UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

JOÃO MARCOS XAVIER DE LIMA

VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS NÃO-HAUSDORFF E FOLHEAÇÕES DO PLANO

BELÉM

2023

JOÃO MARCOS XAVIER DE LIMA

VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS NÃO-HAUSDORFF E FOLHEAÇÕES DO PLANO

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini.

BELÉM

2023

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

JOÃO MARCOS XAVIER DE LIMA

VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS NÃO-HAUSDORFF E FOLHEAÇÕES DO PLANO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado(a) Pleno(a) em Matemática da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini

Departamento de Matemática, UFPA - Orientador

Prof. Dra. Irene Castro Pereira

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

Prof. Dr. Jose Miguel Martins Veloso

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

À minha família, aos meus amigos, aos meus professores e ao meu orientador que foram centrais na minha jornada.

"Há pessoas que nascem com a função de movimentarem o mundo, independente da posição ou da classe social determina pela lei dos homens. Essas pessoas são a verdadeira elite criada pela lei universal, os verdadeiros governantes abençoados com o poder de Deus! Eu quero saber, qual é o meu papel neste mundo? Quem sou eu e o que eu sou capaz de fazer?"

Griffith.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida e por me conceder força para superar todos os obstáculos ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais, Carol Soares Xavier e Marcos Pinheiro de Lima, minha gratidão é imensurável. Eles foram fundamentais e nunca mediram esforços para proporcionar um ensino de qualidade durante todo o meu período escolar. Sem eles, eu não estaria aqui.

Expresso minha gratidão aos amigos e familiares que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam minha ausência enquanto me dedicava a este trabalho.

Aos professores, meu sincero agradecimento por todos os conselhos, ajuda prestada e paciência ao longo do curso.

Aos colegas de curso, com quem convivi intensamente nos últimos anos, agradeço pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não apenas como estudante, mas também como pessoa.

Ao meu orientador Marcel Vinhas Bertolini, que conduziu o trabalho com paciência e dedicação, sempre disponível a compartilhar todo o seu vasto conhecimento, agradeço pela ajuda e paciência com a qual guiaram o meu aprendizado.

À instituição UFPa, agradeço pela dedicação e por tudo que aprendi ao longo dos anos do curso.

RESUMO

Neste trabalho, abordaremos conceitos fundamentais de topologia geral, variedades e folheações, com o objetivo central de demonstrar o resultado principal apresentado no artigo [3] de André Haefliger e George Reeb. Esse resultado estabelece que o espaço de folhas de uma folheação do plano possui uma estrutura de variedade unidimensional, possivelmente não-Hausdorff. Inicialmente, introduziremos conceitos básicos de topologia geral, com ênfase em topologia quociente, fornecendo exemplos essenciais para o entendimento do tema. Em seguida, explora-se o estudo de variedades topológicas, conceitos como espaço quociente de uma variedade, espaços simplesmente conexos e exemplos focados em variedades unidimensionais. Dedicaremos atenção especial à definição de folheações em uma variedade, agora de Hausdorff, e suas classes de equivalência conhecidas como folhas. Apresentaremos alguns resultados sobre espaço de folhas e exemplos de folheações. Exploraremos a íntima relação entre as folheações do plano e a estrutura de variedades unidimensionais simplesmente conexas. Por fim destacamos como esses resultados revelam uma demonstração do Teorema de Kaplan.

Palavras-chave: Geometria. Topologia. Variedades. Folheações.

ABSTRACT

In this work, we will explore fundamental concepts of general topology, manifolds, and foliations, with the central goal of demonstrating the main result presented in the article by André Haefliger and George Reeb [3]. This result establishes that the leaf space of a foliation of the plane has the structure of a one-dimensional manifold, possibly non-Hausdorff. Initially, we will introduce basic concepts of general topology, with an emphasis on quotient topology, providing essential examples for understanding the subject. Subsequently, we delve into the study of topological manifolds, including concepts such as the quotient space of a manifold, simply connected spaces, and examples focused on one-dimensional manifolds. We will pay special attention to the definition of foliations on a manifold, now assumed to be Hausdorff, and their equivalence classes known as leaves. Several results about leaf spaces and examples of foliations will be presented. We will explore the intimate relationship between plane foliations and the structure of simply connected one-dimensional manifolds. Finally, we highlight how these results provide insights into a proof of the Kaplan Theorem.

Keywords: Geometry. Topology. Manifolds. Foliations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na matemática avançada, nos deparamos com um objeto que tem suas raízes na geometria: as chamadas variedades. Elas são espaços topológicos localmente euclidianos, de base enumerável e possuem a propriedade de que quaisquer dois pontos distintos têm vizinhanças disjuntas entre si, sendo esta propriedade denominada propriedade de Hausdorff. Essa característica garante a separabilidade dos pontos. No entanto, se essa propriedade for descartada, nos deparamos com um objeto de estudo rico em aplicações: as variedades não-Hausdorff. Veremos que essas possuem uma relação íntima e profunda com as folheações do plano e alguns resultados sobre elas. O principal destaque é que o espaço de folhas de uma folheação do plano é uma variedade unidimensional simplesmente conexa dado pelo Teorema 3.3.3.

Motivado por este artigo [3] de André Haefliger e George Reeb, que mostra demonstra o resultado mencionado, foi elaborado um estudo em Topologia Geral, com ênfase na topologia quociente [5], topologia de variedades [4] e o estudo de folheações [1]. O trabalho tem como foco um primeiro contato com todos esses assuntos de maneira concisa, estruturado em torno da prova do teorema principal sobre o espaço de folhas. Além disso, serão elucidadas algumas propriedades, definindo e detalhando proposições , explorando conceitos como espaços simplesmente conexos e variedades não-Hausdorff.

Em particular, será definida a folheação de uma variedade e suas classes de equivalência [1], chamadas de folhas. Será explorada a íntima relação entre as folheações do plano e a estrutura de variedades unidimensionais, possivelmente não-Hausdorff. O uso de exemplos, alguns já existentes e outros passíveis de serem construídos com as ferramentas a serem desenvolvidas, terá uma função essencial no entendimento do assunto. Por fim, será demonstrado que o quociente do plano pela relação de equivalência a ser declarada ($x \sim y$ se, e somente se, x e y pertencem à mesma folha) possui uma estrutura de variedade unidimensional, possivelmente não-Hausdorff.

O trabalho foi organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1, abordaremos topologia geral, dando ênfase a noções como espaço topológico, topologia de subespaço, base para uma topologia, continuidade, homeomorfismos, topologia quociente, conexidade e compacidade. O intuito é construir um sólido arcabouço de ideias para compreender as noções posteriores de variedades e folheações.

No Capítulo 2, discutiremos variedades e variedades não-Hausdorffs. Demonstraremos resultados importantes, como a Proposição 2.2.1, que permite a construção de diversos exemplos de variedades (possivelmente não-Hausdorff). Veremos também o Lema 2.3.1, que fornece uma caracterização elegante de variedades unidimensionais simplesmente conexas. Por fim, apresentaremos a Proposição 2.3.2, que afirma a existência de um homeomorfismo local dessas variedades para a reta real.

O Capítulo 3 abordará folheações em uma variedade de Hausdorff, introduzindo as ideias principais nessa vasta área da matemática. Além disso, demonstraremos resultados essenciais, sendo o principal deles o Teorema 3.3.3, referente ao resultado clássico de Haefliger e Reeb.

Em consonância com as ideias precedentes, destacamos que tais resultados consolidados revelam uma maneira de demonstrar o Teorema de Kaplan 3.4.1, uma das aplicações mais virtuosas que esse trabalho proporciona.

CAPÍTULO 1

TOPOLOGIA

O conceito de espaço topológico pode ser motivado pelo estudo da reta real e do espaço euclidiano, bem como do estudo de funções contínuas nesses espaços. Além disso, serve como um recurso adequado para o estudo de outros tipos de espaços com propriedades bem interessantes [5]. Neste capítulo, definimos o que é um espaço topológico e exploramos várias maneiras de construir uma topologia em um conjunto. Consideramos alguns dos conceitos elementares associados a espaços topológicos, como conjuntos abertos e fechados, funções contínuas, conexidade, compacidade e homeomorfismos.

Começaremos nosso estudo de maneira que seja possível fazer uma introdução concisa e técnica do assunto porém de maneira econômica, de modo que seja possível entender essencialmente os conceitos de variedades e folheações, que serão ponto central nesse trabalho.

1.1 Espaço Topológico

A definição de espaço topológico que conhecemos hoje demorou muito tempo para ser formulada. Vários matemáticos, como Maurice Fréchet (1878-1973), Felix Hausdorff (1888-1942) e outros, propuseram diferentes definições durante as primeiras décadas do século XX até estabelecerem a definição mais apropriada, como é dito na introdução do segundo capítulo do livro [5].

A ideia chave por trás da definição desse novo tipo de espaço é o critério de subconjunto aberto para continuidade. Ele mostra que funções contínuas entre espaços podem ser caracterizadas usando os subconjuntos abertos de tais espaços. Essa observação motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.1 *Se X é um conjunto, uma topologia em X é uma coleção $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

1) X e $\emptyset$ são elementos de $\mathscr{T}$.

2) $\mathscr{T}$ é fechado sob interseções finitas: se $U_1, \ldots, U_n$ são elementos de $\mathscr{T}$, então sua interseção $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ é um elemento de $\mathscr{T}$.

3) $\mathscr{T}$ é fechado sob uniões arbitrárias: se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é qualquer família de elementos de $\mathscr{T}$, então sua união $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ é um elemento de $\mathscr{T}$.

Um par $(X, \mathscr{T})$, consistindo de um conjunto X juntamente com uma topologia $\mathscr{T}$ em X, é chamado de espaço topológico. Chamaremos um espaço topológico simplesmente de espaço no contexto desse trabalho. Uma vez que X seja dotado de uma topologia específica, os elementos de X são normalmente chamados de pontos, e os conjuntos que compõem a topologia são normalmente chamados de subconjuntos abertos ou apenas abertos de X. Com essa terminologia, as três propriedades definidoras de uma topologia podem ser reformuladas da seguinte forma:

1) X e $\emptyset$ são abertos de X.

2) Qualquer interseção finita de abertos de X é um aberto de X.

3) Qualquer união arbitrária de abertos de X é um aberto de X.

Uma razão para escolher abertos como os objetos primários na definição de um espaço topológico é que eles nos dão uma noção de ”proximidade” de um ponto sem necessariamente ter uma medida quantitativa de proximidade como teríamos em um espaço com métrica (definição 1.1.3).

Definição 1.1.2 (Vizinhança Aberta) *Se X é um espaço topológico e $p \in X$, uma **vizinhança aberta** de p é um aberto de X que contém p.*

Exemplo 1.1.1 (Topologias Básicas) .

*a) Seja X qualquer conjunto e defina a topologia $\mathscr{T}$ em X como $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, ou seja, a coleção de todos os subconjuntos de X. Isso significa que todos os subconjuntos de X são abertos. Essa é chamada de **topologia discreta** em X, e $(X, \mathscr{T})$ é um espaço discreto.*

*b) Seja Y um conjunto e defina a topologia $\mathscr{T}$ em Y como $\mathscr{T} = \{Y, \emptyset\}$. Ela é chamada de **topologia trivial** em Y.*

c) Seja Z o conjunto $\{1, 2, 3\}$, e declare os abertos como $\mathscr{T} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$.

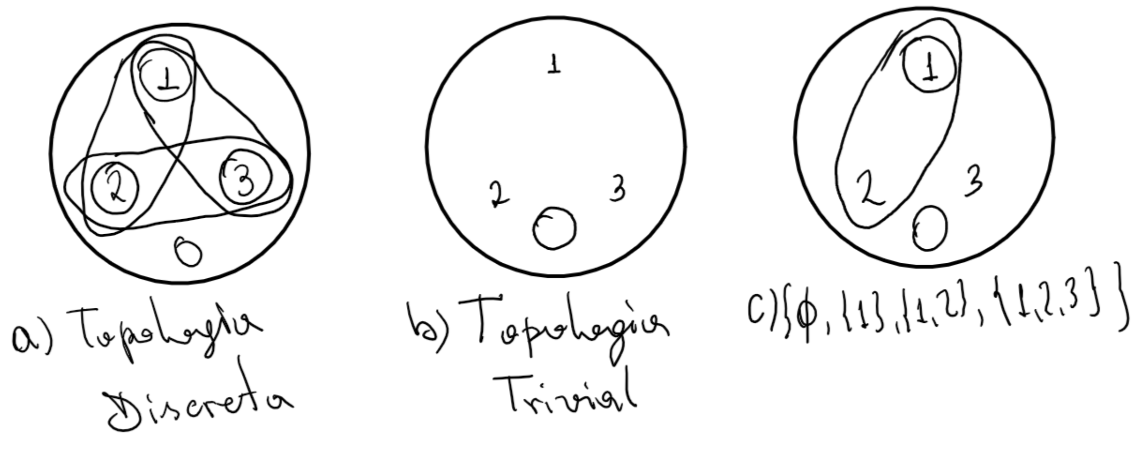

Figura 1.1: Topologias Básicas

A verificação de que os itens a) e b) são topologias é trivial. O item c) é de fato uma topologia pois satisfaz as 3 propriedades da topologia da seguinte maneira: o espaço todo e o vazio são abertos. A união arbitrária entre $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$ ou vai ser $\{1\}$ ou $\{1, 2\}$ ou $\{1, 2, 3\}$, e a intersecção arbitrária entre eles vai ser ou $\{1\}$ ou $\{1, 2\}$. Antes de seguir para o próximo exemplo, definiremos o que é um espaço métrico.

Definição 1.1.3 (Métrica) *Suponha que M seja qualquer conjunto. Uma métrica em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, também chamada de função distância, que satisfaz três propriedades para todo $x, y, z \in M$:*

1. ***Simetria:*** $d(x, y) = d(y, x)$.
2. ***Positividade:*** $d(x, y) \geq 0$, *e* $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$.
3. ***Desigualdade Triangular:*** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se M é um conjunto e d é uma métrica em M, o par (M, d) é chamado de um espaço métrico.

Antes de falar sobre a topologia métrica, se faz importante definir um tipo de aberto em um espaço métrico.

Definição 1.1.4 (Bola Aberta) *Seja (M, d) um espaço métrico, para qualquer $x \in M$ e $r > 0$, a bola aberta de raio r centrado em x é o conjunto:*

$$B_r(x) = \{y \in M \mid d(y, x) < r\}.$$

Definição 1.1.5 (Subconjunto Aberto de um Espaço Métrico) *Seja (M, d) um espaço métrico, um subconjunto $A \subseteq M$ é considerado um subconjunto aberto de M se contiver uma bola aberta ao redor de cada um de seus pontos.*

Exemplo 1.1.2 (Topologia Métrica) *Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, e $\mathscr{T}$ a coleção de todos os subconjuntos de M que são abertos no sentido do espaço métrico. A família $\mathscr{T}$ é uma topologia, chamada de topologia métrica em M, ou a topologia gerada por d. Seja $X \subset M$ um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico $(X, \tilde{d})$, sendo $\tilde{d}$ a restrição de d ($\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$) ao conjunto $X \times X$. Dizemos que $\tilde{d}$ é a métrica induzida por d.*

Não provaremos que $\mathscr{T}$ é de fato uma topologia, mas é deixado como exercício na página 397 no apéndice B do livro do Lee [4]. Aqui estão alguns tipos de conjuntos que são frequentes em espaços euclidianos com a topologia métrica:

- **O intervalo unitário:** O intervalo unitário é o subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ definido por $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

- **A bola unitária aberta de dimensão n:** a bola unitária aberta de dimensão n, denotada por $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, consiste em todos os vetores com comprimento estritamente menor que 1:

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}.$$

  No caso em que $n = 2$, às vezes chamamos $\mathbb{B}^2$ de o disco unitário aberto.

- **A bola unitária fechada de dimensão n:** A bola unitária fechada de dimensão n, denotada por $\bar{\mathbb{B}}^n \subset \mathbb{R}^n$, consiste em vetores de comprimento menor ou igual a 1:

$$\bar{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}.$$

  Às vezes, chamamos $\bar{\mathbb{B}}^2$ de disco unitário fechado.

- **O círculo:** O círculo é o subconjunto $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ que consiste em vetores unitários no plano:

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}.$$

  É útil identificar o plano $\mathbb{R}^2$ com o conjunto $\mathbb{C}$ de números complexos por meio da correspondência $(x, y) \mapsto x + iy$. Podemos pensar no círculo como o conjunto de números complexos com módulo unitário:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- **A n-esfera (unitária):** A n-esfera (unitária) é o subconjunto $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que consiste em vetores unitários em $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$

1.1.1 Conjuntos Fechados

A definição de espaço topológico considera os abertos como objetos primários de tais espaços. No entanto, existe uma noção complementar equivalente. Se X é um espaço topológico, um subconjunto $F \subset X$ é dito ser um subconjunto fechado de X se o seu complemento $X \setminus F$ for um aberto. Se X e sua topologia forem entendidos, os subconjuntos fechados de X são chamados simplesmente de fechados. A partir da definição de espaços topológicos, várias propriedades seguem de imediato:

1) X e $\emptyset$ são fechados de X.

2) Qualquer união de um número finito de fechados de X é um fechado de X.

3) Qualquer interseção de um número arbitrário de fechados de X é um fechado de X.

Uma topologia em um conjunto X pode ser definida descrevendo a coleção de fechados, desde que satisfaçam essas três propriedades; os abertos são então simplesmente aqueles cujos complementos são fechados. Aqui estão alguns exemplos de subconjuntos fechados de espaços topológicos familiares.

Exemplo 1.1.3 (Subconjuntos Fechados) .

a) *Qualquer intervalo fechado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$*, assim como os intervalos fechados semi-infinitos* $[a, \infty)$ *e* $(-\infty, b]$.

b) *Todo bola fechada em um espaço métrico é um subconjunto fechado.*

c) *Todo subconjunto de um espaço discreto é fechado.*

d) *No espaço dos três pontos* $\{1, 2, 3\}$ *com a topologia do Exemplo 1.1.1 c), os fechados são* $\emptyset$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$ *e* $\{1, 2, 3\}$.

É importante entender que, assim como se diz a respeito de uma porta, "fechado"não é sinônimo de "não aberto". Os subconjuntos podem ser tanto abertos quanto fechados, ou nem abertos nem fechados. Por exemplo, em qualquer espaço topológico X, os conjuntos X e $\emptyset$ são ambos abertos e fechados de X. Por outro lado, o intervalo semiaberto $(0, 1]$ não é nem aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

1.2 Continuidade

Antes de estudarmos a continuidade, vejamos um pouco a noção de convergência. Em espaços topológicos, usamos vizinhanças para a noção de "proximidade". Assim, se X é um espaço topológico e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em X, e $x \in X$, dizemos que a sequência converge para x, e x é o limite da sequência, se, para cada vizinhança U de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq N$. Simbolicamente, isso é denotado por $x_i \to x$ ou $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Veja que a definição não garante a existência e unicidade desse limite. Considere o conjunto $\{1, 2, 3\}$ com a topologia do Exemplo 1.1.1c) das topologias básicas. A sequência $(2, 2, 2, ...)$ converge para os números 2 e 3, já que todo aberto que contém 3, também contém o 2.

Proposição 1.2.1 *Seja X um espaço topológico com a topologia trivial. Toda sequência em X converge para todos os pontos de X.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico com a topologia trivial. Considere qualquer sequência (x_n) em X. Para mostrar que (x_n) converge para um ponto x em X, precisamos demonstrar que, para todo conjunto aberto U contendo x, existe um índice N tal que para todo $n \geq N$, temos $x_n \in U$. No entanto, uma vez que a topologia é trivial, os únicos conjuntos abertos em X são o conjunto vazio e X. Isso implica que, para qualquer ponto x em X, qualquer conjunto que contenha x é igual a X. Portanto, para qualquer ponto x em X, podemos escolher $U = X$, e não importa qual seja a sequência (x_n), ela estará contida em X. ■

Definição 1.2.1 (Continuidade) *Se X e Y são espaços topológicos, uma função $f : X \to Y$ é dita* ***contínua*** *se, para todo aberto $U \subset Y$, sua pré-imagem $f^{-1}(U)$ é aberta em X. Convencionamos que a função f pode, também, ser chamada de mapa.*

É interessante notar que a continuidade pode ser detectada tanto por fechados quanto por abertos. A proposição a seguir irá falar exatamente isso.

Proposição 1.2.2 *Um mapa entre espaços topológicos é contínuo se, e somente se, a pré-imagem de todo fechado é fechado.*

Demonstração. Seja f um mapa contínuo de X em Y, e F um fechado de Y. Veja que $Y \setminus F$ é aberto, logo $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ é aberto de X. Sendo $X \setminus f^{-1}(F)$ aberto, seu complementar $f^{-1}(F)$ é fechado. Por outro lado, se pré-imagem de fechado é fechado, temos que: seja F um fechado de Y. Então $Y \setminus F$ é aberto e sua pré-imagem é dada por $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Mas, como $f^{-1}(F)$ é fechado, seu complementar $X \setminus f^{-1}(F)$ é aberto. Logo, f é um mapa contínuo. ■

A próxima proposição apresenta mais algumas propriedades de mapas contínuos.

Proposição 1.2.3 *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

a) Qualquer mapa constante $f : X \to Y$ é contínuo.

b) O mapa identidade $Id_X : X \to X$ é contínuo.

c) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são ambos contínuos, então a composição $g \circ f : X \to Z$ é contínua.

Demonstração. Para o item a), a definição de mapa constante é $f(x) = c$, em que fixamos um um $c \in Y$. Tome um ponto y qualquer em Y. Se $y = c$ então $f^{-1}(y) = X$, que é um aberto de X; se $y \neq c$ então $f^{-1}(y) = \emptyset$ que é um aberto de X. Portanto, f é contínuo.

Para o item b), considere a aplicação identidade definida por $f(x) = x$, com $x \in X$. Temos que $x = f^{-1}(x)$. Logo, qualquer aberto U de X é levado no mesmo aberto U de X pela aplicação f^{-1}, e f é contínuo.

Para o item c): seja U um aberto de Z. Então $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ (g^{-1}(U))$. Como g é contínuo, $g^{-1}(U) = V$ é um aberto de Y. Logo, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1} \circ (g^{-1}(U)) = f^{-1}(V)$ é um aberto de X, pois f é contínua. Portanto, $g \circ f : X \to Z$ é contínua. ■

Proposição 1.2.4 (Função Definida por Conjuntos Encaixantes) *Considere uma função contínua $f : X \to Y$ e uma família de abertos encaixantes $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja, com a propriedade de que cada $U_n \subseteq U_{n+1}$) tal que $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$. Dado uma sequência de funções contínuas $f_n : U_n \to Y$, com a propriedade que $f_{n+1}|_{U_n} = f_n$, construa*

$$f(x) = \begin{cases} f_n\,, & x \in U_n \\ f_{n+1}\,, & x \in U_{n+1}. \end{cases}$$

A amálgama $f(x)$ é uma função bem definida.

Usaremos esse resultado na Proposição 2.3.2 do capítulo 2.

1.2.1 Homeomorfismo

A relação de homeomorfismo é a relação mais fundamental na topologia. As propriedades topológicas são exatamente as quais são preservadas por esse tipo de aplicação.

Definição 1.2.2 (Homeomorfismo) *Se X e Y são espaços topológicos, um* ***homeomorfismo*** *de X em Y é um mapa bijetivo $f : X \to Y$ tal que tanto f quanto f^{-1} são contínuos. Se existe um homeomorfismo entre X e Y, dizemos que X e Y são homeomorfos ou equivalentes topologicamente.*

Alguns exemplos importantes de homeomorfismos:

Exemplo 1.2.1 *Qualquer bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a qualquer outra bola aberta. O homeomorfismo pode ser facilmente construído como isometrias compostas por homotetias. Da mesma forma, todas as esferas em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas entre si. Esses exemplos ilustram que "tamanho" não é uma propriedade topológica.*

Exemplo 1.2.2 *Seja B^n a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, e defina um mapa $F : B^n \to \mathbb{R}^n$ como $F(x) = x/(1 - |x|)$. Veja que o mapa $G : \mathbb{R}^n \to B^n$ definido por $G(y) = y/(1 + |y|)$ é uma inversa para F. Portanto, F é bijetivo, e como F e G são ambos contínuos, F é um homeomorfismo. Segue que $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a B^n. Portanto, "ser limitado" não é uma propriedade topológica. Veja a figura 1.2.*

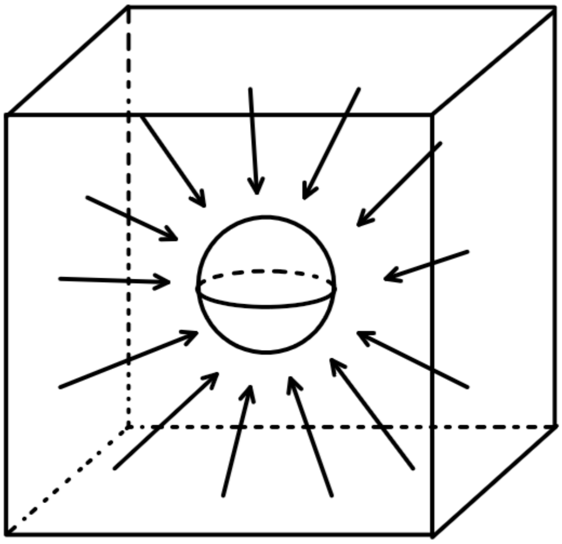

Figura 1.2: O Espaço se deformando em uma Bola

Na definição de um homeomorfismo, é importante observar que, embora a bijetividade de f garanta que o mapa inverso f^{-1} exista, a continuidade de f^{-1} não é automática. O próximo exemplo nos fornece uma aplicação bijetiva contínua cuja inversa não é contínua.

Exemplo 1.2.3 *Seja X o intervalo semiaberto $[0,1)$ em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^1$ seja o círculo unitário em $\mathbb{C}$. O mapa definido por $f : X \to \mathbb{S}^1$ por $f(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$ é contínuo e bijetivo, mas não é um homeomorfismo pois sua inversa não é contínua. Basta ver que a imagem do aberto $[0,1/4)$ de X pela f não é um aberto de $\mathbb{S}^1$, logo f^{-1} não é contínua.*

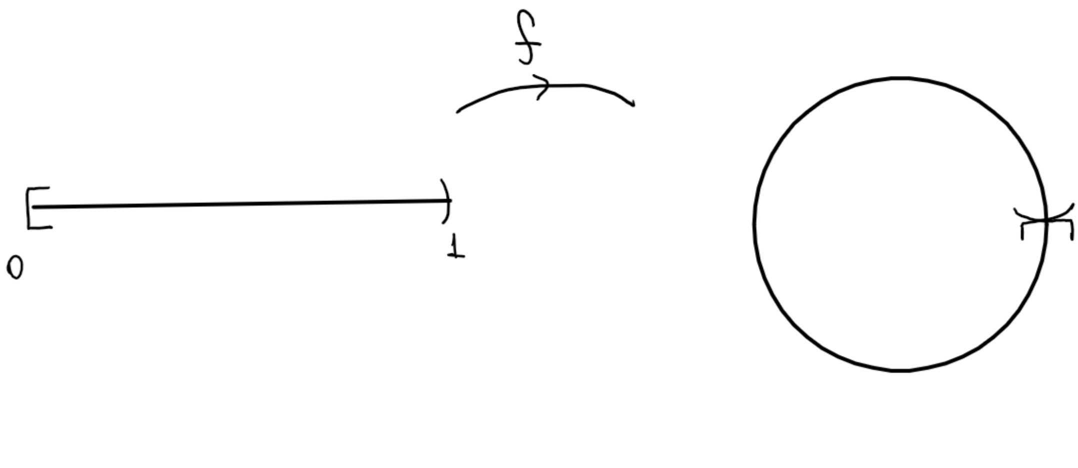

Figura 1.3: Funçaõ Bijetiva Contínua do $[0,1)$ no $\mathbb{S}^1$

Em geral não é muito facil de verificar se dois espaços são ou não homeomorfos um ao outro. Porém veremos que, em situações simples, compacidade e conexidade podem ajudar bastante (Abordaremos nas seções mais a frente).

1.3 Topologia de Subespaço

Nesta seção, mostraremos que subconjuntos de espaços topológicos podem ser vistos como espaços topológicos.

Definição 1.3.1 (Topologia de Subespaço) *Seja X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. Definimos uma topologia T_S em S da seguinte maneira:*

$$T_S = \{U \cap S \mid U \text{ é um aberto de } X\}.$$

A topologia T_S é chamada de topologia de subespaço (ou às vezes topologia relativa) em S. Um subconjunto de um espaço topológico X, considerado como um espaço topológico com a topologia de subespaço, é chamado de subespaço de X.

É importante notar que abertos e fechados não são propriedades de um conjunto por si só, mas sim de um subconjunto em relação a um espaço topológico específico. Se S é um subespaço de X, é possível que um subconjunto de S seja fechado ou aberto em S mas não em X, veja o próximo exemplo.

Exemplo 1.3.1 *Considere os subespaços $S_1 = [0, 1) \cup (2, 3]$ e $S_2 = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ de $\mathbb{R}$. Note que o intervalo $[0, 1)$ não é um aberto de $\mathbb{R}$. No entanto, é um aberto de S_1, porque $[0, 1)$ é a interseção de S_1 com o intervalo aberto $(-1, 2)$. Em S_2, os conjuntos unitários $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ são todos abertos. Em particular, a topologia de subespaço em S_2 é discreta.*

Se S é um subespaço de X, dizemos que um subconjunto $U \subset S$ é relativamente aberto ou relativamente fechado em S, enfatizando que nos referimos a aberto ou fechado na topologia de subespaço em S, não aberto ou fechado como um subconjunto de X. Da mesma forma, se x é um ponto em S, uma vizinhança de x em S na topologia de subespaço é às vezes chamado de vizinhança relativa de x. A próxima proposição apresenta algumas condições sob as quais há uma relação entre ser (relativamente) aberto em S e aberto em X.

Proposição 1.3.1 *Suponha que S seja um subespaço do espaço topológico X.*

(a) Se $U \subseteq S \subseteq X$, U é aberto em S, e S é aberto em X, então U é aberto em X. O mesmo vale com "fechado" no lugar de "aberto".

(b) Se U é um subconjunto de S que é aberto ou fechado em X, então também é aberto ou fechado em S, respectivamente.

1.4 Espaço de Hausdorff

As vezes alguns espaços topológicos contradizem muitas de nossas intuições espaciais fundamentais. Por exemplo, nos espaços euclidianos, nós sempre conseguiremos escolher dois pontos e duas bolas abertas de cada ponto tal que não haja intersecção. Mais geralmente, dois pontos em um espaço métrico sempre têm vizinhanças disjuntas. No entanto, essa propriedade nem sempre é válida em espaços topológicos. Para caracterizar esses espaços, fazemos a seguinte definição.

Definição 1.4.1 (Propriedade de Hausdorff) *Um espaço topológico X é dito ser um espaço de Hausdorff se, dados quaisquer dois pontos distintos p_1 e $p_2 \in X$, existem vizinhanças abertas U_1 de p_1 e U_2 de p_2 com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Exemplo 1.4.1 (Espaços de Hausdorff) .

a) *Todo espaço munido de alguma métrica é de Hausdorff: se p_1 e p_2 são distintos, seja $r = d(p_1, p_2)$, então as bolas abertas de raio $r/2$ em torno de p_1 e p_2 são disjuntas pela desigualdade triangular.*

b) *Todo espaço discreto é de Hausdorff, porque $\{p_1\}$ e $\{p_2\}$ são abertos disjuntos quando $p_1 \neq p_2$.*

c) *Todo subconjunto aberto de um espaço de Hausdorff é um espaço de Hausdorff: se $V \subset X$ é aberto no espaço de Hausdorff X e p_1 e p_2 são pontos distintos em V, então em X existem abertos U_1 e U_2 que separam p_1 e p_2, e os conjuntos $U_1 \cap V$ e $U_2 \cap V$ são abertos disjuntos em V que contêm p_1 e p_2, respectivamente.*

Exemplo 1.4.2 (Espaços Não-Hausdorff) *Seja a reta Real $\mathbb{R}$ e uma topologia $\mathscr{T} = \{X, \emptyset\} \cup \{(a, \infty)|\}$ (não provaremos, mas $\mathscr{T}$ é de fato topologia). O espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathscr{T}$ não é de Hausdorff. Pegue os pontos* 0 *e* 1 *de $\mathbb{R}$, escolha um aberto qualquer que contém* 0 e 1*, na topologia $\mathscr{T}$, esses abertos são respectivamente os conjuntos (b, ∞) e (c, ∞), com $b < 0$ e $c < 1$, perceba que $(b, \infty) \cap (c, \infty)$ é sempre diferente de vazio. Logo o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathscr{T}$ não é de Hausdorff, pois existem dois pontos que não possuem vizinhanças disjuntas.*

Veja que todo espaço métrico é de Hausdorff, então isso significa que esses espaços não admitem uma métrica "compatível com suas topologias".

Esse exemplo de espaço não-Hausdorff é bem fabricado e têm pouca relevância em relação ao tema. No entanto, abordaremos alguns espaços não-Hausdorff nos capítulo 2 e 3 de variedades e folheações.

Os espaços de Hausdorff possuem muitas propriedades que correspondem a certas intuições espaciais a cerca de um espaço. Uma delas é expressa na seguinte proposição.

Proposição 1.4.1 *Seja X um espaço Hausdorff. Se uma sequência (p_i) em X converge para um limite $p \in X$, então o limite é único.*

Demonstração. Para demonstrar que os limites são únicos, suponha, por contradição, que uma sequência (p_i) tem dois limites distintos p e p_0. Pela propriedade de Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas U de p e U_0 de p_0. Pela definição de convergência, existem N e N_0 tais que $i \geq N$ implica $p_i \in U$ e $i \geq N_0$ implica $p_i \in U_0$. No entanto, como U e U_0 são disjuntas, isso é uma contradição quando $i \geq \max\{N, N_0\}$. ■

1.5 Base de uma topologia

Em muitas situações específicas é útil destacar uma coleção de abertos, de modo que certas propriedades sejam demonstradas apenas para esses abertos da base. Veremos no capítulo 3 que essa noção de base para uma topologia vai ser utilizada para munir as folhas de uma folheação com uma topologia.

Definição 1.5.1 (Base Para Uma Topologia) *Seja X um espaço topológico. Uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X é chamada de base para a topologia de X se as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

i) Cada elemento $B \in \mathscr{B}$ é um aberto de X.

ii) Cada aberto de X é a união de alguma coleção de elementos de $\mathscr{B}$.

É importante observar que o $\emptyset$ é a união da "coleção vazia" de elementos de $\mathscr{B}$. Se a topologia em X estiver implícita, às vezes diremos apenas que $\mathscr{B}$ é uma base para X.

Exemplo 1.5.1 (Bases para Algumas Topologias Familiares) .

a) *Seja M um espaço métrico. Toda bola aberta em M é um aberto, e todo aberto é uma união de bolas abertas. Portanto, a coleção de todas as bolas abertas em M é uma base para a topologia métrica.*

b) *Se X é um conjunto com a topologia discreta, a coleção de todos os subconjuntos unitários de X é uma base para a sua topologia.*

c) *Se X é um conjunto com a topologia trivial, a coleção de um único elemento $\mathscr{B}= \{X\}$ é uma base para a sua topologia.*

Suponha que começamos com um conjunto X que ainda não possui uma topologia. É conveniente definir uma topologia em X começando com alguns abertos distinguidos e, em seguida, definindo todos os outros abertos como uniões destes. Em outras palavras, começamos com uma "base" e a usamos para definir a topologia.

Não é qualquer coleção de conjuntos que pode ser uma base para uma topologia. A próxima proposição estabelece condições necessárias e suficientes para que uma coleção de subconjuntos de X seja uma base para alguma topologia em X.

Proposição 1.5.1 (Topologia Gerada Por Uma Base) *Seja X um conjunto e suponha que $\mathscr{B}$ seja uma coleção de subconjuntos de X. Então, B é uma base para alguma topologia em X se, e somente se, ela satisfaz as seguintes duas condições:*

i) *A união de todos os conjuntos de uma familia $\mathscr{B}$ é o espaço todo:* $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B = X$.

ii) *Se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe um elemento $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

A demonstração dessa proposição se encontra na seção "*Basis for a Topology*" no capítulo 2 do livro do Munkres [5]. Se essas condições são satisfeitas, existe uma única topologia em X para a qual $\mathscr{B}$ é uma base, chamada de topologia gerada por $\mathscr{B}$.

1.6 Espaço Quociente

Uma técnica para construir novos espaços topológicos a partir de espaços existentes é um pouco mais complexa, mas muito flexível. Ela nos permite identificar alguns pontos uns aos outros em um espaço topológico dado e obter um novo espaço. Essa construção desempenha um papel importante em argumentos de "corte e colagem" que podem ser usados para definir muitas variedades (como veremos no capítulo 2 de Variedades e no capítulo 3 de folheações, em relação ao espaço de folhas).

Definição 1.6.1 (Topologia Quociente) *Seja X um espaço topológico, Y qualquer conjunto e $q : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Definimos uma topologia $\mathscr{T}$ em Y declarando que um subconjunto $U \subset Y$ é aberto se, e somente se, $q^{-1}(U)$ é aberto em X. A topologia $\mathscr{T}$ é chamado de topologia quociente induzida pela aplicação q.*

É fácil verificar que $\mathscr{T}$ é uma topologia. Os conjuntos $\emptyset$ e Y são abertos pois $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $p^{-1}(Y) = X$. As duas outras condições seguem das sequintes equações

$$p^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_\alpha),$$

$$p^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i).$$

Definição 1.6.2 (Aplicação Quociente) *Se X e Y são espaços topológicos, uma aplicação $q : X \to Y$ é chamada de aplicação quociente se for sobrejetiva e Y tiver a topologia quociente induzida por q.*

Uma vez que q seja conhecida, dizer que é uma aplicação quociente é o mesmo que dizer que V é aberto em Y se, e somente se, $q^{-1}(V)$ é aberto em X. É imediato a partir da definição que toda aplicação quociente é contínua. Agora definiremos um conceito que aparece em diversas áreas da matemática:

Definição 1.6.3 (Relação de Equivalência) *Em um conjunto X, $\sim$ é uma relação de equivalência, em X, se ela satisfazer as seguintes propriedades:*

i) ***Reflexiva:*** *$x \sim x$ para todo $x \in X$,*

ii) ***Simétrica:*** *$x \sim y$ implica $y \sim x$, para todo $x, y \in X$*

iii) ***Transitiva:*** *$x \sim y$ e $y \sim z$ implica $x \sim z$, para todo $x, y, z \in X$*

Dada uma relação de equivalência $\sim$ em X, para cada $x \in X$, a classe de equivalência de x é definida como o conjunto

$$\bar{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

O conjunto de todas as classes de equivalência é denotado por $X/\sim$.

Seja $\sim$ uma relação de equivalência em um espaço topológico X. Para cada $p \in X$, sejam $\bar{p}$ a classe de equivalência de p, $X/\sim$ o conjunto de classes de equivalência e $q : X \to X/\sim$ a projeção natural que envia cada elemento de X para sua classe de equivalência. Então, $X/\sim$, juntamente com a topologia quociente induzida por q, é chamado de espaço quociente de X pela relação de equivalência $\sim$. Apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 1.6.1 *Seja $I = [0, 1]$ o intervalo unitário e $\sim$ seja a relação de equivalência em I gerada pela única relação $0 \sim 1$, o que significa que $x \sim y$ se, e somente se, $x = y$ ou $x, y \in \{0, 1\}$. Podemos pensar nesse espaço como sendo obtido a partir do intervalo unitário colando seus pontos finais juntos. É intuitivo que o espaço quociente $I/\sim$ é homeomorfo ao círculo S^1. Essa prova é encontrada na página 66 do livro do Lee [4]*

Os espaços quocientes não se comportam bem em relação à maioria das propriedades topológicas. Em particular, nenhuma das propriedades como base enumerável, ser localmente euclidiano (capítulo 2) e de Hausdorff são automaticamente garantidas por espaços quocientes.

Em relação a base enumerável, o livro do Lee [4] coloca como o problema 3.18.

Vejamos um exemplo que seria mostrar que o quociente de um espaço de Hausdorff pode não ser de Hausdorff.

Proposição 1.6.1 *Seja X o espaço quociente obtido a partir de $\mathbb{R}$ identificando o conjunto $K = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ a um ponto, o espaço quociente X gerado não é Hausdorff. Basta ver que qualquer vizinhança aberta de $0 \in X$ intersecta alguma vizinhança de $\bar{1} \in X$*

Demonstração. Seja U_0 uma vizinhança aberta de $0 \in X$. Note que $p^{-1}(U_0) = (a, b) \subset \mathbb{R}$ com $a < 0 < b$. Pela propriedade arquimediana, existe um n tal que $\frac{1}{n} < b$. Agora, seja $U_{\bar{1}}$ uma vizinhança aberta de $\bar{1} \in X$. Perceba que $p^{-1}(U_{\bar{1}})$ é igual a união de intervalos centrados em $1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, declaremos um intervalo (c, d) da forma $0 < c < \frac{1}{n} < d$. Este intervalo é uma vizinhança aberta de K.

Escolhendo um ponto $x \in (c, \frac{1}{n})$, então $p(x) \in U_0 \cap U_{\bar{1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe dois pares de pontos distintos $0, \bar{1} \in X$ tal que toda vizinhança aberta de 0 intersecta alguma vizinhança aberta de $\bar{1}$. Portanto, o espaço X não é de Hausdorff.

■

1.7 Conexidade

A definição de conexidade para um espaço topológico é bastante natural. Diz-se que um espaço pode ser "separado" se ele puder ser dividido em dois abertos disjuntos [5]. A partir dessa ideia simples segue-se.

Definição 1.7.1 (Conexidade) *Um espaço topológico X é desconexo se é expresso como a união de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios. Dizemos que tais subconjuntos desconectam X. Se X não é desconexo, então dizemos que é conexo.*

Por definição, conexidade e desconexidade são propriedades dos espaços, ao contrário de abertos ou fechados, que são propriedades de subconjuntos de um espaço. Também podemos falar sobre subconjuntos conexos ou desconexos de um espaço topológico, nos quais sempre nos referimos a conexos ou desconexos na topologia do subespaço. Aqui está outra caracterização alternativa da conectividade.

Proposição 1.7.1 *Um espaço topológico X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X são o $\emptyset$ e X.*

Demonstração. Suponha primeiro que X seja conexo e que $U \subset X$ seja aberto e fechado. Então, $V = X \setminus U$ também é aberto e fechado. Se ambos U e V fossem não vazios, eles desconectariam X; portanto, ou V é vazio ou $V = X$, o que significa que $U = X$, ou U é vazio.

Por outro lado, suponha que X seja desconexo. Podemos escrever $X = U \cup V$, onde U e V são disjuntos, não vazios e abertos. Ambos U e V também são fechados, porque seus complementos são abertos. Portanto, U e V são abertos e fechados de X e nenhum deles é igual a X ou ao $\emptyset$. ■

A caracterização apresentada é uma das propriedades mais úteis de espaços conexos. Observa-se sua utilidade na demonstração de diversos resultados. Aqui está um exemplo.

Proposição 1.7.2 *Suponha que X seja um espaço conexo não vazio. Então, todo mapa contínuo de X para um espaço discreto é constante.*

Demonstração. Seja Y um espaço discreto e suponha que $f : X \to Y$ seja contínuo. Escolha qualquer $x \in X$ e defina $c = f(x)$. Como o conjunto $\{c\}$ é tanto aberto quanto fechado em Y, sua pré-imagem $f^{-1}(\{c\})$ é tanto aberta quanto fechada em X. Como não é vazia, pois $x \in f^{-1}(\{c\})$, deve ser igual a todo X. Portanto, f é constante. ■

Exemplo 1.7.1 (Exemplos de Espaços Desconexos) .

a) *O espaço topológico $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconectado pelos dois subconjuntos abertos $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.*

b) *Seja Y a união dos dois discos unitários fechados disjuntos $\mathbb{B}(2, 0)$ e $\mathbb{B}(-2, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Cada um dos discos é aberto em Y, portanto, os dois discos desconectam Y.*

c) *Seja $\mathbb{Q}^2$ o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ com coordenadas racionais, com a topologia de subespaço. Então, $\mathbb{Q}^2$ é desconectado pelos conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x < \pi\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x > \pi\}$.*

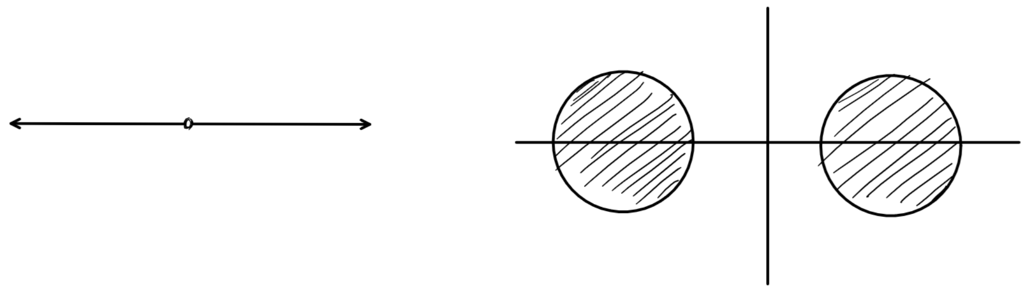

Figura 1.4: Espaços Desconexos

É intuitivamente claro que os discos unitários abertos e fechados, o círculo, o plano inteiro e a reta real são todos conexos, pelo menos no sentido rotineiro da palavra. No entanto, provar isso não parece muito simples, pois para cada espaço teríamos que mostrar que é impossível encontrar um par de conjuntos que o desconecte. Dito isso apresentaremos uma técnica muito útil de garantir conexidade

Teorema 1.7.1 *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se X é um espaço conexo, então $f(X)$ é um espaço conexo.*

Demonstração. Substituindo Y por $f(X)$, podemos assumir que f é sobrejetiva. Demonstraremos a contrapositiva: se Y é desconexo, então é a união de dois subconjuntos não vazios, disjuntos, abertos, U e V. Segue que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos disjuntos e não vazios de X. Logo desconectam X e, portanto, X também é desconexo. ■

Uma consequência imediata do teorema 1.7.1 é o fato de que a conexidade é uma propriedade topológica.

Corolário 1.7.1 (Invariância Topológica da Conexidade) *Qualquer espaço homeomorfo a um espaço conexo também é conexo.*

Proposição 1.7.3 *O círculo $\mathbb{S}^1$ não é homeomorfo ao intervalo unitário fechado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Suponha que exista um homeomorfismo f entre $[0, 1]$ e $\mathbb{S}^1$, então também existe um homeomorfismo entre $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ e $\mathbb{S}^1 \setminus f(\{1/2\})$, mas veja que $\mathbb{S}^1 \setminus f(\{1/2\})$ é conexo e $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ é desconexo. Logo pelo Corolário 1.7.1,

$\mathbb{S}^1 \setminus f(\{1/2\})$ não é homeomorfo a $[0,1] \setminus \{1/2\}$ e, portanto, $\mathbb{S}^1$ não pode ser homeomorfo ao intervalo unitário fechado $[0,1]$.

■

Agora veremos uma nova ideia. Quando um espaço é localmente conexo.

Definição 1.7.2 *Um espaço X é localmente conexo, se para qualquer ponto $p \in X$ e qualquer vizinhança aberta U desse ponto, existe uma vizinhança aberta conexa V de p tal que $V \subset U$.*

Por exemplo, o espaço euclidiano é localmente conexo, porque possui uma base de discos abertos. Por outro lado, o conjunto de pontos racionais no plano não é localmente conexo. Um espaço pode ser conexo, mas não localmente conexo, como é o caso da “curva senoidal do topólogo", e pode ser localmente conexo, mas não conexo, como é o caso da união disjunta de dois discos abertos.

Exemplo 1.7.2 *Defina subconjuntos do plano por*

$$T_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ } e \text{ } y \in [-1,1]\}$$

$$T_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ } e \text{ } y = \sin(1/x)\}$$

Defina $T = T_0 \cup T_C$ com a topologia de subespaço. O espaço T é chamado de curva senoidal do topólogo.

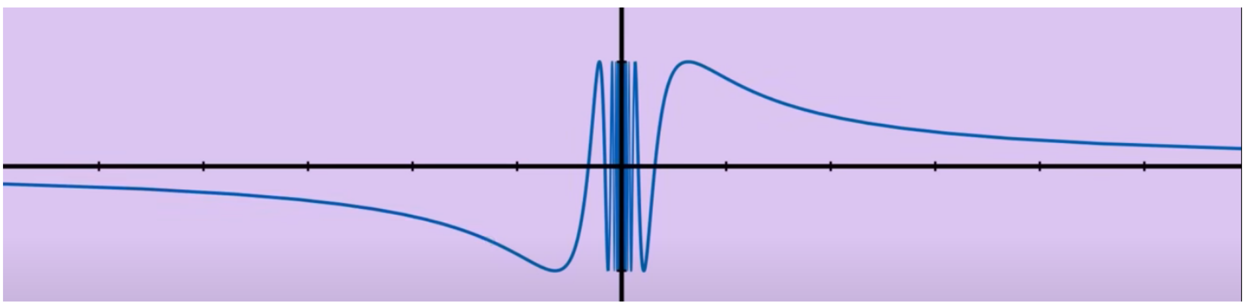

Figura 1.5: Curva Senoidal do Topólogo Fonte: Morphocular

A “curva senoidal do topólogo” não é localmente conexa. Veja o Problema 4-13 a) do livro do Lee [4].

1.8 Compacidade

Vamos agora para a propriedade topológica compacidade.

Definição 1.8.1 (Cobertura e Subcobertura) *Uma **cobertura** aberta de X é uma coleção $\mathscr{U}$ de abertos de X cuja união é X, e uma **subcobertura** de $\mathscr{U}$ é uma subcoleção de elementos de $\mathscr{U}$ que ainda cobre o subconjunto X.*

Definição 1.8.2 (Compacidade) *Um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de X tiver uma subcobertura finita. Isto é: dada qualquer cobertura aberta $\mathscr{U}$ de X, existe um número finito de conjuntos $U_1, \ldots, U_k \in \mathscr{U}$ tal que $X = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ (Veja que o $\emptyset$ é compacto).*

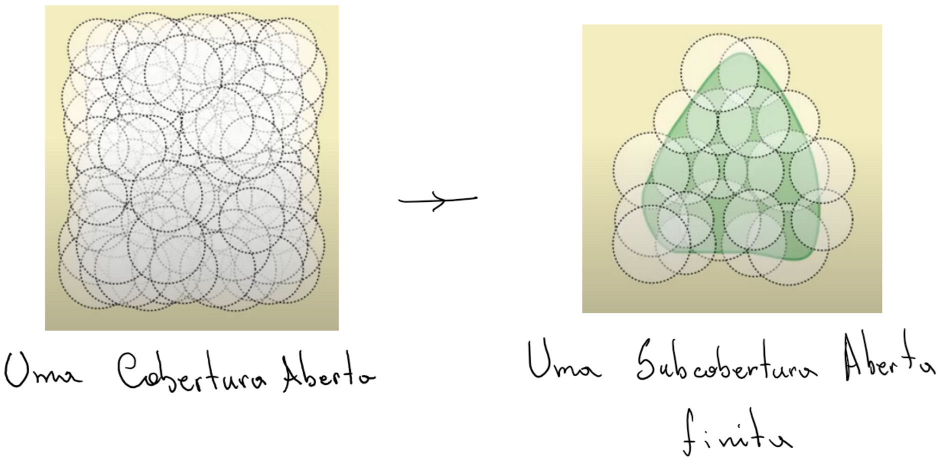

Figura 1.6: Compacidade Fonte: Morphocular

Dizemos que um subconjunto de um espaço topológico é compacto se ele é compacto quando induzido com a topologia de subespaço.

Lema 1.8.1 *Um subconjunto $A \subset X$ é compacto se, e somente se, A for compacto na topologia de subespaço.*

Demonstração. Seja A um compacto de X e seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de A na topologia de subespaço de A. Por definição de subespaço, para todo $i \in I$, existe V_i aberto de X tal que $U_i = V_i \cap A$. Assim, $\{V_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de A em X, logo admite uma subcobertura

$\{V_i\}_{i\in I'}$ finita de A. Logo, $\{U_i\}_{i\in I'}$ é uma subcobertura finita de A. Como a escolha da cobertura foi arbitrária, segue que A é um subespaço compacto.

Por outro lado, se A é compacto na topologia de subespaço, então cada cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ admite uma subcobertura finita por $\{U_i\}_{i\in I'}$, e cada um desses conjuntos, por definição de subespaço, é da forma $V_i \cap A$ em que cada V_i é aberto de X. Portanto, a união finita dos V_i cobrem A, logo A é compacto na topologia de X

■

Aqui estão alguns exemplos elementares de espaços compactos. A Figura 1.6 ajuda a entender os novos conceitos relacionados a esses espaços.

Exemplo 1.8.1 (Espaços Compactos) .

a) Todo espaço topológico finito é compacto, independentemente da topologia que tenha.

b) Todo espaço com a topologia trivial é compacto.

Um dos resultados sobre compacidade é semelhante ao de conexidade. É que imagens contínuas de espaços compactos também são compactos.

Teorema 1.8.1 *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathscr{U}$ uma cobertura de $f(X)$ por subconjuntos abertos de Y. Para cada $U \in \mathscr{U}$, $f^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de X. Como $\mathscr{U}$ cobre $f(X)$, todo ponto de X está em algum conjunto $f^{-1}(U)$. Assim, a coleção $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{U}\}$ é uma cobertura aberta de X. Pela compacidade de X, alguns destes, digamos $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k)\}$, cobrem X. Então, segue que $\{U_1, \ldots, U_k\}$ cobre $f(X)$. ■

Corolário 1.8.1 (Invariância Topológica da Compacidade) *Todo espaço homeomorfo a um espaço compacto é compacto.*

Veja que, provado o Corolário 1.8.1, $\bar{\mathbb{B}}^n$ e $\mathbb{S}^n$ não são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$. Pois $\bar{\mathbb{B}}^n$ e $\mathbb{S}^n$ são compactos e $\mathbb{R}^n$ não é compacto.

Outro resultado importante sobre compacidade é o Teorema do Valor Extremo. Não iremos provar pois precisamos de resultados mais especificos sobre a teoria de compacidade.

Teorema 1.8.2 (Teorema do Valor Extremo) *Se X é um espaço compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada e possui valores máximo e mínimo em X.*

É importante ressaltar aqui um resultado que seria que todo aberto conexo e compacto do $\mathbb{R}$ são exatamente da forma $[a, b]$. Também não demonstraremos esse resultado.

CAPÍTULO 2

VARIEDADES

Vamos começar descrevendo informalmente como se pode pensar em variedades. A ideia fundamental, associada a geometria, é que as variedades são semelhantes a curvas e superfícies, podendo também ter dimensões superiores. Cada variedade possui uma dimensão específica, que é um número inteiro não negativo. A grosso modo, uma variedade é um espaço topológico M que é localmente euclidiano, possui base enumerável e a propriedade Hausdorff.

A conveniência da condição Hausdorff aparece no estudo de certas propriedades da geometria diferencial e topologia. No entanto, também é útil estudar "variedades" que não são de Hausdorff. Esses espaços surgem naturalmente ao responder sobre o espaço de folhas de uma folheação, como veremos no capítulo 3 de Folheações. O objetivo deste capítulo é preparar terreno no estudo de variedades de uma dimensão (geralmente não-Hausdorff), usando como base [3] e [4] de maneira que, mais adiante, podemos entender melhor os resultados principais do capítulo de folheações.

2.1 Variedades

Começaremos por uma definição muito importante no assunto de variedades:

Definição 2.1.1 (Localmente Euclidiano) *Um espaço topológico M é localmente euclidiano de dimensão n se cada ponto de M possui uma vizinhança aberta em M homeomorfa a um aberto de* $\mathbb{R}^n$.

Para alguns propósitos, é útil ser mais específico sobre o tipo de subconjunto aberto que usamos para caracterizar espaços localmente Euclidianos. O próximo lema mostra que poderíamos ter substituído “subconjunto aberto” por bola aberta ou por $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1.1 *Um espaço topológico M é localmente Euclidiano de dimensão n se, e somente se, uma das seguintes propriedades é verdadeira:*

a) Cada ponto de M tem uma vizinhança aberta homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$.

b) Cada ponto de M tem uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Qualquer espaço que satisfaça a propriedade (a) ou (b) é localmente euclidiano de dimensão n pela Definição 2.1.1, pois $\mathbb{B}^n$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, suponha que M seja localmente euclidiano de dimensão n. Como qualquer bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, as propriedades (a) e (b) são equivalentes, então precisamos apenas provar (a).

Dado um ponto p em M, seja U uma vizinhança aberta de p que admite um homeomorfismo $\varphi : U \to V$, em que V é uma vizinhança aberta de $\mathbb{R}^n$. O fato de V ser aberto em $\mathbb{R}^n$ significa que existe uma bola aberta B em torno de $\varphi(p)$ que está contida em V, e $\varphi^{-1}(B)$ é uma vizinhança aberta de p homeomorfa a B que é um aberto de $\mathbb{R}^n$ pela Proposição 1.3.1(a). Logo todo ponto p admite uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$. ∎

Agora vamos para a definição de variedade que usaremos ao longo deste trabalho.

Definição 2.1.2 (Variedade Topológica) *Uma variedade topológica n-dimensional M é um espaço topológico localmente euclidiano de dimensão n e de base enumerável.*

Em uma variedade M, qualquer ponto $p \in M$ admite uma vizinhança U de p tal que o domínio U e o homeomorfismo $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$ formam um par (U, φ) chamado de carta. O mapa de transição associado a duas cartas φ e ψ de M em $\mathbb{R}^n$ com as respectivas imagens U e V é o homeomorfismo.

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) .$$

Veja a figura 2.1. O conjunto de cartas cujas imagens cobrem M é chamado de um atlas $\mathscr{A}$ de M em $\mathbb{R}^n$. Um atlas $\mathscr{A}$ é chamado de maximal se não existe nenhum atlas $\mathscr{B}$ tal que $\mathscr{A} \subsetneq \mathscr{B}$.

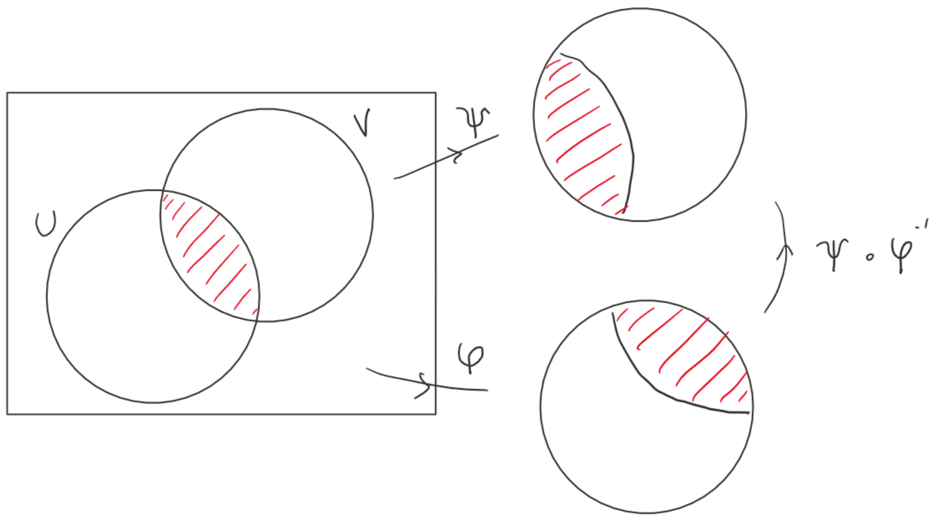

Figura 2.1: Troca de Cartas

Observação: Considera-se sobre variedades topológicas de Hausdorff estruturas adicionais como: orientação, estrutura diferenciável, estrutura complexa [4]. Essas noções são definidas sem recorrer a propriedade de Hausdorff, portanto, se aplicam imediatamente a variedades não-Hausdorff. Porém não serão exploradas ao longo desse trabalho.

O próximo resultado é usado para exemplificar uma demonstração com variedades. Mais especificamente que as placas de uma folheação são variedades (capítulo 3).

Proposição 2.1.1 *Toda subconjunto aberto de uma n-variedade é uma n-variedade.*

Demonstração. Seja M uma n-variedade e V um aberto de M. Qualquer ponto $p \in V$ possui uma vizinhança, em M, que é homeomorfa um aberto de $\mathbb{R}^n$. A interseção dessa vizinhança com V é aberta em V, logo pela proposição 1.3.1(a), ela também é homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$ e está contida em V, então V é localmente euclidiano de dimensão n. Qualquer aberto de um espaço que possui base enumerável também vai possuir base enumerável. Portanto, V é uma n-variedade. ∎

2.1.1 Subvariedade

Definição 2.1.3 (Subvariedade) *$N \subset M^m$ é dito uma subvariedade de M de dimensão $n < m$ se, para todo $p \in N$, existe uma carta local (U, φ) com as seguintes propriedades:*

1. *$\varphi(U) = V \times W$, em que, $0 \in V \subset \mathbb{R}^n, 0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$.*
2. *$\varphi(N \cap U) = V \times \{0\}$.*

com V e W bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ (Veja a figura 2.2)

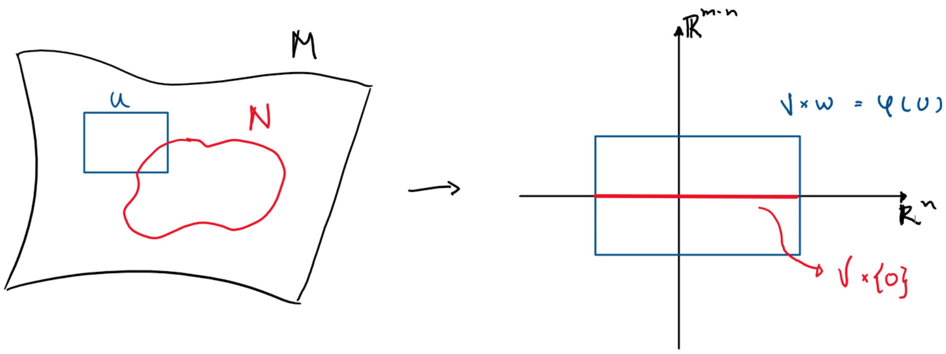

Figura 2.2: Subvariedade

Uma propriedade importante é a chamada Codimensão de N definida como: $\mathrm{Dim}(M)$ - $\mathrm{Dim}(N) = m - n$.

Proposição 2.1.2 *Toda Subvariedade é, também, uma variedade com a topologia de subespaço.*

Demonstração. Veja que para todo $p \in N$ existe uma vizinhança, na topologia de subespaço, da forma $N \cap U$ tal que $\varphi(N \cap U) = V \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Veja que $V \times \{0\}$ é um aberto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, logo N é uma variedade de dimensão n. Um exemplo seria as folhas da folheação do toro 3.9 serem uma variedade induzida pela topologia de subespaço. ∎

2.2 Espaço Quociente de uma Variedade

Nesta seção, exploraremos o funcionamento do processo de colagem, já introduzido no capítulo 1 seção 6, tendo em vista as variedades como nossos espaços topológicos a serem colados. Mas antes disso, precisamos de algumas definições importantes que usaremos ao longo desta seção.

Definição 2.2.1 (Homeomorfismo Local) *Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é um homeomorfismo local se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança aberta $U \subset X$ tal que $f(U)$ é um aberto de Y e a restrição $f|_U : U \to f(U)$ é um homeomorfismo.*

Definição 2.2.2 (Aplicações Abertas e Fechadas) *Uma aplicação $f : X \to Y$ (contínua ou não) é aberta se ela leva abertos de X em abertos de Y. Em outras palavras, para todo aberto $U \subset X$, o conjunto imagem $f(U)$ é aberto em Y. Ela é fechado se ele leva fechados de X em fechados de Y.*

Definição 2.2.3 (Relação de Equivalência Aberta) *Dizemos que uma relação de equivalência ρ é aberta em X se a aplicação quociente $q : X \to X/\rho$ for um aplicação aberto.*

Agora veremos uma Proposição que está presente no artigo, porém sem a demonstração. Essa Proposição nos garante a construção de novas variedades, consequentemente gerando vários exemplos que serão ricos em discussões.

Proposição 2.2.1 *Seja M uma variedade n-dimensional e seja ρ uma relação de equivalência aberta em M para a qual cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U_x tal que nenhum par de pontos distintos em U_x seja ρ-equivalente. Então, o espaço quociente topológico $M' = M/\rho$ é uma variedade n-dimensional.*

Primeiro, vamos entender essa hipótese sobre a relação ρ. O melhor jeito de esclarecer a hipótese é pensar em quais situações essa propriedade não vale. Um contra-exemplo fácil seria dobrar um disco ao meio como na figura 2.3. Tecnicamente, ρ é a relação de equivalência em $\mathbb{B}^2$ descrita por $(x, y) \sim (-x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{B}^2$. Veja que não existe vizinhança de $p \in \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, tal que um par de pontos distintos não se relacionam. Esse quociente é um meio-disco que não é uma variedade. Entendido melhor sobre as condições, vamos partir para a demonstração da Proposição 2.2.1.

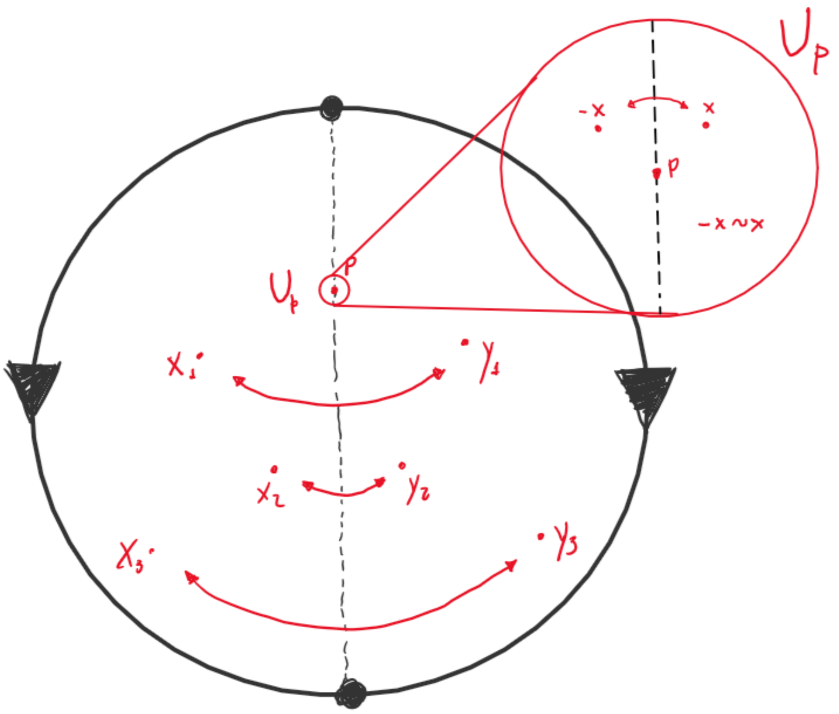

Figura 2.3: Contra-exemplo da Proposição 2.2.1

Demonstração. Definiremos na variedade M dois tipos de vizinhanças em torno de $x \in M$ qualquer, uma delas sendo U_x um domínio da carta local $h_x : U_x \subset M \to \mathbb{R}$ e V_x uma vizinhança de x que atende as condições sobre a relação ρ. Veja que a aplicação quociente $q : V_x \to V'_x \subset M/\rho$ restrita ao domínio V_x é um homeomorfismo, devido a sua injetividade sobre ρ. Existe $q(V_x) = V'_x$ é aberto, pois q é uma aplicação aberta. Definiremos a função $p = h_x \circ q^{-1} : (U'_x \cap V'_x) \subset M/\rho \to \mathbb{R}^n$. Veja que o domínio $q(U_x \cap V_x) = U'_x \cap V'_x$ é um aberto homeomorfo de $\mathbb{R}^n$, visto que $h_x(U_x \cap V_x)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. O diagrama 2.4 esclarece as relações importantes. O argumento de que M/ρ é variedade se completa ao ver que essa construção existe para todo ponto $x \in M$ e, consequentemente, para todo ponto $q(x) \in M/\rho$, logo M/ρ é localmente euclidiano. Como M possui base enumerável o espaço quociente M/ρ também vai pois q é um mapa aberto.

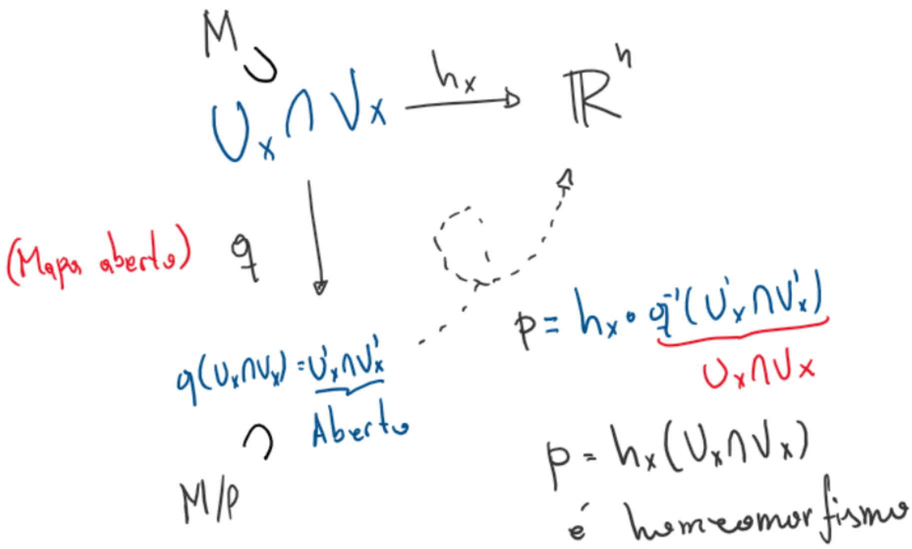

Figura 2.4: Diagrama da demonstração da Proposição 2.2.1

∎

Note que, mesmo que M seja de Hausdorff, M/ρ pode não ser, como os os exemplos a seguir mostrarão.

2.2.1 Exemplos de Variedades Unidimensionais Não-Hausdorff

A Proposição 2.2.1 nos permite construir uma série de exemplos de variedades. Agora, vamos estudar alguns dele, limitando-nos a variedades de dimensão 1. Mas, primeiro, uma definição :

Definição 2.2.4 (Ponto de Ramificação) *Um ponto x em uma variedade M é chamado de ponto de ramificação se houver um ponto $z \in M$,com $z \neq x$, tal que qualquer vizinhança de x tem interseção não vazia com todas as vizinhanças de z.*

Observação: A relação "x não é separável de z" é reflexiva e simétrica, mas em geral não é transitiva (veja o exemplo 2.2.4).

Exemplo 2.2.1 (Ramificação Dupla) *Sejam R_1 e R_2 duas cópias da reta real $\mathbb{R}$ e seja Σ a união disjunta*[1] *de R_1 e R_2. Considere o intervalo $\Omega = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}$ e a relação de equivalência ρ em Σ que identifica pontos de R_1 e R_2 que têm a mesma coordenada $t \in \Omega$. Note que ρ satisfaz as condições da Proposição 2.2.1. Ao passar o quociente associado ao Ω, obtemos uma variedade unidimensional chamada Ramificação Dupla ilustrada no exemplo 2.5 a seguir.*

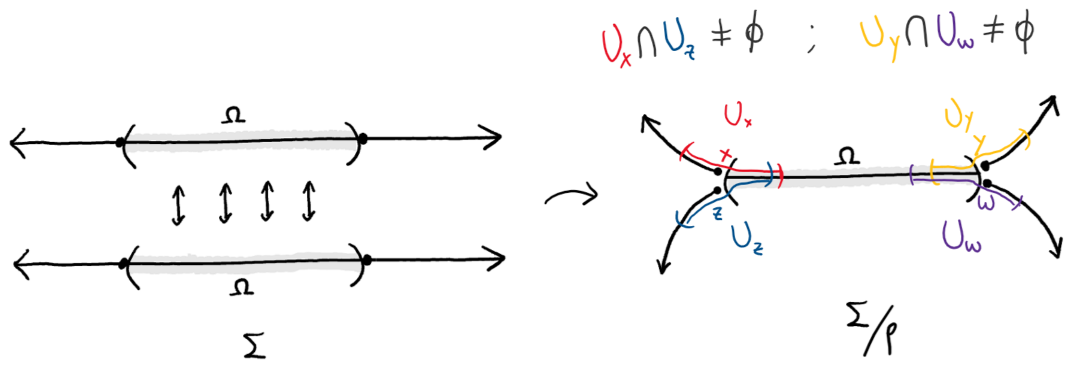

Figura 2.5: Ramificação Dupla; Fonte: Artigo [3] Adaptado

Perceba que os pontos x e z do quociente (Veja a imagem 2.5), são não-separáveis, pois não importa o quão pequena seja a vizinhança em volta do ponto x, U_x sempre terá intersecção não-vazia com qualquer vizinhança U_z. Logo x e z são pontos de ramificação. Veja que esse fenômeno também acontece na extremidade direita com os pontos y e w, resultando em outra ramificação. Dito isto, percebe-se que a variedade contém duas ramificações e por isso é chamada de "Ramificação Dupla". Veja mais outros exemplos:

Exemplo 2.2.2 (4 Exemplos) *Aqui os Exemplos são construidos da mesma forma que no Exemplo 2.2.1, apenas trocando o aberto Ω.*

a) A Ramificação Simples: Aqui $\Omega = (-\infty, 0)$. Os pontos de ramificação têm coordenadas 0.

b) O Laço: Aqui $\Omega = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Os pontos de ramificação têm coordenadas -1 e 0.

c) A Reta De Duas Origens: Aqui $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Os pontos de ramificação têm coordenadas 0.

d) Ω é o complemento do conjunto de Cantor. Aqui a coleção de pontos de ramificação é não-enumerável.

[1]A definição do espaço "união disjunta" pode ser encontrado no livro do Lee [4]

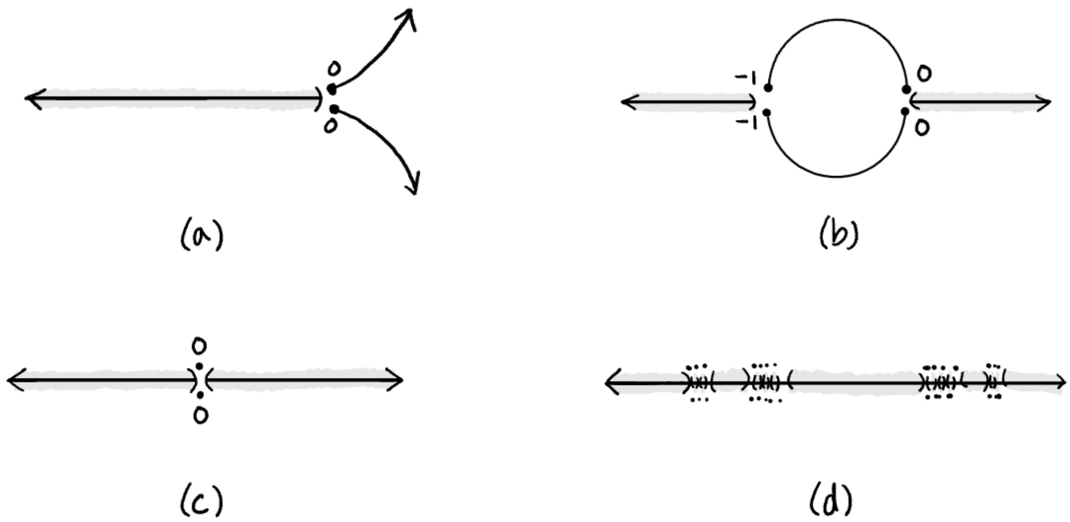

Figura 2.6: 4 Exemplos; Fonte: Artigo [3]

Exemplo 2.2.3 (O Loop) *Seja ρ a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ que identifica os pontos com coordenadas t e $-t$ para $|t| > 1$. O espaço quociente é o Loop e os pontos de ramificação são os pontos de coordenadas 1 e -1.*

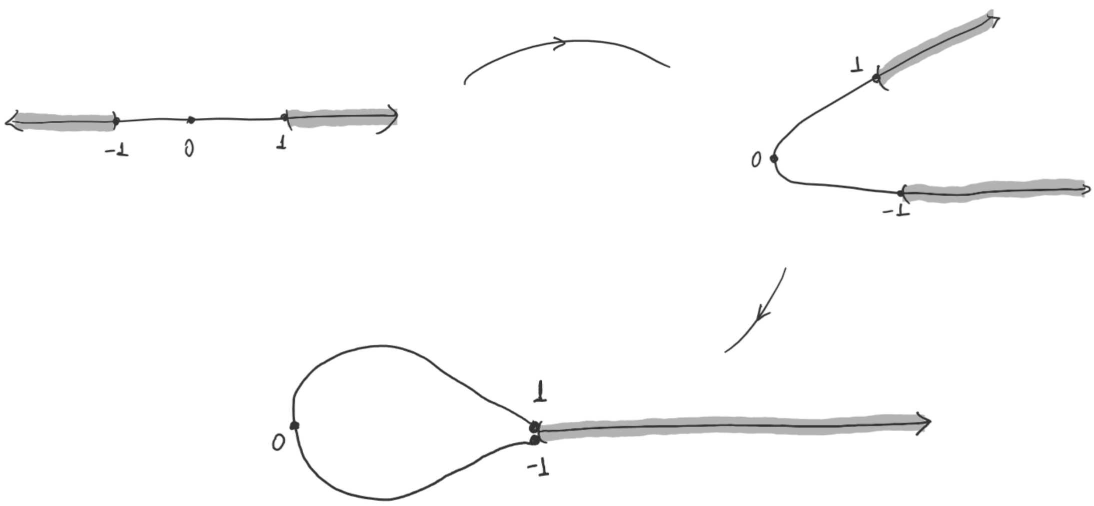

Figura 2.7: O Loop

Exemplo 2.2.4 (A Estrela) *Seja Σ a união disjunta de $R_1, R_2, \ldots, R_n$, n cópias de $\mathbb{R}$. Seja ρ a relação de equivalência em Σ que identifica cada ponto com coordenada $t > 0$ em R_i com o ponto de coordenada $-t$ em R_{i+1} ($1 \leq i \leq n$; assuma $R_{n+1} = R_1$). O espaço quociente é uma variedade de uma dimensão que se parece com uma estrela de n pontas. Os pontos de ramificação aqui* *são os pontos de coordenada* 0*. Dois pontos desses em* R_i *e* R_j *são separados se, e somente se,* $|i - j| \neq 1$*. Também poderíamos considerar uma estrela com infinitos ramos. Veja a Figura 2.8.*

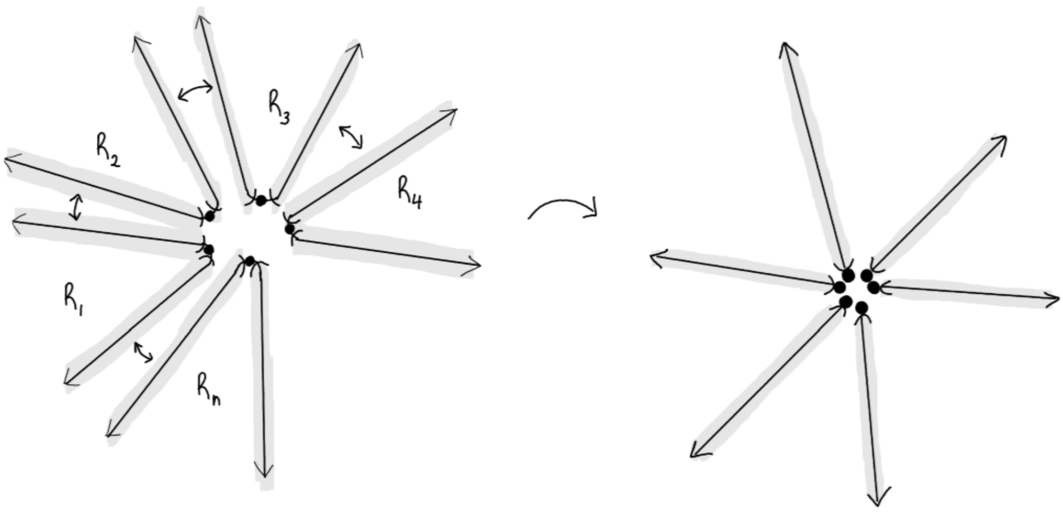

Figura 2.8: A Estrela; Fonte: Artigo [3]

Exemplo 2.2.5 (A Pluma) *O exemplo 2.2.2a) mostra como é possível "enxertar" uma cópia de* $\mathbb{R}$ *como uma ramificação simples em um ponto* $t = 0$*. Também podemos enxertar uma ramificação dessas em um ponto qualquer de* $\mathbb{R}$*. Se simultaneamente enxertarmos uma ramificação simples em todos os pontos de* $\mathbb{R}$ *com coordenadas racionais obtemos uma variedade de uma dimensão que chamamos de "a pluma". A reta* $\mathbb{R}$ *é o tronco no qual as ramificações são enxertadas. Aqui, os pontos de ramificação formam um conjunto denso em* $\mathbb{R}$*. Ao enxertar uma ramificação em cada ponto de* $\mathbb{R}$*, obteríamos uma variedade que não possui uma base enumerável. Veja a Figura 2.9.*

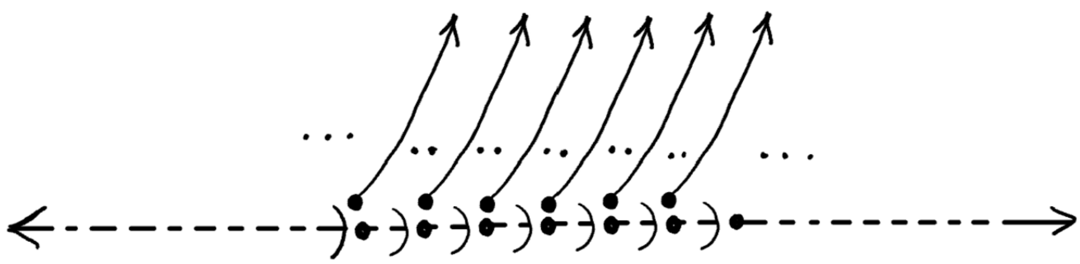

Figura 2.9: A Pluma; Fonte: Artigo [3]

Exemplo 2.2.6 (Pluma Completa) *Se, em uma pluma, substituirmos cada ramificação por uma nova pluma, obtemos uma nova variedade de dimensão 1 que chamamos de pluma dupla. Em uma pluma dupla, você pode substituir cada ramificação por um pluma simples, obtendo assim um pluma tripla. Repetindo esse processo n vezes (n sendo um número natural), obtemos o pluma n-upla. Podemos realizar uma sequência enumerável dessas operações para obter a variedade de dimensão 1 chamada de pluma completa. A pluma completa possui a seguinte propriedade notável: o conjunto de pontos de ramificação é enumerável e é densa sobre o espaço. Veja a Figura 2.10.*

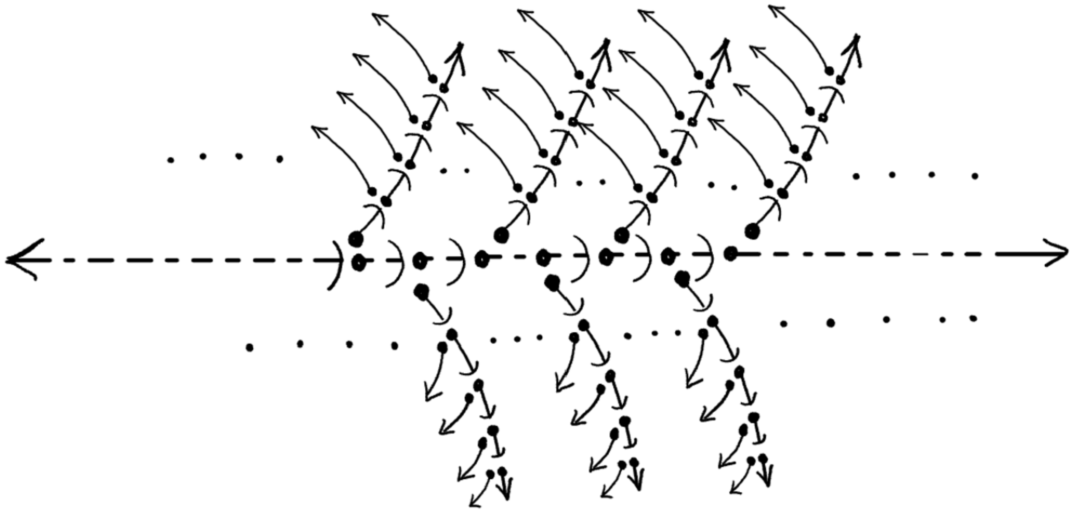

Figura 2.10: A Pluma Completa; Fonte: Artigo [3]

Esses exemplos mostram a grande diversidade de variedades de dimensão 1 sem a propriedade de Hausdorff. Uma classificação topológica desses espaços já parece ser algo complicado, ao contrário de quando se assume a propriedade de Hausdorff em que temos, pela teoria de classificação de variedades unidimensionais, apenas o $\mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^1$, como é provado na página 145 do livro do Lee [4]. Vamos dar outro exemplo que dará uma ideia da complexidade das variedades não-Hausdorff de dimensão maior que 1.

Exemplo 2.2.7 (Variedade Bidimensional Não-Hausdorff) *Sejam E_1 e E_2 duas cópias de $\mathbb{R}^2$ com o sistema de coordenadas polares (r, ω). Seja ρ a relação de equivalência no espaço $\Sigma = E_1 \sqcup E_2$ que identifica qualquer ponto de E_1 com coordenada (r, ω), $r < 1$, com o ponto de E_2 com coordenada $(r, \dfrac{\omega}{1-r})$, sendo a identidade para outros pontos. O espaço quociente Σ/ρ*

é uma variedade de dimensão 2; a imagem em Σ/ρ de qualquer ponto de E_1 com coordenada $(1, \omega_0)$ não é separável de nenhum ponto da imagem em Σ/ρ do círculo $r = 1$ de E_2.

2.3 Variedades Unidimensionais Simplesmente Conexas

Vamos agora elucidar um dos conceitos chave para o resultado principal do trabalho. Para isso, precisaremos de algumas definições.

Definição 2.3.1 (Recobrimento) *O par $(\widetilde{M}, p)$ de um espaço topológico $\widetilde{M}$ e uma função contínua $p : \widetilde{M} \to M$, em que M é outro espaço topológico, é chamado de recobrimento de M se, para cada ponto de M, existe uma vizinhança aberta U tal que $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta de abertos U_i tais que a restrição de p a cada U_i é um homeomorfismo sobre U.*

Definição 2.3.2 (Simplesmente Conexo) *Um espaço topológico M será chamado de simplesmente conexo se for conexo e se, para qualquer recobrimento conexo $(\widetilde{M}, p)$ de M (ou seja, com $\widetilde{M}$ conexo), a projeção canônica p for um homeomorfismo de $\widetilde{M}$ para M.*

Essa é a definição que o artigo [3] utiliza, que é diferente da padrão. Porém, são equivalentes, conforme pode ser provado com as técnicas do capítulo 11 de [4].

Proposição 2.3.1 (Toro n-dimensional) *Seja $\sim$ a relação em $\mathbb{R}^n$ definida por, $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Denotamos $\mathbb{R}^n/\!\sim\, = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, que é chamado de toro n-dimensional. (Caso $n = 1$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é homeomorfo ao círculo $\mathbb{S}^1$, Caso $n = 2$ ($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ é homeomorfo à superfície toroidal usual no $\mathbb{R}^3$).*

Demonstração. Primeiro, vamos verificar que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência:

1. É reflexiva. Pois $x - x = 0 \in \mathbb{Z}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. É simétrica. Pois se $x - y = k \in \mathbb{Z}^n$ então $y - x = -k \in \mathbb{Z}^n$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. É transitiva. Pois se $x - y = a \in \mathbb{Z}^n$ e $y - z = b \in \mathbb{Z}^n$ então $x - z = x - y + b = a + b \in \mathbb{Z}^n$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Agora veja que a relação $\sim$ atende as condições da Proposição 2.2.1, já que, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ existe uma bola $\mathbb{B}^n$ centrada em x e raio $\epsilon < \frac{1}{2}$, tal que não há dois pontos que sejam $\sim -$equivalentes. Logo o quociente é uma variedade n-dimensional

Seja $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\!\sim$ a aplicação quociente. Vejamos que o par $(\mathbb{R}^n, q)$ é um recobrimento de $\mathbb{R}^n/\!\sim$. Visto que em cada ponto $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ existe uma vizinhança U tal que $q^{-1}(U)$ é a união disjunta de várias vizinhanças abertas de $x \in \bar{x}$. Veja que q é um recobrimento conexo de $\mathbb{R}^n/\!\sim$ mas não é um homeomorfismo, pois apesar de ser sobrejetivo, não é injetivo: basta pegar uma bola aberta de raio igual a 2 na origem, os pontos a uma distância 1 da origem são todos levados para um mesmo ponto $\bar{x}$, quebrando a injetividade. Logo $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ não é simplesmente conexo.

É interessante mostrar também que esse espaço $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é de Hausdorff. Basta ver que para quaisquer dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é possivel criar uma bola de raio menor que $\frac{d(x,y)}{2}$ de modo que nenhum ponto de uma bola de $q^{-1}(x)$ se relacione com algum ponto de uma bola $q^{-1}(y)$.

■

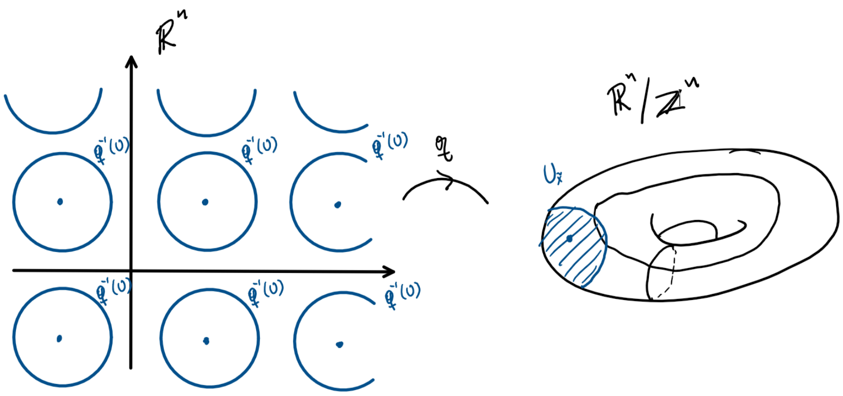

Figura 2.11: Recobrimento do Toro

Um resultado muito interessante que se percebeu sobre as variedades unidimensionais foi que nem toda variedade unidimensional M possui um homeomorfismo local $f : M \to \mathbb{R}$. Por outro lado, uma variedade unidimensional simplesmente conexa sempre possui um homeomorfismo local em $\mathbb{R}$. Para demonstrarmos essa proposição 2.3.2 precisaremos de um Lema:

Lema 2.3.1 *Se M é uma variedade simplesmente conexa de dimensão 1, então, para qualquer $x \in M$, $M \setminus \{x\}$ tem exatamente duas componentes conexas.*

Demonstração. Considere uma vizinhança U homeomorfa a um intervalo I. Então $U \setminus \{x\}$ possui exatamente duas componentes conexas U_+ e U_- (pois isso é verdadeiro para intervalos). Consideremos agora duas cópias M' e M'' de $M \setminus \{x\}$ e seja U'_+, U'_- e U''_+, U''_- cópias de U_+ e U_- em M' e M'', respectivamente. Para obter um espaço $\widetilde{M}$, complete o espaço com a união disjunta $M' \sqcup M''$ com os pontos x' e x'' admitindo, respectivamente, as vizinhanças U' e U'' tais que:

$$U' \cap M' = U'_+ \,, \quad U' \cap M'' = U''_- \,, \, U'' \cap \quad M' = U'_- \,, \, U'' \cap M'' = \quad U''_+ \,.$$

Defina a projeção canônica $p : \widetilde{M} \to M$ de tal forma que $p(x') = p(x'') = x$. Então o par $(\widetilde{M}, p)$ é um recobrimento desconexo de M, como ilustrado na figura 2.3.

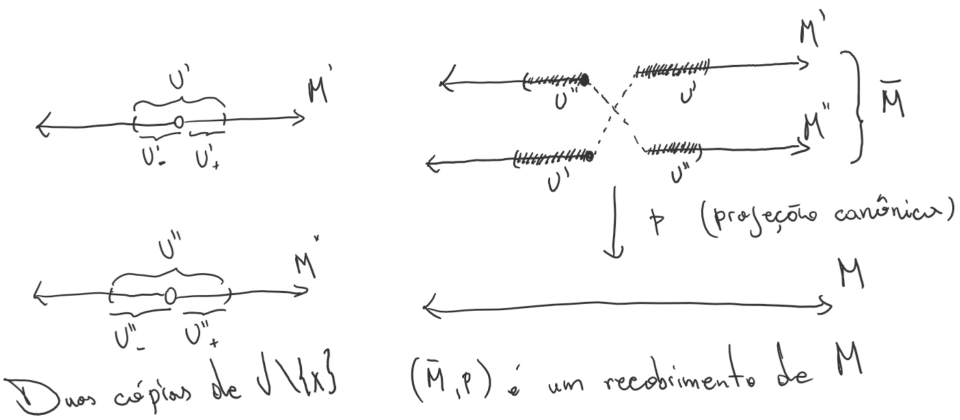

Figura 2.12: Recobrimento Desconexo

O argumento se completa notando que, caso $M \setminus \{x\}$ seja conexo, então o espaço $\widetilde{M}$ é conexo, veja a figura 2.3. Logo, existiria um recobrimento conexo $(\widetilde{M}, p)$ de M que não é homeomorfismo, contrariando a definição de um espaço M ser simplesmente conexo.

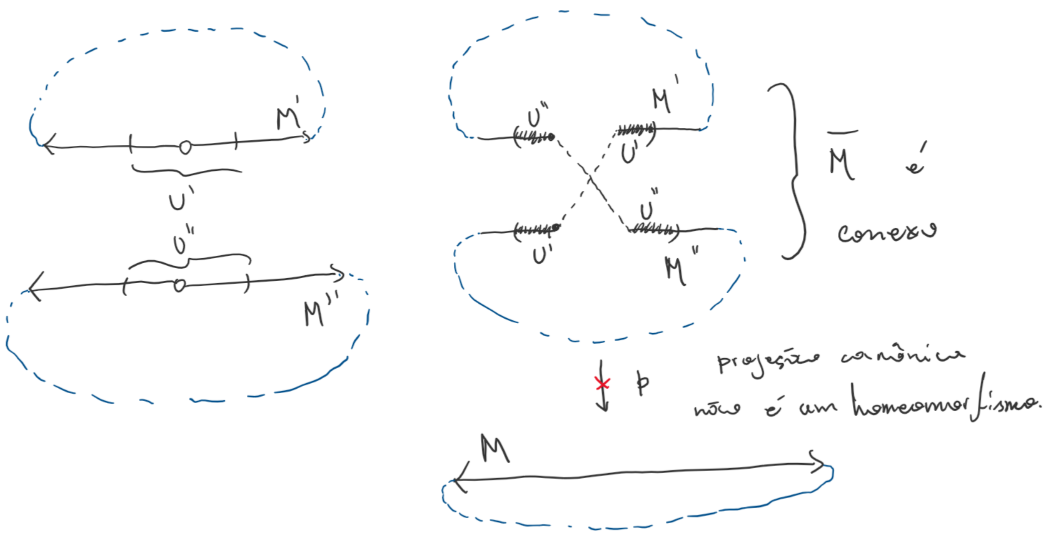

Figura 2.13: Contra-exemplo do Lema 2.3.1

■

Por outro lado, veja que, caso M tenha a propriedade de que para todo ponto $x \in M$, $M \setminus \{x\}$ seja desconexo, então M seria simplesmente conexo. Logo uma variedade unidimensional M com essa propriedade também é simplesmente conexa.

Veja que os exemplos do Circulo $\mathbb{S}^1$, o Laço 2.2.2b), a Estrela 2.2.4, a Reta de duas origens 2.2.2c), o Loop 2.2.3 e o exemplo da colagem feita pelo complemento do conjunto de Cantor 2.2.2d) não são variedades unidimensionais simplesmente conexas, pois é possível de achar algum ponto em cada uma dessas variedades que, ao se retirar esse ponto, a variedade continua sendo conexa.

Proposição 2.3.2 *Suponha que M seja uma variedade unidimensional simplesmente conexa. Então, existe um homeomorfismo local $f : M \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como M admite base enumerável de abertos, existe uma família enumerável de cartas locais $h_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbb{R}$, com $i \in \mathbb{N}$, tal que os dominios U_i cobrem todo o M. Além disso, tomaremos cada U_i conexo, garantindo que cada V_i é homeomorfo a um intervalo aberto da reta pois é imagem de um conexo. Já que M é conexo, podemos assumir que a enumeração dos U_i é feita de maneira que cada união $\Omega_n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ é conexa para todos os inteiros n.

Primeiro definiremos a função $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow (-1, 1)$. Para Ω_1 temos $\Omega_1 = U_1$ e $f_1 = \psi_1 \circ h_1$, sendo $\psi_1 : V_1 \longrightarrow (-1, 1)$ um homeomorfismo. Portanto, f_1 é um homeomorfismo, pois f_1 é composição de dois homeomorfismos. Agora, argumentaremos por indução. Suponha que definimos um homeomorfismo local $f_n : \Omega_n \longrightarrow (-n, n)(f_n = \psi_n \circ h_n$ com $\psi : V_n \longrightarrow (-n, n)$. Afirmamos que, pelo Lema 2.3.1, temos que $\Omega_n \cap U_{n+1}$ é conexo, veja a figura 2.14. Então $h_{n+1}(\Omega_n \cap U_{n+1})$ é conexo de $\mathbb{R}$ e, portanto, homeomorfo a um intervalo I. Além disso $f_n \circ h_{n+1}^{-1} : I \longrightarrow (-n, n)$ em I é estritamente monótona e $n \geq |f_n \circ h_{n+1}^{-1}|$.

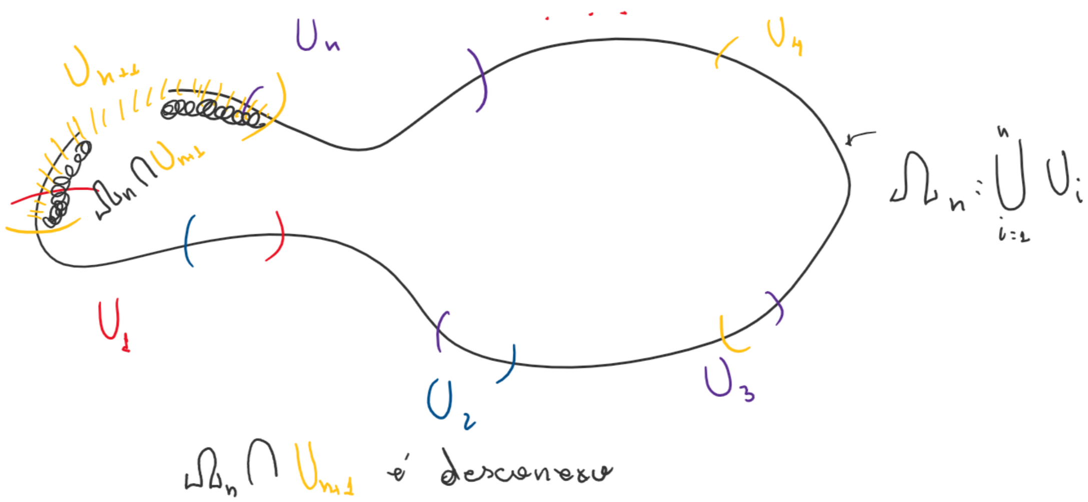

Figura 2.14: Contra-exemplo da conexidade de $\Omega_n \cap U_{n+1}$

Afirmamos que a função $f_n \circ h_{n+1}^{-1}$ pode ser estendida por uma função $\psi_{n+1} : V_{n+1} \longrightarrow (-n - 1, n + 1)$ tal que seja estritamente monótona, contínua e limitada $n + 1 \geq |\psi_{n+1}|$. A função $\psi_{n+1} \circ h_{n+1}$ e a função f_n são idênticas em $\Omega_n \cap U_{n+1}$, então amalgamá-las (usando o resultado da Proposição 1.2.4) define o homeomorfismo local

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n, & x \in \Omega_n \\ \psi_{n+1} \circ h_{n+1}, & x \in U_{n+1} \end{cases}$$

■

Um resultado muito interessante que se percebeu sobre essas variedades unidimensionais foi o seguinte: Se uma variedade unidimensional M possui um homeomorfismo local $f : M \to \mathbb{R}$, então M é necessariamente orientável, (esse resultado não será provado, mas é mencionado como um artifício importante no artigo [3]). É válido notar que a recíproca dessa afirmação não é válida, como mostraremos na proposição a seguir.

Proposição 2.3.3 *O círculo $\mathbb{S}^1$ é uma variedade unidimensional que não possui homeomorfismo local em $\mathbb{R}$. Além disso, um homeomorfismo local f de um espaço X qualquer para a reta real $\mathbb{R}$ não pode admitir valores máximo nem mínimo.*

Demonstração. Suponha que exista um homeomorfismo local $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Como $\mathbb{S}^1$ é conexo e compacto, a imagem de f em $\mathbb{S}^1$ também é conexa e compacta em $\mathbb{R}$, sendo $f(\mathbb{S}^1) = [a, b]$. Pelo Teorema do valor extremo 1.8.2, f admite um valor máximo a e um mínimo b.

Agora, considere $f^{-1}(b)$ e declare uma vizinhança aberta U desse ponto. Observe que a restrição de f ao domínio U não é injetiva, pois $f^{-1}(b)$ possui mais de um ponto em sua pré-imagem. Portanto, f não é um homeomorfismo local. Concluímos que não pode existir um homeomorfismo local entre o círculo $\mathbb{S}^1$ e a reta real $\mathbb{R}$, e que, além disso, f não pode admitir nem valor máximo nem mínimo.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 3

FOLHEAÇÕES

A concepção intuitiva das folheações corresponde à decomposição de uma variedade em subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão, denominadas "folhas", no entanto a definição matemática é outra, como veremos mais tarde. Localmente, essas folhas se assemelham à disposição das páginas de um livro. A teoria das folheações, conforme conhecemos atualmente, tem raízes históricas notáveis.

Os primórdios da teoria das folheações remontam à década de 1940, com os trabalhos pioneiros de Charles Ehresmann e Georges Reeb, que lançaram as bases conceituais fundamentais desse campo matemático. No entanto, é interessante destacar que, já no final do século XIX, Paul Painlevé identificou a necessidade de desenvolver uma teoria geométrica das folheações, antecipando assim a relevância futura desse tópico [1].

A teoria das folheações, em sua forma moderna, foi impulsionada por questões relacionadas a categoria diferencial. Porém, dada a riqueza de detalhes técnicos envolvidos, em nossa abordagem será considerada apenas a categoria topológica, sem entrarmos em questões de suavidade, focando em uma exposição breve e concisa ao apresentar as definições e notações pertinentes.

3.1 Folheações

Uma folheação de dimensão n de uma variedade de dimensão m de M é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n chamadas folhas, as quais se aglomerarm localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com segunda coordenada constante.

O exemplo mais elementar de folheação de dimensão n é a folheação de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ em que as folhas são os k-planos da forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, com $c \in \mathbb{R}^{m-n}$. Veja as figuras 3.1 e 3.2.

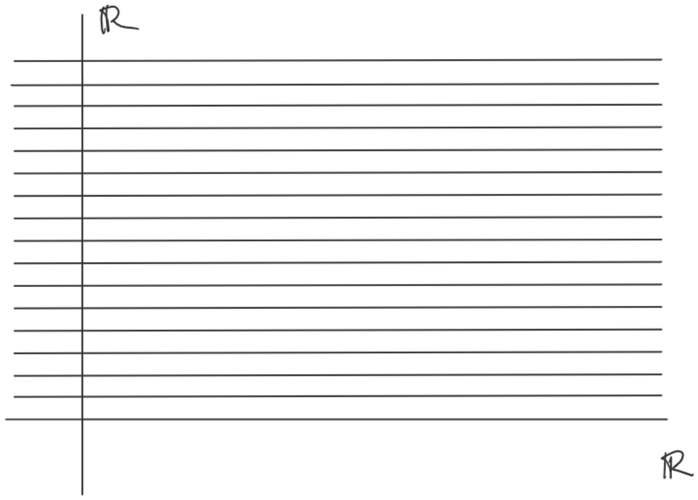

Figura 3.1: Folheação Trivial do $\mathbb{R}^2$

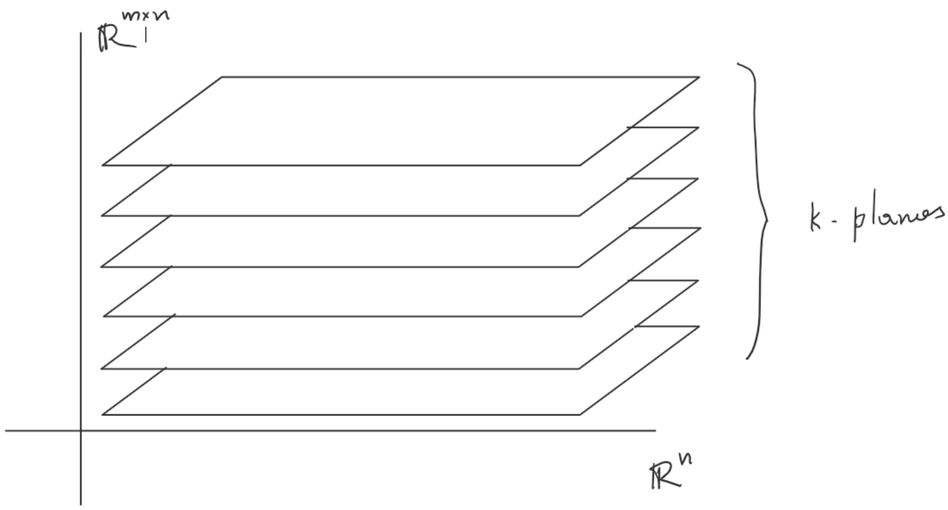

Figura 3.2: Folheação Trivial do $\mathbb{R}^n$ por k-planos

Partiremos agora para a definição formal de folheações. A partir de agora, para toda folheação de uma variedade, essa variedade será assumida com a propriedade de Hausdorff.

Definição 3.1.1 (Folheação) *Seja M uma variedade de Hausdorff de dimensão m. Uma folheação de dimensão n de M, é um atlas máximo $\mathscr{F}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

a) Se $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, em que U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.

b) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathscr{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é da forma:

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (h_1(x, y), h_2(y)) \, , \; (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \, . \tag{3.1}$$

Daqui em diante chamaremos as cartas $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ (da Definição 3.1.1) de *cartas trivializadoras* de $\mathscr{F}$. Dizemos também que M é folheada por $\mathscr{F}$, ou $\mathscr{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n sobre M. Na figura 3.3 ilustramos o aspecto local de uma variedade de dimensão 2 folheada por uma folheação de dimensão 1.

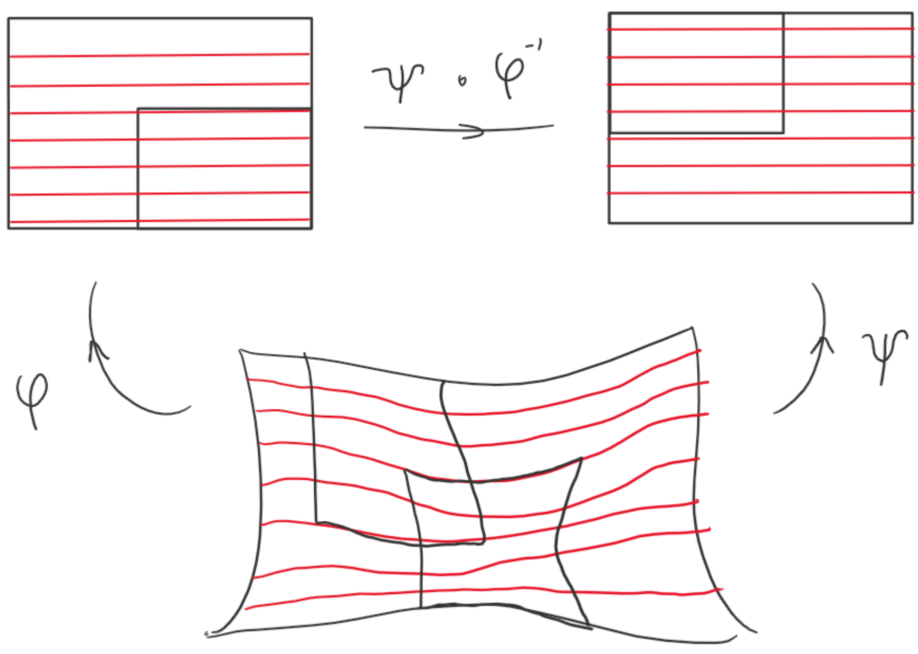

Figura 3.3: Aspecto Local de uma Folheação do $\mathbb{R}^2$

Uma observação interessante a se fazer é a seguinte: qual seria a diferença entre o Atlas folheado $\mathscr{F}$ e o Atlas que trata-se no contexto de variedades? Pois bem, o atlas $\mathscr{F}$ é especial porque a condição (3.1) garante que a troca de cartas é um homeomorfismo que preserva as folhas de uma folheação.

Outro fato interessante de se observar é que nem todas as variedades, de dimensão m, possuem uma folheação de dimensão n em que $n < m$. Como por exemplo, é conhecido que a esfera $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ não possui folheação de dimensão 1 e a esfera $S_5 = \{(x, y, z, a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ não possui uma folheação de dimensão 2 (o exemplo da esfera S_5 foi provado por Steenrod, veja [1]).

3.1.1 Folhas

Vamos agora formalizar o conceito de folhas de uma folheação. Para isso precisamos das chamadas placas de U ou placas de $\mathscr{F}$.

Definição 3.1.2 (Placas) *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de uma variedade M, e $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ uma carta trivializadora de $\mathscr{F}$ sendo $\varphi : U \to U_1 \times U_2$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados de placas de U ou placas de $\mathscr{F}$.*

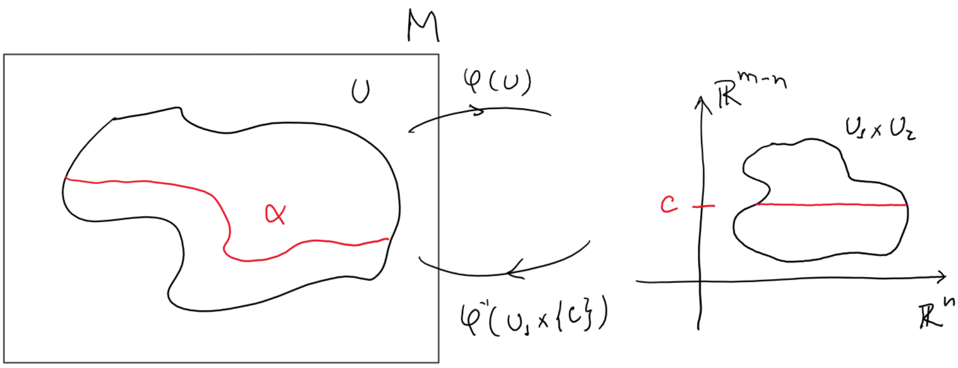

Figura 3.4: Placas de U

Fixado $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to U$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Portanto, as placas são subvariedades conexas de dimensão n de M. Além disso, se α e β são placas de U, então ou $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Definição 3.1.3 (Caminho de placas) *Um caminho de placas de $\mathscr{F}$ é uma sequência $\alpha_1, ..., \alpha_k$ de placas de $\mathscr{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, ..., k-1\}$.*

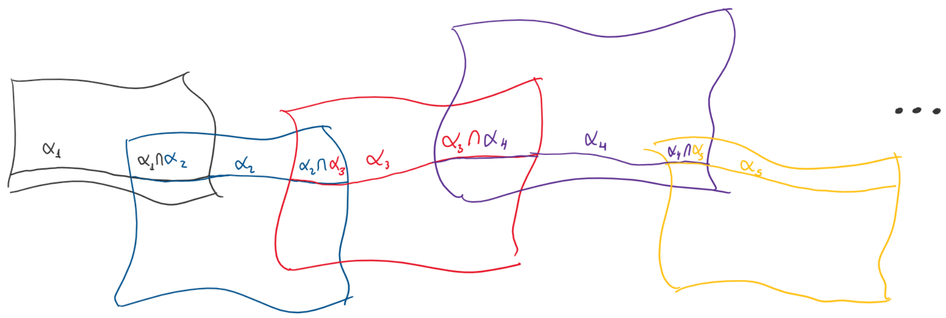

Figura 3.5: Caminho de Placas

Como M é recoberta pelas placas de $\mathscr{F}$, podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, ..., \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.

Definição 3.1.4 (Folhas) *As classes de equivalência da relação $\sim$ são chamadas folhas de $\mathscr{F}$*

Da definição segue que uma folha de $\mathscr{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos. Se F é uma folha de $\mathscr{F}$ e $p, q \in F$, então existe um caminho de placas $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Como as placas α_j são conexas por caminhos e $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, segue que $\alpha_1 \cup ... \cup \alpha_k \subset F$ é conexo por caminhos, logo existe um caminho contínuo em F ligando p a q.

3.1.2 Exemplos de Folheações

Devido à complexidade e à falta de ferramentas para provar que certos exemplos são de fato folheações, afirmaremos o seguinte resultado crucial para os exemplos que ilustraremos. Todo esse embasamento teórico sobre os exemplos de folheações podem ser encontrados no livro do Camacho [1].

$$ceb$$

Proposição 3.1.1 *As curvas de nível de uma função contínua f definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que tenha gradiente que não se anula definem uma folheação, e as componentes conexas das curvas de nível são as folhas dessa folheação.*

Tendo em mãos técnicas de análise no $\mathbb{R}^n$, esse resultado seria um caso particular de aplicações que possuem diferenciais sobrejetoras. Com estudos em variedades diferenciáveis, isso tudo seria um caso particular das submersões.

Folheações também aparecem no estudo de equações diferenciais ordinárias e no estudo de distribuições no sentido do Teorema de Frobenius, um teorema muito importante e avançado na teoria de folheações.

Exemplo 3.1.1 (Folheação por Espirais) *As curvas que são soluções da equação diferencial (em coordenadas polares r e ω)*

$$\frac{dr}{d\omega} = r(1 - r^2)$$

são as folhas de uma folheação de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. O círculo $r = 1$ é uma folha em torno da qual as outras folhas se enrolam assintoticamente.

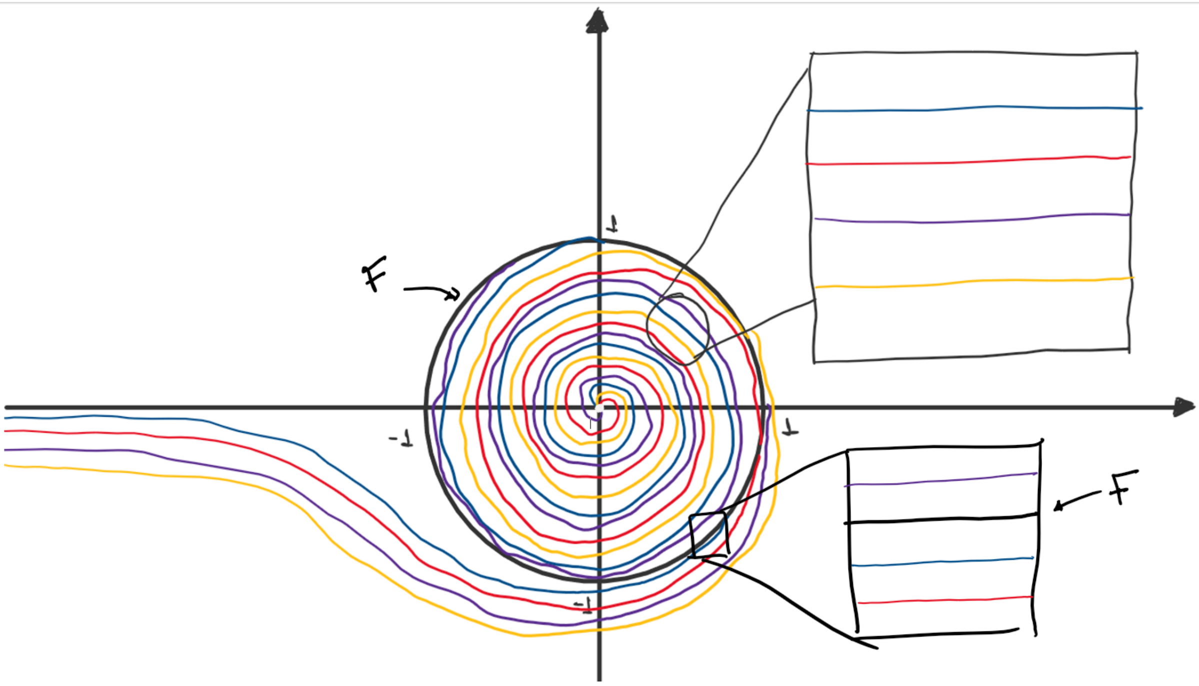

Figura 3.6: Folheação por Espirais

Exemplo 3.1.2 (Folheação por Hipérboles) *Seja U o complemento, em $\mathbb{R}^2$, do conjuntos de pontos com $x = 0$ e $y \geq 0$. Como U é aberto de $\mathbb{R}^2$, então é variedade e é de Hausdorff. As componentes conexas das curvas de nível da função $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = xy$ são as folhas de uma folheação em U, que é ilustrada pela figura 3.7. Veja que o conjunto U é homeomorfo ao $\mathbb{R}^2$. É possível, também, colocar várias "hipérboles" se curvando assintoticamente em cada uma das retas que passam pela origem. Como ilustra a imagem 3.8.*

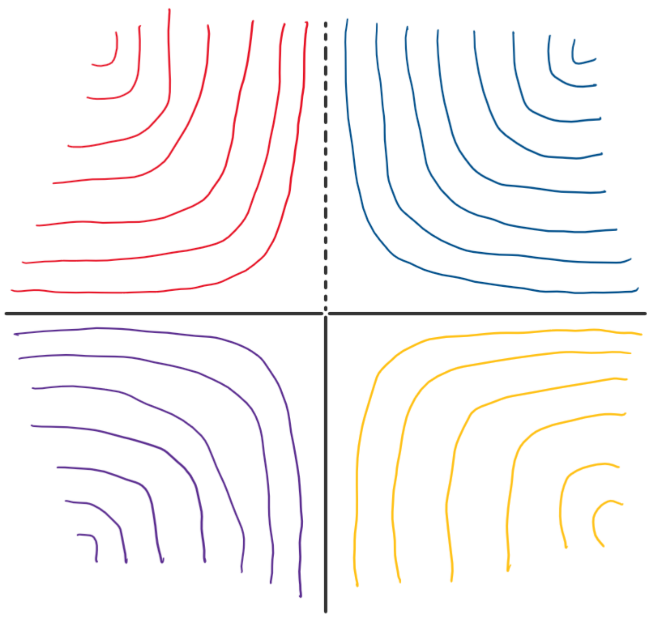

Figura 3.7: Folheação por Hipérboles

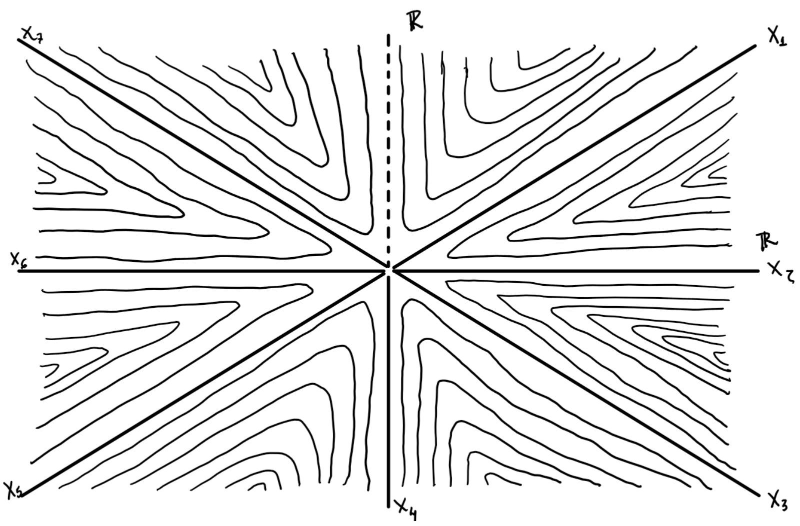

Figura 3.8: Folheação por Hipérboles

3.2 Topologia das Folhas

Veremos agora um resultado sobre a topologia das folhas que não se revela muito intuitivo. Em uma folha F de uma folheação $\mathscr{F}$ de M podem ser definidas duas topologias: a de subespaço (induzida por M), e a intrínseca, gerada pelas placas de F, no sentido da Proposição 1.5.1 enunciada no capítulo 1.

A estrutura intrínseca de cada folha F de uma folheação $\mathscr{F}$ induzida pelas cartas de $\mathscr{F}$ é construída da seguinte maneira. Dado um ponto $p \in F$, seja (U, φ) uma carta de $\mathscr{F}$ tal que $p \in U$, e $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, em que U_1 e U_2 são bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente. Seja α a placa de U que contém p. Definindo $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ em que $\varphi_1 : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : U \to \mathbb{R}^{m-n}$ definimos $\bar{\varphi} : \alpha \to U_1 \subset \mathbb{R}^n$ por $\bar{\varphi} = \varphi_1|_\alpha$. É claro que $\bar{\varphi} : \alpha \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, já que $\varphi(\alpha) = U_1 \times \{a\}$ para algum $a \in U_2$. Veremos que o conjunto:

$$\mathscr{B} = \{(\alpha, \bar{\varphi}) \mid \alpha \subset F \text{ é placa de } U \text{ com } (U, \varphi) \in \mathscr{F}\}$$

é um atlas de dimensão n de F. Resumimos o que foi dito no seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 (Topologia das Folhas) *Seja M uma variedade folheada por uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão n. Cada folha F de $\mathscr{F}$ de dimensão n possui estrutura de uma variedade, na qual os domínios das cartas locais são placas de $\mathscr{F}$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que se $(\alpha, \bar{\varphi})$, $(\beta, \bar{\psi})$ estão em $\mathscr{B}$ e $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, então $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ e $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$, e o mapa de transição $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1} : \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta) \to \bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$ é um homeomorfismo. Primeiro, mostramos que $\alpha \cap \beta$ é aberto em α e em β. Sejam (U, φ) e (V, ψ) em $\mathscr{F}$ tais que $\bar{\varphi} = \varphi_1|_\alpha$ e $\bar{\psi} = \psi_1|_\beta$. A partir da condição 3.1, temos que $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y)) = (h_1(x, y), (h_2(y))$ com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Em particular, dado que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, temos:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, b)) = (h_1(x, b), (h_2(b)) = (h_1(x, b), a) \tag{3.2}$$

Como $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$ e $\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\})$, a partir de (3.2) obtemos: $\varphi(\beta \cap U) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})) \subset \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V)$, ou seja $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$. Analogamente $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$ logo

$\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$. Isto prova que $\alpha \cap \beta$ é aberto em α e em β.

Como $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ são homeomorfismos obtemos que $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ e $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$. Isto define a estrutura intrínseca de F. A demonstração de que as folhas possuem base enumerável será omitida. A topologia de F associada ao atlas $\mathscr{B}$ definido é tal que o conjunto de todas as placas de α de F com $\alpha \subset F$, constitui uma base de abertos de F. ■

Essa topologia intrínseca em uma folha F, em geral, não coincide a topologia de subespaço de M. Uma razão para isso é, por exemplo, que a folha F pode eventualmente encontrar o domínio U de uma carta $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ em uma sequência de placas $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que acumulam em uma placa $\alpha \subset F$. Ou seja, qualquer vizinhança de α contém um número infinito de placas de F, e, portanto, F não é localmente conexa na topologia induzida por M, enquanto na topologia intrínseca, F é uma variedade e, portanto, localmente conexa. O exemplo 3.2.1 da folheação de um toro bidimensional esclarece a ideia.

Exemplo 3.2.1 (Folheação do Toro) .

Seja $\widetilde{\mathscr{F}}$ uma Folheação de $\mathbb{R}^2$ gerada pelos níveis da função $f(x, y) = ax + by$ com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes não ambas nulas, e seja $\mathscr{F}$ a folheação de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induzida pela projeção de $\widetilde{\mathscr{F}}$. Iremos afirmar o seguinte:

a) Caso $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então toda folha é homeomorfa ao $\mathbb{S}^1$, com a topologia intrínseca. Neste caso a topologia intrínseca coincide com a de subespaço.

b) Caso $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, então toda folha é homeomorfa à $\mathbb{R}$, com a topologia intrínseca, e densa em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Neste caso a topologia intrínseca não coincide com a de subespaço.

Não iremos provar as propriedades desse exemplo, mas a menção dele é muito frutífera para um maior entendimento sobre a topologia das folhas. A Figura 3.9 ilustra bem o exemplo.

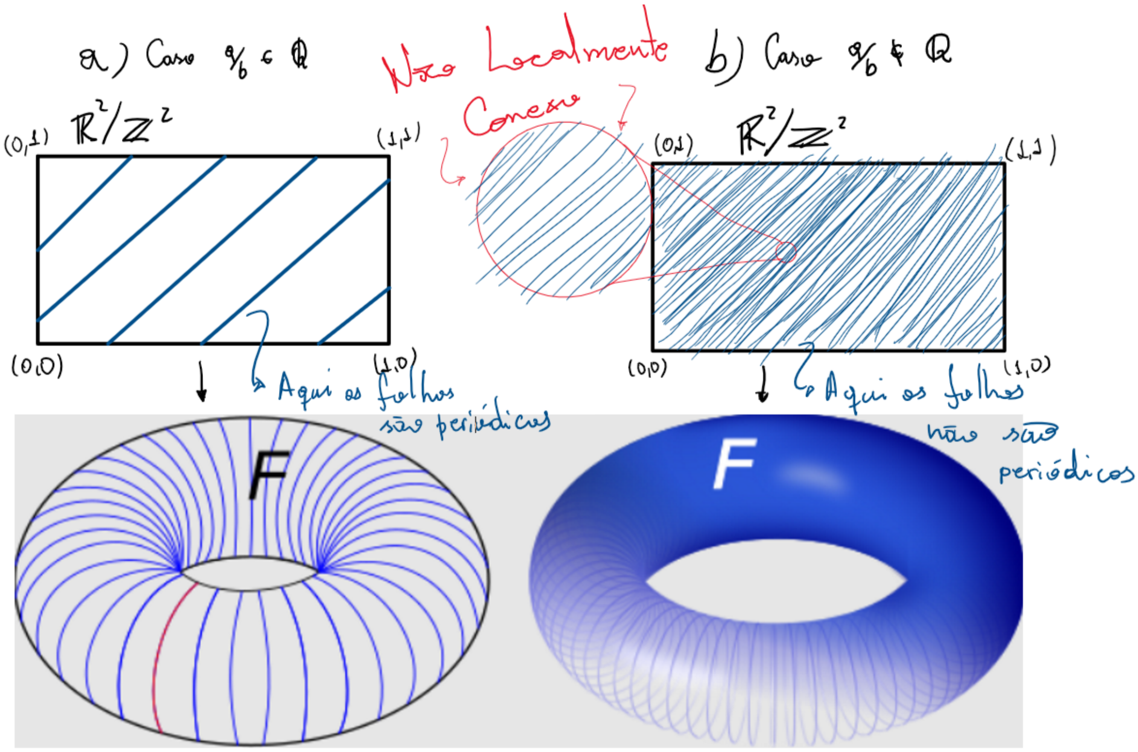

Figura 3.9: Folheações Racional e Irracional do Toro; Fonte: Wikipedia (Adaptado)

Ao contrário do Exemplo 3.2.1, no plano, temos:

Proposição 3.2.1 (Folhas Fechadas e Não Compactas do $\mathbb{R}^2$) *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação do $\mathbb{R}^2$, toda folha de $\mathscr{F}$ é fechada e $\mathscr{F}$ não possui folhas compactas.*

Não faremos a prova dessa Proposição, por apresentar um elevado grau de dificuldade e ser necessário ferramentas avançadas de equações diferenciais (Teorema da Existência e Unicidade de EDO), mas é deixada como exercício na página 62 do livro do Camacho [1]. Essa Proposição tem enorme grau de importância na demonstração do Teorema Principal 3.3.3 de André Haefliger e Reeb.

3.2.1 Espaço de Folhas

Seja M^n uma variedade folheada por uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão $n < m$. O espaço de folhas de $\mathscr{F}$, $M/\mathscr{F}$, é o espaço quociente de M sob a relação de equivalência que identifica dois pontos de M se eles estão na mesma folha de $\mathscr{F}$. A partir da definição de folha, fica claro que essa relação coincide com a relação $\sim$ definida na Seção anterior. Em $M/\mathscr{F}$, adotamos a topologia quociente. A topologia de $M/\mathscr{F}$ é, em geral, muito complicada, possivelmente não sendo Hausdorff, como no caso da folheação de Reeb 3.3.2.

Seja $A \subset M$. A saturação de A em $\mathscr{F}$ é definida como:

$$\mathscr{F}(A) = \{x \in M \mid x \sim y, \text{ para algum } y \in A\}$$

Se $\pi : M \to M/\mathscr{F}$ é a projeção para o quociente, temos que,

$$\mathscr{F}(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} F_x$$

em que F_x denota a folha que contém x.

Proposição 3.2.2 (Aplicação Aberta) *O mapa quociente π é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Perceba que se mostrarmos que a saturação $\mathscr{F}(A)$ de um aberto A de M é aberto, então mostramos a Proposição. Sejam $p \in \mathscr{F}(A)$, de um aberto A e, F a folha que passa por p. Então, $F \cap A \neq \emptyset$, e se $q \in A \cap F$, então existe um caminho de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tal que $q \in \alpha_1$ e $p \in \alpha_k$. Suponha que cada α_j seja uma placa de U_j com $(U_j, \varphi_j) \in \mathscr{F}$, e seja $\varphi_j(U) = U'_j \times U''_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ em que U'_j e U''_j são discos abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente.

Suponha que, para algum $j \in \{1, \ldots, k\}$, existe um $x \in \alpha_j$ que possui um vizinhança aberta $V \subset (\mathscr{F}(A) \cap U_j)$. Como $\varphi_j : U_j \to U'_j \times U''_j$ é um homeomorfismo, $\varphi_j(V)$ é aberto de $U'_j \times U''_j$, então se $\pi_2 : U'_j \times U''_j \to U''_j$ for a projeção na segunda coordenada e $\varphi_j^2 = \pi_2 \circ \varphi_j$, então, $\pi_2^{-1}((\varphi_j^2(V))$ é aberto de $U'_j \times U''_j$. Por outro lado, $W = \varphi_j^{-1}(\pi_2^{-1}(\varphi_j^2(V)))$ é aberto e $\alpha_j \subset W_j \subset \mathscr{F}(A) \cap U_j$ também, e assim α_j está no interior de $\mathscr{F}(A)$. Veja a figura 3.10. Agora, basta notar que, como A é aberto, α_1 está no interior de $\mathscr{F}(A)$, então $\alpha_1 \cap \alpha_2$ também está no interior de $\mathscr{F}(A)$ e, procedendo por indução, existe uma vizinhança W_2 de α_2 tal que

$\alpha_2 \subset W_2 \subset \mathscr{F}(A)$. Repetindo esse processo $k-1$ vezes, prova-se indutivamente que α_k está no interior de $\mathscr{F}(A)$ e, portanto, que $\mathscr{F}(A)$ é aberto. ∎

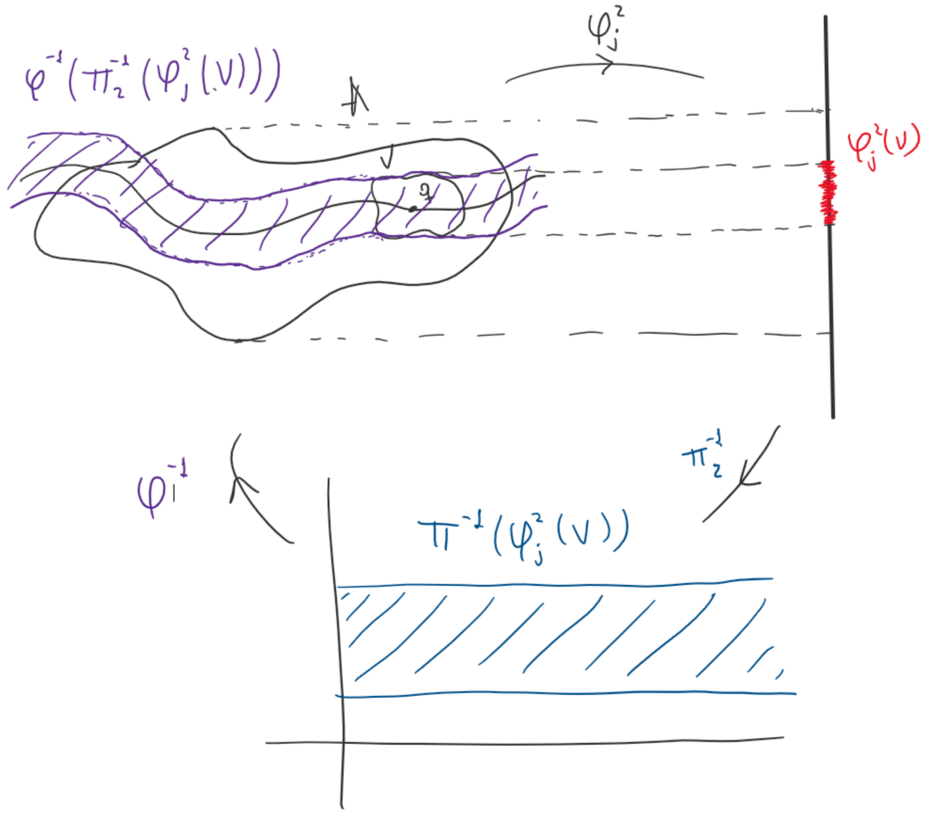

Figura 3.10: Diagrama da Proposição 3.2.2

3.3 Espaço de Folhas de uma Folheação do Plano

Agora, estamos com quase tudo finalizado para entender o resultado principal que motivou este trabalho. Acho importante ressaltar a imensa dificuldade de encontrar uma demonstração, desse Teorema 3.3.3, feita no contexto desse trabalho, visto que não há literatura acessivel sobre este Teorema. Mas antes de prosseguir com a prova, vamos enunciar dois Teoremas necessários para sua demonstração.

Teorema 3.3.1 (Teorema da Curva de Jordan) *Seja C uma curva*[1] *fechada sem auto-intersec -ções no plano $\mathbb{R}^2$. Então, o complemento $\mathbb{R}^2 \setminus C$, consiste exatamente em duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada.*

[1]no sentido de ser imagem de uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$

Combinando o Teorema da Curva de Jordan 3.3.1 com a Proposição 3.2.1 das folhas fechadas e não compactas, é possível provar que cada folha de uma folheação $\mathscr{F}$ do $\mathbb{R}^2$ separa o plano em duas componentes conexas.

Teorema 3.3.2 (Poincaré-Bendixon) *Seja (U, φ) uma carta trivializadora de uma folheação $\mathscr{F}$ do $\mathbb{R}^2$. A imagem por φ da intersecção de U com qualquer folha ou é o $\emptyset$ ou é uma linha* $y = \text{constante}$.

O artigo de George Reeb e André Haefliger estabelece uma bela conexão entre folheações do plano e variedades unidimensionais não Hausdorff [2], que surgem naturalmente como espaços de folhas dessas folheações. Desde sua publicação, essa teoria abriu caminho para diversos resultados relacionados a sistemas dinâmicos e folheações do plano e de variedades 2-dimensionais. Na literatura, o principal teorema deste artigo tem sido comumente referido como a teoria de Haefliger-Reeb ou "um resultado clássico de Haefliger e Reeb".

O resultado principal deste trabalho contemplará justamente essa bela conexão, que é uma consequência essencial do Teorema de Poincaré-Bendixson, do Teorema de Jordan e da recíproca do Lema 2.3.1.

Teorema 3.3.3 (Resultado Clássico de Haefliger e Reeb) *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de $\mathbb{R}^2$. O espaço quociente V de $\mathbb{R}^2$, pela relação de equivalência $\sim$ associada à folheação, é uma variedade unidimensional (possivelmente não-Hausdorff) e simplesmente conexa.*

Demonstração. Como $\mathbb{R}^2$ é conexo e tem base enumerável, segue que V também é conexo e possui base enumerável (pois $\sim$ é uma aplicação aberta). Para mostrar que V é uma variedade unidimensional, é suficiente mostrar que todos os pontos z em V possuem uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}$. Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to V$ a projeção canônica; a folha $\pi^{-1}(z)$ encontra com pelo menos uma carta trivializadora U_i. Veja que devido ao Teorema 3.3.2 a projeção π restrita ao domínio U_i se comporta como uma projeção a segunda coordenada, pois U_i é uma carta trivializadora e a relação $\sim$, restrita a U_i, identifica cada $y = c$ e somente ela, com o ponto $\{c\}$ em $\mathbb{R}$ (veja a figura 3.3). Já que π é uma projeção aberta, então $\pi(U_i)$ é uma vizinhança aberta de $\pi(z)$. Visto que $\varphi(U_i) = V_i \subseteq \mathbb{R}^2$, $\pi_2(V_i)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e, portanto, existe uma aplicação $\psi : \pi(U_i) \to \pi_2(\varphi(U_i))$ que induz um homeomorfismo de $\pi(U_i)$ em $\mathbb{R}$ para todo ponto $z \in V$, isso prova que V é localmente euclidiano.

O complemento de qualquer folha, que é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$, tem duas componentes conexas devido ao Teorema da Curva de Jordan 3.3.1. Portanto, o complemento de qualquer ponto em V também tem duas componentes conexas. Sabendo que V é variedade unidimensional, a propriedade dita é equivalente ao fato de que V é simplesmente conexo, veja 2.3.1. ■

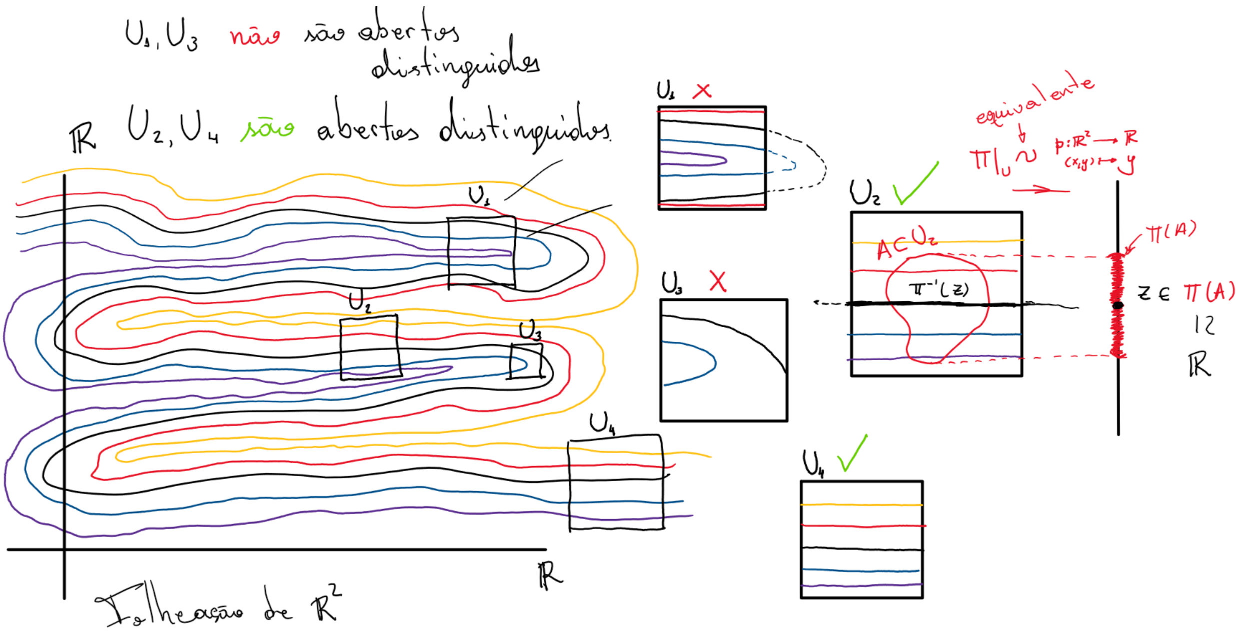

Figura 3.11: Cartas Trivializadoras de uma Folheação do $\mathbb{R}^2$

Agora mostraremos alguns exemplos de espaços de folhas gerados por folheações do $\mathbb{R}^2$ e veremos que a vasta maioria são variedades não-Hausdorffs.

3.3.1 Exemplos de Espaço de Folhas

Exemplo 3.3.1 (Espaço de folhas da Folheação Trivial) *O espaço de folhas da folheação trivial já mencionado no inicio do capítulo é o caso mais simples. O espaço quociente dessa Folheação é o próprio $\mathbb{R}$. Veja que, em verde, figura 3.12, está uma maneira de entender intuitivamente a variedade unidimensional gerada pela folheação do plano.*

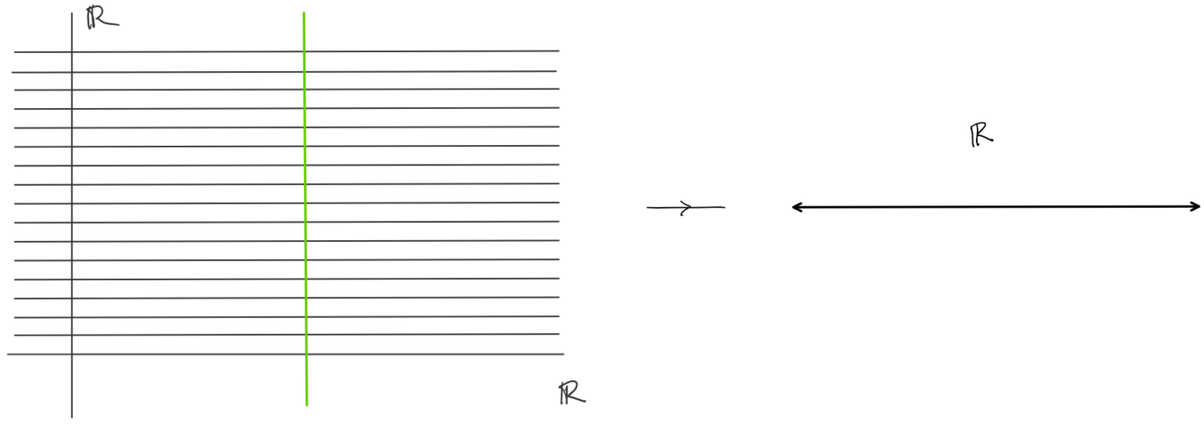

Figura 3.12: Espaço de Folhas Trivial

Exemplo 3.3.2 (Espaço de folhas da Folheação de Reeb) .

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de $\mathbb{R}^2$ em que as folhas são linhas verticais para $x < -1$ ou $x > 1$, e para $-1 < x < 1$ as folhas são as curvas de nível da função $f(x) = -e^{(\frac{1}{1-x^2})} + c$. Seu espaço de folhas é homeomorfo a Ramificação Simples 2.2.2a).

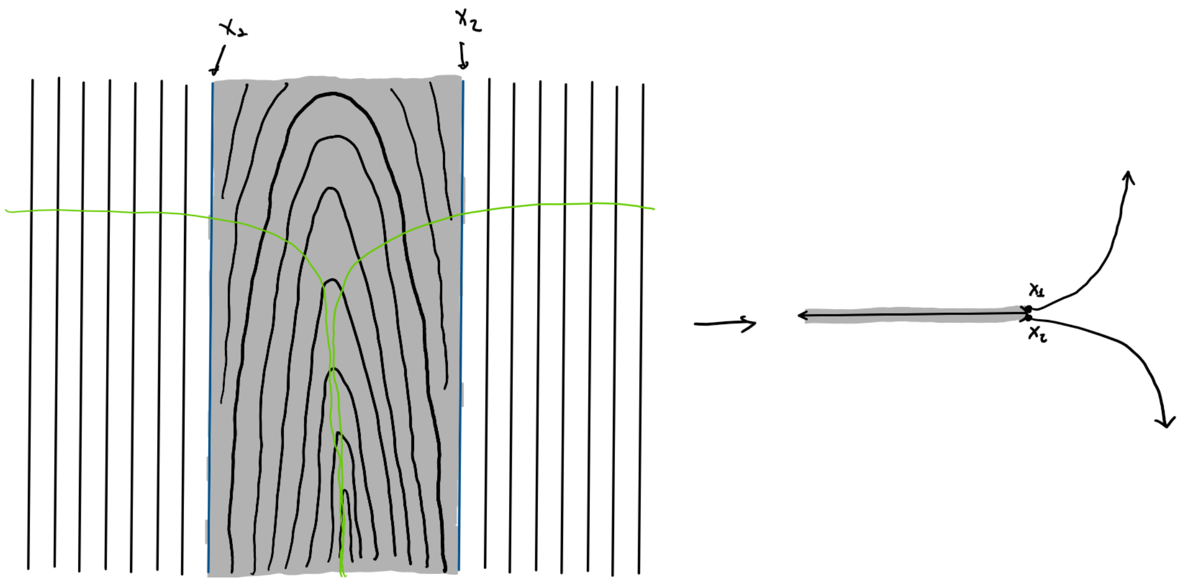

Figura 3.13: Espaço de Folhas de Reeb

Vamos analisar cuidadosamente o motivo de $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ serem pontos de ramificações. Primeiro, veja que um aberto que contém a folha x_1 é um saturado $\mathscr{F}(A)$ tal que A é um aberto

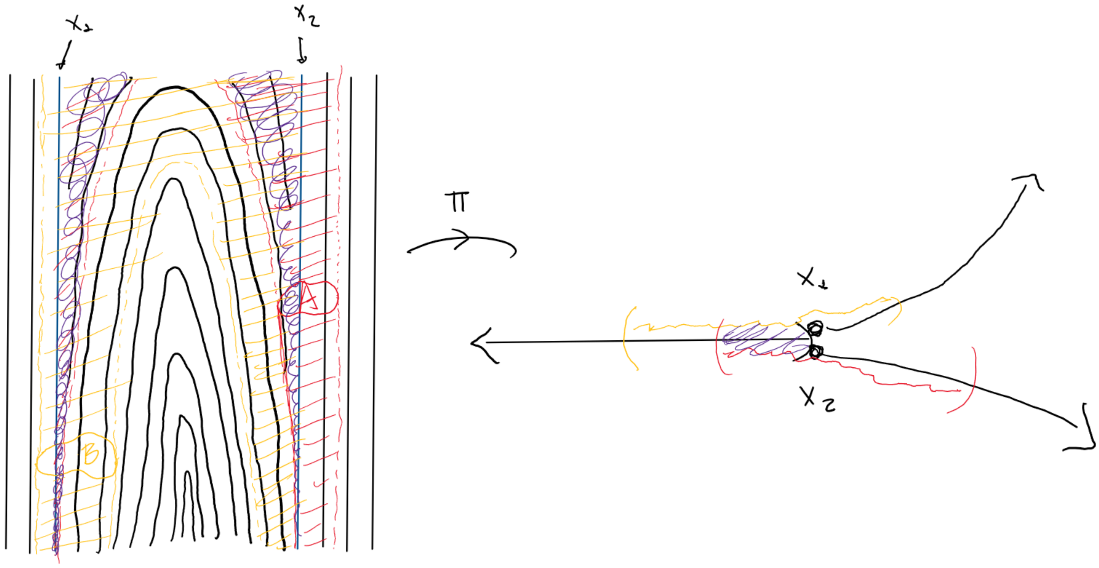

Figura 3.14: Ramificações do Espaço de Folhas de Reeb

que intersecta essa folha (vimos pela Proposição 3.10 que o saturado $\mathscr{F}(A)$ *de um aberto A é um aberto). Agora, perceba que, dado um aberto B que intersecta a folha* x_2, $\mathscr{F}(B)$ *tem sempre intersecção não-vazia com* $\mathscr{F}(A)$, *veja a figura 3.14. Logo a imagem pela* π *(que é uma aplicação aberta) desses saturados abertos vão ser vizinhanças abertas de* x_1 *e* x_2 *e, portanto, são pontos de ramificações.*

Exemplo 3.3.3 (Espaço de folhas da Folheação Hiperbólica) *Seja* $\mathscr{F}$ *a folheação hiperbólica do exemplo 3.1.2. Veja que seu espaço de folhas* $\mathbb{R}^2/\mathscr{F}$ *é homeomorfo à Estrela de quatro pontas sem um ponto de ramificação. Esse exemplo já deixa mais evidente em como as folheações podem ter espaço de folhas um pouco mais complicados.*

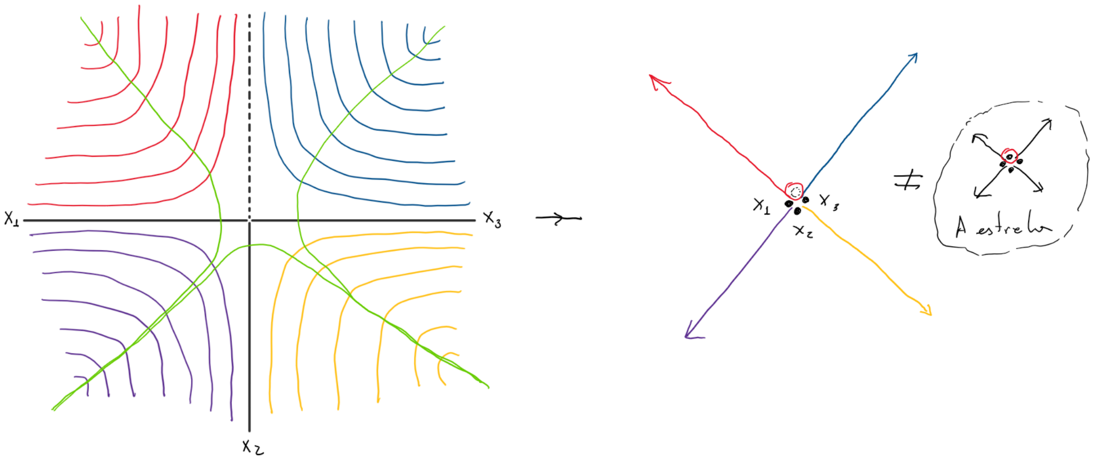

Figura 3.15: Espaço de Folhas Hiperbólico

Veja que podemos colocar mais assíntotas que passam pela origem do plano de maneira que haja mais hipérboles folheando o plano, fazendo assim com que a quantidade de pontos de ramificações do espaço de folhas seja o mesmo que a quantidade de assíntotas-1. *Podemos colocar n assíntotas e gerar um espaço de folhas com* $n-1$ *ramificações.*

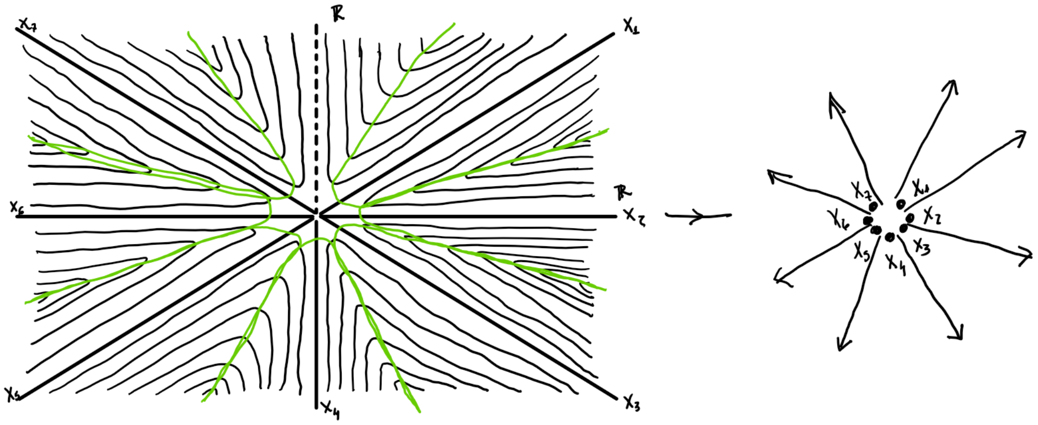

Figura 3.16: Espaço de Folhas "muito" Hiperbólico

Observação: Não demonstraremos, mas a Pluma Completa 2.10 é o espaço de uma folheação do plano, como é afirmado no livro do Camacho [1]. Esse exemplo foi central para o Teorema de Wazewsky 3.4.3.

Veja que uma consequência direta do Teorema 3.3.3 é que nenhuma variedade unidimensional que não seja simplesmente conexa será espaço de folhas de alguma folheação do $\mathbb{R}^2$. Então, por exemplo, nem o círculo $\mathbb{S}^1$, nem o Laço 2.2.3, nem a Estrela 2.2.4 são espaço de folhas de nenhuma folheação do plano.

3.4 Consequências

Dispostos finalmente com o resultado principal em mãos, segue de imediato um Teorema clássico da categoria topológica de folheações.

Teorema 3.4.1 (Kaplan) *Para qualquer folheação de* $\mathbb{R}^2$*, podemos associar uma função de valores reais* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*

(i) ψ *é contínua e não possui um máximo ou mínimo.*

(ii) ψ é constante nas folhas da folheação.

Demonstração. Veja que, pelo Teorema 3.3.3, o espaço de folhas de $\mathbb{R}^2/\mathscr{F}$ é uma variedade unidimensional simplesmente conexa. Logo, pela Proposição 2.3.2, existe um homeomorfismo local f de $\mathbb{R}^2/\mathscr{F}$ em $\mathbb{R}$. Definiremos uma $\psi = f \circ \pi$, com $\pi : \mathbb{R}^2/\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ sendo a projeção canônica. Veja a figura 3.17. Para a condição (i), veja que ψ é composição de duas funções contínuas, então ψ é contínua e pela Proposição 2.3.3, ψ não possui nem máximo nem mínimo, pois f é homeomorfismo local. Agora, para a condição (ii), veja que, dado um ponto z em $\mathbb{R}^2/\mathscr{F}$, $f(z) = c$ constante, mas $\pi^{-1}(z)$ é uma folha de $\mathbb{R}^2$ e portanto, $\psi \circ \pi^{-1}(z) = c$ constante para todo $z \in \mathbb{R}^2/\mathscr{F}$. Logo ψ é constante nas folhas da folheação $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^2$. ∎

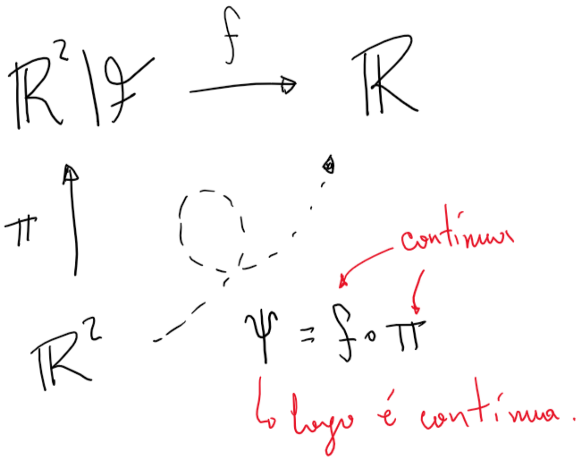

Figura 3.17: Diagrama do Teorema 3.4.1

O Teorema de Kaplan é muito forte pois ele lida apenas com a categoria topológica das folheações. Porém, para os próximos Teoremas vemos que não é tão verdade quando assumimos o caráter diferencial dessas folheações.

Teorema 3.4.2 (Kamke) *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de classe C^r de $\mathbb{R}^2$. Seja Ω um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^2$. Existe uma função $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ψ é de classe C^r e o gradiente de ψ é não nulo em todos os pontos de Ω.

(ii) ψ é constante nas folhas da folheação induzida por $\mathscr{F}$ em Ω.

Teorema 3.4.3 (Wazewsky) *Podemos equipar $\mathbb{R}^2$ com uma folheação de classe C^∞ de tal forma que qualquer função C^r em $\mathbb{R}^2$ que seja constante nas folhas da folheação é a uma função constante.*

A título de informação, os Teoremas de Kamke e Wazewsky são demonstráveis usando o Teorema principal de Haefliger e Reeb 3.3.3 e ferramentas de variedades diferenciáveis. Mas não faremos isso aqui neste trabalho pois nossa abordagem foi puramente topológica.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado no último ano da minha graduação e desempenhou um papel fundamental na minha jornada acadêmica, pois marcou o início dos meus estudos em uma área vasta e desafiadora da matemática, a topologia. O projeto foi motivado pelo meu interesse em explorar as folheações, uma área de pesquisa robusta no Brasil.

Entretanto, enfrentei diversas dificuldades ao longo do ano de pesquisa. A complexidade do tema dificultou o avanço nos resultados, e as instabilidades emocionais e psicológicas durante o período de conclusão da minha formação tornaram o processo ainda mais desafiador. Apesar disso, contei com o suporte cuidadoso do meu orientador, que esteve presente de maneira dedicada durante toda a experiência.

Imerso nessa pesquisa, busquei manter coesão e estabilidade a todo momento, enfrentando as adversidades para garantir a produção do trabalho. A busca por referências essenciais e a necessidade de uma compreensão lógica, indutiva e interpretativa dos teoremas, proposições, corolários e exemplos foram aspectos fundamentais para apresentar o conteúdo de maneira satisfatória.

Esse projeto abre caminho para inúmeros desdobramentos. Em um ano de pesquisa e seminários com meu orientador, não conseguimos abordar completamente as 17 páginas do artigo de André Haefliger e George Reeb [3], que serviu como motivação para o nosso trabalho. Uma extensão natural seria explorar o trabalho sob a perspectiva da teoria diferenciável em variedades, além de considerar que o resultado principal pode contribuir para a teoria de classificação de folheações do plano, um tópico intrigante para a matemática como um todo e que certamente seria valioso para um trabalho que surgiu em um contexto de graduação.

Apesar das dificuldades, este trabalho foi concluído graças aos esforços de muitos colaboradores, especialmente familiares e amigos, que me apoiaram ao longo dessa jornada. Aos leitores, desejo saúde, paz e bênçãos, assim como às suas famílias.

REFERÊNCIAS

[1] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2019.

[2] André Haefliger and Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseign. Math.*, 3:107–126, 1957.

[3] André Haefliger and Georges Reeb. One dimensional non-hausdorff manifolds and foliations of the plane. *arXiv preprint arXiv:2208.11193*, 2022. Translated by Gangotryi Sorcar.

[4] John Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer Science & Business Media, 2010.

[5] James Munkres. Topology. 2nd edition. *Prentice Hall, Upper Saddle River*, 2000.