolhido um modelo, é possível fazer duas simulações numéricas: a *Modelagem Sísmica* e a *Migração Reversa no Tempo* (RTM), ambos baseados nos teoremas de reciprocidade, fundamentais na teoria das ondas sísmicas. A modelagem sísmica consiste em simular a aquisição de dados de um levantamento sísmico de posse de um modelo de velocidade. A Migração Reversa no Tempo, como toda migração sísmica, consiste em um conjunto de procedimentos no qual os campos de ondas registrados pelos receptores contendo informações sobre as interfaces do modelo geológico são transformados em imagens corretamente posicionadas desses refletores em subsuperfície.

Neste trabalho será mostrado um estudo da modelagem sísmica por diferenças finitas, condições de estabilidade e abordagem de algumas estratégias simples para reduzir os erros de dispersão numérica através da otimização de operadores de diferenças finitas de ordem arbitrária a partir da minimização de erros na velocidade de fase e velocidade de grupo, bem como uma revisão dos fundamentos teóricos da modelagem e migração reversa no tempo utilizando a equação acústica da onda.

Posteriormente, será feita uma análise do comportamento da RTM em relação a erros em dois modelos de velocidade complexos - Marmousi e Sigsbee - que mostram a robustez da RTM em relação a perturbações no modelo de velocidade, mesmo na presença de fortes variações laterais de velocidade. A seguir, uma breve descrição do conteúdo do trabalho.

No capítulo 2 serão mostrados os teoremas de reciprocidade convolucional e correlacional e suas consequências no que diz respeito à simetria dos campos acústicos. Será visto que a simetria dos campos acústicos reflete nas simetrias da função de Green que, quando relacionados com os campos físicos, nos dão equações que regem a propagação direta dos campos de onda - modelagem acústica - e o princípio da reversão temporal, que permite que a mesma equação discreta da onda usada na propagação direta seja usada na retropropagação dos campos acústicos, bastando para isso que o sinal registrado sirva como fonte e propague os campos na ordem reversa no tempo.

No capítulo 3 será mostrado como discretizar a solução da equação acústica da onda utilizando o Método das Diferenças Finitas e como garantir que este esquema numérico possa ser utilizado com credibilidade produzindo o menor erro possível através da análise da consistência, convergência e estabilidade. Será ainda abordado como reduzir a dispersão numérica através da minimização de erros nas velocidades de fase e grupo e as principais etapas da modelagem acústica por diferenças finitas.

No capítulo 4 o foco será o imageamento utilizando a equação da onda analisando a Migração Reversa no Tempo (RTM), a equação que rege a propagação reversa dos campos de onda baseadas no teorema de reciprocidade correlacional, o conceito de condição de imagem e como as limitações da RTM podem ser atenuadas.

No capítulo 5 serão analisados os experimentos numéricos produzidos por um algoritmo de migração em dois modelos de velocidade complexos com diferentes janelas de suavização, que mostram a robustez da RTM e a limitação de seu uso em métodos de análise de velocidade.

2 TEOREMAS DE RECIPROCIDADE

A modelagem e o imageamento sísmico tem como base a propagação de ondas na subsuperfície que obedecem as leis de refração e reflexão. De acordo com Fokkema e van den Berg (1993) as relações de reciprocidade são a base da teoria das ondas sísmicas. Em configurações invariantes no tempo, elas podem ser divididas em relação de reciprocidade convolucional e correlacional (HOOP, 1995). Essas relações de reciprocidade tem como consequência, por exemplo, o princípio da reversão temporal, base do imageamento através da migração reversa no tempo, a modelagem acústica, a inversão da fonte acústica, a teoria do espalhamento direto e inverso, as simetrias das funções de Green e podem ainda servir para validar algoritmos acústicos.

Segundo Ikelle (2005), os teoremas de reciprocidade acústicos, na sua forma mais elementar, afirmam que o campo de pressão acústico permanece o mesmo se houver uma permutação da posição da fonte e do receptor. De modo geral, o princípio da reciprocidade relaciona os campos que caracterizam dois estados que podem ocorrer dentro de um mesmo domínio V definido por uma fronteira ∂V . O que governa a relação entre os campos dos estados acústicos definidos dentro do domínio V são as possíveis diferenças nos parâmetros do meio, a distribuição das fontes, e as condições aplicadas na fronteira ∂V .

Primeiramente, será mostrado neste capítulo como chegar no teorema de reciprocidade convolucional e correlacional. Depois serão analisadas as consequências desses teoremas no que diz respeito às simetrias dos campo acústico. Essas simetrias dos campos estabelecerão as simetrias das funções de Green, e estas, por sua vez, quando relacionadas aos campos físicos, nos dará integrais que descrevem a propagação direta do campo de onda no caso convolucional, e o princípio da reversão temporal, no caso correlacional.

Pressupomos um meio causal, localmente reativo, linear e invariante no tempo de densidade $\rho(\mathbf{x})$ e velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$. A equação da onda acústica que governará o campo de pressão $p(\mathbf{x}, t)$ produzido por uma injeção de volume $q(\mathbf{x}, t)$ será:

$$\frac{1}{\rho(\mathbf{x})c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla p(\mathbf{x}, t) \right) + q(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Uma vez que a representação do teorema da reciprocidade fica mais simples no domínio da frequência, através da transformada de Fourier é possível escrever o campo de pressão e a taxa de injeção de volume como:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ q(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Aplicando essas relações na equação (2.1), tem-se:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{\rho(\mathbf{x})c^2(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = -Q(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.2)$$

O campo de pressão $P(\mathbf{x}, \omega)$ deve satisfazer a equação da onda acústica no domínio da frequência expressa pela equação (2.2). Para determinar as relações de reciprocidade convolucional e correlacional, é necessário estabelecer um domínio V limitado por uma fronteira ∂V . Dentro deste domínio, estabeleceremos dois estados acústicos distintos e independentes A e B . O primeiro, $P_a(\mathbf{x}, \omega)$ produzido por uma fonte com taxa de injeção de volume $Q_a(\mathbf{x}, \omega)$, e o segundo $P_b(\mathbf{x}, \omega)$ produzido por uma fonte com taxa de injeção de volume $Q_b(\mathbf{x}, \omega)$. Similarmente à equação (2.2), estes estados acústicos devem satisfazer:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a(\mathbf{x})} \nabla P_a(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{\rho_a(\mathbf{x})c_a^2(\mathbf{x})} P_a(\mathbf{x}, \omega) = -Q_a(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b(\mathbf{x})} \nabla P_b(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{\rho_b(\mathbf{x})c_b^2(\mathbf{x})} P_b(\mathbf{x}, \omega) = -Q_b(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.4)$$

Para facilitar a demonstração das relações de reciprocidade convolucional e correlacional, será usada a seguinte notação:

ESTADO A :

$P_a = P_a(\mathbf{x}, \omega)$, campo de pressão.

$Q_a = Q_a(\mathbf{x}, \omega)$, taxa de injeção de volume que produz P_a .

$\rho_a = \rho_a(\mathbf{x})$ densidade do meio no estado A .

$c(\mathbf{x})_a = c_a$, velocidade de propagação do meio no estado A .

ESTADO B :

$P_b = P_b(\mathbf{x}, \omega)$, campo de pressão.

$Q_b = Q_b(\mathbf{x}, \omega)$, taxa de injeção de volume que produz P_b .

$\rho_b = \rho_b(\mathbf{x})$ densidade do meio no estado B .

$c(\mathbf{x})_b = c_b$, velocidade de propagação do meio no estado B .

$\omega =$ frequência angular.

2.1 Relação de Reciprocidade do tipo Convolução

Para obter a relação de reciprocidade convolucional, multiplicamos a equação (2.3) por P_b e a equação (2.4) por P_a e obtemos:

$$P_b \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) + \frac{\omega^2}{\rho_a c_a^2} P_a P_b = -Q_a P_b,$$

$$P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b \right) + \frac{\omega^2}{\rho_b c_b^2} P_b P_a = -Q_b P_a.$$

Subtraindo as equações acima tem-se:

$$P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b \right) - P_b \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) + \omega^2 P_a P_b \left(\frac{1}{\rho_b c_b^2} - \frac{1}{\rho_a c_a^2} \right) = -P_a Q_b + P_b Q_a,$$

$$P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b \right) - P_b \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) = P_b Q_a - P_a Q_b + \omega^2 \left(\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2} \right) P_a P_b.$$

Integrando sobre todo o domínio V :

$$\int_V P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b \right) - P_b \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) dV = \int_V P_b Q_a - P_a Q_b + \omega^2 \left(\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2} \right) P_a P_b dV \quad (2.5)$$

Observando que

$$\begin{aligned} & \int_V [P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b \right)] dV = \\ & \int_V \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b \right) - \frac{1}{\rho_b} \nabla P_a \cdot \nabla P_b \right] dV, \end{aligned}$$

e

$$\int_V [P_b \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right)] dV =$$

$$\int_V [\nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} P_b \nabla P_a - \frac{1}{\rho_a} \nabla P_b \cdot \nabla P_a)] dV.$$

A equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$\int_V [P_a \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b) - P_b \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a)] dV = \tag{2.6}$$

$$\int_V [\nabla \cdot (\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b) - \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} P_b \nabla P_a) + \nabla P_a \cdot \nabla P_b (\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_b})] dV$$

Igualando o lado direito da equação (2.6) com o lado direito da equação (2.5) temos:

$$\int_V [\nabla \cdot (\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b) - \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} P_b \nabla P_a) + \nabla P_a \cdot \nabla P_b (\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_b})] dV =$$

$$\int_V [P_b Q_a - P_a Q_b + \omega^2 (\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2}) P_a P_b] dV.$$

Que pode ser escrita também como:

$$\int_V [\nabla \cdot (\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b) - \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} P_b \nabla P_a)] dV =$$

$$\int_V [P_b Q_a - P_a Q_b + \omega^2 (\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2}) P_a P_b + \nabla P_a \cdot \nabla P_b (\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_a})] dV. \tag{2.7}$$

Na parte à esquerda da equação (2.7) aplicamos o teorema da divergência de Gauss que relaciona o comportamento de um campo vetorial ao longo de uma superfície fechada com o comportamento deste mesmo campo vetorial dentro desta superfície

$$\int_{\partial V} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{Q} dV, \tag{2.8}$$

obtemos

$$\int_{\partial V} P_a (\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b) - P_b (\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a) \cdot \mathbf{n} dS =$$

$$\int_V P_b Q_a - P_a Q_b + \omega^2 \left(\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2} \right) P_a P_b + \nabla P_a \cdot \nabla P_b \left(\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_a} \right) dV. \quad (2.9)$$

Esta equação configura o teorema da reciprocidade de Rayleigh ou teorema da reciprocidade convolucional de Rayleigh e também pode ser expressa em função do módulo de incompressibilidade através da relação $c(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{K(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}}$. Esta equação fornece as relações entre os campos que caracterizam os dois estados estabelecidos dentro do domínio V de fronteira ∂V . O que governa essas relações são:

1. As possíveis distribuições da fonte, expressa pelos dois primeiros termos do lado direito do teorema de Rayleigh;
2. As possíveis diferenças nas propriedades acústicas do meio nos dois estados, expressa pelos últimos quatro termos da equação acima. No caso do mesmo meio ser considerado para os dois estados, esses termos somem da equação do teorema;
3. As condições da fronteira, expressa pela integral de superfície em ∂V .

No caso de um mesmo meio de densidade $\rho_a(\mathbf{x}) = \rho_b(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ e velocidade de propagação $c_a(\mathbf{x}) = c_b(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})$ ser considerado para ambos os estados, o teorema de reciprocidade convolucional pode ser escrito como:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [P_a \nabla P_b - P_b \nabla P_a] \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V [P_a Q_b - P_b Q_a] dV \quad (2.10)$$

O teorema é dito ser *convolucional* pois pelo teorema da convolução, a transformada de Fourier de uma convolução de duas funções equivale ao produto das transformadas de Fourier de cada função, isto é, cada produto de funções no domínio da frequência na equação (2.10) equivale à convolução dessas funções no domínio do tempo. Logo, o teorema de reciprocidade convolucional no domínio do tempo pode ser escrito como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p_a(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_b(\mathbf{x}, t - \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_a(\mathbf{x}, t - \tau)] \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V [p_a(\mathbf{x}, \tau) q_b(\mathbf{x}, t - \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) q_a(\mathbf{x}, t - \tau)] dV. \quad (2.11)$$

Para restringir o teorema de reciprocidade convolucional no domínio do tempo para sinais causais, isto é, todos os campos anteriores à ativação das fontes são nulos, a

partir de um ponto arbitrariamente tomado como $t = 0$, mudamos o limite de integração da equação acima e ela se torna:

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p_a(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_b(\mathbf{x}, t - \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_a(\mathbf{x}, t - \tau)] \cdot \mathbf{n} dS = \\ - \int_0^t d\tau \int_V [p_a(\mathbf{x}, \tau) q_b(\mathbf{x}, t - \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) q_a(\mathbf{x}, t - \tau)] dV. \quad (2.12)$$

Através do teorema de reciprocidade convolucional expresso pela equação (2.9) é possível obter a formulação mais conhecida do teorema da reciprocidade que diz respeito a permutação das posições da fonte e do receptor. Para tanto, estabeleceremos as seguintes condições:

1. A integral de superfície em ∂V é zero. Isto pode ocorrer, por exemplo, se ∂V for uma superfície livre, então a condição de fronteira de Dirichlet, onde $P_a = 0$ e $P_b = 0$ para qualquer ponto da superfície, garante que a integral de superfície se anule. Ou ainda, se ∂V for uma superfície rígida, a derivada da componente normal do campo de pressão se anula sobre qualquer ponto de ∂V , $\nabla P_a(\mathbf{x}, w) \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\nabla P_b(\mathbf{x}, w) \cdot \mathbf{n} = 0$. Esta premissa é conhecida como condição de fronteira de Neumann e também garante que a integral de superfície seja nula. Se parte da fronteira obedecer à condição de fronteira livre e a parte complementar obedecer à condição de fronteira rígida, a integral de superfície sobre esta fronteira também será nula. Uma terceira hipótese a ser considerada na fronteira ∂V para que a sua integral seja zero, é que ela satisfaça a *Condição de Radiação de Sommerfeld* para domínios ilimitados.

Em um meio homogêneo e ilimitado, é possível sugerir que o padrão de radiação de energia de uma fonte pontual é radial e isotrópico. Conseqüentemente, a resposta à essa fonte pontual, a função de Green (ver seção Função de Green deste capítulo) terá uma dependência radial, podendo ser escrita como

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s, t_s) = G(r, \omega; \mathbf{x}_s, t_s).$$

Sendo $r = \|\mathbf{x}\|$. Se considerarmos que a fonte está localizada na origem de um centro de coordenadas, ou seja, está na posição $\mathbf{x}_s = 0$ e foi ativada no instante $t = 0$, pode-se escrever

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s, t_s) = G(r, \omega).$$

A condição de radiação de Sommerfeld é imposta na fronteira de um domínio para assegurar que toda a energia acústica produzida pela fonte seja propagada infinitamente e não retorne ao domínio. Embora teoricamente este raio precise ser infinito para que não haja retorno de energia para dentro do domínio, na prática, como por exemplo em simulações numéricas da propagação direta dos campos de ondas, uma distância finita a partir da posição da fonte garante que a energia acústica da fonte não retorne. Matematicamente, a condição de fronteira denominada condição de radiação de Sommerfeld é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \frac{dG(r, \omega)}{dr} - \frac{i\omega}{c} r G(r, \omega) \right] = 0.$$

E se a mesma for imposta sobre uma fronteira ∂V , a integral sobre esta fronteira se anula.

2. As propriedades acústicas do meio são iguais para os dois estados A e B dentro do domínio V .
3. Fontes pontuais do tipo monopolo são escolhidas para gerar os campos de pressão P_a e P_b . Este tipo de fonte, para os campos A e B , são descritos respectivamente como:

$$Q_a(\mathbf{x}, \omega) = Q_0(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a),$$

$$Q_b(\mathbf{x}, \omega) = Q_0(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b).$$

Onde \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b representam a posição da fonte no estado A e no estado B respectivamente.

A relação de reciprocidade convolucional adotando a condição 2 já fora encontrada e está expressa pela equação (2.10). Substituindo as fontes por fontes do tipo monopolo descritas acima para satisfazer a condição 3, temos:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [P_a \nabla P_b - P_b \nabla P_a] \cdot \mathbf{n} dS =$$

$$- \int_V [P_a(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_a) Q_0(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) - P_b(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_b) Q_0(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)] dV$$

(2.13)

Aplicando a propriedade da filtragem da função delta descrita por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0).$$

A equação (2.13) torna-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [P_a \nabla P_b - P_b \nabla P_a] \cdot \mathbf{n} dS = \\ & - \int_V [P_a(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a) - P_b(\mathbf{x}_a, \omega; \mathbf{x}_b)] Q_0(\omega) dV \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalmente, utilizando a condição 1, a equação (2.14) é reduzida a:

$$P_a(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a) = P_b(\mathbf{x}_a, \omega; \mathbf{x}_b) \quad (2.15)$$

Esta formulação do teorema da reciprocidade convolucional mostra que o campo de pressão registrado em A por uma fonte do tipo monopolo localizada em B é o mesmo campo de pressão que seria registrado em B por uma fonte do tipo monopolo localizada em A , isto é, o campo de pressão é o mesmo se permutarmos a posição da fonte e do receptor.

2.2 Relação de Reciprocidade do tipo Correlação

Para mostrar a relação de reciprocidade correlacional utilizaremos a mesma geometria e parâmetros do caso convolucional, no entanto, conjugamos o campo de pressão $P_b(\mathbf{x}, \omega)$ e a fonte $Q_b(\mathbf{x}, \omega)$ na equação (2.4) e a multiplicamos por $P_a(\mathbf{x}, \omega)$. A equação (2.3) será multiplicada pelo conjugado de $P_b(x, \omega)$ que denotaremos por $P_b^*(\mathbf{x}, \omega)$. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) + \frac{\omega^2}{\rho_a c_a^2} P_a P_b^* &= -Q_a P_b^*, \\ P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right) + \frac{\omega^2}{\rho_b c_b^2} P_b^* P_a &= -Q_b^* P_a. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Realizando a subtração das equações acima tem-se:

$$P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right) - P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) + \omega^2 P_a P_b^* \left(\frac{1}{\rho_b c_b^2} - \frac{1}{\rho_a c_a^2} \right) = - P_a Q_b^* + P_b^* Q_a,$$

$$P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right) - P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right) = P_b^* Q_a - P_a Q_b^* + \omega^2 \left(\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2} \right) P_a P_b^*.$$

Integrando sobre todo o domínio V :

$$\begin{aligned} & \int_V [P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right) - P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right)] dV = \\ & \int_V [P_b^* Q_a - P_a Q_b^* + \omega^2 \left(\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2} \right) P_a P_b^*] dV. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Observando que,

$$\begin{aligned} & \int_V [P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right)] dV = \\ & \int_V [\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b^* \right) - \frac{1}{\rho_b} \nabla P_a \cdot \nabla P_b^*] dV, \\ & \int_V [P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right)] dV = \\ & \int_V [\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} P_b^* \nabla P_a \right) - \frac{1}{\rho_a} \nabla P_b^* \cdot \nabla P_a] dV. \end{aligned}$$

A equação (2.17) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_V [P_a \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^* \right) - P_b^* \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a \right)] dV = \\ & \int_V [\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b^* \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} P_b^* \nabla P_a \right) + \nabla P_a \cdot \nabla P_b^* \left(\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_b} \right)] dV \end{aligned} \quad (2.18)$$

Igualando o lado direito da equação (2.18) com o lado direito da equação (2.17) temos:

$$\begin{aligned} & \int_V [\nabla \cdot (\frac{1}{\rho_b} P_a \nabla P_b^*) - \nabla \cdot (\frac{1}{\rho_a} P_b^* \nabla P_a)] dV = \\ & \int_V [P_b^* Q_a - P_a Q_b^* + \omega^2 (\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2}) P_a P_b + \nabla P_a \cdot \nabla P_b^* (\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_a})] dV \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss (2.8) na parte à esquerda da equação (2.19) temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} P_a (\frac{1}{\rho_b} \nabla P_b^*) - P_b^* (\frac{1}{\rho_a} \nabla P_a) \cdot \mathbf{n} dS = \\ & \int_V [P_b^* Q_a - P_a Q_b^* + \omega^2 (\frac{1}{\rho_a c_a^2} - \frac{1}{\rho_b c_b^2}) P_a P_b^* + \nabla P_a \cdot \nabla P_b^* (\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_a})] dV \end{aligned} \quad (2.20)$$

A equação (2.20) representa o teorema de reciprocidade correlacional. Assim como o teorema convolucional (2.5), as possíveis diferenças nas propriedades acústicas do meio, a distribuição das fontes e as condições de fronteira são as responsáveis por conectar os campos que caracterizam os dois estados distintos dentro do domínio V .

Para situações em que os estados A e B compartilham do mesmo meio de densidade variável $\rho(\mathbf{x})$ e velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$, a relação de reciprocidade pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [P_a \nabla P_b^* - P_b^* \nabla P_a] \cdot \mathbf{n} dS = \\ & - \int_V [P_a Q_b^* - P_b^* Q_a] dV \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como a transformada de Fourier de uma correlação de duas funções equivale ao produto entre a transformada de Fourier de uma função e a transformada de Fourier de uma função conjugada, isto é, o produto entre uma função conjugada e outra função no domínio da frequência equivale à correlação destas funções no domínio do tempo, é possível escrever a relação de reciprocidade correlacional expressa em (2.21) no domínio do tempo como:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p_a(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_b(\mathbf{x}, t + \tau) - p_b(\mathbf{x}, t + \tau) \nabla p_a(\mathbf{x}, \tau)] \cdot \mathbf{n} dS = \\ - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V [p_a(\mathbf{x}, \tau) q_b(\mathbf{x}, \tau + t) - p_b(\mathbf{x}, \tau + t) q_a(\mathbf{x}, \tau)] dV \end{aligned} \quad (2.22)$$

Outra forma de escrever a equação acima é fazendo $\tau = \tau - t$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p_a(\mathbf{x}, \tau - t) \nabla p_b(\mathbf{x}, \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_a(\mathbf{x}, \tau - t)] \cdot \mathbf{n} dS = \\ - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V [p_a(\mathbf{x}, \tau - t) q_b(\mathbf{x}, \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) q_a(\mathbf{x}, \tau - t)] dV \end{aligned}$$

Para considerar que todos os campos são causais, mudamos o limite de integração e temos:

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p_a(\mathbf{x}, \tau - t) \nabla p_b(\mathbf{x}, \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) \nabla p_a(\mathbf{x}, \tau - t)] \cdot \mathbf{n} dS = \\ - \int_t^{\infty} d\tau \int_V [p_a(\mathbf{x}, \tau - t) q_b(\mathbf{x}, \tau) - p_b(\mathbf{x}, \tau) q_a(\mathbf{x}, \tau - t)] dV \end{aligned} \quad (2.23)$$

Esta equação representa a relação de reciprocidade correlacional causal no domínio do tempo para um meio de densidade variável $\rho(\mathbf{x})$ e velocidade de propagação $c(\mathbf{x})$ comum aos dois estados.

Similarmente ao teorema de reciprocidade convolucional, é possível encontrar simetrias entre os campos acústicos que caracterizam os dois estados A e B através da relação de reciprocidade correlacional. Aplicando as condições 1), 2) e 3) listadas anteriormente e, sabendo que as fontes do tipo monopolo para q_a e q_b são expressas no domínio do tempo respectivamente como

$$q_a(\mathbf{x}, t) = \delta(t - t_a) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$$

$$q_b(\mathbf{x}, t) = \delta(t - t_b) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$$

a equação (2.22) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V p_a(\mathbf{x}, \tau) \delta(\tau - t_b) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V p_b(\mathbf{x}, \tau) \delta(\tau - t - t_b) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \end{aligned}$$

Aplicando a filtragem da função delta dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

encontramos

$$p_a(\mathbf{x}_b, t_b - t; \mathbf{x}_a) = p_b(\mathbf{x}_a, t_a + t; \mathbf{x}_b),$$

para $t_a = t_b = 0$

$$p_a(\mathbf{x}_b, -t; \mathbf{x}_a) = p_b(\mathbf{x}_a, t; \mathbf{x}_b). \quad (2.24)$$

Esta equação estabelece uma simetria espacial e temporal entre os campos acústicos. Ao permutar a posição da fonte e receptor, e inverter a propagação de um dos campos acústicos no eixo do tempo, o valor do campo observado nos dois estados será o mesmo após o mesmo intervalo de tempo. Esta relação proveniente do teorema correlacional é de suma importância na descrição do princípio da reversão temporal e a relação proveniente do teorema convolucional permite entender a modelagem direta do campo de onda, como veremos a seguir. No entanto, antes de chegar nesses dois tópicos, é necessário introduzir o conceito de função de Green e encontrar as simetrias entre essas funções a partir dos teoremas de reciprocidade.

2.3 Função de Green

Matematicamente, a função de Green representa soluções de equações diferenciais não homogêneas com fontes pontuais que tem um domínio estabelecido e condições de fronteira especificadas. Fisicamente, esta função descreve a resposta de um meio quando submetido à este tipo de fonte. No que tange às fontes fundamentais para a acústica, restringindo a fontes de injeção de volume utilizada em levantamentos marinhos, tem-se a fonte pontual explosiva (SILVA NETO, 2004) dada por:

$$q(\mathbf{x}, t) = Q_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'), \quad (2.25)$$

em que Q_0 é a taxa de injeção de volume da fonte.

Logo, na acústica, com a função de Green é possível calcular a solução de equações diferenciais para quaisquer fontes especificadas as condições de fronteira e as condições iniciais do problema. A função de Green é denotada por $g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ e representa a resposta impulsiva do meio observada na posição \mathbf{x} no instante t provocada por uma fonte impulsiva na posição \mathbf{x}' no instante t' .

Sendo assim, a função de Green é solução da equação da onda acústica.

$$\frac{1}{\rho(\mathbf{x})c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \right) + \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.26)$$

Sendo $g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_a, t_a)$ a função de Green que descreve o estado *A* - resposta impulsiva do meio produzida por uma fonte pontual na posição \mathbf{x}_a no instante t_a - e $g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_b, t_b)$ a função de Green que descreve o estado *B* - resposta impulsiva do meio produzida por uma fonte pontual na posição \mathbf{x}_b no instante t_b - e aplicando na relação de reciprocidade convolucional no domínio do tempo expressa pela equação (2.11), obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_a, t_a) \nabla g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_b, t_b) - g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_b, t_b) \nabla g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_a, t_a)] \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V [g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_a, t_a) \delta(t - \tau - t_b) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) - g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_b, t_b) \delta(t - \tau - t_a) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)] dV \quad (2.27)$$

Utilizando novamente a propriedade da filtragem da função delta e pressupondo que o domínio possui fronteiras livre $g = 0$ ou rígidas $\nabla g = 0$ ou satisfaz a condição de Sommerfeld, a integral sobre a superfície ∂V se anula e resulta em,

$$g(\mathbf{x}_b, t - t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = g(\mathbf{x}_a, t - t_a; \mathbf{x}_b, t_b).$$

Para $t_a = t_b = 0$,

$$g(\mathbf{x}_b, t; \mathbf{x}_a, 0) = g(\mathbf{x}_a, t; \mathbf{x}_b, 0) \quad (2.28)$$

Este resultado é semelhante à equação (2.24) que descreve a simetria espacial do campo acústico. Neste caso, no entanto, como a função de Green que representa o campo acústico, ao fazer a permutação da posição da fonte e do receptor, a função de Green é que permanece invariante. Essa condição inicial garante que a função de Green é um campo de onda que se propaga a partir de um instante $t = 0$ e avança para frente no tempo a

partir da posição da fonte. Devido a isso ela recebe o nome de *função de Green causal*. Quando a função de Green se comporta de maneira oposta, ela recebe o nome de *função de Green anti-causal* e chegaremos nela através da relação de reciprocidade correlacional.

É possível encontrar outra simetria da função de Green aplicando-a na relação de reciprocidade do tipo correlação expressa pela equação (??). Analogamente ao que foi feito no caso convolucional e pressupondo novamente um domínio com fronteiras livres ou rígidas, tem-se:

$$g(\mathbf{x}_b, t_b - t; \mathbf{x}_a, t_a) = g(\mathbf{x}_a, t_a + t; \mathbf{x}_b, t_b). \quad (2.29)$$

para $t_a = t_b = 0$,

$$g(\mathbf{x}_b, -t; \mathbf{x}_a, 0) = g(\mathbf{x}_a, t; \mathbf{x}_b, 0). \quad (2.30)$$

A seguinte relação também é válida

$$g(\mathbf{x}_b, t; \mathbf{x}_a, 0) = g(\mathbf{x}_a, -t; \mathbf{x}_b, 0). \quad (2.31)$$

Nota-se a partir destas expressões que a função de Green é invariante na reversão temporal ao permutar a posição da fonte e do receptor. As funções de Green anti-causais $g(\mathbf{x}_a, -t; \mathbf{x}_b, 0)$ e $g(\mathbf{x}_b, -t; \mathbf{x}_a, 0)$ também são solução da equação da onda e representam o processo de reverter a sequência de propagação dos campos de onda. A função de Green anti-causal é igual ao complexo conjugado da função de Green causal.

Fazendo $t = 0$ nota-se ainda que a função de Green permanece a mesma se permutarmos a posição da fonte e do receptor no espaço e no tempo. Isso significa que a resposta impulsiva do meio observada em \mathbf{x}_b no instante t_b produzida por uma fonte pontual na posição \mathbf{x}_a no instante t_a será a mesma observada em \mathbf{x}_a no instante t_a produzida por uma fonte pontual em \mathbf{x}_b no instante t_b . Esta relação é descrita por:

$$g(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = g(\mathbf{x}_a, t_a; \mathbf{x}_b, t_b). \quad (2.32)$$

Devido a essas simetrias da função de Green - invariância espacial, temporal, e na reversão temporal - é conveniente definir um dos estados como sendo a função de Green (causal ou anti-causal) e o outro estado um campo de onda físico. A relação desses dois campos através dos teoremas de reciprocidade facilitados pela simetria das funções de Green, permitem calcular o campo de onda físico em um ponto interior ao domínio V .

2.4 Consequências dos Teoremas de Reciprocidade

Até aqui foi visto que os teoremas de reciprocidade convolucional e correlacional, sob certas condições, estabelecem simetrias sobre o campo acústico que também ocorrerão na função de Green. O uso da função de Green como um dos estados independentes do domínio V permitem determinar representações integrais para vários problemas em acústica, como por exemplo, a propagação direta e inversa dos campos de onda, o princípio da reversão temporal e a teoria do espalhamento direto e inverso. Por fundamentarem a modelagem e o imageamento sísmico, neste trabalho será mostrado com mais afinco o caso da modelagem acústica e da reversão temporal.

2.4.1 Propagação Direta dos Campos de Onda - Modelagem Acústica

Com o objetivo de obter uma representação integral para a propagação direta do campo acústico através do teorema de reciprocidade do tipo convolução, as seguintes considerações serão tomadas: o estado A será caracterizado pelo campo acústico produzido pela função de Green e o estado B caracterizado por um campo de onda físico $P(\mathbf{x}, \omega)$ produzido por uma fonte $Q(\mathbf{x}, \omega)$ aplicada em qualquer ponto do domínio V . Utilizando a equação (2.10) que descreve o teorema de reciprocidade convolucional para um meio de densidade variável $\rho(\mathbf{x})$ comum aos dois estados, teremos:

ESTADO A :

$$P_a(\mathbf{x}, \omega) = G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega).$$

$$Q_a(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

ESTADO B :

$$P_b(\mathbf{x}, \omega) = P(\mathbf{x}, \omega).$$

$$Q_b(\mathbf{x}, \omega) = Q(\mathbf{x}, \omega).$$

$$\int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS = \int_V P(\mathbf{x}, \omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) Q(\mathbf{x}, \omega) dV$$

Aplicando a propriedade de filtragem da função delta no primeiro termo da integral de volume e isolando o resultado, teremos:

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS + \int_V G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) Q(\mathbf{x}, \omega) dV. \quad (2.33)$$

Esta equação descreve a modelagem direta dos campos de onda no domínio da frequência. Nota-se que conhecida a função de Green no domínio V e na fronteira ∂V é possível calcular o campo de pressão em um ponto interno a V devido a qualquer distribuição de fontes. Se considerarmos ainda que o domínio V é livre de fontes, $Q(\mathbf{x}, \omega) = 0$, a integral de volume se anula e a equação acima é reduzida à:

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS.$$

Como o produto de funções no domínio da frequência corresponde à convolução das funções no domínio do tempo, a representação integral da modelagem acústica no domínio do tempo será expressa por:

$$p(\mathbf{x}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}', t') q(\mathbf{x}, \tau) dV \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}, t - \tau) - p(\mathbf{x}, \tau) \nabla g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}', t')] \cdot \mathbf{n} \cdot dS.$$

Considerando que trata-se de um meio causal e que a fonte pontual está localizada em \mathbf{x}' e $t' = 0$, a equação acima torna-se:

$$p(\mathbf{x}', t) = \int_0^t d\tau \int_V g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}', 0) q(\mathbf{x}, \tau) dV \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', 0) \nabla p(\mathbf{x}, t - \tau) - p(\mathbf{x}, \tau) \nabla g(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}', 0)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS. \quad (2.34)$$

Esta é a equação que descreve a propagação direta do campo de onda no domínio do tempo.

Uma vez que a função de Green anti causal é igual ao complexo conjugado da função de Green causal, é possível obter uma outra consequência dos teoremas de reciprocidade: a representação integral para o problema da propagação inversa dos campos de onda. Para tal, faz-se as mesmas considerações da propagação direta dos campos de onda, no entanto, o estado A será caracterizado por um campo acústico produzido pelo complexo conjugado da função de Green, isto é, um campo anti causal:

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS \\ + \int_V G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) Q(\mathbf{x}, \omega) dV. \quad (2.35)$$

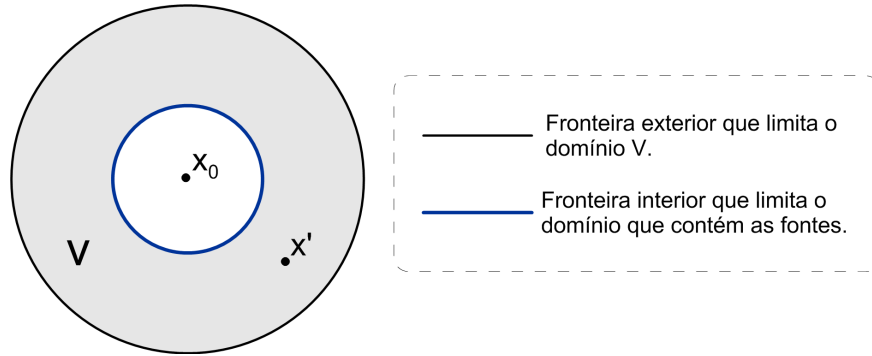
Considerando que o domínio V está livre de fontes, a integral de volume novamente se anula e a equação acima é reduzida à:

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS.$$

2.4.2 Reversão temporal

Para encontrar uma representação integral que descreva o princípio da reversão temporal, aplicaremos no teorema de reciprocidade do tipo correlação a geometria da Figura 1.

Figura 1 – Domínio V onde um estado acústico é produzido por uma fonte em \mathbf{x}_0 e o outro estado produzido pela função de Green em \mathbf{x}' . Fonte: do autor



Neste caso, existem duas fronteiras: a interior, que limita o domínio que contém as fontes, e a exterior, que limita o domínio V . Os estados A e B são caracterizados da seguinte maneira:

ESTADO A :

$$P_a(\mathbf{x}, \omega) = P(\mathbf{x}, \omega).$$

$$Q_a(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

ESTADO B :

$$P_b(\mathbf{x}, \omega) = G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega).$$

$$Q_b(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Um estado acústico é produzido pela função de Green com fonte localizada em \mathbf{x}' e o outro estado acústico constitui um campo de onda físico produzido por uma fonte pontual localizada em \mathbf{x}_0 . Aplicando essa geometria na equação (2.21) temos:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS = \\ - \int_V P(\mathbf{x}, \omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dV.$$

Como o ponto \mathbf{x}_0 está fora do domínio V , o segundo termo da integral de volume se anula. Aplicando a propriedade de filtragem da função delta, tem-se:

$$-P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS. \quad (2.36)$$

Como o produto entre uma função conjugada e outra função em um domínio correspondem à correlação destas funções em outro domínio, a equação acima no domínio do tempo, considerando que os campos nas fronteiras são conhecidos a partir do instante t , torna-se:

$$\int_t^\infty d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p(\mathbf{x}, \tau - t) \nabla g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}, \tau - t)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \\ -p(\mathbf{x}', t' - t).$$

Usando a relação de reciprocidade espacial da função de Green, a equação acima pode ser escrita da forma

$$\int_t^\infty d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [p(\mathbf{x}, \tau - t) \nabla g(\mathbf{x}', \tau; \mathbf{x}, t') - g(\mathbf{x}', \tau; \mathbf{x}, t') \nabla p(\mathbf{x}, \tau - t)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \\ -p(\mathbf{x}', t' - t).$$

Permutando o nome das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{x}'

$$\int_t^\infty d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} [p(\mathbf{x}', \tau - t) \nabla g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}', \tau - t)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \\ -p(\mathbf{x}, t' - t).$$

A equação acima considera o campo sendo registrado infinitamente. No entanto, este campo é registrado até um tempo máximo de observação T . Se toda a energia da fonte já atravessou a fronteira exterior ∂V durante o intervalo de 0 à T , a igualdade acima se mantém porém o limite de $d\tau$ muda e a equação pode ser escrita da forma

$$\int_t^T d\tau \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} [p(\mathbf{x}', \tau - t) \nabla g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}', \tau - t)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -p(\mathbf{x}, t' - t),$$

fazendo a mudança de variável $\xi = T - \tau$ podemos escrever

$$\int_0^{T-t} d\xi \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} [p(\mathbf{x}', T - \xi - t) \nabla g(\mathbf{x}, T - \xi; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, T - \xi; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}', T - \xi - t)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -p(\mathbf{x}, t' - t),$$

avaliando a equação acima em $t=0$

$$\int_0^T d\xi \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} [p(\mathbf{x}', T - \xi) \nabla g(\mathbf{x}, T - \xi; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, T - \xi; \mathbf{x}', t') \nabla p(\mathbf{x}', T - \xi)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -p(\mathbf{x}, t'),$$

renomeando t' como t e usando o fato de que a função de Green é invariante no tempo tem-se:

$$p(\mathbf{x}, t) = - \int_0^T d\xi \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x}')} [p(\mathbf{x}', T - \xi) \nabla g(\mathbf{x}, T - \xi; \mathbf{x}', t') - g(\mathbf{x}, T - \xi - t; \mathbf{x}', 0) \nabla p(\mathbf{x}', T - \xi)] \cdot \mathbf{n} \cdot dS.$$

A equação acima descreve a operação de reversão temporal. Como a função de Green usada para produzir o campo acústico no estado B foi causal, esta equação descreve um processo fisicamente realizável. Para retropropagar um campo acústico é necessário registrar o campo na fronteira do domínio durante um intervalo de tempo longo o suficiente de modo que toda a energia acústica emitida pela fonte atravessasse a fronteira. Em seguida, emitimos esse campo extrapolado a partir da fronteira na ordem inversa em que foi observado.

Neste capítulo foi mostrado como chegar nas principais representações dos teoremas de reciprocidade convolucional e correlacional. Ao introduzir o conceito da função de Green, foi possível obter algumas consequências destes teoremas, como a modelagem direta e inversa dos campos de onda, e o princípio da reversão temporal. É conveniente utilizar um dos estados como sendo a função de Green do meio de propagação e outro estado um campo de onda físico, para que seja possível calcular a solução do campo de pressão em um ponto interior ao domínio. Assim, de posse da função de Green do meio - baseada em um modelo de velocidade -, é possível obter a equação que rege a propagação e a

retropropagação dos campos de onda físicos. Consequentemente, para que se tenha uma boa modelagem da propagação da onda, tanto direta quanto inversa, é necessário dispor de um bom modelo de velocidade.

3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA

Como foi visto anteriormente, através dos teoremas de reciprocidade é possível obter representações para o problema da propagação direta dos campos de onda - modelagem acústica - e para o princípio da reversão temporal, dois conceitos que fundamentam o imageamento sísmico. Para que seja possível representar a propagação dos campos de ondas computacionalmente, é necessário que a solução da equação da onda acústica seja discretizada.

A discretização por diferenças finitas é popular na modelagem da onda sísmica por causa da sua simplicidade na implementação numérica e na sua habilidade de lidar com meios heterogêneos. Este método é geralmente o escolhido para a migração reversa no tempo e inversão da equação completa da onda (ZHANG, 2013).

A solução numérica de equações diferenciais via diferenças finitas é uma valiosa ferramenta na simulação de fenômenos físicos (HOLBERG, 1987). Neste trabalho usaremos este método para discretizar a equação acústica da onda. O objetivo dos esquemas de diferenças finitas é obter uma equação de diferenças finitas análoga à equação diferencial e consiste em substituir as derivadas por diferenças finitas através da expansão em série de Taylor da função derivada.

3.1 Equação da Onda Acústica

A equação da onda é um exemplo de equação de derivadas parciais do tipo hiperbólico que define um problema de valor inicial. No caso unidimensional, ela pode ser formulada a partir da Segunda Lei de Newton e da Lei Hooke, basta considerarmos uma linha com partículas de massa m interligadas por molas de massa desprezível e constante elástica k . O comprimento da mola de uma partícula para outra é Δx . As forças exercidas sobre a partícula de massa m na posição $x + \Delta x$ serão devido à segunda Lei de Newton e à Lei de Hooke. Igualando as duas forças damos origem à equação do movimento para a partícula na posição $x + \Delta x$. Após manipulações algébricas simples obtém-se

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{(\partial t)^2} = c(x)^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{(\partial x)^2}.$$

Esta é a equação da onda acústica unidimensional. Na modelagem sísmica, a equação utilizada é

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{(\partial t)^2} = c(x)^2 \cdot \nabla^2 p + s(t) \delta(x - x_s),$$

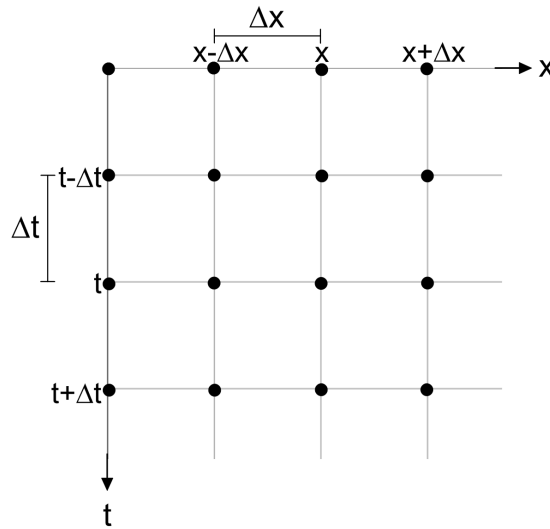
em que $s(t)$ representa uma fonte pontual em x_s .

3.2 Discretização por Diferenças Finitas

Considerando uma malha regular, igualmente espaçada ao longo do eixo t e x e sendo Δt e Δx os respectivos espaçamentos ao longo destes eixos, podemos expandir em série de Taylor o campo de pressão a partir de um ponto arbitrário.

A expansão em série de Taylor de $P(x + \Delta x, t)$ e $P(x - \Delta x, t)$ será:

Figura 2 – Malha de discretização regular. Fonte: do autor



$$P(x + \Delta x, t) = P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x)^3, \quad (3.1)$$

$$P(x - \Delta x, t) = P(x) - \frac{\partial P(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \mathcal{O}(\Delta x)^3. \quad (3.2)$$

Truncando ambas as expansões e admitindo apenas os termos de ordem de derivada igual a 1 e isolando o termo $\frac{\partial P(x)}{\partial x}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x)}{\partial x} &\approx \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x} &\approx \frac{P(x) - P(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Realizando a subtração das equações (3.1) - (3.2) de modo que possamos obter uma aproximação para as derivadas centrais, temos:

$$P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x) = 2 \frac{\partial P(x) \Delta x}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 P(x) \Delta x^3}{3!} + \dots \quad (3.4)$$

Truncando a equação acima a partir dos termos de ordem superior a 1 e isolando $\frac{\partial P(x)}{\partial x}$, obtemos uma aproximação para derivada de primeira ordem central em diferenças finitas

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \approx \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (3.5)$$

Para obter a aproximação para a segunda derivada, somaremos as equações (3.1) e (3.2) expandidas em Taylor e chegaremos em:

$$P(x + \Delta x) + P(x - \Delta x) = 2P(x) + 2 \frac{\partial^2 P(x) \Delta x^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x)^4. \quad (3.6)$$

Isolando o termo $\frac{\partial^2 P(x)}{\partial^2 x}$ e truncando a expansão a partir dos termos de ordem 2, temos a aproximação para a segunda derivada de $P(x, t)$ em relação à x por diferenças finitas

$$\frac{\partial^2 P(x)}{\partial^2 x} = \frac{P(x + \Delta x) - 2P(x) + P(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (3.7)$$

As mesmas operações podem ser feitas para obter a aproximação por diferenças finitas da primeira derivada e da segunda derivada do campo de pressão $P(x, t)$ em relação ao tempo t .

3.3 Cálculo dos Operadores de Diferenças Finitas

Os operadores de diferenças finitas surgem quando realizamos uma discretização numérica. Na equação (3.7), por exemplo, observa-se que os operadores de diferenças finitas para a segunda derivada são $(1, -2, 1)$. Porém como obtê-los? Para calcular esses operadores, consideramos a como sendo uma série de pontos igualmente espaçados cujo espaçamento é Δx a partir de x . Expandindo em série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} P(\Delta x) &= P(0) + P'(0)\Delta x + \frac{P''(0)\Delta x^2}{2} \\ P(0) &= P(0) \\ P(-\Delta x) &= P(0) - P'(0)\Delta x + \frac{P''(0)\Delta x^2}{2} \end{aligned}$$

Essas expressões podem ser escritas sob a forma de matriz, o que nos dá o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} P(\Delta x) \\ P(0) \\ P(-\Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x & \frac{\Delta x^2}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\Delta x & \frac{\Delta x^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ P''(0) \end{pmatrix}$$

É possível deixar a matriz acima mais simples se fatorarmos os termos com Δx . Assim, a equação acima toma a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} P(\Delta x) \\ P(0) \\ P(-\Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0)\Delta x^0 \\ P'(0)\Delta x^1 \\ P''(0)\Delta x^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Como a matriz é invertível, é possível obter os coeficientes de diferenças finitas através das seguintes operações

$$\begin{pmatrix} P(0)\Delta x^0 \\ P'(0)\Delta x^1 \\ P''(0)\Delta x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(\Delta x) \\ P(0) \\ P(-\Delta x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P(0)\Delta x^0 \\ P'(0)\Delta x^1 \\ P''(0)\Delta x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\Delta x) \\ P(0) \\ P(-\Delta x) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Finalmente obtemos os operadores de diferenças finitas para primeira derivada $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ e para a segunda derivada $(1, -2, 1)$.

Uma forma genérica de calcular os coeficientes de diferenças finitas foi feita por Costa (2012) onde a solução dos sistemas lineares abaixo calculam esses coeficientes para uma aproximação de ordem $2N$ e $2N + 2$ respectivamente:

$$K\delta_{K,1} = 2 \sum_{j=0}^{N-1} d_j \left(\frac{2j+1}{2}\right)^K \quad (K = 1, 3, \dots, 2N) \quad (3.10)$$

$$K(K-1)\delta_{K,2} = d_0\delta_{K,1} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j j^K \quad (K = 0, 2, \dots, 2N-1) \quad (3.11)$$

Os operadores de diferenças finitas são uma peça importante na modelagem por diferenças finitas. Conforme a frequência se aproxima da frequência de Nyquist, o esquema de diferenças finitas tende a ficar menos preciso e, para que não ocorra aliasing, é necessário que a malha de discretização fique mais densa, o que aumenta o custo computacional e a dispersão numérica. Otimizar os operadores de diferenças finitas é um modo de reduzir esses efeitos indesejados.

3.4 Consistência, Estabilidade e Convergência dos Esquemas de Diferenças Finitas

Foi visto anteriormente como obter a equação por diferenças finitas da equação da onda análoga à equação da onda na sua forma diferencial através da expansão em série de Taylor. Os termos a partir dos quais a expansão foi truncada, dá origem ao erro de truncamento. Por mais que este erro de discretização seja pequeno, ele não garante que haverá um erro pequeno da solução.

Para que o esquema de diferenças finitas seja eficaz na representação numérica da propagação da onda, é necessário investigar sua consistência, estabilidade e convergência. Esses conceitos serão abordados descritivamente neste trabalho. É possível encontrar os fundamentos matemáticos em (LAX e RITHMYER, 1956).

Dizemos que um esquema de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial parcial se no limite dos incrementos das variáveis independentes à zero a equação de diferenças finitas for a mesma da equação diferencial. No caso da equação da onda, as variáveis independentes são x e t . Se no limite dos incrementos Δx e Δt à zero, com uma malha de discretização progressivamente mais densa, a equação discreta se aproximar da equação diferencial contínua, tem-se um esquema de diferenças finitas consistente. Quando o esquema não é consistente, ele pode convergir para a solução de outra equação diferencial ou pode divergir.

Os conceitos de convergência e estabilidade podem ser analisados conjuntamente.

Um esquema é estável se os erros de diferenças finitas, quando propagados no tempo e espaço, não crescerem monotonicamente com o aumento das interações.

Por sua vez, um esquema será convergente se quando os incrementos Δt e Δx , espaçamento no tempo e no espaço, tenderem à zero, a solução da equação por diferenças finitas tender para a solução numérica exata da equação de diferenças finitas (solução composta por um número infinito de dígitos que não possui erros de quaisquer espécies).

Para provar a convergência do esquema, recorreremos ao Teorema da Equivalência de Lax. O teorema diz que dado um problema de valor inicial bem posto e uma aproximação por diferenças finitas consistente, a estabilidade é uma condição necessária e suficiente para que a aproximação em questão seja convergente.

Portanto, se provarmos que a aproximação por diferenças finitas é consistente e estável, estaremos provando que a mesma é convergente. É necessário agora provar a estabilidade da aproximação. Para isso, recorreremos à análise de estabilidade de Von Neumann.

3.4.1 Análise de Estabilidade de Von Neumann

Nos métodos numéricos, a análise de estabilidade de Von Neumann testará a estabilidade de um esquema de diferenças finitas, isto é, se os erros produzidos em uma interação vão aumentar à medida que as interações avançarem. Esta análise é feita através da substituição do campo de uma onda plana nas equações de diferenças finitas. O estudo de estabilidade deste trabalho foi baseado em (COSTA, 2012) e (PRESS et al., 2007)

De acordo com Costa (2012) a equação da onda acústica por diferenças finitas pode ser dada por

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t + \Delta) &= 2p(x, y, t) - p(x, y, t - \Delta) + \left(\frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_o p(x, y, t) \\
 &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\
 &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t))] \\
 &+ \Delta t^2 s(t) \delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + O(\Delta t^2, h^{2N}).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observa-se que para o conhecimento do campo acústico no instante $t + \Delta$ só é necessário conhecer quantidades nos instantes t e $t - \Delta$. O campo acústico de uma onda plana é dado por

$$p(x, y, t) = \exp[i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \tag{3.13}$$

A substituição da equação (3.13) na equação (3.12) gera

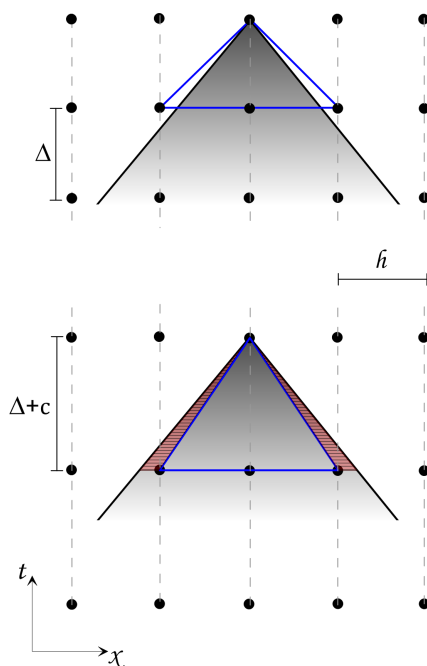
$$\sin^2 \left(\frac{\omega \Delta}{2} \right) = \frac{-\mu^2}{2} \left[d_o + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi) \right]. \tag{3.14}$$

em que k é número de onda dado por $\frac{\omega}{c}$, onde ω é a frequência angular e c a velocidade de fase da onda no meio contínuo; $\mathbf{n} = \cos \phi, \sin \phi$ onde ϕ é a direção do vetor número de onda; h é incremento no espaço; Δ é o incremento no tempo; d_j é o vetor de operadores de diferenças finitas e N é o tamanho deste vetor.

Para que a equação (3.14) seja verdadeira, e, conseqüentemente, o esquema seja estável, o lado direito da equação precisa ser menor ou igual a 1. Isso nos leva à seguinte condição de estabilidade

$$\begin{aligned} \mu &< \sqrt{\frac{-2}{d_o + \sum_1^{N-1} d_j (-1)^j}}, \\ \frac{c\Delta}{h} &< \mu, \\ \Delta &< \mu \frac{h}{c}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Figura 3 – Ilustração dos esquemas estáveis e instáveis. O triângulo azul indica o domínio abrangido pela malha e a região sombreada as informações que podem ser repassadas ao campo de pressão em $p(x, y, t + \Delta)$. Fonte: do autor



Baseado na análise feita por PRESS et al (2007) e adaptando para a equação (3.12) a condição de estabilidade pode ser entendida da seguinte maneira com o auxílio da Figura 3: o campo de onda acústico $p(x, y, t + \Delta)$ depende de informações nos pontos $x + jh$, $x - jh$, $y + jh$ e $y - jh$ no instante t . $x + jh$, $x - jh$, $y + jh$ e $y - jh$ são as fronteiras de uma região do espaço que pode se comunicar com $p(x, y, t + \Delta)$.

Se $p(x, y, t + \Delta)$ estiver fora da região sombreada, o campo acústico precisará de informações de pontos mais distantes do que a malha de discretização permite. Se parte da região que pode repassar informações à $p(x, y, t + \Delta)$ por dependerem de instantes passados não for abrangida, esta falta de informação (indicada em vermelho na figura) pode gerar instabilidade. Portanto, Δ , o incremento temporal, não pode ser muito grande.

3.5 Erro de Diferenças Finitas: Análise da Dispersão Numérica

Uma onda sísmica quando propagada em um meio perfeitamente elástico, homogêneo e isotrópico não dispersa, isto é, ondas de diferentes frequências se propagarão com a mesma velocidade. Neste caso, a velocidade de fase e a velocidade de grupo, composta de várias frequências, será a mesma.

Embora esteja estável e convergente, em um esquema de diferenças finitas a discretização espacial da equação da onda faz com que as velocidades de fase e grupo sejam dependentes do espaçamento entre os pontos da malha, da frequência e do ângulo de propagação. A dispersão numérica surge quando a velocidade de fase da onda numérica é diferente da velocidade de propagação do meio, prejudicando, assim, os resultados da modelagem. Em um meio dispersivo, as velocidades de fase e grupo variam com o número de onda e são diferentes. A diferença entre a velocidade de propagação na malha e a velocidade de propagação do meio dá origem ao erro de fase. O erro de fase pode ser analisado através da relação de dispersão, e esta, por sua vez, determina a acuidade de um esquema de diferenças finitas.

A relação de dispersão pode ser obtida a partir da equação (3.14). Elevando ambos os lados da equação à $1/2$ tem-se

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right) &= \mu\sqrt{\frac{d_o + \sum_{j=1}^{N-1} d_j(\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi)}{2}}, \\ \omega &= \frac{2}{\Delta} \sin^{-1} \left[\mu\sqrt{\frac{d_o + \sum_{j=1}^{N-1} d_j(\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi)}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como a velocidade de fase da onda sobre a malha é $C_{FD} = \frac{\omega}{k}$, dividimos ambos os lados da equação (3.16) por k . A partir do número de Courant, tem-se que $\Delta = \frac{\mu h}{c}$ e assim temos a relação de dispersão da velocidade de fase dada por

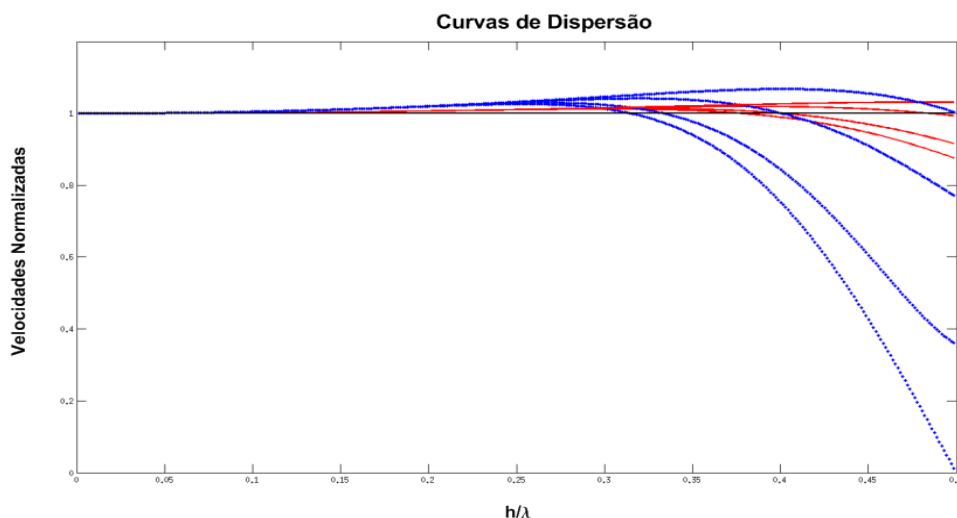
$$\frac{C_{FD}}{c} = \frac{2}{\mu h k} \sin^{-1} \left[\mu\sqrt{\frac{d_o + \sum_{j=1}^{N-1} d_j(\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi)}{2}} \right]. \quad (3.17)$$

Sabendo que $V_g = \partial\omega/\partial k$, podemos obter a equação para a velocidade de grupo

$$\frac{V_g}{c} = \frac{\mu}{\sin(\mu kh)} \left[\sum_{j=1}^{N-1} d_j(\cos \phi \cos jkh \cos \phi + \sin \phi \cos jkh \sin \phi) \right]. \quad (3.18)$$

Uma análise gráfica das equações (3.17) e (3.18) podem ser feitas através da Figura 4 que mostra o gráfico da velocidade de fase e de grupo normalizadas pelo número de

Figura 4 – Curvas de dispersão.



pontos da malha por comprimento de onda.

A velocidade de fase está em azul e a velocidade de grupo em vermelho. Quanto maior o número de pontos da malha por comprimento de onda, mais preciso será o esquema de diferenças finitas. O gráfico indica o menor número de pontos possível por comprimento de onda de forma que o erro de fase e de grupo sejam toleráveis e não danifiquem o resultado da modelagem. Os ângulos de direção do número de onda usados foram $\phi = 0, 15, 30$ e 45 .

Conforme as curvas se distanciam da reta constante, maior a dispersão. É possível notar que a partir de $h/\lambda = 0.1$ ambas as velocidades começam a dispersar. Isso implica que h precisa ser escolhido pequeno o suficiente de modo que $h < \lambda/10$.

3.5.1 Minimização dos Erros de Diferenças Finitas

A dispersão numérica é inerente aos esquemas de diferenças finitas quando há componentes de altas frequências e uma malha de discretização espaçada demais. Em uma modelagem de larga escala este erro se agrava uma vez que o uso de uma malha mais fina demandará mais memória e aumentará o custo computacional. Visando compensar este efeito, seria necessário diminuir a frequência, de modo que a discretização no tempo ficasse menos densa e, com o programa necessitando de menos interações no tempo, ele terminaria de processar durante um período tolerável. No entanto, as componentes de alta frequência são importantes para conseguir uma boa resolução, sendo, portanto, inviável diminuí-las. Desta forma, se faz necessário otimizar os coeficientes de diferenças finitas para reduzir a dispersão numérica para que seja possível manter as componentes de alta frequência

primordiais no alcance de uma boa resolução, e utilizar o grid com um espaçamento tal que diminua o custo computacional sem gerar erros.

Existem, principalmente, duas maneiras de calcular os coeficientes de diferenças finitas (YANG, 2013) baseado nas relações de dispersão:

1. Por expansão em série de Taylor, que consistirá em expandir em série de Taylor funções trigonométricas presentes nas relações de dispersão transformando essas funções trigonométricas em polinômios. Os coeficientes dos polinômios são então utilizados para obter os coeficientes de diferenças finitas.
2. Métodos de Otimização, que calculam os operadores de diferenças finitas sob determinadas condições. Geralmente o que se faz neste caso é minimizar relações de dispersão de diferenças finitas sobre o número de onda ou frequência, para se obter os operadores.

Um exemplo de otimização dos operadores que visa reduzir a dispersão numérica é o ajuste por mínimos quadrados da velocidade de fase, o ajuste por mínimos quadrados da velocidade de grupo, ou o ajuste dos dois conjuntamente.

Uma vez que o método dos mínimos quadrados visa encontrar o melhor ajuste para um dado conjunto de dados através da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre um valor estimado e um valor observado, no caso do ajuste das velocidade de fase e de grupo, a tentativa é minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a velocidade de fase ou de grupo do meio e a velocidade de fase ou de grupo de diferenças finitas. Quanto menor a diferença entre a velocidade do meio e a velocidade propagada na malha de discretização, menor a dispersão numérica.

Foi visto que aplicando a equação (3.13) na equação (3.12) dá origem à equação (3.14) que também pode ser escrita em função da velocidade de fase C_{FD} uma vez que $C_{FD} = \frac{\omega}{k}$

$$\sin^2\left(\frac{C_{FD}}{c}\mu kh\right) = \frac{-\mu^2}{2} \left[d_o + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi) \right]. \quad (3.19)$$

O ajuste da velocidade de fase por mínimos quadrados será feito no intervalo $0 < kh < \alpha \frac{\pi}{2}$ e estará sujeito à

$$d_o + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j = 0.$$

para calcular os operadores de diferenças finitas para a primeira derivada e

$$d_o + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j j^2 = 2,$$

para calcular os operadores de diferenças finitas para a segunda derivada.

Sabendo que a velocidade de grupo é dada por $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ podemos escrever

$$\frac{V_g}{c} = \frac{\mu}{\sin(\mu kh)} \left[\sum_{j=1}^{N-1} j d_j (\cos \phi \cos jkh + \sin \phi \cos jkh \sin \phi) \right] \quad (3.20)$$

O ajuste também será feito no intervalo $0 < kh < \alpha \frac{\pi}{2}$ e estará sujeito à,

$$d_o + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j = 0,$$

para calcular os operadores de diferenças finitas para a primeira derivada e

$$\sum_{j=1}^{N-1} d_j j^2 = 2,$$

para calcular os operadores de diferenças finitas para a segunda derivada.

Holberg (1987) encontrou uma relação entre o erro da resposta da frequência de um operador e as velocidades de fase e grupo. A otimização dos operadores se dá através da minimização do erro na velocidade de grupo, uma vez que, segundo ele, um erro pequeno na velocidade de grupo garante um erro na velocidade de fase ainda menor. A otimização proposta por Holberg é feita através da minimização de:

$$\begin{aligned} \epsilon_{gr} &= \mathbf{max}_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k}_j \leq \mathbf{K}_c} [k_j \partial \epsilon_j / \partial k_j + \epsilon_j], \\ \epsilon_j &= (D_{x_j}(k_j) e^{\pm i k_j \Delta x_j / 2} - i k_j) / i k_j. \end{aligned} \quad (3.21)$$

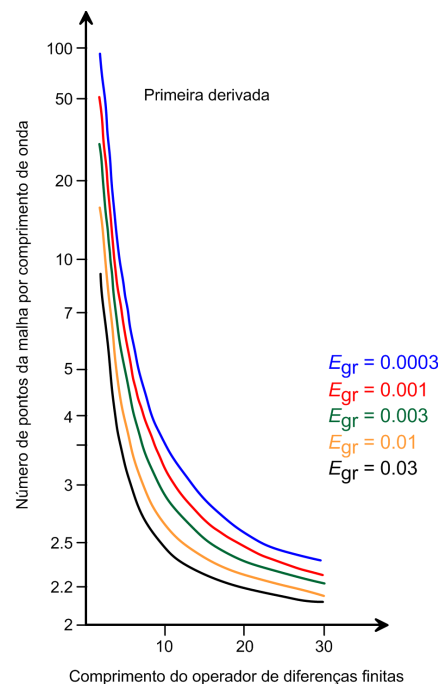
Onde k_j é o número de onda na direção x_j , $\epsilon_j(k_j)$ é o erro na resposta da frequência do operador, K_c é o número de onda máximo e $D_{x_j}(k_j)$ são os operadores para aproximação da primeira derivada espacial de uma função $u(x_j)$.

Uma alternativa mais rápida proposta pelo mesmo autor é que se minimize:

$$J = \int_{k_j=0}^{K_c} (k_j \partial \epsilon_j / \partial k_j + \epsilon_j)^4 dk_j. \quad (3.22)$$

A equação acima configura um problema de mínimos quadrados. Assim, para um dado tamanho do operador, resolve-se a equação acima para valores crescentes de K_c , até que o valor máximo do número de onda que satisfaça $\epsilon_j < E_{gr}$, onde E_{gr} é um valor de precisão mínimo, seja encontrado. As propriedades dos operadores encontrados por Holberg estão sintetizadas na Figura 5, onde é dada a relação entre o tamanho do operador e o número de pontos no grid por comprimento de onda para uma aproximação por diferenças finitas da primeira derivada para diferentes valores mínimos de precisão.

Figura 5 – Relação entre o comprimento do operador de diferenças finitas para a primeira derivada espacial e o número de pontos da malha por comprimento de onda encontrado por Holberg. As curvas foram plotadas para diferentes valores de precisão mínima.



3.6 Condições de Fronteira

Ao modelar a propagação dos campos de onda numericamente, este está restrito ao tamanho da malha de discretização. No entanto, é necessário estabelecer o que acontecerá com a propagação deste campo quando ele extrapolar o domínio da malha de modo que não surtem reflexões indesejadas que prejudiquem o resultado da modelagem. Assim, é necessário estabelecer as condições de fronteira.

As condições de fronteira consideradas na modelagem por diferenças finitas serão apresentadas descritivamente. Os fundamentos matemáticos das mesmas podem ser encon-

trados em (Virieux et al., (2012) e Silva Neto (2004).

Duas condições de fronteira são implementadas na modelagem por diferenças finitas: condição de fronteira livre e condição de fronteira absorvente.

A condição de fronteira livre é implementada no topo da malha para simular a interface água/ar ou sólido/ar que possui o maior contraste de impedância acústica. Uma forma de simular esta interface sem perder a acuidade e a estabilidade numérica do esquema é forçar a tensão à zero na superfície livre. Outra alternativa é fazer com que a velocidade das ondas P e S e a densidade tendam à zero na região acima da superfície livre (GRAVES, 1996). Silva Neto (2004) implementou a condição de fronteira livre substituindo as propriedades físicas em torno da superfície livre por médias convenientes.

As condições de fronteira absorventes são implementadas a fim de simular um meio infinito e são aplicadas nas bordas da malha. Uma forma eficiente de conseguir o efeito de um meio infinito durante a propagação da onda é utilizando camadas absorventes com casamento perfeito de impedância acústica (PML), que consiste em adicionar camadas absorventes anisotrópicas nas bordas da malha (VIRIEUX, 1996).

Neste capítulo foi possível averiguar os pontos mais relevantes quanto à solução da equação acústica da onda em meios heterogêneos por aproximação numérica usando o método das diferenças finitas.

Constatou-se que é necessário determinar a acuidade e estabilidade dos esquemas através da análise de estabilidade de Von Neumann; avaliar o custo computacional do esquema, fazendo um balanço nas escolhas dos valores de h e Δ dentro de um limite tolerável e seguro que não produza erros; especificar a estrutura da malha onde os campos de onda serão propagados, no caso deste trabalho, uma malha regular e uniforme e determinar as condições de fronteira para que não hajam reflexões indejadas nas bordas da malha que prejudiquem a modelagem.

Sendo assim, é possível determinar as principais etapas da modelagem por diferenças finitas:

1. É necessário determinar a frequência máxima f_{max} do pulso sísmico.

2. Tendo f_{max} , é possível determinar o comprimento de onda mínimo $\lambda_{min} = c_{min}/f_{max}$ onde c_{min} é a menor velocidade de propagação contida no modelo.
3. O espaçamento $h = \lambda_{min}/N$ onde N é o número de pontos da malha será determinado a partir das curvas de dispersão do esquema de diferenças finitas.
4. A discretização no tempo $\Delta = \mu h/c_{max}$, onde c_{max} é a maior velocidade de propagação encontrada no modelo, será avaliada a partir da condição de estabilidade.

4 IMAGEAMENTO UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA ONDA

Bulcão (2004) definiu a migração sísmica como um conjunto de procedimentos pelos quais os campos de ondas registrados (na superfície ou não), contendo informações sobre as camadas e interfaces do modelo geológico, são transformados através de metodologias adequadas em imagens corretamente posicionadas dos refletores em subsuperfície.

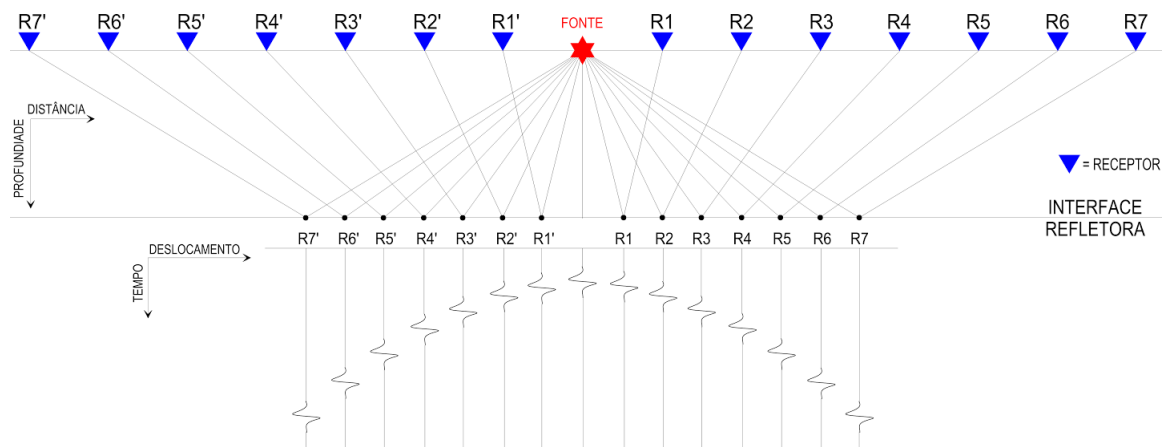
De posse de um modelo matemático (cujos parâmetros e como escolhe-los foram discutidos no capítulo anterior) onde será representada a propagação de ondas sísmicas, é possível fazer as seguintes simulações numéricas: *modelagem sísmica* e a *migração reversa no tempo* (RTM). Na migração RTM, o campo acústico registrado na superfície é retropropagado para o interior do modelo. Assim como a modelagem utiliza a equação da onda para propagar o campo de pressão, a migração RTM utiliza a equação da onda para retropropagar este campo e, após a aplicação da condição de imagem, é formada uma imagem em profundidade.

A migração utilizada neste trabalho para gerar imagens da subsuperfície foi a *migração reversa no tempo pré empilhamento*. Será discutido ao longo deste capítulo as noções gerais da migração sísmica e as razões pelas quais fora utilizada a migração pré empilhamento, contrariando as etapas do processamento sísmico convencional e, para isso, precisaremos de uma breve noção das etapas finais do processamento sísmico CMP (Ponto Médio Comum). Posteriormente, focaremos na migração RTM e nas equações que regem a propagação reversa no tempo dos campos de onda baseadas no teorema de reciprocidade correlacional. Posteriormente, introduziremos o conceito de condição de imagem e como as limitações da migração RTM podem ser atenuadas.

4.1 Migração Sísmica Pré-Empilhamento

Na sísmica de reflexão, a partir do momento da ativação da fonte (comumente chamada de *tiro*), a energia é propagada pelas camadas geológicas sob a forma de ondas sísmicas. As frentes de onda são detectadas por um receptor - ou grupo de receptores - e a energia mecânica da propagação das ondas é convertida em pulsos elétricos que darão origem ao *traço sísmico*. Nele constam o tempo que essa frente de onda levou para se propagar entre as interfaces refletoras e retornar à superfície, bem como a sua amplitude.

Figura 6 – Geometria de levantamento sísmico CMP: ponto iluminado na interface é o ponto médio entre a fonte e o receptor. Fonte: do autor



No processamento sísmico convencional ou CMP (*common mid-point*) considera-se que na interface refletora, o ponto iluminado pelo tiro esteja na posição média entre a fonte e o receptor, conforme indica a figura 6. No entanto, esta premissa só é exata se a interface refletora for plana e horizontal. Embora esta consideração seja feita no processamento de dados sísmicos, resultados satisfatórios são produzidos.

Os detalhes do processamento sísmico convencional fogem ao escopo deste trabalho, porém podem ser encontradas em (YILMAZ, 2001). O foco aqui são os elementos necessários para entender a preferência pela migração pré-empilhamento, uma vez que foi utilizada neste trabalho.

Nas etapas finais do processamento sísmico convencional o dado está organizado em famílias CMP. Os traços, nesta etapa, apresentam uma disposição hiperbólica dos eventos - *moveout* hiperbólico -, uma vez que conforme a distância entre o grupo de receptores e a fonte aumenta, maior o retardo no tempo com que o pulso será registrado no traço sísmico. Com a finalidade de corrigir este efeito, é feita a correção NMO (*normal-moveout*) que consiste em colocar os traços com offset igual a zero, isto é, afastamento nulo entre fonte e receptor, linearizando os eventos. Posteriormente, assumindo que os refletores estão dispostos em camadas planas horizontais, os traços correspondentes a um mesmo ponto em profundidade são somados construtivamente - ou empilhados - dando origem à *seção empilhada* ou *seção zero offset*, que já é uma imagem da subsuperfície, porém, com várias distorções: refletores com mergulho deslocados e pontos de difração imageados incorretamente.

Com a finalidade de corrigir essas distorções, é realizada a migração sísmica sobre

a seção empilhada, chamada de *migração pós empilhamento*. No entanto, em meios geologicamente complexos com camadas de alto mergulho e fortes variações laterais de velocidade, a migração antes do empilhamento - *migração pré-empilhamento* produz resultados mais acurados, uma vez que o pressuposto de que as camadas são planas e horizontais não será usado para obter a seção empilhada.

Em épocas remotas os maiores obstáculos na migração pré-empilhamento eram o custo computacional e o tempo para migrar os traços, sendo mais viável obter uma seção migrada com menos qualidade porém em um tempo razoável. O avanço computacional, como por exemplo, computadores com mais de um núcleo de processador que permite trabalhar em um ambiente multitarefa onde o sistema operacional reconhece cada núcleo como um processador diferente e pode atribuir a cada processador uma tarefa distinta, atrelado à possibilidade de criação de algoritmos de migração pré-empilhamento mais inteligentes, como algoritmos que utilizam a programação paralela, permitindo migrar uma quantidade de tiros em núcleos diferentes simultaneamente, muda o cenário do que era viável antes e faz com que seja possível obter imagens de maior qualidade com a migração pré-empilhamento em um tempo tolerável.

4.2 Migração Reversa no Tempo Pré-Empilhamento

A migração RTM é um tipo de migração sísmica em profundidade. Alguns autores a consideram como o processo inverso da modelagem, uma vez que objetiva-se obter as interfaces refletoras do modelo geológico a partir dos dados sísmicos registrados. Basicamente, os campos de onda registrado nos receptores são propagados inversamente no tempo - retropropagados - para o interior do modelo de acordo com o princípio da reversão temporal baseada no teorema de reciprocidade correlacional, ao mesmo tempo em que há a propagação direta destes campos de ondas, baseada no teorema de reciprocidade convolucional, a partir da fonte. Uma condição de imagem é posta sobre os campos propagados e retropropagados para que seja formada uma imagem da subsuperfície em profundidade. A qualidade desta imagem dependerá, entre outros fatores, do modelo matemático utilizado para despropagar o campo acústico, mesmo modelo utilizado na modelagem. Logo, as considerações sobre estabilidade dos esquemas numéricos, dispersão numérica, condições de fronteira e frequência máxima capaz de ser representada pela discretização feitas no capítulo anterior são válidas na extrapolação reversa dos campos de onda.

4.2.1 Propagação Reversa no Tempo dos Campos de Onda

Um dos objetivos da retropropagação dos campos de onda é eliminar o efeito da propagação direta. Analogamente à modelagem, a propagação reversa dos campos acústicos

está fundamentada nos teoremas de reciprocidade, mais precisamente no princípio da reversão temporal que deriva da relação de reciprocidade do tipo correlação.

No capítulo 2 foi visto que, dentro de um domínio V de fronteira ∂V , se considerarmos um campo acústico como sendo o campo de onda físico caracterizando um estado e o outro campo acústico como sendo o complexo conjugado da função de Green, aplicando na relação de reciprocidade obtemos representações integrais no domínio da frequência para a propagação reversa dos campos de onda, expresso pela equação (2.35) repetida aqui

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS + \int_V G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) Q(\mathbf{x}, \omega) dV.$$

Se considerarmos que o domínio V está livre de fontes - mesmo pressuposto usado na obtenção da equação da reversão temporal (2.36) - a equação acima é reduzida à

$$P(\mathbf{x}', \omega) = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} [G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega) \nabla P(\mathbf{x}, \omega) - P(\mathbf{x}, \omega) \nabla G^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', \omega)] \mathbf{n} \cdot dS.$$

Que muito se assemelha à equação que descreve o princípio da reversão temporal no domínio da frequência (2.36). Na verdade, o sinal que as diferenciam se deve à escolha dos campos que caracterizam os estados A e B : enquanto que na equação (2.36) o estado A representava a função de Green, na equação (2.36) o estado B é que representava a função de Green.

Essencialmente, o que se deve ter em mente é o seguinte raciocínio: a representação integral da propagação direta dos campos de onda é fundamentada na relação de reciprocidade convolucional, e está expressa pela equação (2.33) no domínio da frequência e (2.34) no domínio do tempo. Isso permite que seja possível calcular, a partir da equação da onda discretizada (3.12) repetida aqui, o campo de onda em um instante $t + \Delta$, tendo o conhecimento dos campos de onda nos instantes *anteriores* t e $t - \Delta$.

$$\begin{aligned} p(x, y, t + \Delta) &= 2p(x, y, t) - p(x, y, t - \Delta) + \left(\frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_o p(x, y, t) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t))] \\ &+ \Delta t^2 s(t) \delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + O(\Delta t^2, h^{2N}). \end{aligned}$$

A representação integral da retropropagação dos campos de onda, se baseia nos mesmos princípios da propagação direta, no entanto, um estado acústico é caracterizado pelo complexo conjugado da função de Green, o que nos dá a equação (2.35), que é semelhante á equação (2.36) como vimos anteriormente. A equação (2.36) no domínio do tempo, como pode ser visto no capítulo 2, dá origem á equação que caracteriza a reversão temporal. Isso mostra que a mesma equação utilizada para propagar o campo no sentido direto, pode ser usada para propagar o campo no sentido reverso, bastando para isso que o sinal registrado pelos receptores sirva como fonte e propague os campos de onda na ordem reversa no tempo (dos instantes finais para os instantes iniciais). Conseqüentemente, na equação discreta da onda para a retropropagação, para calcular o campo acústico em um instante de tempo $t - \Delta$, é necessário conhecer o campo nos instantes *posteriores* t e $t + \Delta$. Isolando o termo $p(x, y, t - \Delta)$ da equação (3.12) obtemos a equação da onda acústica discretizada pelo método das diferenças finitas utilizada na propagação reversa dos campos de onda.

$$\begin{aligned}
p(x, y, t - \Delta) &= 2p(x, y, t) - p(x, y, t + \Delta) + \left(\frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_o p(x, y, t) \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t))] \\
&+ \Delta t^2 + O(\Delta t^2, h^{2N}).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Nota-se que o termo que representa a fonte não entra nessa equação, uma vez que os tiros só precisam ser simulados durante a propagação direta.

Quando a frente de onda atinge uma posição em profundidade onde existe uma interface, o campo de ondas é registrado nesta posição. Os critérios que determinarão a posição em que a frente de onda atingiu a interface (conseqüentemente onde o registro deve ser feito), são chamados de condição de imagem. A retropropagação dos campos de onda constitui a primeira etapa do processo de migração reversa, a segunda etapa é a escolha de uma condição de imagem a ser aplicada. Embora o algoritmo de RTM seja o mesmo para as migrações pré e pós-empilhamento, a condição de imagem irá diferenciá-las.

O dado de entrada da etapa de migração é o sismograma e o modelo de velocidade. O campo propagado no sentido direto e no sentido reverso é calculado para cada ponto do modelo de velocidade com a aplicação da condição de imagem.

4.2.2 Condição de Imagem

Diferentes condições de imagem são aplicadas de acordo com o tipo de migração - pré ou pós empilhamento - realizada e fornecem diferentes resultados na qualidade da seção migrada. No que tange a migração pós empilhamento, a condição de imagem aplicada parte do pressuposto de que a seção empilhada pode ser representada pelo *Modelo do Refletor Explosivo*, que diz que se as fontes estivessem distribuídas sobre os refletores em subsuperfície e fossem todas ativadas no mesmo instante $t = 0$ os dados registrados na superfície seriam os mesmos de um levantamento de offset zero.

Exemplos de condições aplicadas na migração pré-empilhamento são a condição de imagem com tempo de excitação, condição de imagem com correlação cruzada, condição de imagem com correlação cruzada normalizada, entre outras. O foco deste trabalho estão nas condições de imagem aplicadas na migração antes do empilhamento dos dados.

A condição de imagem com *correlação cruzada* dos campos de onda ascendente e descendente parte do *princípio da coincidência dos campos* proposto por Claerbout (1971). Para melhor entendimento, é necessário pensar no campo acústico produzido por uma fonte como um campo possuinte de duas componentes:

1. $p_{des}(\mathbf{x}, t_s)$ um campo acústico *descendente* que recebe esse nome por se propagar a partir da fonte para o interior do modelo, também chamado de campo *incidente*.
2. $p_{asc}(\mathbf{x}, t_R)$ um campo acústico *ascendente* produzido por uma interface refletora que age como uma fonte secundária e se propaga até os receptores.

As variáveis espaciais são representadas por \mathbf{x} ; t_s representa o tempo de trânsito da fonte até o refletor durante a propagação; t_R representa o tempo de trânsito do receptor até o refletor durante a propagação reversa dos campos.

O tempo total, ou tempo duplo (FARIA, 1986) será dado por:

$$T = t_s + t_R.$$

Supondo-se um modelo composto por uma única interface refletora e a fonte sísmica como sendo um pulso unitário, as seguintes relações são válidas (FARIA, 1986):

$p_{des}(\mathbf{x}, t_s) \cdot p_{asc}(\mathbf{x}, t_R) \neq 0$, nos pontos sobre o refletor;

$p_{des}(\mathbf{x}, t_s) \cdot p_{asc}(\mathbf{x}, t_R) = 0$, nos pontos que não estão sobre o refletor.

Assim, a existência de um refletor em uma dada posição em profundidade será indicada pela coincidência dos tempos de trânsito dos campos ascendentes e descendentes. Baseado nisso, a seção migrada em profundidade consistirá no somatório, para todos os tempos, da multiplicação dos campos ascendentes e descendentes:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{t=0}^{t_{max}} p_{asc}(\mathbf{x}, t) \cdot p_{des}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

Onde $I(\mathbf{x})$ representa a imagem formada em profundidade, t é o tempo de análise, e t_{max} é o tempo total que o sismograma foi registrado. A equação acima corresponde a correlação cruzada entre os dois campos de ondas, isto é, o primeiro campo retropropagado deve ser correlacionado com o último campo propagado, o segundo campo retropropagado deve ser correlacionado com o penúltimo campo propagado e assim por diante.

O fato dos campos ascendentes e descendentes serem obtidos em direções opostas em relação ao tempo, acarreta, computacionalmente, um problema, por ser necessário o armazenamento dos campos descendentes ou ascendentes para cada tempo, para uma posterior multiplicação (FARIA, 1986). Uma maneira de contornar este problema é realizar a propagação direta dos campos de onda durante um tempo tal que as frentes de onda diretas ultrapassem a fronteira do domínio e toda a energia acústica emitida pela fonte atravesse a fronteira, em seguida, é realizada a depropagação destes campos de ondas descendentes a partir da fronteira ao mesmo tempo em que é realizada a propagação reversa no tempo dos campos de onda ascendentes.

Embora a condição de imagem por correlação cruzada não possua limitações ao imagear regiões com alto grau de heterogeneidade e refletores com altos mergulhos, ela produz uma imagem migrada com ruído devido ao retroespalhamento e que não necessariamente tem as amplitudes proporcionais à refletividade.

O ruído devido ao retroespalhamento, juntamente com as ondas transmitidas (ou refratadas) e as *head waves* - ondas refratadas criticamente que se propagam no meio de alta velocidade quase paralelas à superfície de refração antes de retornar à superfície - produzem artefatos na imagem migrada que são visíveis como energia de baixo número de onda, tidos comumente como ruídos. Embora a utilização da equação completa da

onda na RTM permita que a onda possa se propagar em todas as direções independente da complexidade do modelo de velocidades ou da direção de propagação, garantindo um método de imageamento de certa forma preciso, ela também propagará ondas que se espalharão em todas as direções, dando origem a ondas que não necessariamente foram refletidas em uma interface na subsuperfície, como as ondas anteriormente citadas. É a correlação cruzada com essas ondas transmitidas, *head waves* e ondas retroespalhadas que darão origem aos artefatos na imagem migrada tidos como ruídos uma vez que eles ofuscam a imagem real da geologia, principal objetivo da RTM. A correlação cruzada da onda proveniente da fonte com as ondas retroespalhadas produz ruídos de um grau maior se houver corpos angulosos - como corpos salinos - no modelo de velocidade.

É possível remover o ruído por retroespalhamento da imagem migrada através da aplicação de filtros - como filtro passa-alta, ou filtros mais complexos, como o proposto por Biondi (2007) baseado em atenuação por mínimos quadrados - e através da implementação de uma nova condição de imagem que utiliza o *vetor poynting*, como veremos a seguir.

Os artefatos produzidos na imagem migrada provenientes da correlação dos campos de onda da fonte com os eventos indesejáveis apresentam uma característica em comum: o campo da fonte que fora correlacionado com tais eventos apresentam grandes ângulos de incidência, fazendo com que durante a correlação, os campos propagados e os campos retropropagados apresentem direções de propagação quase opostas. Eliminar a correlação entre campos de direções opostas, portanto, eliminará da imagem migrada estes artefatos indesejáveis. O vetor Poynting, por sua vez, nos permite computar a direção de propagação da onda. Ele é definido matematicamente como uma medida da densidade direcional do fluxo de energia de um campo. O uso do vetor Poynting na remoção dos eventos indesejáveis na imagem migrada pode ser entendido da seguinte forma: uma função peso W ordena as ondas provenientes da fonte e do receptor baseado no ângulo de incidência - recordando que altos ângulos sugerem a correlação com os eventos indesejáveis -. Este ângulo é obtido através do vetor Poynting das ondas da fonte e do receptor, e, apenas a energia relacionada as reflexões são mantidas na imagem.

O vetor Poynting para campos acústicos é:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t) \quad (4.3)$$

Onde \mathbf{v} é o campo de velocidade e p o campo de pressão. O cálculo do ângulo de incidência, realizado através do vetor Poynting, é dado por:

$$\cos \theta(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{v}_s p_s \cdot \mathbf{v}_r p_r}{|\mathbf{v}_s p_s| |\mathbf{v}_r p_r|} \quad (4.4)$$

Onde \mathbf{v}_s e p_s representam os campos de velocidade e campo de pressão da fonte e \mathbf{v}_r e p_r os campos de velocidade e campos de pressão dos receptores. A condição de imagem utilizando o vetor Poynting implementada por Yoon e Marfurt(2006) será:

$$I(\mathbf{x}, t) = \frac{\int p_s p_r W(\cos \theta) dt}{\int [p_s]^2 dt} \quad (4.5)$$

A função peso $W(\theta)$ será responsável por filtrar os eventos dentro de uma faixa de ângulos de incidência, de modo que $W(\theta) = 1$ quando $\theta < \theta_{max}$, ou seja, $W(\theta) = 1$ quando o ângulo inserido pelo usuário for menor que um ângulo de incidência máximo que quando correlacionado com o campo retropropagado não gera os artefatos na imagem migrada, e $W(\theta) = 0$ para o caso contrário.

Além do ruído devido ao retroespalhamento da imagem migrada por correlação cruzada, foi citado também que as amplitudes da imagem não correspondem à refletividade, isto significa que em regiões onde a amplitude dos campos incidentes é baixa no modelo de velocidade - regiões de baixa iluminação -, como por exemplo camadas em maior profundidade, por mais que se tenha uma camada com uma velocidade de propagação alta e que em condições ideais deveria ser representada na imagem migrada com uma amplitude maior que as camadas com uma velocidade mais baixa, devido à baixa iluminação, o que se terá na imagem migrada será uma camada com uma amplitude menor do que deveria e que não representa a real refletividade do modelo, prejudicando a interpretação sísmica.

Uma maneira de recuperar as amplitudes de modo que elas sejam fieis à refletividade do modelo, é através da condição de imagem com *compensação de iluminação*, que consiste em dividir a equação que representa a condição de imagem por correlação cruzada pelo produto dos campos de onda da fonte.

A equação (4.2) pode ser reescrita como (COSTA, 2012):

$$I(\mathbf{x}) = \sum_S \int_0^T \sum_R p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r). \quad (4.6)$$

E a condição de imagem com compensação de iluminação será dada por:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_S \frac{\int_0^T \sum_R p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r)}{\int_0^T p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) dt}. \quad (4.7)$$

Alguns autores argumentam que a equação acima compensa mais a amplitude de refletores em profundidades mais rasas em detrimento dos refletores mais profundos e sugerem a compensação de iluminação dividindo a condição de imagem pelo produto dos campos de onda dos receptores (KAELIN et. al, 2006), o que compensa a amplitude dos refletores mais profundos.

$$I(\mathbf{x}) = \sum_S \frac{\int_0^T \sum_R p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r)}{\int_0^T p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) dt} \quad (4.8)$$

Segundo KAELIN (2006), o uso combinado das equações (4.7) e (4.8) como condição de imagem garantem uma representação da refletividade na imagem migrada mais fiel ao modelo de velocidade.

De posse das informações deste capítulo é possível entender como se dá o imageamento utilizando a equação da onda através da migração reversa no tempo:

1. É preciso implementar a propagação reversa dos campos de onda, logo, é necessário encontrar a equação que rege a retropropagação dos campos de onda, utilizando o princípio da reversão temporal que se baseia nos teoremas de reciprocidade, lembrando que assim como na modelagem, é necessário obedecer alguns critérios que garantam que o esquema numérico utilizado possua o mínimo de erros possíveis.
2. É necessário propagar os campos de onda da fonte simultaneamente à propagação reversa dos campos de onda dos receptores e aplicar uma condição de imagem. A imagem em profundidade será formada onde a correlação cruzada destes campos for diferente de zero.
3. Dependendo da complexidade do modelo de velocidade utilizado, a condição de imagem por correlação cruzada pode não ser eficaz ao gerar a imagem migrada, evidenciando as limitações da RTM tais como ruído por retroespalhamento e amplitudes não preservadas, sendo necessário utilizar outras condições de imagem que garantam uma maior qualidade da imagem migrada final.

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nos capítulos anteriores, foi mostrada as etapas da modelagem acústica da onda (capítulo 3) e do imageamento sísmico utilizando a equação completa da onda através da migração reversa no tempo (capítulo 4), ambos fundamentados nos teoremas de reciprocidade (capítulo 2). Neste capítulo será feita uma análise da aplicação dos algoritmos de modelagem acústica - necessário no RTM, como já foi visto - e da migração reversa no tempo pré-empilhamento, utilizando uma aproximação da equação acústica da onda através dos operadores de diferenças finitas, em dois modelos de velocidade complexos: o modelo *Marmousi* e um modelo com um domo de sal *Sigsbee*.

5.1 Modelos de Velocidade: Marmousi e Sigsbee

O Marmousi é um conjunto de dados sintéticos 2D produzidos pelo IFP - *Institut Français du Pétrole* - cuja geometria e modelo de velocidade foram criados para produzir um dado sísmico complexo que requira técnicas de processamento avançadas para que se possa obter o correto imageamento das estruturas (VERSTEEG, 1993). Além da forte variação lateral de velocidade, o que dificulta o imageamento deste modelo é a a estrutura geológica complexa baseada em falhas de crescimento, que se erguem de um truncamento de sal, até a parte superior do modelo. A região de interesse, que contém o armazenamento de hidrocarbonetos, se encontra sob a forma de lente a uma profundidade aproximada de 2.500 metros.

O Sigsbee, por sua vez, é um conjunto de dados sintéticos 2D lançado pelo consórcio SMAART (Subsalt Multiples Attenuation and Reduction Technology Joint Venture) em 2001, cujo foco é desenvolver modelos da subsuperfície realísticos de modo que se possam testar metodologias de imageamento e supressão de múltiplas. Os modelos de velocidade Sigsbee podem ser postos em duas categorias: Sigsbee2A e Sigsbee2B. Ambos possuem a mesma geometria e consistem em sequências sedimentares rompidas por falhas normais e falhas inversas ou de empurrão, além da existência de um domo salino. O modelo Sigsbee2B, todavia, possui um contraste de velocidade na fronteira água/assolho mais realista, provocando a geração de reflexões internas e múltiplas. Este último modelo, Sigsbee2B, foi o que fora usado como teste neste trabalho. O desafio ao imageá-lo está no grande domo salino de geometria complexa, que causa problemas de iluminação dos refletores presentes abaixo deste corpo de sal. Para tanto, pontos difratores igualmente espaçados foram postos neste modelo de velocidade em uma profundidade maior que a do domo salino. Assim, uma boa maneira de testar se o algoritmo é eficiente no imageamento, é verificar o

grau de iluminação desses pontos na imagem migrada.

Os dados dos modelos acima estão sumarizados abaixo:

Marmousi

- número de pontos em z : 243
- número de pontos em x : 767
- frequência do pulso fonte: 12.0 hz

Sigsbee

- número de pontos em z : 1201
- número de pontos em x : 3201
- frequência do pulso fonte: 25.0 hz

Há ainda uma importante consideração a ser feita antes de mostrarmos os experimentos com o algoritmo de imageamento utilizando a equação da onda, que diz respeito à suavização dos modelos de velocidade.

5.2 Suavização dos Modelos de Velocidade

Durante a propagação dos campos de onda da fonte e concomitante propagação reversa dos campos de onda provenientes dos receptores, um problema observado é na geração de reflexões internas devido ao contraste de impedância acústica entre as camadas geológicas que gerarão artefatos na imagem migrada final. É importante tentar suprimir as reflexões internas uma vez que elas podem somar-se com outros campos, a exemplo do campo incidente, e, conseqüentemente, um valor de campo incidente distorcido seria usado na correlação cruzada ao aplicar a condição de imagem (capítulo 3). Uma maneira de tentar diminuir a ocorrência desses artefatos da imagem final, é suavizar o modelo de

velocidade, isto é, suavizar os contrastes abruptos de velocidade das camadas.

5.3 Resultados da modelagem e RTM

Figura 7 – Modelo de velocidade Marmousi sem suavização

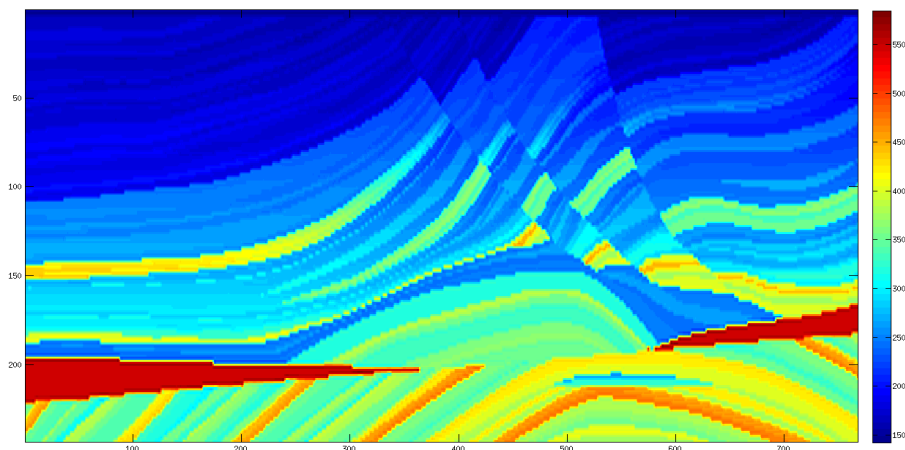
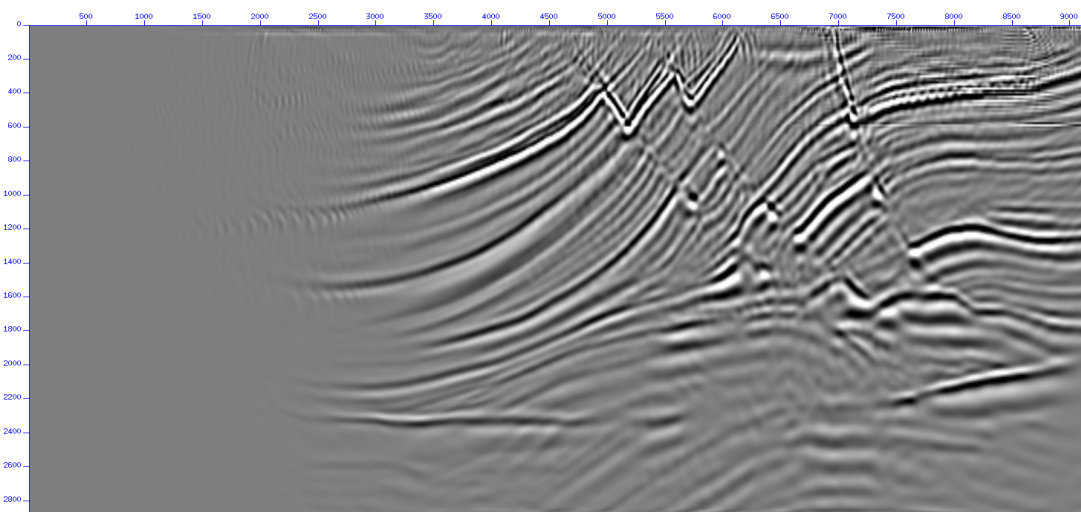


Figura 8 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização



No que diz respeito às imagens migradas do modelo de velocidade Marmousi, a suavização de até 100x do modelo de velocidade comparada com a versão sem suavização pouco alterou a qualidade da imagem migrada final (figura 8 e figura 10). Apesar da forte variação lateral de velocidade, as falhas de crescimento que partem do truncamento de sal foram bem imageadas e pelo menos as três falhas principais são facilmente identificadas. A estrutura em lâmina que contém os hidrocarbonetos também ficou bem visível, assim como as estruturas em dobras abaixo do truncamento de sal, embora tenha sofrido uma perda de amplitude quando comparada às estruturas em profundidades menores. As imagens migradas provenientes dos modelos de velocidade com suavização recursiva de 500x e 1000x (figura 12 e figura 14) também apresentaram bons resultados e mostra a robustez

Figura 9 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 100 vezes

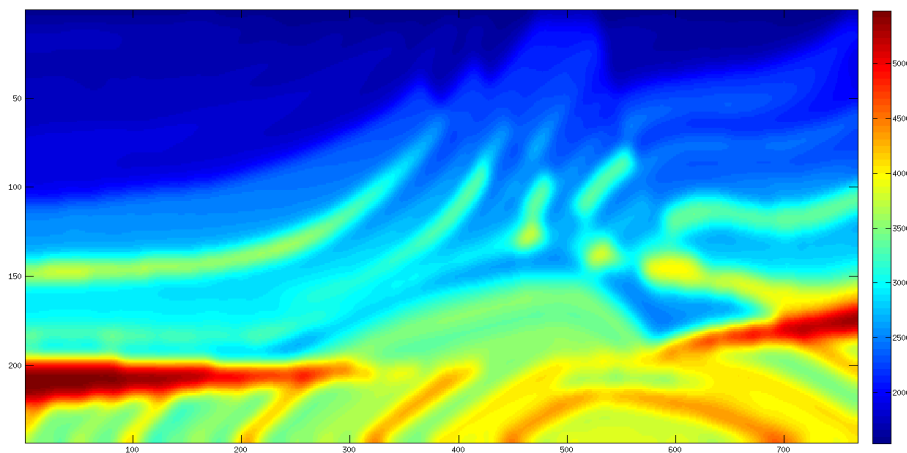


Figura 10 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 100 vezes

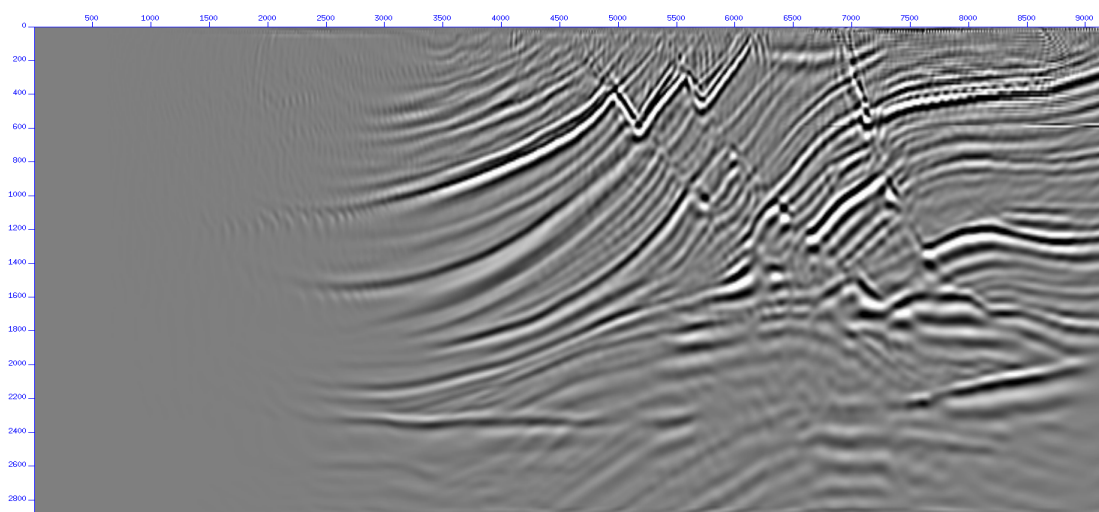


Figura 11 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 500 vezes

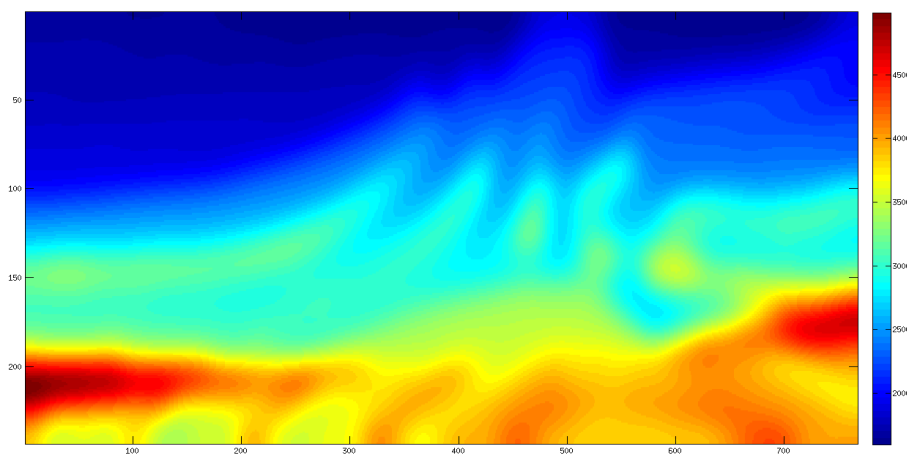


Figura 12 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 500 vezes

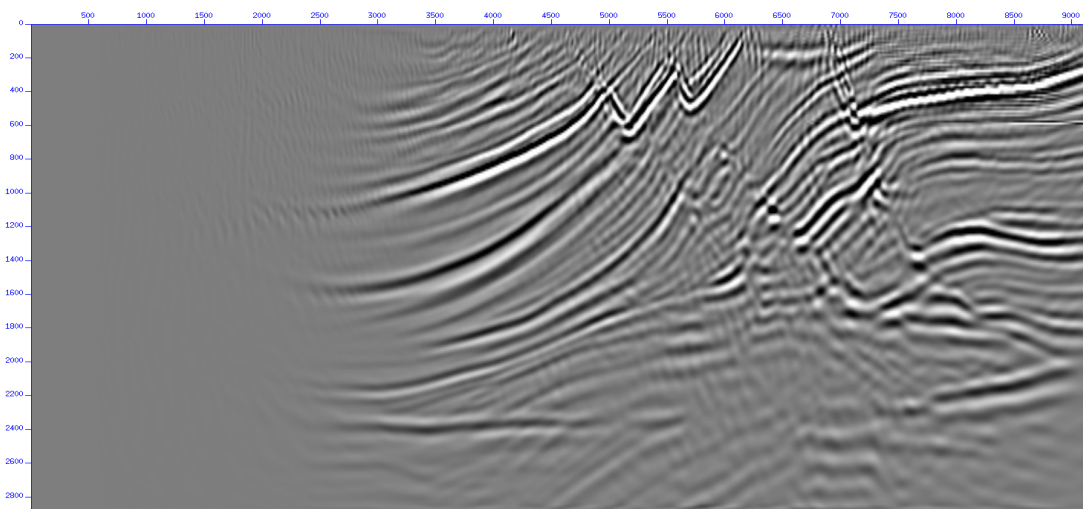
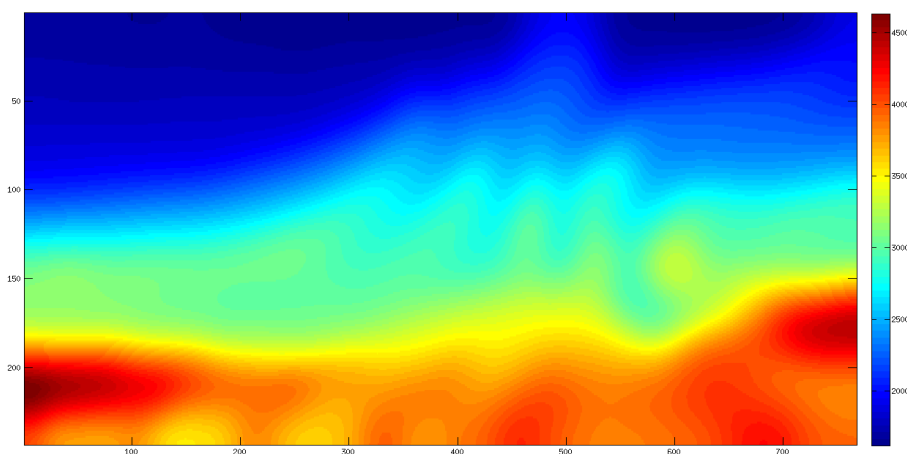


Figura 13 – Modelo de velocidade Marmousi suavizado 1000 vezes



da RTM no imageamento das estruturas complexas. Embora nessas duas últimas imagens as estruturas em dobras tenham perdido ainda mais amplitude e o limite entre estas e o truncamento de sal tenha ficado menos perceptível, o comprimento horizontal da estrutura laminar dos hidrocarbonetos fica visível nas coordenadas $z=2400\text{m}$ $x=5500\text{m}$ e em $z=2200\text{m}$ e $x=7500\text{m}$ mesmo na figura 14 detentora do modelo de velocidade mais suavizado.

O imageamento do modelo de velocidade Sigsbee, por sua vez, foi mais desafiador. A comparação entre a figura 16 e a figura 18 - imagem migrada sem suavização e imagem migrada suavizada recursivamente 50x - mostra diferenças significantes. Na figura 16 já é possível notar reflexões múltiplas e difrações nos limites superiores do domo de sal possivelmente ocasionadas pelas angulosidades do mesmo, que ficam ainda mais acentuadas

Figura 14 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes

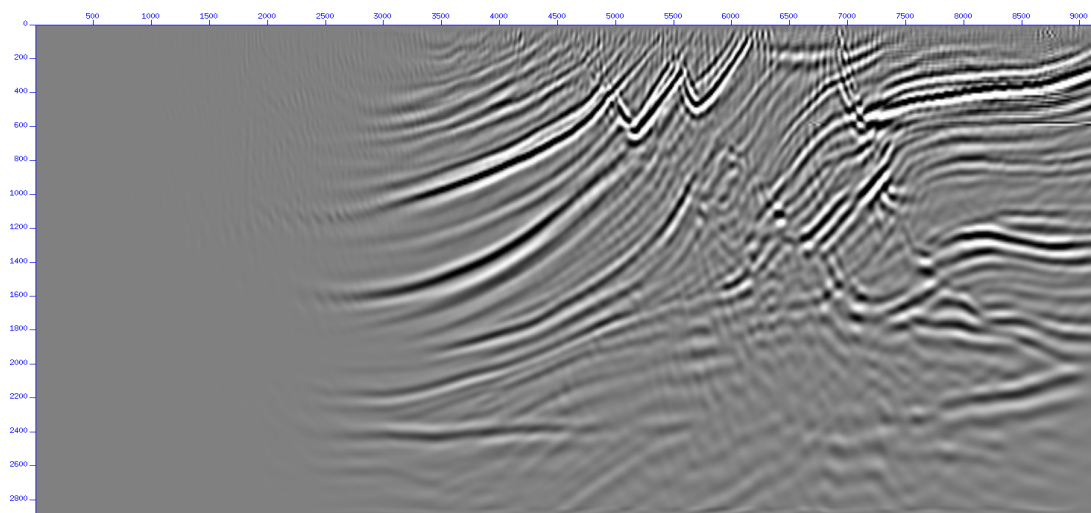
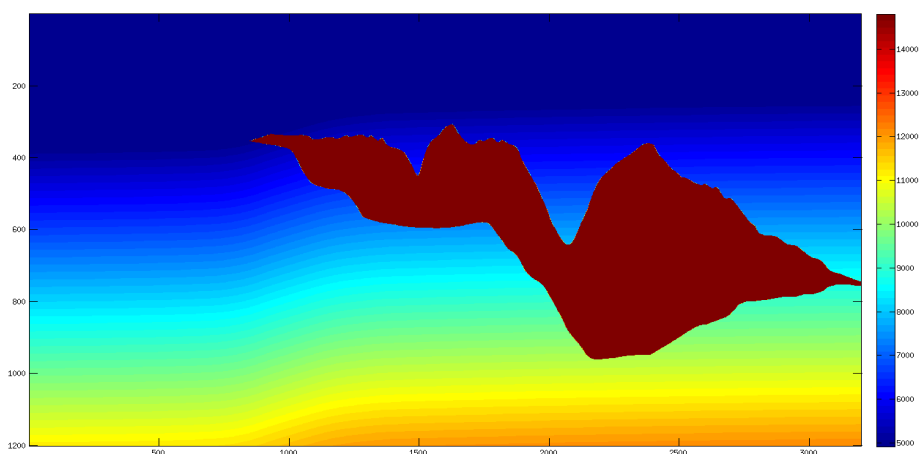


Figura 15 – Modelo de velocidade Sigsbee sem suavização



depois da suavização, vide figura 18. O fator mais importante a ser considerado na análise das imagens migradas deste modelo de velocidade, no entanto, está no imageamento das estruturas presentes abaixo do domo salino uma vez que o alto contraste de impedância acústica entre este corpo e as rochas encaixantes não permite que a energia acústica atinja pontos mais profundos. Para facilitar essa visualização, as figuras 23, 24, 25 e 26 mostram a região abaixo do domo salino ampliada 10 vezes, de modo que seja possível visualizar os pontos difratores. Nas figuras 16 e 18, ampliadas nas figuras 23 e 24, respectivamente, observa-se que todos os pontos difratores igualmente espaçados nas profundidades 1700m e 2500m localizados abaixo do domo de sal estão visíveis, o que não ocorrerá nas imagens migradas provenientes dos modelos de velocidade com maior suavização, como será visto.

Figura 16 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização

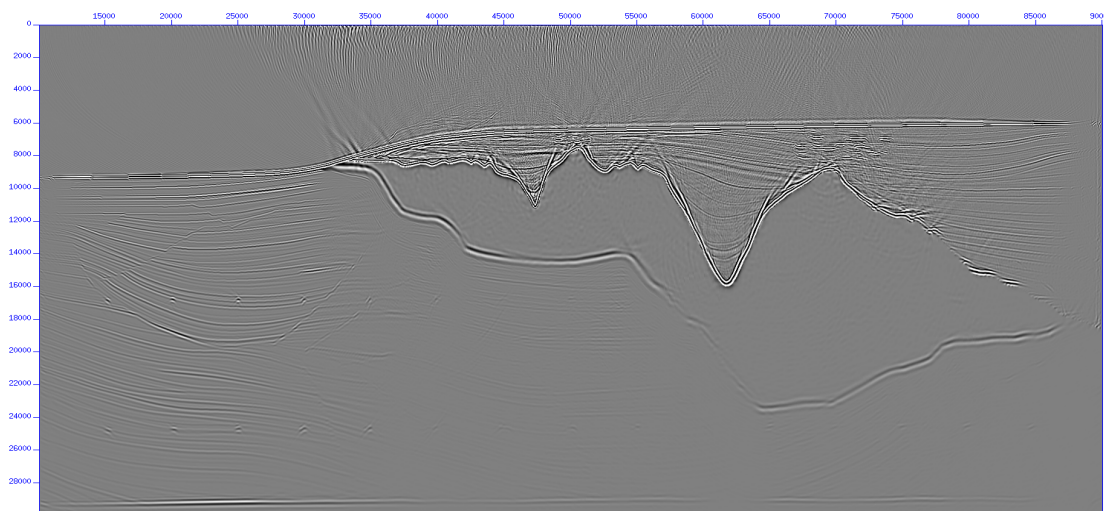


Figura 17 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 50 vezes

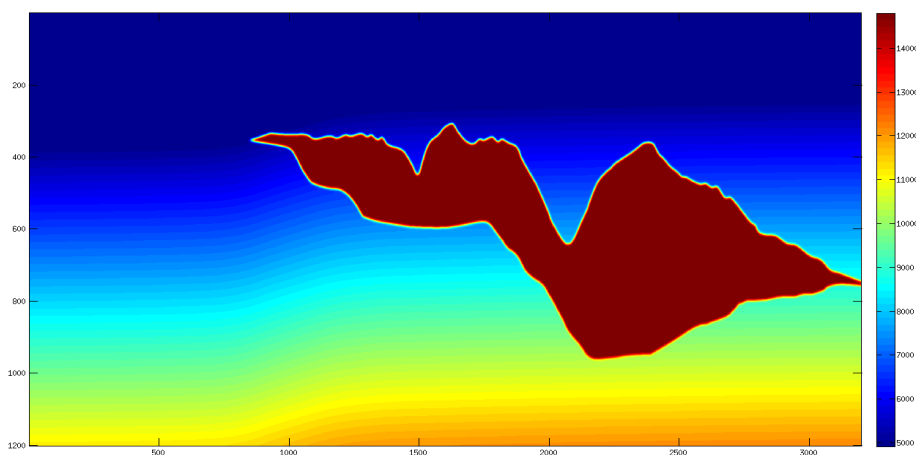


Figura 18 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes

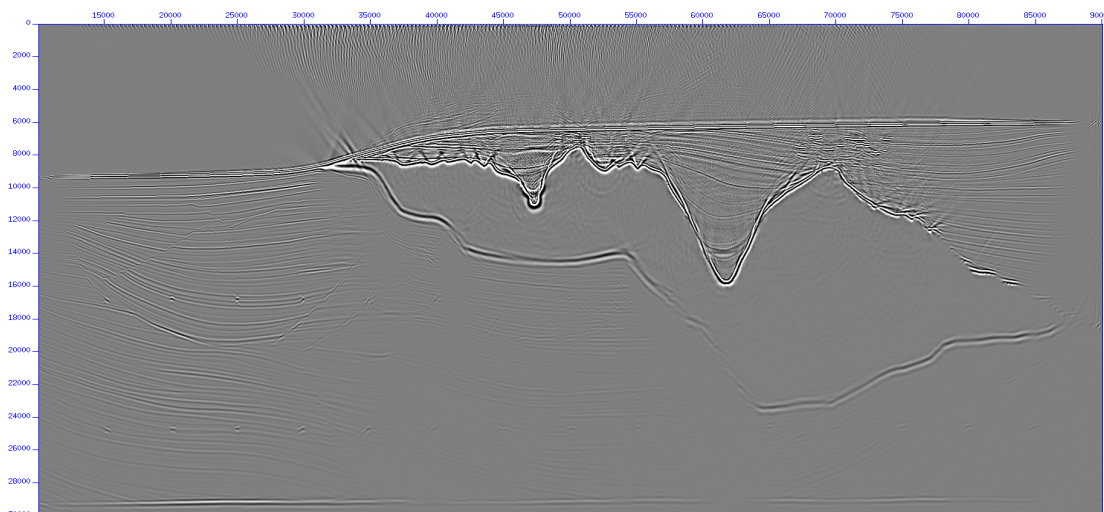


Figura 19 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 1000 vezes

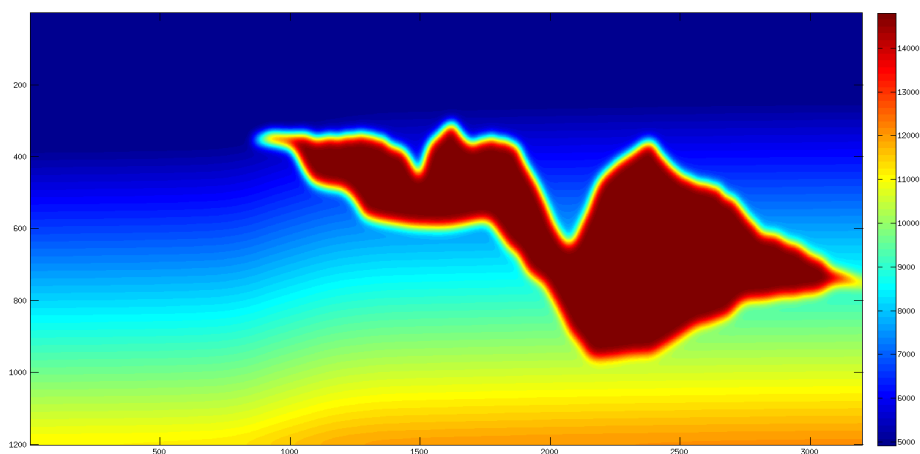
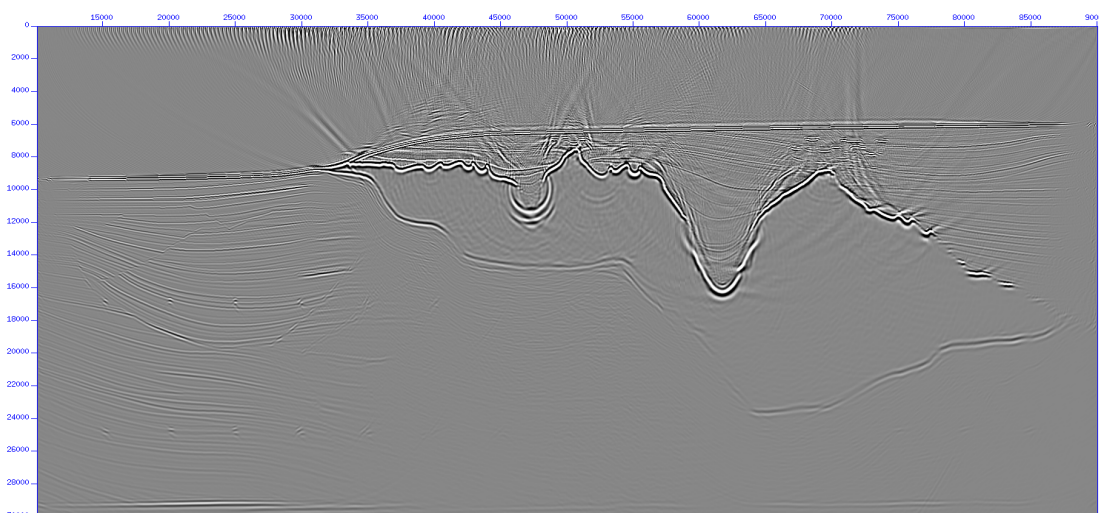


Figura 20 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes



As imagens migradas dos modelos suavizados 1000 vezes e 1500 vezes - figura 20 e figura 22 - mostram difrações ainda mais fortes nas angulosidades do domo salino. As reflexões múltiplas nos limites superiores do corpo, no entanto, com uma transição de valores de impedância acústica mais suave, não ficaram mais tão perceptíveis, o que se observa agora é o aumento de amplitude das reflexões nas bordas do corpo salino. No que tange o imageamento abaixo do domo de sal (figura 25 e figura 26), ainda que com uma suavização forte foi possível iluminar os pontos difratores, no entanto, não todos. As figuras 27, 28, 29 e 30 destacam os pontos difratores iluminados nas seções migradas com as diferentes intensidades de suavização dos modelos de velocidade.

Figura 21 – Modelo de velocidade Sigsbee suavizado 1500 vezes

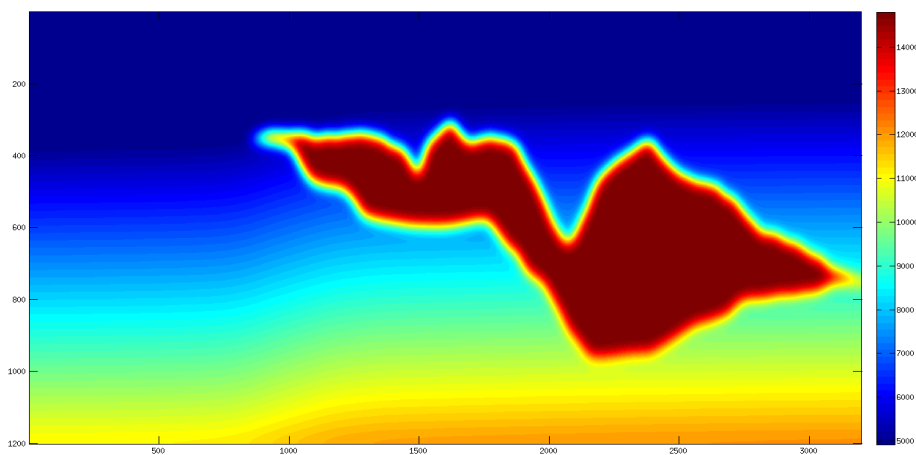


Figura 22 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes

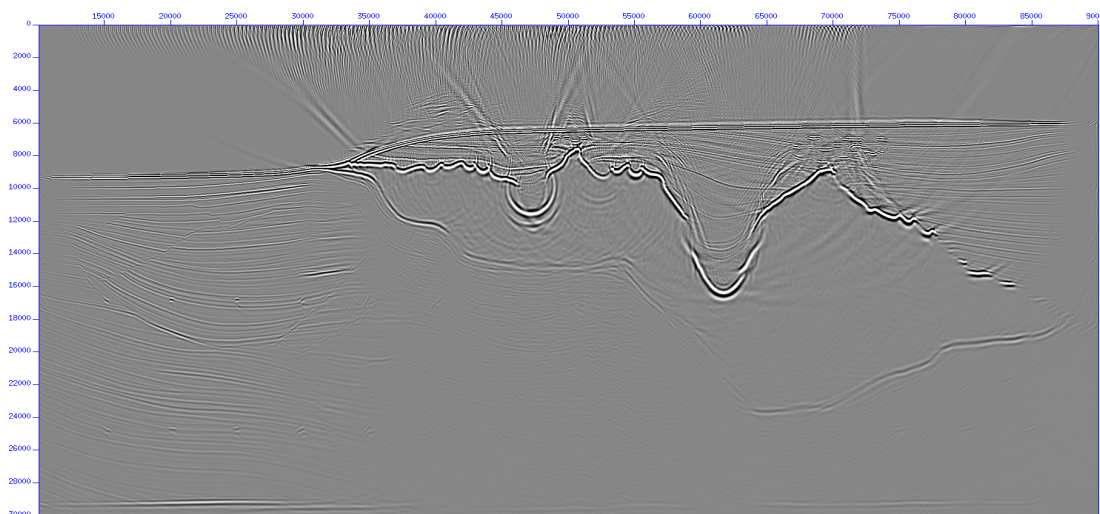


Figura 23 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização com zoom nas regiões abaixo do domo salino

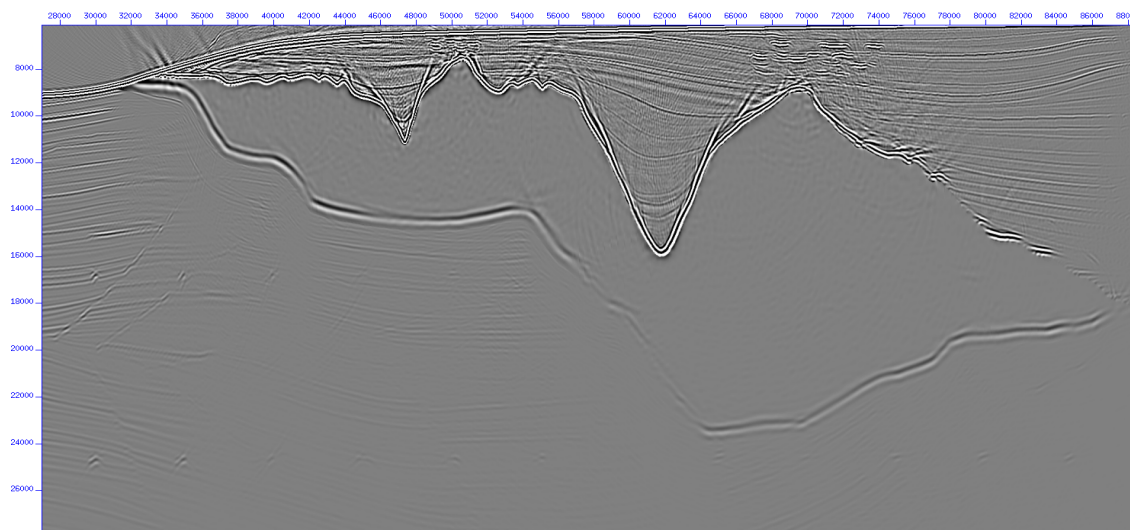


Figura 24 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes com zoom nas regiões abaixo do domo salino

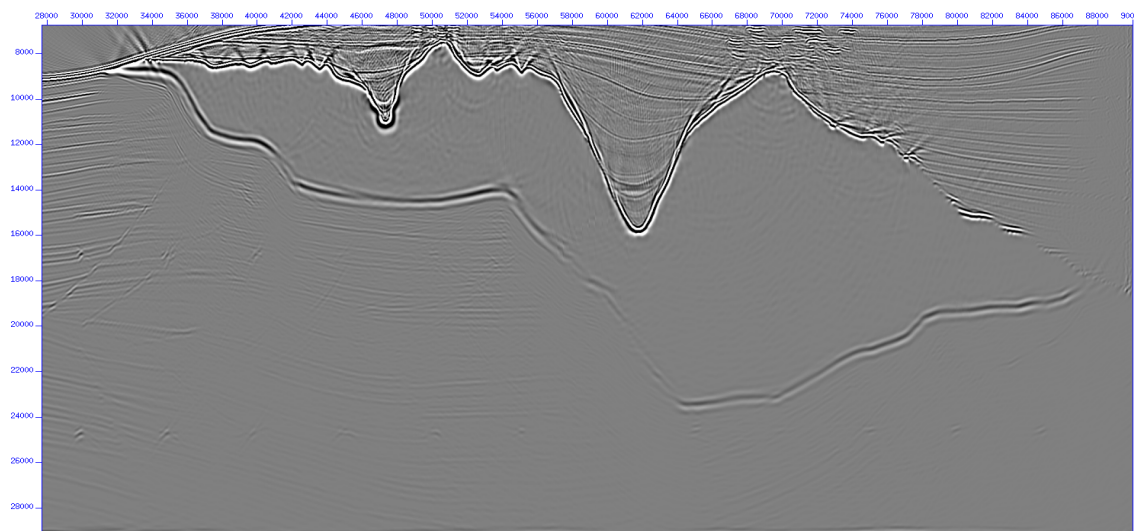


Figura 25 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 100 vezes zoom nas regiões abaixo do domo salino

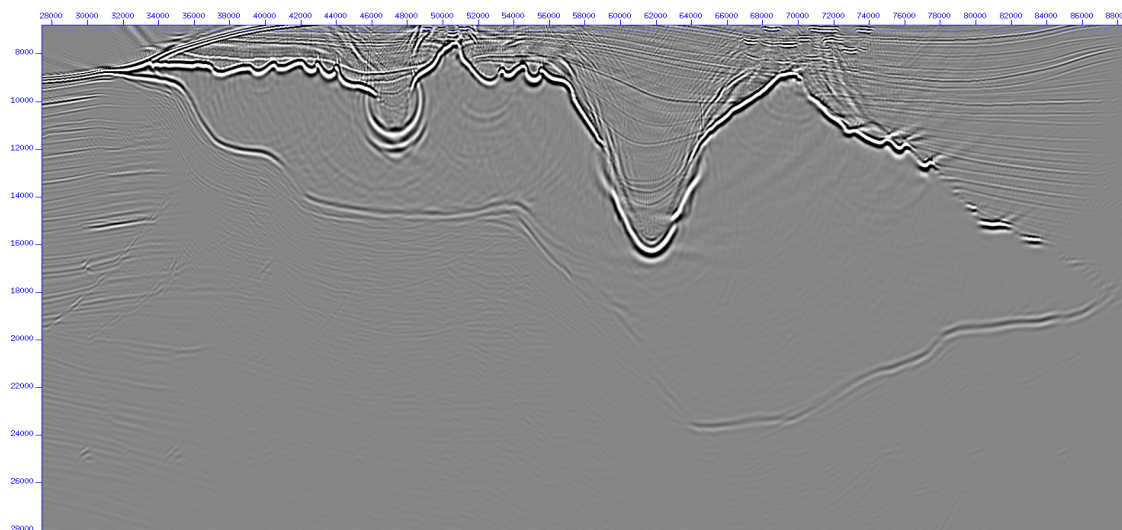


Figura 26 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes com zoom nas regiões abaixo do domo salino

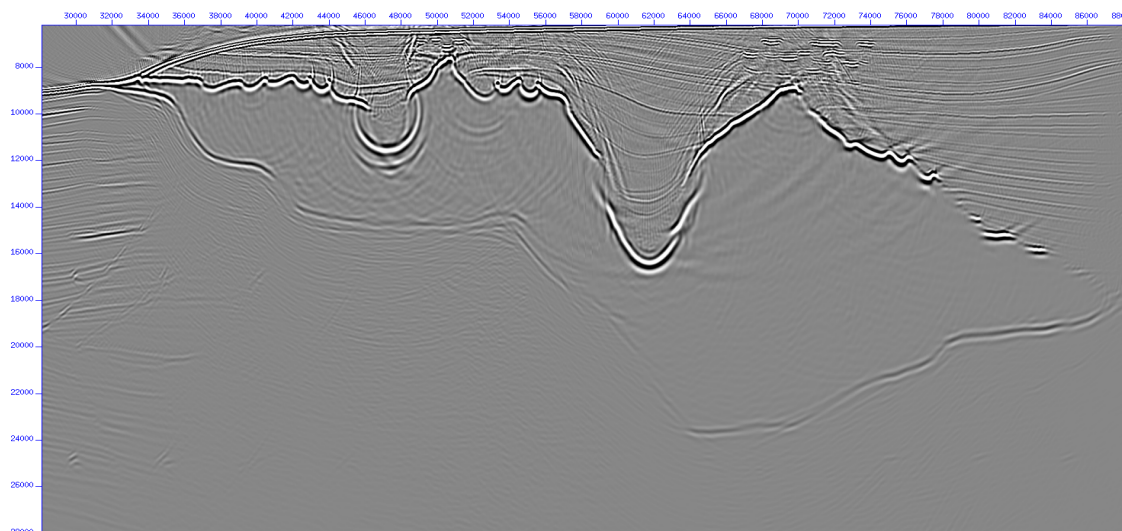


Figura 27 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade sem suavização com ênfase nos pontos difratores iluminados

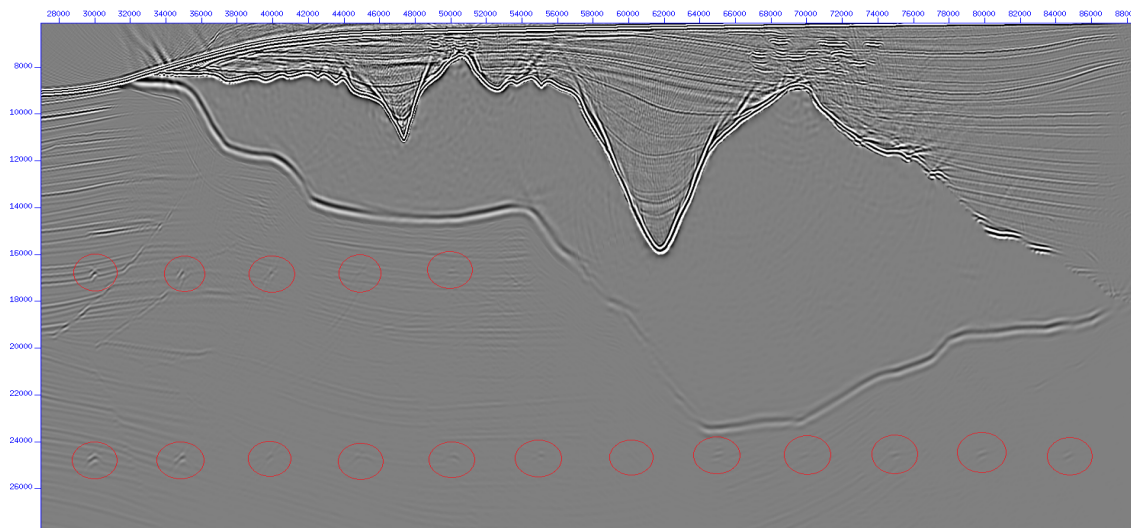


Figura 28 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 50 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados

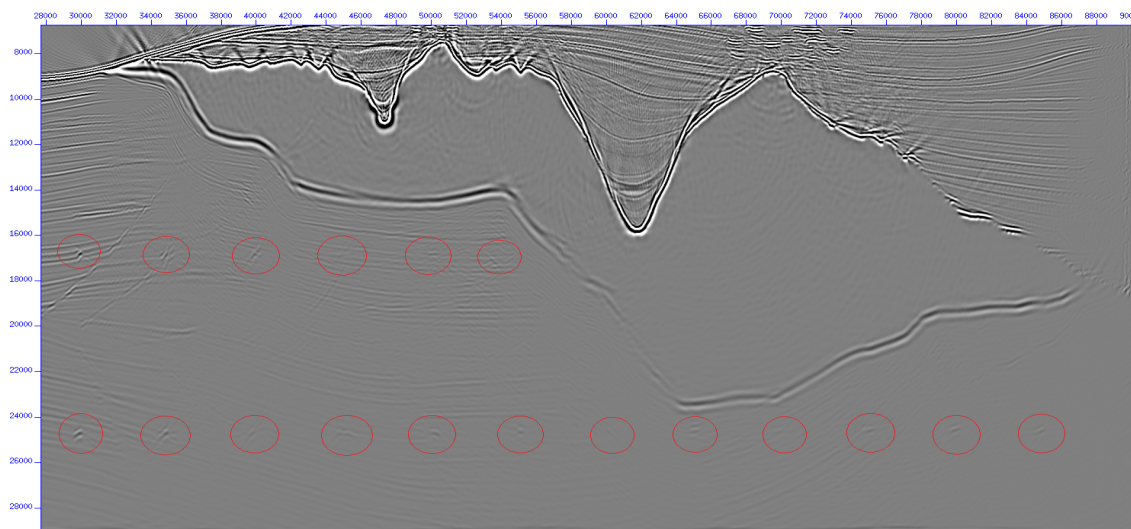


Figura 29 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1000 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados

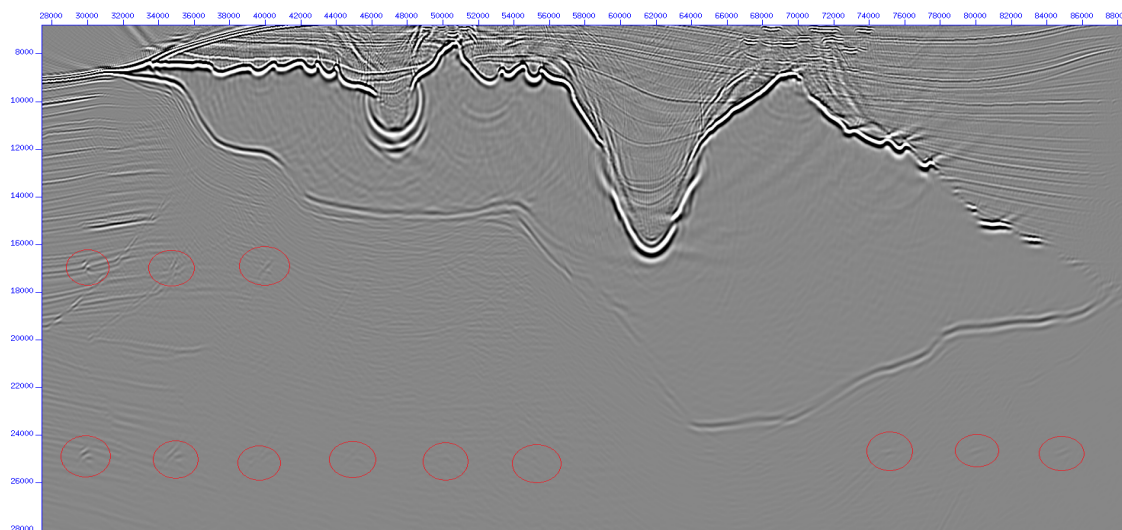
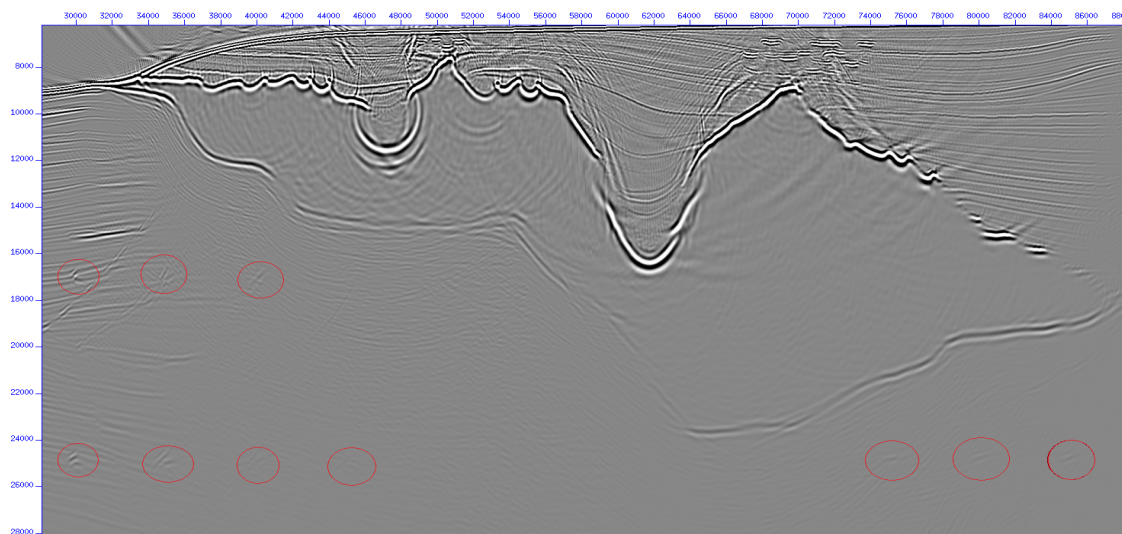


Figura 30 – Imagem migrada correspondente ao modelo de velocidade suavizado 1500 vezes com ênfase nos pontos difratores iluminados



6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feito um estudo da modelagem por diferenças finitas, das condições de estabilidade, que serão importantes na determinação do incremento temporal na malha de discretização de forma que o modelo matemático possa reproduzir com o menor erro possível o fenômeno da propagação da onda, bem como uma revisão de estratégias simples que visam reduzir a dispersão numérica através da otimização de operadores de diferenças finitas de ordem arbitrária a partir da minimização de erros na velocidade de fase e grupo.

A revisão dos fundamentos teóricos da modelagem e da migração reversa no tempo utilizando a equação acústica da onda mostraram que a mesma equação utilizada na propagação direta dos campos de onda pode ser usada na propagação reversa desses campos, bastando para isso que os campos registrados nos receptores sirvam como fonte e sejam propagados reversamente no tempo.

Através dos experimentos numéricos do algoritmo de RTM utilizado, um estudo do comportamento da RTM em relação à suavização dos modelos de velocidade foi feito e mostrou o quanto este tipo de migração é tolerante a erros nestes modelos, mesmo na presença de fortes variações laterais de velocidade, ressaltando as experiências realizadas no modelo Marmusi, que mesmo com alto grau de suavização, teve suas estruturas bem imageadas. No modelo Sigsbee, embora as imagens do topo do domo salino estejam distorcidas conforme o grau de suavização do modelo aumenta, nota-se que os pontos difratores e o refletor plano existente abaixo do domo salino foram imageados.

Outra conclusão que se pode obter, é o estabelecimento de limites na utilização de métodos de análise de velocidade baseados na migração RTM, uma vez que a focalização da imagem migrada é usada como critério para saber se o modelo de velocidade está consistente ou não. Como modelos de velocidade com diferentes suavizações produziram imagens migradas com focalizações parecidas, é difícil definir qual modelo de velocidade é o melhor e qual a velocidade em um ponto, já que ela não terá apenas um valor.

7 REFERÊNCIAS

BAYSAL, E.; KOSLOFF, D.D.; SHERWOOD, J.W.C. A two-way Nonreflecting Wave Equation. **Geophysics** v. 49, pp. 132-141, 1984.

BERKHOUT, A.J. Seismic Migration, Imaging of Acoustic Energy by Wave Field Extrapolation. **Elsevier** 1 ed. New York, 1984.

BULCÃO, A. **Modelagem e Migração Reversa no Tempo**. 2004. Tese(Doutorado) - UFRJ, COPPE, Rio de Janeiro, 2004.

BOECHAT, J.B.T. **Migração Reversa no Tempo 3-D Orientada ao Alvo por Síntese de Frentes de Onda**. 2007. Tese (Doutorado) - UFRJ, COPPE, Rio de Janeiro, 2007.

CHEN, J.B., Lax Wendroff and Nystrom Methods for Seismic Modelling. **Geophysical Prospecting**, v.57, p.931-941, 2009.

CLAERBOUT, J.F. Toward a Unified Theory of Reflector Mapping. **Geophysics**, v.36, N.3, p.467-481, 1971.

COSTA, J.C. **Aspectos da Modelagem e Imageamento Usando a Equação da Onda**. Semana de Inverno de Geofísica, UFPA/INCT-GP, 2012

De HOOP, A.T., **Handbook of radiation and scattering of waves**. Academic Press, London. p.149-220, 1995.

De HOOP, A.T. Time-Domain Reciprocity Theorems for Acoustic Wavefields in Fluids with Relaxation. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 87, N.5, p.1932-1937, 1988

FARIA, E. L. **Migração Antes do Empilhamento Utilizando Propagação Reversa no Tempo**. 1986. Tese(Mestrado) - UFBA, Bahia, 1986.

FOKKEMA, J. The acoustic reciprocity theorem and its applications in geophysics. PPPG-

UFBA, 1988

HOLBERG, O., Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. **Geophys. Prosp.**, v. 37, p. 629–655, 1987.

IKELLE, L.T., and AMUNDSEN, L. **An Introduction to petroleum seismology**. Investigations in Geophysics, Society of Exploration Geophysics, Tulsa, 2005.

KAELIN, B. et al. **Illumination Effects in Reverse Time Migration**. EAGE 69th Conference Exhibition, London, UK, 2006.

LAX, P.D.; RITHMYER, R.D., Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations. **Communications on Pure Applied Mathematics**. v.9, N.2, p.267-293, 1956.

PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes the art of scientific computing(FORTRAN version)**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990

SILVA NETO, F. A. **Modelagem Acústica por Diferenças Finitas e Elementos Finitos em 2D e 2,5D**. 2004. Tese(Mestrado) - UFPA, Pará, 2004.

SILVA NETO, F. A. **Modelagem e Imageamento 2.5D no Domínio do Tempo Através de Diferenças Finitas**. 2010. Tese(Doutorado) - UFPA, Pará, 2010.

VERSTEEG, R. Sensivity of prestack depth migration to the velocity model. **Geophysics**, v. 58, n. 6, p. 873–882, junho 1993.

VIRIEUX, J. et al. Modelling Seismic Wave Propagation for Geophysical Imaging. **Seismic Waves - Research and Analysis**. Dr. Masaki Kanao (Ed.), ISBN: 978-953-307-944-8.

YANG, L. Globally Optimal Finite Difference Schemes Based on Least Squares. **Geophysics**, v.78, No.4, 2013.

YILMAZ, O. **Seismic Data Processing**. Society of Exploration Geophysicists. Series: Investigations in Geophysics, v.2, 1987

YOON, K.; MARFURT, K.J. Reverse Time Migration Using Poynting Vector. **Exploration Geophysics**, v.37, N.1, p.102-107, 2006.

ZHANG, J. et al. Optimized Finite-Difference Operator for Broadband Seismic Wave Modelling. **Geophysics**, vol 78, n.1, 2013