



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA

**ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO DO CONCRETO:
uma Contribuição no Aspecto Geométrico com a Utilização
de Elipsoides como Inclusões**

Tucuruí – PA
2014

DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA

**ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO DO CONCRETO:
uma Contribuição no Aspecto Geométrico com a Utilização
de Elipsoides como Inclusões**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil, na Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira.

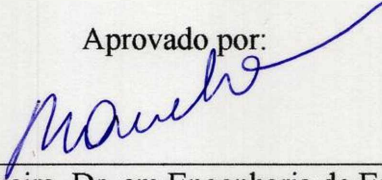
DAVI BARBOSA COSTA DA SILVA

**ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO DO CONCRETO:
uma Contribuição no Aspecto Geométrico com a Utilização
de Elipsoides como Inclusões**

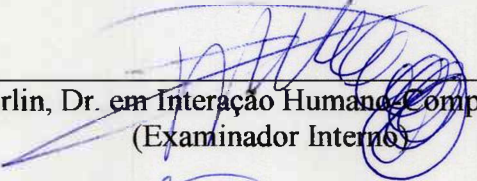
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do grau de Bacharel em Engenharia
Civil, na Faculdade de Engenharia Civil da
Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira.

Tucuruí, 24 de outubro de 2014.


Aprovado por:



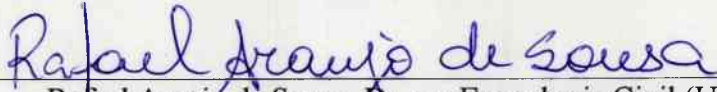
Marcelo Rassy Teixeira, Dr. em Engenharia de Estruturas (UFPA)
(Orientador)



Bruno Merlin, Dr. em Interação Humano-Computador (UFPA)
(Examinador Interno)



Cesar Juan Alarcón Lacstarimay, Dr. em Física (UFPA)
(Examinador Interno)



Rafael Araújo de Sousa, Dr. em Engenharia Civil (UFPA)
(Examinador Interno)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho àqueles que foram responsáveis pelo início, sustento e conclusão desta jornada acadêmica: meus pais, João e Elvira, meus tios, Augusto e Verônica, minhas avós, Maria e Saturnina, e à mãe de meu tio, Esther, avó em meu coração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas oportunidades de crescimento e aprendizado que foram vivenciadas na universidade.

Agradeço aos familiares e amigos pelo apoio e incentivo nas atividades acadêmicas desenvolvidas em Tucuruí e em outras cidades por onde passei.

Agradeço aos amigos do Laboratório de Engenhocas e do LAEM, Laboratório de Análise de Estruturas e Materiais, que foram companheiros valiosos nos projetos de extensão e de pesquisa e que muito contribuíram nas lições aprendidas sobre o exercício da liderança.

Agradeço ao Professor Wellington Fonseca pelas experiências de vida compartilhadas no Laboratório de Engenhocas e por ter sido o primeiro professor a ter concedido uma oportunidade de participação em projetos de extensão na UFPA.

Agradeço aos Professores Luís Antonio Cabral e Paulo César (PC; *in memoriam*): ao primeiro, por ter, ainda no ensino médio, em Araguaína, em projeto de extensão da Universidade Federal do Tocantins (UFT), proporcionado meu primeiro contato com *softwares* de cálculo numérico; ao segundo, por ter sido o primeiro a incentivar uma carreira como pesquisador.

Agradeço a Rodrigo Resende, amigo desde o ensino médio, por ter informado sobre a existência do curso de engenharia civil em Tucuruí.

Agradeço aos amigos Pablo Virgolino e Milleno Ramos pela convivência nos inúmeros trabalhos e atividades durante o curso e pela parceria e companheirismo nas três primeiras edições do Campeonato de Pontes de Macarrão realizado no CAMTUC.

Agradeço ao Professor Marcelo Rassy pela oportunidade de trabalhar com a modelagem computacional em engenharia, sempre estando à disposição nos momentos em que houve dificuldades e sempre se empenhando para que todos os recursos necessários, tanto em termos de conhecimento, quanto na disponibilização de equipamentos e instalações, estivessem presentes. Agradeço ainda por ter compartilhado experiências e pela confiança na execução das minhas atividades no projeto de pesquisa.

Agradeço aos Professores Aarão e Marcelo Rassy pelo apoio nas semanas em que precisei ficar ausente da universidade por motivos de saúde.

Agradeço a Guilherme Augusto Pianezzer pelo auxílio no entendimento e desenvolvimento do algoritmo apresentado neste trabalho.

Agradeço aos demais professores do curso pela prontidão em ensinar e em dirimir as dúvidas no processo de aprendizado.

Agradeço aos colegas de curso, cuja proximidade nestes cinco anos proporcionou uma rica fonte de experiências.

Agradeço aos servidores da UFPA/CAMTUC, em especial ao Wanderley (Kombate) e ao Augusto, que se mostraram solícitos sempre que necessitei.

Agradeço à Eletrobras/Eletronorte pelo convênio com a UFPA e à equipe do Setor de Manutenção Civil da UHE Tucuruí pelo conhecimento compartilhado durante o estágio supervisionado.

Agradeço à AMETA Engenharia, em especial ao Engenheiro Rodrigo Souza, pela experiência proporcionada por meio de estágio na área de transportes. Agradeço também à minha colega de curso Jéssica Magda pelo contato inicial com a empresa.

Agradeço à UFPA/CAMTUC e ao CNPq pelo apoio financeiro nas atividades exercidas na universidade, que tornou possível a minha total dedicação aos estudos.

RESUMO

A importância econômica e social de grandes empreendimentos, como as hidrelétricas, justifica a adoção do maior número possível de medidas de segurança. Em se tratando de estruturas, particularmente as de concreto utilizadas nas barragens, verificam-se a utilização de instrumentos de precisão para se acompanhar o comportamento do maciço e as inspeções visuais. Estas duas abordagens se complementam e são extremamente úteis na adoção de parâmetros que orientem as medidas de manutenção. Com o intuito de se acrescentar e otimizar essas técnicas e métodos, podem ser adotados modelos computacionais que permitam a previsão do comportamento das estruturas de concreto. Entre as abordagens possíveis, menciona-se a análise multiescala, na qual se busca relacionar parâmetros da micro à meso e macroestrutura. Observa-se a existência de algoritmos que procuram viabilizar estas melhorias, gerando, portanto, possibilidade de inovação. Com a intenção de contribuir na área, no presente trabalho procurou-se aprimorar e desenvolver uma das ferramentas adotadas neste ramo. Utilizando as noções de elemento de volume representativo (RVE, sigla em inglês) e focando nos aspectos geométricos da questão, elaborou-se uma sequência de instruções que permitem a geração aleatória de inclusões elipsoidais, representando os agregados graúdos do concreto envoltos pela zona de transição, aplicando ajustes geométricos às quádras que estejam localizadas nas proximidades das faces do RVE, fundamentando-se no método *take-and-place* e em trabalhos relacionados. O resultado foi um algoritmo que fornece uma estrutura de dados organizada de maneira a servir como parâmetro de entrada em aplicações próprias para análise estrutural multiescala.

Palavras-chave: análise multiescala, álgebra linear, concreto, algoritmo, elemento de volume representativo (RVE).

ABSTRACT

The social and economic importance of great ventures, as the hydroelectrics, justifies the adoption of the largest possible number of security measures. In the case of structures, particularly in dams made of concrete, it verifies the use of instruments of precision to keep up with the behavior of the massif and the visual inspections. These two approaches complement each other and are extremely useful in the adoption of parameters that guide the maintenance measures. In order to add and to optimize these techniques and methods, it may be adopted computational models that allow the forecast of the concrete structures behavior. Between the possible approaches, it mentions the multiscale analysis, in which one searches to relate parameters of the micro to the meso and the macrostructure. It observes the existence of algorithms that search to enable these improvements, generating, therefore, possibility of innovation. In order to contribute in the area, in this paper it searches to improve and to develop one of the tools adopted in this branch. By the use of the notions of representative volume element (RVE) and focusing on the geometric aspects of the matter, it was elaborated a sequence of instructions that allows the random generation of ellipsoidal inclusions, representing the coarse aggregates of the concrete surrounded by the interfacial transition zone, applying geometrical adjusts to the quadrics that are located in the proximities of the faces of the RVE, basing it on the take-and-place method and on related researches. The result was an algorithm that provides an organized data structure so that it can be used as parameter of input in proper applications to multiscale analysis.

Key-words: multiscale analysis, linear algebra, concrete, algorithm, representative volume element (RVE).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Localização das duas maiores usinas hidrelétricas do Brasil: (a) Tucuruí e (b) Itaipu. Fonte: TEIXEIRA (2012).	15
Figura 2 – Exemplo de distribuição dos agregados em duas dimensões. Fonte: WANG <i>et al.</i> (1998).	17
Figura 3 – Agregados gerados usando harmônicos esféricos. Fonte: GARBOCZI <i>et al.</i> (2006).	18
Figura 4 – Elemento de volume representativo com fração volumétrica de 60%. Fonte: LEITE <i>et al.</i> (2003).	19
Figura 5 – Ilustração da heurística no algoritmo de LEITE <i>et al.</i> (2003). Fonte: LEITE <i>et al.</i> (2007).	19
Figura 6 – Exemplo de geometria com 25% de fração. Fonte: CABALLERO <i>et al.</i> (2005)...	20
Figura 7 – Modelo em mesoescala com o uso de elipsoides. Fonte: HÄFNER <i>et al.</i> (2005)..	20
Figura 8 – Distribuição dos agregados no modelo nos formatos circular e poligonal. Fonte: AYDIN <i>et al.</i> (2007).....	21
Figura 9 – Exemplo de distribuição de agregados em duas dimensões para uma área de 300 x 300 mm ² . Fonte: ZHOU e HAO (2009).	21
Figura 10 – Variação do formato do agregado no elemento de volume representativo. Fonte: KIM e AL-RUB (2010).	22
Figura 11 – Modelo tridimensional para análise em mesoescala. Fonte: KIM e AL-RUB (2010).	22
Figura 12 – Aspecto global, aproximação com identificação das fases e destaque da zona de transição. Fonte: SONG e LU (2012).	23
Figura 13 – Etapas da análise multiescala a ser realizada. Fonte: acervo pessoal.	24
Figura 14 – Diagrama Nassi-Shneidermann. Fonte: acervo pessoal.	25
Figura 15 – Esquema ilustrativo do ensaio para determinação da curva granulométrica e das relações com as Equações (2) e (3). Os valores obtidos em laboratório servirão como referência para a determinação dos volumes reservados para cada seção. Os índices i e $i+1$ serão atualizados a cada iteração. Fonte: acervo pessoal.	29
Figura 16 – Transformações lineares aplicadas a um elipsoide. (a) Quádrica com centro na origem. (b) Rotação em torno do eixo z. (c) Rotação em torno do eixo x. (d) Rotação em torno do eixo y. (e) Translação com os valores das coordenadas do centro. Fonte: acervo pessoal.	33
Figura 17 – Diferenças entre os elipsoides definidos analítica e numericamente. Aspecto do elipsoide: (a) calculado analiticamente; (b) calculado numericamente, possuindo os ângulos ϕ	

um passo igual a $\pi/40$; (c) calculado numericamente, com um passo igual a $\pi/10$. Fonte: acervo pessoal..... 34

Figura 18 – Aplicação de mapeamento de modo que uma das quádricas fique com o centro na origem e a outra mantenha a mesma posição em relação à primeira. O elipsoide recém-gerado, na presente aplicação, é aquele que está com o centro na origem. Fonte: acervo pessoal. 34

Figura 19 – Ilustração da proximidade entre dois elipsoides. (a) Os dois estão separados; logo, a Inequação (21) não será verdadeira para nenhum ponto. (b) Estão se tocando superficialmente; não será considerada colisão neste caso, calculando-se a inequação. (c) Existência de colisão; para pelo menos um ponto do elipsoide já existente a inequação será verdadeira. Fonte: acervo pessoal..... 35

Figura 20 – Colisão entre esferas. (a) As duas esferas de raio igual ao maior semieixo dos elipsoides estão separadas; logo, certamente os elipsoides estarão separados. (b) As duas esferas se sobrepõem; então existe a possibilidade de que os elipsoides estejam colidindo. Fonte: PIANEZZER (2012)..... 35

Figura 21 – Exemplo de um elipsoide que intercepta uma das faces de um cubo. (a) Em destaque, estão assinalados os pontos que definem os vértices de um segmento de plano; neste caso, os quatro estão no interior do cubo. (b) Os quatro vértices formam quatro retas, em destaque; neste caso, os vértices e retas estão fora do cubo. (c) Quando um segmento de plano intercepta uma das faces, existem pontos que ficam no interior e no exterior do cubo; em destaque, estão as localizações aproximadas da interseção entre a face e os segmentos de reta, como exemplo. Fonte: acervo pessoal..... 36

Figura 22 – Determinação dos pontos de interseção entre segmentos de planos. (a) Dois planos não-paralelos. (b) Reta de interseção entre os dois planos. (c) Pontos de interseção entre a reta de interseção e os segmentos de reta formados pelos vértices dos segmentos de planos; no exemplo, apenas os pontos 4 e 5 atendem aos três critérios para serem considerados interseção entre os segmentos de plano. Fonte: acervo pessoal. 37

Figura 23 – Determinação de estado dos pontos. O ponto 1 está fora do segmento, pois existe um ponto de interseção (ponto I) no segmento de reta que une o ponto ao centro geométrico do segmento de plano. Os pontos 2 e 3 estão no interior, porque não há ponto de interseção no segmento de reta que os unem ao centroide (para o ponto 3, observar que a interseção é o próprio ponto). Fonte: acervo pessoal. 38

Figura 24 – Esquema representativo da transformação de um segmento de plano no espaço para um segmento no plano xy . Fonte: acervo pessoal..... 39

Figura 25 – Aproximação do elipsoide usando um poliedro para o cálculo de volume por camadas. (a) Indicação da camada utilizada como exemplo. (b) Pontos dos dois níveis que formam a camada. (c) Polígonos formados pelos pontos em cada nível; correspondem às áreas S_1 e S_2 . (d) Sólido cujo volume será calculado. Fonte: acervo pessoal. 40

Figura 26 – Representação esquemática com ampliação das dimensões usuais da zona de transição do agregado. Fonte: acervo pessoal. 41

Figura 27 – Exemplo bidimensional sobre a obtenção da matriz de interseções. Em destaque, o caso das elipses A e C. Para três dimensões, verificam-se as interseções pelo método iterativo de detecção entre segmentos de plano. Fonte: acervo pessoal..... 41

Figura 28 – Exemplo de ajuste devido a interseção entre dois elipsoides (passo do ângulo das coordenadas esféricas: $\pi/10$). Profundidade de interseção intencionalmente ampliada para melhor visualização. (a) Elipsoides colidindo. (b) Detecção das interseções entre os segmentos de plano que formam os elipsoides. (c) Interseções entre os segmentos de plano. (d) Elipsoides após o ajuste geométrico. Fonte: acervo pessoal.....	42
Figura 29 – Exemplo de resumo dos resultados obtidos após o processamento. Fonte: acervo pessoal.	43
Figura 30 – Média de tentativas de posicionamento dos agregados no RVE em função da fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	46
Figura 31 – RVE com 30% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	47
Figura 32 – RVE com 35% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	48
Figura 33 – RVE com 40% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	49
Figura 34 – RVE com 45% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	50
Figura 35 – RVE com 50% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.	51
Figura 36 – Problema de determinação de volume. Fonte: acervo pessoal.....	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Granulometria adotada na geração dos RVEs. Fonte: MOFTAH e WRIGGERS (2006).	45
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	três dimensões
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
GB	<i>gigabyte</i>
GHz	gigahertz
m	metro
mm	milímetro
MW	megawatt
p.	página
RAM	<i>random-access memory</i> (memória de acesso aleatório)
RVE	<i>representative volume element</i> (elemento de volume representativo)
UHE	Usina Hidrelétrica
US\$	dólares americanos

LISTA DE SÍMBOLOS

α	alfa; ângulo de rotação em torno do eixo x; coeficiente angular
h	altura; cota
S, S_i	área
β	beta; ângulo de rotação em torno do eixo y
A, B, \dots, J	coeficientes do elipsoide
d	componente de vetor normal a um plano
x_c	coordenada do centro do elipsoide no eixo x
y_c	coordenada do centro do elipsoide no eixo y
z_c	coordenada do centro do elipsoide no eixo z
C_x	coordenada x do centroide
C_y	coordenada y do centroide
x	coordenada, no eixo x, de um ponto
y	coordenada, no eixo y, de um ponto
z	coordenada, no eixo z, de um ponto
d_i	diâmetro da peneira de maior abertura na seção
d_{i+1}	diâmetro da peneira de menor abertura na seção
L	dimensão da aresta do RVE
$\text{dist}(A,B)$	distância do ponto A ao ponto B
k_i	elemento da matriz incógnita de coeficientes do elipsoide
ϕ_i	fi; ângulos utilizados em coordenadas esféricas
T	indicador de matriz transposta
\int	integral de Riemann
T	matriz de transformação linear
Q	matriz discriminante do elipsoide
K	matriz incógnita de coeficientes do elipsoide
r_i	número aleatório

N_P	número de peneiras
n	número de pontos ou elementos
N_S	número de seções
\vee	operador booliano de disjunção (ou)
t	parâmetro em equações de reta
s	parâmetro em equações de reta
R_i	percentual de agregados retido na peneira de maior abertura na seção
R_{i+1}	percentual de agregados retido na peneira de menor abertura na seção
$R_{m\acute{a}x}$	percentual retido na peneira de máxima abertura da série
$R_{m\acute{i}n}$	percentual retido na peneira de mínima abertura da série
π	pi (constante)
p	reta
r	reta
a	semieixo maior; componente de vetor normal a um plano
b	semieixo menor; componente de vetor normal a um plano
c	semieixo menor; componente de vetor normal a um plano
Σ	somatório
T	taxa de agregados (fração volumétrica)
θ	teta; ângulo de rotação em torno do eixo z; ângulo utilizado em coordenada polar
B_i	variável booliana
dz	variável infinitesimal
\mathbf{x}	vetor-coluna contendo as coordenadas cartesianas ou homogêneas
V	volume
$V_{S,RESTANTE}$	volume disponível na seção
V_{RVE}	volume do RVE
dV	volume infinitesimal
V_S	volume reservado à seção

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	17
3	ALGORITMO DE GERAÇÃO E POSICIONAMENTO DAS INCLUSÕES ELIPSOIDAIIS.....	24
3.1	DADOS DE ENTRADA	26
3.1.1	Agregados graúdos.....	26
3.1.2	Zona interfacial de transição	27
3.1.3	Dimensões do RVE.....	27
3.2	PROCESSAMENTO	28
3.2.1	Geração aleatória.....	29
3.2.2	Posicionamento do agregado.....	30
3.2.3	Ajuste geométrico nas faces.....	35
3.2.4	Verificação dos volumes de acordo com a granulometria	39
3.2.5	Zonas de transição.....	40
3.3	DADOS DE SAÍDA	42
3.3.1	Resumo dos dados de entrada	43
3.3.2	Resumo sobre o processamento	43
3.3.3	Resumo e detalhes sobre os agregados	44
3.3.4	Ilustração do posicionamento.....	44
4	RESULTADOS.....	45
4.1	ELEMENTO COM 30% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	47
4.2	ELEMENTO COM 35% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	48
4.3	ELEMENTO COM 40% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	49
4.4	ELEMENTO COM 45% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	50
4.5	ELEMENTO COM 50% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	51
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA MATRIZ DISCRIMINANTE DE UM ELIPSOIDE A PARTIR DA SUA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA.....	57
	APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO (26), PARA CÁLCULO APROXIMADO DE VOLUME, CONSIDERANDO CASOS DE VARIAÇÃO LINEAR.....	59

1 INTRODUÇÃO

As usinas hidrelétricas desempenham uma importante função na geração de energia no Brasil. Cerca de 42% da matriz energética nacional corresponde ao aproveitamento do potencial hidráulico, sendo 90% de toda a eletricidade gerada por esta fonte (ANEEL, 2002). Entre os maiores empreendimentos (Figura 1), mencionam-se as usinas hidrelétricas de Itaipu, com potência instalada de 14 000 MW, e de Tucuruí, com potência instalada de 8 340 MW, esta última a maior levando em consideração apenas o território brasileiro (ITAIPU, 2014).

Figura 1 – Localização das duas maiores usinas hidrelétricas do Brasil: (a) Tucuruí e (b) Itaipu. Fonte: TEIXEIRA (2012).



Estima-se que o custo total da usina hidrelétrica de Itaipu tenha sido US\$ 11,9 bilhões, em dezembro de 2012, e que a primeira fase da usina hidrelétrica (UHE) Tucuruí, em valores de 1986, US\$ 7,5 bilhões. O volume de concreto utilizado nos empreendimentos é da ordem 10^6 m³ (ITAIPU, 2014). Além dos investimentos nas instalações, observa-se que mais de 70% da potência gerada por aproveitamento hidráulico origina-se das usinas com capacidade acima de 1 000 MW (ANEEL, 2002). A vida de milhões de pessoas também está vinculada ao bom funcionamento dessas instalações, devido tanto à necessidade da utilização da energia elétrica, quanto à segurança dos moradores à jusante.

Para garantir o correto funcionamento dos sistemas na geração de energia,

particularmente das estruturas de concreto utilizadas, realiza-se a auscultação e instrumentação, acompanhando o seu comportamento durante as fases de construção, enchimento de reservatório e operação. Os procedimentos adotados permitem a avaliação contínua de grandezas que, na maioria das vezes, são inacessíveis aos profissionais. Ao mesmo tempo, as inspeções realizadas por meio de visitas e observações mostram-se importantes para se constatar, por meio do julgamento de forma técnica, anomalias que os aparelhos não detectam. Nota-se que a instrumentação e a inspeção não são mutuamente exclusivas, mas se complementam. A fim de disponibilizar novos métodos para o estudo, acompanhamento, predição de comportamento e desenvolvimento de materiais, grande atenção deve ser dada à modelagem computacional, pois viabiliza a análise, resulta na otimização de recursos e auxilia na determinação de prioridades em se tratando da manutenção.

Observam-se os avanços relacionados ao assunto na modelagem multiescala¹, enfatizando neste trabalho a importância do modelo em que se considera a heterogeneidade do concreto, considerando-o como material bifásico (TEIXEIRA, 2012). Leva-se em consideração também as limitações da resistência do concreto impostas pela zona de transição² na interface argamassa-agregado, considerada o “elo mais fraco da corrente” no material (MEHTA; MONTEIRO, 2006). Também apresentam importante relevância neste trabalho as contribuições trazidas pelo desenvolvimento e aprimoramento de modelos estocásticos na geração da geometria do modelo, referindo-se à distribuição dos agregados graúdos³: primeiro, pelo algoritmo que implementa o método *take-and-place*⁴ com aproximações esféricas (MOFTAH; WRIGGERS, 2006) e, também, pelo que utiliza este método com formas elípticas (PIANEZZER, 2012).

Propõe-se neste trabalho um método com o qual se obtém uma geometria por meio de processo estocástico (*take-and-place*) utilizando, como aproximação da forma dos agregados, superfícies elipsoidais, eliminando a limitação de que os agregados devam estar contidos totalmente no elemento estudado, por meio de ajuste geométrico, e definindo numericamente a sua zona de transição. Os resultados do processo são armazenados de maneira a servirem como um dos parâmetros de entrada na contribuição de TEIXEIRA (2012).

¹ SOUTIS e BEAUMONT (2005) *apud* TEIXEIRA (2012) definem modelagem multiescala como o estudo de materiais atravessando todas as escalas de comprimento a partir dos átomos, até estruturas de engenharia com tamanhos representativos.

² Cf. seção 3.1.2, pág. 27.

³ Cf. seção 3.1.1, pág. 26.

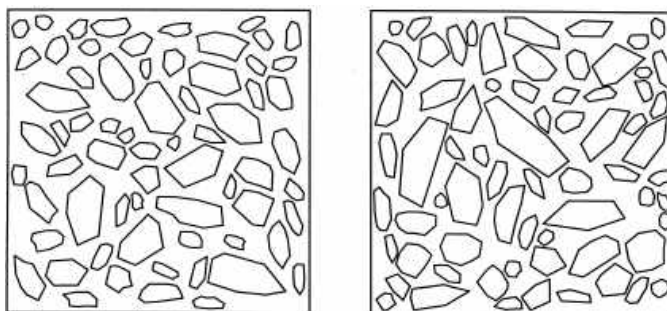
⁴ Método para geração aleatória de partículas em modelos com baixas frações de volume de partículas. Possui por princípio básico a obtenção de partículas de agregado com características informadas pelo usuário (a partir de uma curva granulométrica, por exemplo) e o seu posicionamento de maneira aleatória em um plano ou espaço (MOFTAH; WRIGGERS, 2006).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Existem na literatura diversos estudos ligados à análise multiescala, com variados objetivos. A seguir estão apresentados alguns dentre os muitos trabalhos existentes sobre a modelagem computacional do concreto, enfatizando-se os aspectos ligados à geometria adotada pelos autores com a finalidade de se observar a maneira como o assunto vem sendo abordado nas últimas décadas. De maneira geral, para efeito de comparação, destaca-se que na presente contribuição procurou-se propor um modelo tridimensional incluindo-se a zona de transição, considerando os agregados como elipsoides, formato que se aproxima ao seixo rolado, efetuando-se ajustes geométricos quando os agregados se encontrarem parcialmente no exterior do modelo da amostra do concreto. A metodologia empregada no algoritmo desenvolvido permite ainda a inserção de parâmetros mencionados por outros autores, como, por exemplo, a distância mínima entre agregados e a consideração de rugosidade; a ausência destes parâmetros, portanto, foi compensada com atenção e cuidados que garantem a sua compatibilidade em futuras melhorias.

WANG *et al.* (1998) apresentaram aspectos relativos à geometria para o estudo do concreto na escala meso. Em sua abordagem, os autores consideraram os agregados em duas dimensões como sendo britas, realizando, portanto, uma aproximação por meio de polígonos (Figura 2). A obtenção dos vértices dos polígonos podia ser obtida tanto em função de um raio e um ângulo entre dois vértices consecutivos de maneira aleatória, quanto em função de ângulos aleatórios entre as arestas, possuindo cada processo suas particularidades. Procurou-se incluir no modelo considerações sobre a alongação das inclusões⁵. A geração e posicionamento obedecia à curva granulométrica⁶ especificada pelo usuário e ao método *take-and-place*, observando a influência de uma distância mínima entre os agregados. Não foi considerada a zona de transição.

Figura 2 – Exemplo de distribuição dos agregados em duas dimensões. Fonte: WANG *et al.* (1998).

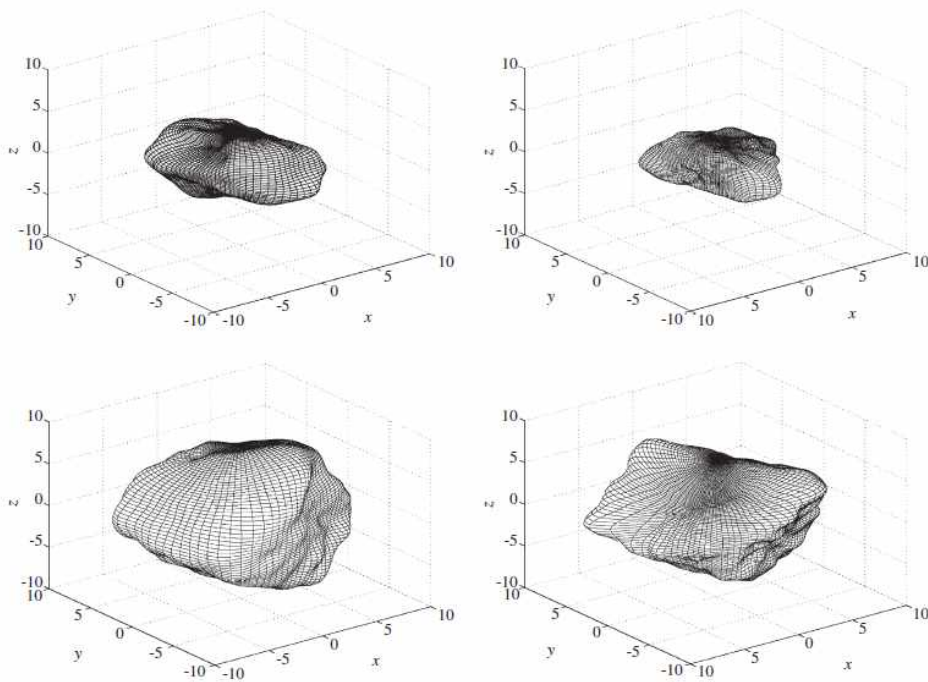


⁵ No presente trabalho, o termo foi adotado como sinônimo dos agregados presentes no elemento de volume representativo do concreto (MOFTAH; WRIGGERS, 2006).

⁶ Distribuição do tamanho de partículas; propriedade obtida em laboratório por meio da utilização de peneiras com aberturas variadas. Pode ser expressa em massa ou em volume (MEHTA; MONTEIRO, 2006).

GARBOCZI (2002) apresentou um procedimento matemático que possibilita a descrição das características de distribuição e do posicionamento dos agregados do concreto por meio da utilização de tomografia de raio-X, fornecendo uma saída com as propriedades da forma geométrica escolhida (um elipsoide, por exemplo, descrevendo os comprimentos dos semieixos, posição do centro e um vetor tridimensional que define a orientação; na ocasião, utilizaram-se harmônicos esféricos). Em seus estudos, GARBOCZI (2002) e, posteriormente, GRIGORIU *et al.* (2006) forneceram uma forma de se representar as inclusões usando harmônicos esféricos (Figura 3). A aplicação na área de materiais seria a avaliação de métodos do preparo do concreto e o fornecimento de informações sobre a distribuição dos agregados como entrada em *softwares* de análise computacional (desde que o concreto seja considerado com pelo menos duas fases).

Figura 3 – Agregados gerados usando harmônicos esféricos. Fonte: GARBOCZI *et al.* (2006).



LEITE *et al.* (2003) trabalharam em um algoritmo capaz de simular os processos de falha do concreto usando modelos na mesoescala⁷. Para a geração da geometria tridimensional, foi considerado o método *take-and-place* com a utilização de heurística para evitar que os agregados se sobrepusessem. Inicialmente eram gerados todos os agregados, assumindo-se um formato elipsoidal, tomando como referência o volume nas seções entre as

⁷ De acordo com TEIXEIRA (2012), escala de observação cuja ordem de grandeza está em torno de 10^{-3} m.

peneiras; em seguida, posicionavam-se os agregados, dos maiores para os menores, no espaço delimitado (Figura 4): em caso de sobreposição com os elipsoides anteriores, efetuavam-se modificações no agregado recém-posicionado (rotações e translações do centro), estabelecendo, assim, a heurística no processo (Figura 5). Os agregados deveriam estar sempre totalmente contidos no interior das dimensões que delimitavam a amostra. No modelo foi inserida a zona interfacial de transição.

Figura 4 – Elemento de volume representativo com fração volumétrica de 60%. Fonte: LEITE *et al.* (2003).

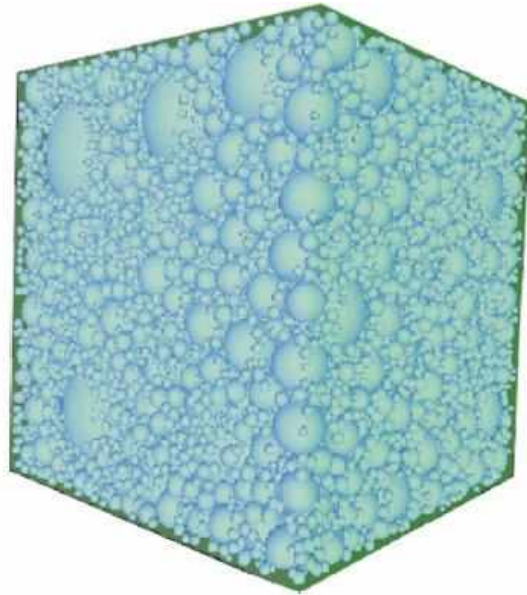
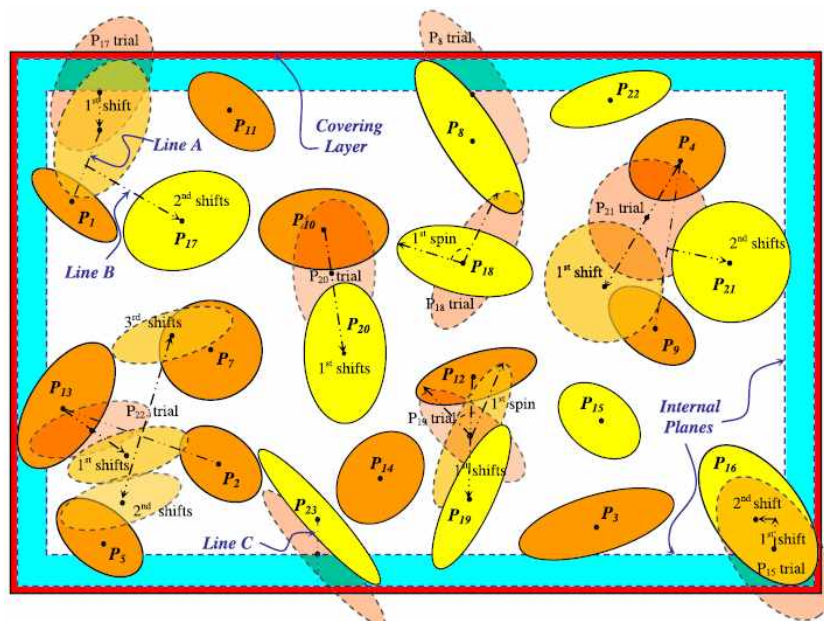
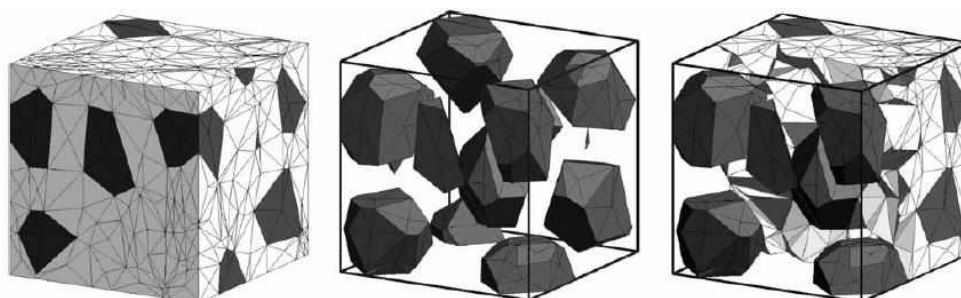


Figura 5 – Ilustração da heurística no algoritmo de LEITE *et al.* (2003). Fonte: LEITE *et al.* (2007).



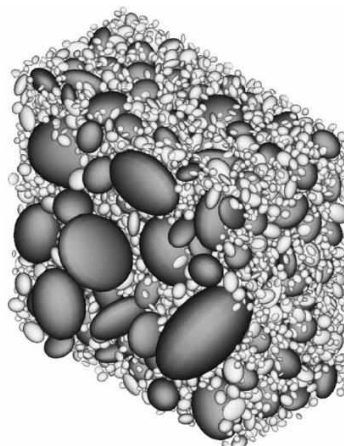
CABALLERO *et al.* (2005) trabalharam em um modelo computacional em mesoescala para análise do concreto submetido a tensão uniaxial. Para a definição da geometria do elemento de volume representativo, adotou-se um formato poligonal em três dimensões para os agregados. O algoritmo desenvolvido permitia a realização de ajustes geométricos das inclusões que estivessem posicionadas próximo às bordas (Figura 6). Considerou-se o concreto como material bifásico. Utilizou-se o método de elementos finitos para a análise numérica.

Figura 6 – Exemplo de geometria com 25% de fração. Fonte: CABALLERO *et al.* (2005).



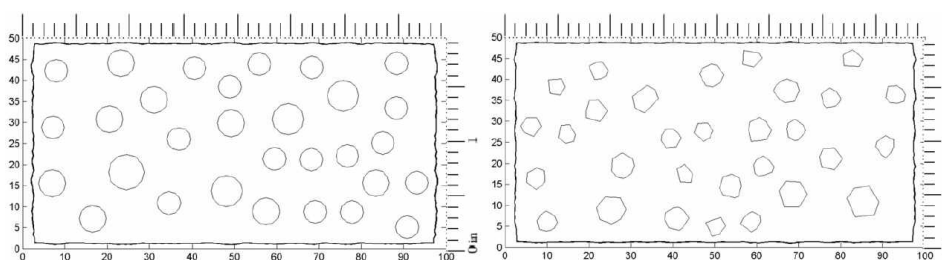
HÄFNER *et al.* (2005) obtiveram propriedades elásticas efetivas do concreto utilizando um modelo bidimensional em mesoescala. No entanto, os autores apresentaram também um algoritmo capaz de gerar geometrias tanto em duas quanto em três dimensões, contribuindo com um método de detecção de colisão entre os agregados, independentemente de seus formatos. Por meio de um *take-and-place* modificado, as inclusões eram geradas e, em seguida, posicionadas, sendo as características geométricas registradas em uma estrutura de dados numérica. De acordo com os autores, em relação ao procedimento de geração e posicionamento original, houve uma redução de mais de 90% no tempo de processamento (Figura 7).

Figura 7 – Modelo em mesoescala com o uso de elipsoides. Fonte: HÄFNER *et al.* (2005).



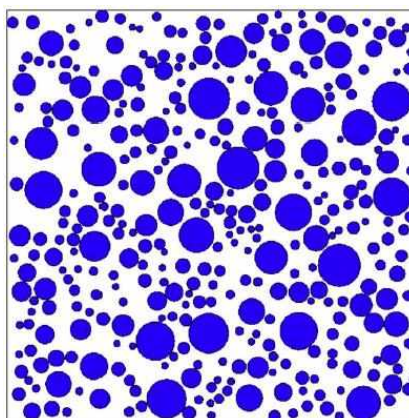
AYDIN *et al.* (2007) estudaram a deformação lenta e a retração em materiais cimentícios por meio de modelos na escala meso⁸. A geometria para as análises foi obtida por meio do *take-and-place* em duas dimensões, utilizando agregados com formato circular e formato poligonal (Figura 8). Os autores adotaram critérios para distância mínima entre os agregados e entre os agregados e as bordas da amostra.

Figura 8 – Distribuição dos agregados no modelo nos formatos circular e poligonal. Fonte: AYDIN *et al.* (2007).



ZHOU e HAO (2009) avaliaram o comportamento de lajes de concreto quando sujeitas a cargas de impacto devidas a explosão por meio de um modelo em mesoescala. Para tanto, realizaram a geração de um elemento representativo obedecendo ao caráter aleatório da distribuição dos agregados graúdos. Devido a limitações de *hardware*, desenvolveu-se apenas um modelo bidimensional (Figura 9). A forma dos agregados foi considerada como circular a fim de se aproximar do formato do seixo. Quanto à zona de transição, apesar de sua influência nas propriedades mecânicas do concreto, a dificuldade em se obter parâmetros que definam suas características no modelo e o aumento substancial de tempo e esforço computacional conduziu à hipótese de que o concreto seria um material bifásico, com perfeita aderência entre a argamassa e os agregados graúdos.

Figura 9 – Exemplo de distribuição de agregados em duas dimensões para uma área de 300 x 300 mm². Fonte: ZHOU e HAO (2009).



⁸ O mesmo que mesoescala. Cf. nota de rodapé 7, pág. 18.

KIM e AL-RUB (2010) analisaram computacionalmente a resposta plástica e danosa de compósitos cimentícios na escala meso. Em relação à geometria, considerou-se o concreto como material trifásico em duas e em três dimensões. A granulometria dos agregados foi definida manualmente, sendo feita uma classificação em três diferentes tamanhos com diâmetros definidos. Foram estudadas, em duas dimensões, as influências de diversos fatores no comportamento do material, variando-se, entre outros, o formato do agregado (foram testados agregados circulares, hexagonais, pentagonais, tetragonais e polígonos de formas arbitrárias) (Figura 10), a distribuição dos agregados (gerações aleatórias dos agregados), a fração de volume de agregados, a espessura da zona de transição. Para o modelo tridimensional, adotaram-se inclusões esféricas (Figura 11) a fim de se comparar os resultados com os modelos em duas dimensões.

Figura 10 – Variação do formato do agregado no elemento de volume representativo. Fonte: KIM e AL-RUB (2010).

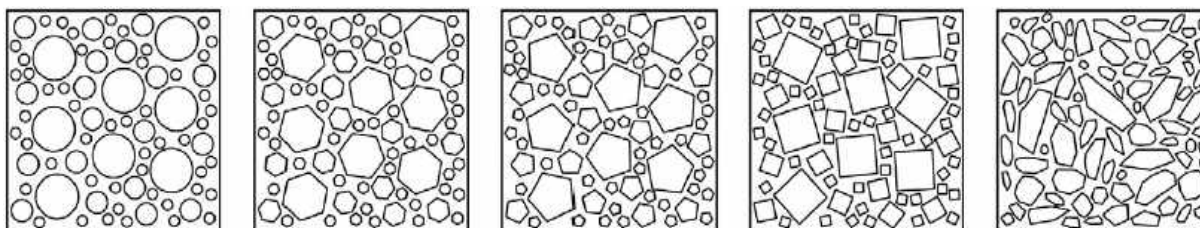
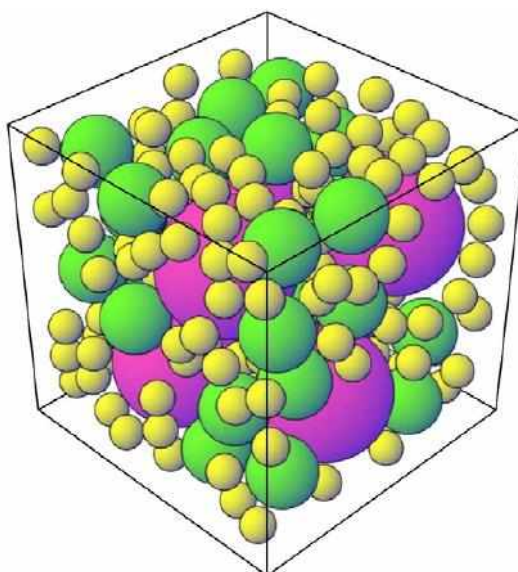


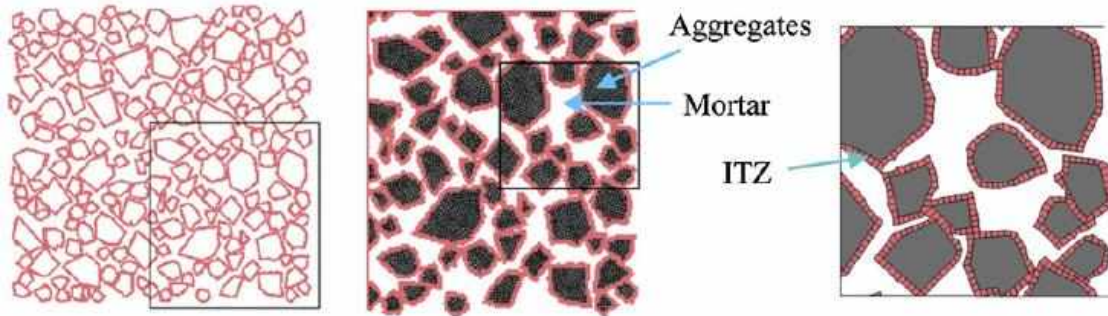
Figura 11 – Modelo tridimensional para análise em mesoescala. Fonte: KIM e AL-RUB (2010).



SONG e LU (2012) desenvolveram um modelo computacional para o estudo de estruturas submetidas à compressão com deformação a taxas elevadas, em escala

mesoscópica. Como representação dos agregados, adotaram formas poligonais aleatórias, incluindo zonas de transição. No entanto, em se tratando da geometria, o estudo ficou limitado à análise em duas dimensões devido à necessidade de esforço computacional elevado para uma amostra tridimensional.

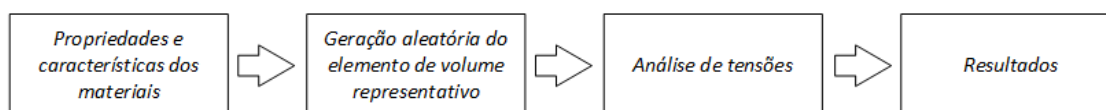
Figura 12 – Aspecto global, aproximação com identificação das fases e destaque da zona de transição.
Fonte: SONG e LU (2012).



3 ALGORITMO DE GERAÇÃO E POSICIONAMENTO DAS INCLUSÕES ELIPSOIDAIS

Na presente abordagem dada ao problema de análise multiescala, realizou-se o desenvolvimento de um algoritmo por meio do qual são gerados aleatoriamente os agregados contidos em uma matriz de argamassa para análise de tensões (Figura 13). Observando o processo como um sistema, a etapa de definição da geometria possui como entradas as propriedades dos agregados gráudos (curva granulométrica, massa específica e volume), as dimensões da zona de transição e a dimensão do elemento de volume representativo (*representative volume element*, RVE⁹). Por meio de propriedades e operações da álgebra linear e do cálculo numérico, realizam-se os procedimentos necessários partindo das contribuições de WRIGGERS e MOFTAH (2006), TEIXEIRA (2012) e PIANEZZER (2012). Ao término do processo, são obtidos os dados geométricos necessários para a etapa posterior da pesquisa, que consistirá na análise de tensões, conforme os estudos de TEIXEIRA (2012).

Figura 13 – Etapas da análise multiescala a ser realizada. Fonte: acervo pessoal.



A geração do RVE é realizada de acordo com os dados informados pelo usuário. As informações necessárias são as dimensões do RVE, o percentual em volume dos agregados gráudos e a espessura da zona de transição.

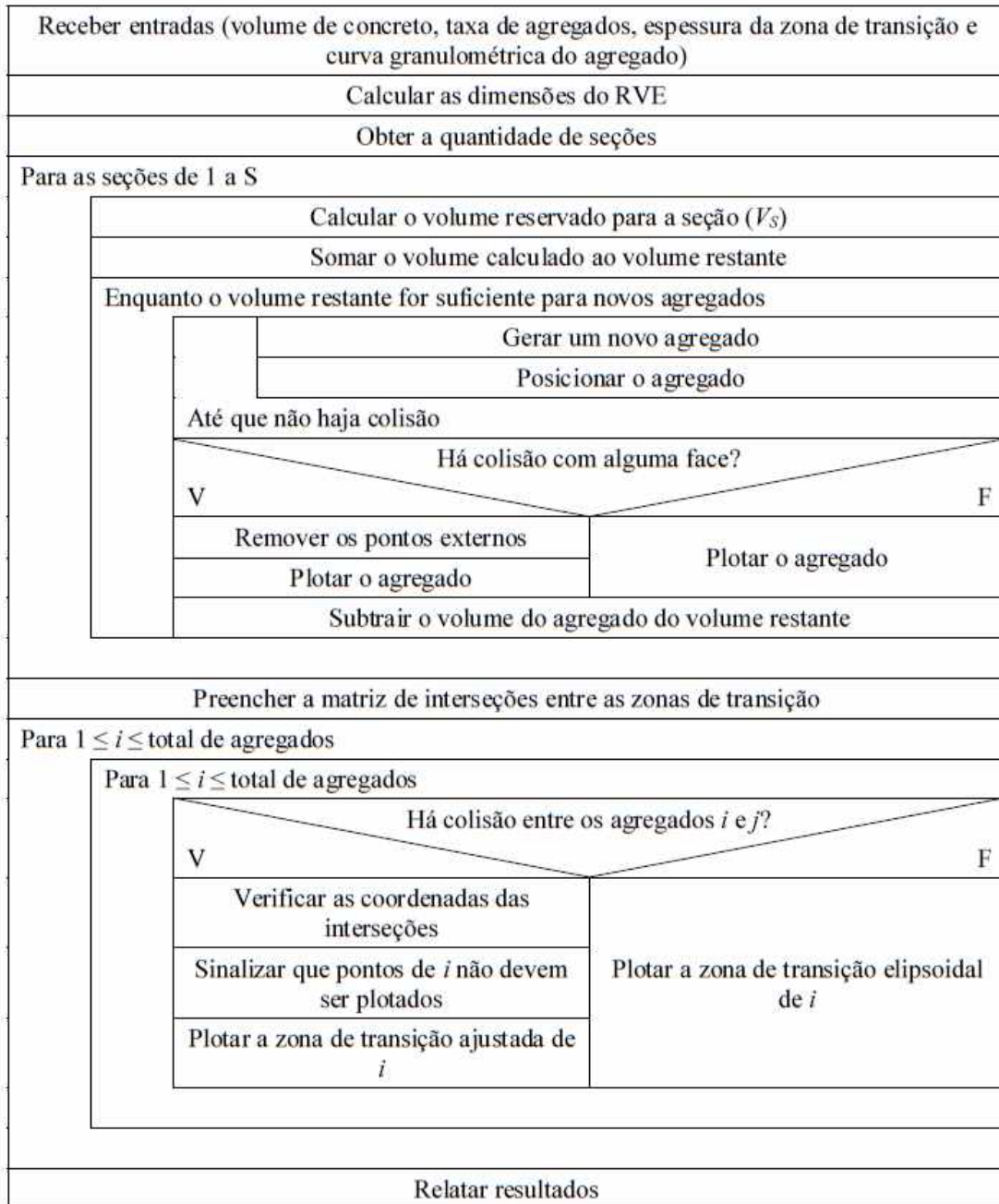
O processamento é realizado considerando os agregados como sendo elipsoides, sendo a referência para translação o centro da superfície quádrica e a referência para orientação os eixos triortogonais. A fim de se possibilitar o tratamento numérico, a superfície consiste em uma malha formada por segmentos de planos, que por sua vez são delimitados pelas coordenadas de quatro pontos. Quando ocorre o posicionamento com interseção entre a quádrica e uma das faces, realizam-se cálculos para o ajuste dos pontos que excedem as dimensões do RVE, sendo adotadas nesta etapa sucessivas operações vetoriais. As zonas de transição são obtidas por procedimento similar.

Como saída, tem-se uma matriz com as informações referentes a cada agregado e também matrizes com as coordenadas dos pontos que definem os segmentos de plano. Estas

⁹ Cf. seção 3.1.3, pág. 27.

informações servirão como entrada na análise de tensões por meio da abordagem multiescala. O diagrama Nassi-Shneidermann para o algoritmo está exibido na Figura 14.

Figura 14 – Diagrama Nassi-Shneidermann. Fonte: acervo pessoal.



3.1 DADOS DE ENTRADA

Segundo MEHTA e MONTEIRO (2006), o concreto é um dos materiais mais utilizados em construções devido a três grandes fatores. Primeiro, possui excelente resistência à água, o que o qualifica para a utilização em grandes construções como barragens e pontes. Segundo, suas características permitem que se obtenham as mais diversas formas geométricas, adaptando-se bem às condicionantes de projeto. Por último, argumenta-se o custo em relação a outros materiais estruturais.

O concreto é um material heterogêneo, variando o número de componentes conforme a escala em que se estuda. De acordo com TEIXEIRA (2012), na sua mesoestrutura (ordem de 10^{-3} m), é composto por uma pasta de cimento endurecida e partículas de agregado graúdo. Conforme MEHTA e MONTEIRO (2006), quando se considera a microestrutura do material, observa-se a marcante influência da zona interfacial de transição.

Portanto, a fim de se possibilitar o estudo do material na mesoescala, consideraram-se como dados de entrada as características do agregado graúdo, a dimensão da zona de transição e o volume do RVE.

3.1.1 Agregados graúdos

Os agregados, tanto graúdo, quanto miúdo, compõem de 60 a 80% do concreto. Os estudos na área de materiais demonstram que os agregados graúdos não são apenas um preenchimento inerte, mas possuem propriedades de grande importância na mistura. Entre essas características, mencionam-se a porosidade, granulometria, absorção, forma, textura da superfície, resistência ao esmagamento, módulo de elasticidade e tipos de substâncias deletérias (MEHTA; MONTEIRO, 2006; SCANDIUZZI; ANDRIOLO, 1986). No presente modelo computacional, procurou-se adequar as características para a sua inserção nos cálculos, conforme as propostas de MOFTAH e WRIGGERS (2006), TEIXEIRA (2012) e PIANEZZER (2012).

Logo, para a etapa de geração e distribuição aleatória da geometria dos agregados, leva-se em consideração a granulometria, obtida por meio de procedimentos em laboratório, a forma e a textura da superfície, tendo por hipótese simplificadora a utilização de elipsoides de superfície lisa, conforme presente nos trabalhos da área, acrescentando-se a zona de transição entre o agregado e a matriz de argamassa. As demais propriedades serão incluídas em etapas posteriores.

3.1.2 Zona interfacial de transição

A zona de transição é considerada a fase que limita a resistência do concreto. É devido à sua existência que o concreto sofre ruptura a um nível de tração consideravelmente mais baixo que a resistência dos dois principais componentes. Em nível microscópico, as características da zona de transição fazem com que a resistência à tração do concreto seja muito menor que sua resistência à compressão, e também que o material sofra ruptura frágil. O volume dos vazios nesta fase também influencia o módulo de elasticidade do concreto, além de ser a causa do comportamento inelástico do material, mesmo que a argamassa e os agregados graúdos apresentem um comportamento linear. A zona de transição também influencia na durabilidade do concreto, devido a fatores ligados à permeabilidade e à existência de microfissuras (MEHTA; MONTEIRO, 2006).

Portanto, apesar de não ser considerada quando se estuda a mesoestrutura do concreto, esta fase possui relevância no comportamento do material, justificando a sua inserção no presente modelo.

3.1.3 Dimensões do RVE

De acordo com NEMAT-NASSER e HORI (1999), o RVE deve possuir um volume suficientemente grande para que se possa relacionar as propriedades gerais com a microestrutura do material heterogêneo. O material, sendo constituído por diferentes fases, é chamado, então, estatisticamente homogêneo, e o termo “volume suficientemente grande” se refere ao fato de que o RVE deve ser várias ordens de grandeza menor que o maciço estudado. O elemento de volume representativo deve, ainda, ser muitas vezes maior que o tamanho de seus microconstituintes.

No presente estudo, não está sendo considerada a obtenção das dimensões ideais do RVE, sendo esta grandeza definida pelo usuário no início do processo. A obtenção das propriedades efetivas depende da etapa posterior aos resultados aqui apresentados (Figura 13), sendo objeto de estudo para trabalhos futuros.

3.2 PROCESSAMENTO

Antes da realização de qualquer cálculo, o computador verifica quais os limites de iteração, tanto para o número de tentativas de posicionamento do agregado, quanto para o número máximo de repetições do processo a partir do início, quando necessário.

O primeiro procedimento ao se concluir a entrada de dados é a determinação do comprimento das arestas do RVE, realizado por meio da Equação (1), onde L representa a dimensão da aresta e V_{RVE} , o volume informado pelo usuário. Em seguida, realiza-se a verificação da quantidade de seções e os respectivos volumes destinados a cada uma, conforme os dados da granulometria especificados inicialmente. A quantidade de seções é calculada conforme a Equação (2), na qual N_S representa o número de seções e N_P indica o número de peneiras, enquanto que o volume reservado à seção (V_S) é calculado de acordo com a Equação (3), onde R_{i+1} significa o percentual retido na peneira de menor abertura na seção, R_i indica o percentual retido na peneira de maior abertura na seção, $R_{máx}$ e $R_{mín}$ representam os percentuais retidos nas peneiras de máxima e mínima abertura da série e T representa a taxa de agregados especificada pelo usuário (PIANEZZER, 2012; MOFTAH; WRIGGERS, 2006). Um esquema ilustrativo do ensaio e das relações com as equações utilizadas está apresentado na Figura 15.

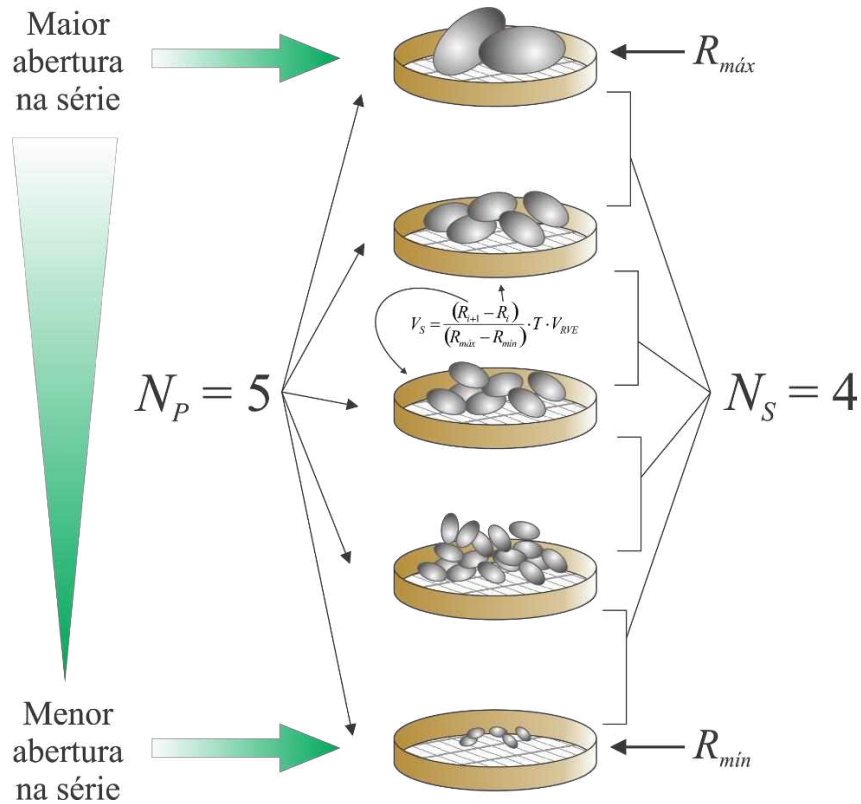
$$L = \sqrt[3]{V_{RVE}} \quad (1)$$

$$N_S = N_P - 1 \quad (2)$$

$$V_S = \frac{(R_{i+1} - R_i)}{(R_{máx} - R_{mín})} \cdot T \cdot V_{RVE} \quad (3)$$

Após estes cálculos, para cada seção realizam-se três procedimentos principais: a geração aleatória do agregado, seu posicionamento e a verificação de volumes. Posteriormente, para cada agregado, efetua-se o posicionamento da zona de transição. No decorrer do algoritmo, utilizam-se variáveis booleanas (B_i , onde i é um índice apenas para identificação) com o intuito de sinalizar a necessidade de alguma instrução adicional.

Figura 15 – Esquema ilustrativo do ensaio para determinação da curva granulométrica e das relações com as Equações (2) e (3). Os valores obtidos em laboratório servirão como referência para a determinação dos volumes reservados para cada seção. Os índices i e $i+1$ serão atualizados a cada iteração. Fonte: acervo pessoal.



3.2.1 Geração aleatória

Para que se acrescente um agregado em determinada seção, é necessário que o volume aproximado de um possível agregado seja menor ou igual ao volume disponível no intervalo entre as peneiras. A condição da Inequação (4), portanto, deve ser atendida, onde $V_{S,RESTANTE}$ indica o volume disponível na seção e d_{i+1} representa o diâmetro da peneira de menor abertura na seção; caso contrário, iniciam-se os procedimentos para o próximo intervalo.

$$V_{S,RESTANTE} \geq \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{d_{i+1}}{2} \right)^3 \quad (4)$$

Na geração do agregado, definem-se de maneira aleatória os valores dos três semieixos, respeitando-se os limites impostos pela faixa granulométrica, conforme a Equação (5) (PIANEZZER, 2012; MOFTAH; WRIGGERS, 2006). A formulação adotada pelos autores citados visa garantir que os semieixos do agregado possuirão valores que, na prática, fariam com que o mesmo ficasse retido na peneira de menor abertura.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \cdot [d_{i+1} + r_a \cdot (d_i - d_{i+1})] \\ b = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d_{i+1}}{2} + r_b \cdot \left(2 \cdot a - \frac{d_{i+1}}{2} \right) \right] \\ c = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d_{i+1}}{2} + r_c \cdot \left(2 \cdot a - \frac{d_{i+1}}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (5)$$

Na formulação, a representa o semieixo maior, b e c , os semieixos menores, d_{i+1} indica a menor abertura entre as peneiras da seção, d_i , a maior abertura e r_a , r_b e r_c são números aleatórios cujos valores variam entre zero e um, de acordo com uma distribuição uniforme.

3.2.2 Posicionamento do agregado

O posicionamento do agregado que foi gerado também ocorre de forma aleatória por meio da definição de uma coordenada para o centro do elipsoide, de acordo com a Equação (6), onde r_{c1} , r_{c2} e r_{c3} representam valores aleatórios entre zero e um, considerando-se uma distribuição uniforme. A orientação do elipsoide é definida aleatoriamente aplicando-se a Equação (7), na qual α , β e θ representam os ângulos que forma o elipsoide com os eixos coordenados x , y e z , respectivamente, e r_{d1} , r_{d2} e r_{d3} são valores aleatórios entre zero e um, em distribuição uniforme.

$$\begin{cases} x_c = r_{c1} \cdot L \\ y_c = r_{c2} \cdot L \\ z_c = r_{c3} \cdot L \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \cdot \pi \cdot r_{d1} \\ \beta = 2 \cdot \pi \cdot r_{d2} \\ \theta = 2 \cdot \pi \cdot r_{d3} \end{cases} \quad (7)$$

Ao se definir a posição do agregado, verifica-se a necessidade de sinalizar a superfície para a remoção de parte do seu volume caso haja alguma fração no exterior do RVE. Este passo é realizado de acordo com a Equação (8), onde B_l é uma variável booliana, a representa o semieixo maior, x_c , y_c e z_c representam a posição do centro do elipsoide e L , a dimensão das arestas do RVE (foram adotados os operadores de álgebra booliana).

$$B_1 = \begin{cases} 1, & \left\{ \begin{array}{l} (x_c - a < 0) \vee (x_c + a > L) \vee \dots \\ (y_c - a < 0) \vee (y_c + a > L) \vee \dots \\ (z_c - a < 0) \vee (z_c + a > L) \end{array} \right. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

De acordo com LEON (2010), a expressão que define um elipsoide está apresentada em sua forma geral na Equação (9). As matrizes discriminantes dos elipsoides são quadradas e de ordem quatro, sendo os seus elementos os coeficientes da equação do elipsoide, conforme a Equação (10) (PIANEZZER, 2012). No Apêndice 1 demonstra-se como obter a matriz discriminante conhecendo-se a equação do elipsoide; conhecida a matriz discriminante, pode-se também obter a equação da quádrlica.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 & G/2 \\ B/2 & C & E/2 & H/2 \\ D/2 & E/2 & F & I/2 \\ G/2 & H/2 & I/2 & J \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os coeficientes de qualquer elipsoide podem ser obtidos por meio de transformações lineares aplicadas a um elipsoide com centro na origem e não-rotacionado. Na Equação (11) observa-se o caso mais simples, estando o discriminante para este caso apresentado na Equação (12).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

A transformação linear a ser aplicada consiste em quatro operações: rotação em torno do eixo z (θ), rotação em torno do eixo x (α), rotação em torno do eixo y (β) e translação do centro (x_c, y_c, z_c). A ordem das transformações pode ser alterada, desde que se observem as restrições relacionadas à comutatividade do produto de matrizes e às rotações finitas (SANTOS, 2012; NUSSENZVEIG, 2002; LEON, 2010). As matrizes da transformação afim estão apresentadas nas Equações (13) a (16), estando a transformação resultante apresentada na Equação (17) e ilustrada na Figura 16. A matriz discriminante do elipsoide após a transformação linear, é dada pela Equação (18) (PIANEZZER, 2012).

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

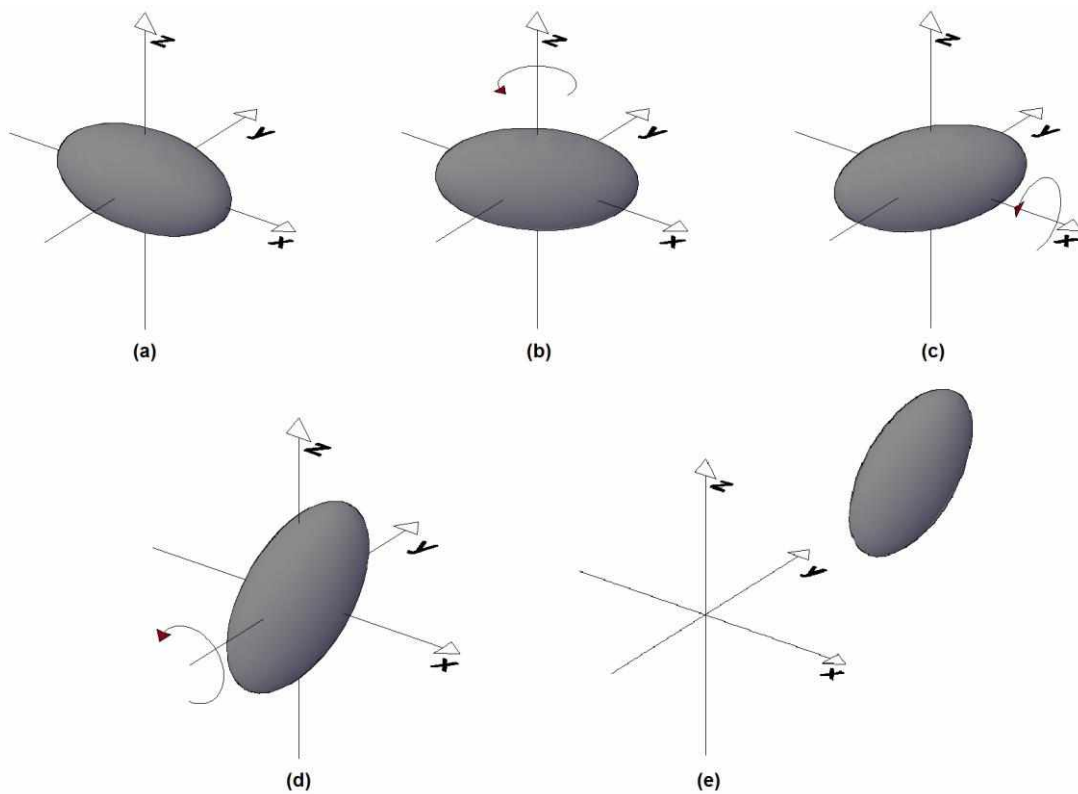
$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & 0 & y_c \\ 0 & 0 & 1 & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_4 \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q}' \mathbf{T} \quad (18)$$

Figura 16 – Transformações lineares aplicadas a um elipsoide. (a) Quádrica com centro na origem. (b) Rotação em torno do eixo z. (c) Rotação em torno do eixo x. (d) Rotação em torno do eixo y. (e) Translação com os valores das coordenadas do centro. Fonte: acervo pessoal.

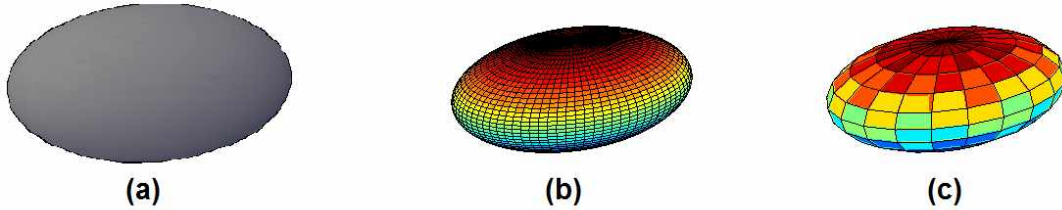


Quando definida a posição do elipsoide, verifica-se a ocorrência de colisão com as outras regiões já existentes. Inicialmente, obtêm-se os pontos que definem o elipsoide, aplicando-se as transformações afins a um conjunto de coordenadas esféricas, conforme a Equação (19), onde \mathbf{T} representa a matriz de transformação linear e x' , y' e z' estão definidos na Equação (20) em função dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 , que variam de zero a 2π , e dos semieixos (SANTOS, 2012; na verdade, ϕ_1 deve variar de zero a π , mas o intervalo mencionado foi necessário por questões de compatibilidade entre o tamanho de matrizes). A fim de se aplicar a translação, são adotadas coordenadas homogêneas (LEON, 2010). Nesta etapa, quanto menor o passo em relação aos ângulos, maior a aproximação com a superfície da quádrica (Figura 17).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x' = a \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \\ y' = b \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \\ z' = c \cdot \cos \phi_1 \end{cases} \quad (20)$$

Figura 17 – Diferenças entre os elipsoides definidos analítica e numericamente. Aspecto do elipsoide: (a) calculado analiticamente; (b) calculado numericamente, possuindo os ângulos ϕ um passo igual a $\pi/40$; (c) calculado numericamente, com um passo igual a $\pi/10$. Fonte: acervo pessoal.



Para o caso de dois elipsoides quaisquer, primeiro realiza-se a transformação linear para que uma das quádricas esteja com o centro na origem e sem quaisquer rotações, aplicando o mesmo mapeamento para a outra superfície (Figura 18). A verificação de colisão é feita por meio de um processo iterativo, no qual, para cada ponto que forma os elipsoides já existentes, são lidas as coordenadas e inseridas na Inequação (21), onde os valores dos semieixos a , b e c são referentes ao elipsoide recém-gerado. Caso se confirme a inequação para qualquer um dos pontos, há colisão entre as quádricas, devendo ser calculada uma nova posição para o agregado (Figura 19).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 < 0 \quad (21)$$

Figura 18 – Aplicação de mapeamento de modo que uma das quádricas fique com o centro na origem e a outra mantenha a mesma posição em relação à primeira. O elipsoide recém-gerado, na presente aplicação, é aquele que está com o centro na origem. Fonte: acervo pessoal.

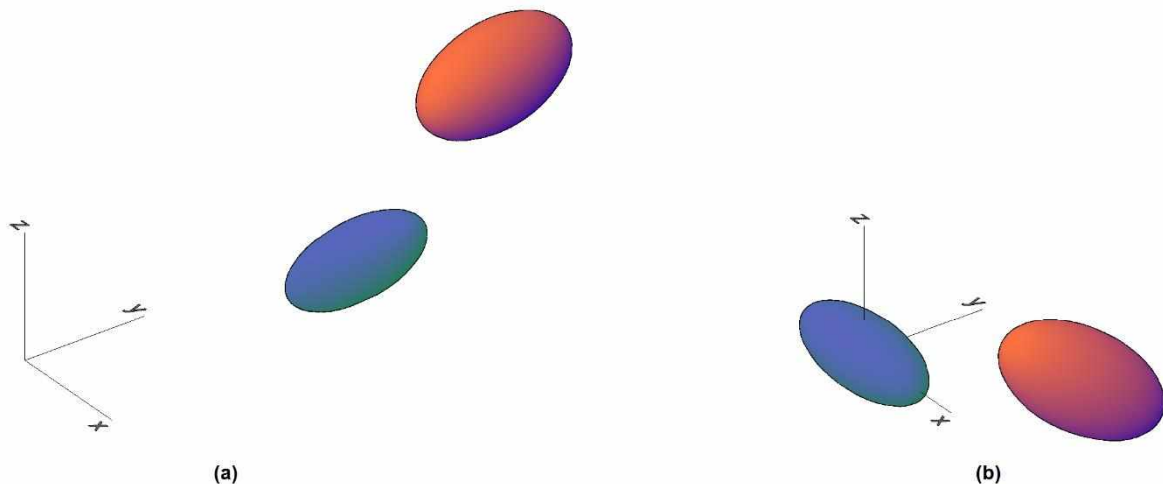
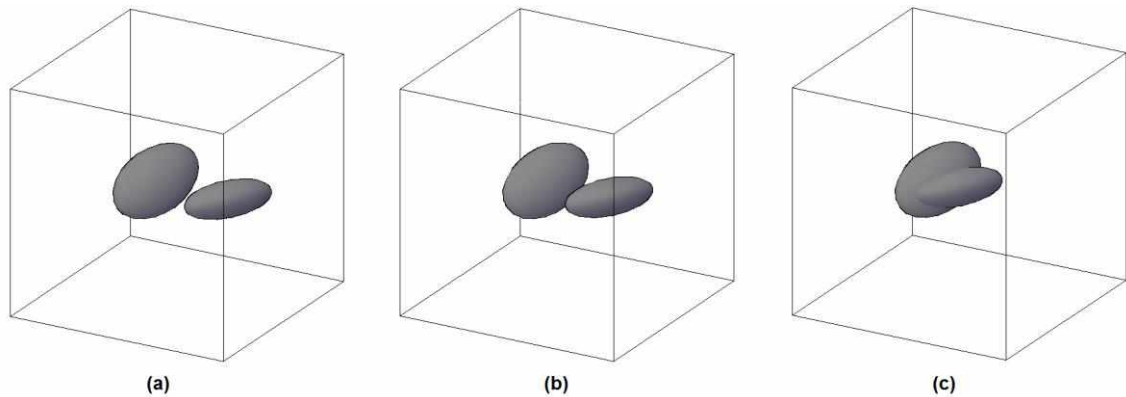
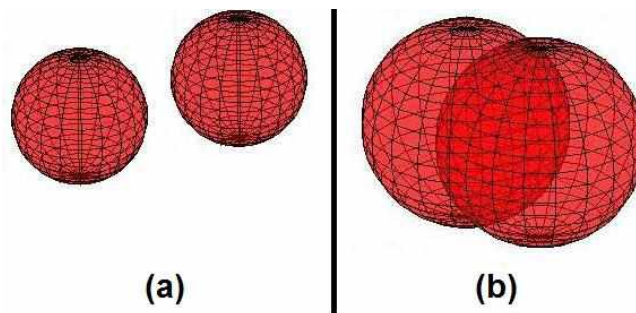


Figura 19 – Ilustração da proximidade entre dois elipsoides. (a) Os dois estão separados; logo, a Inequação (21) não será verdadeira para nenhum ponto. (b) Estão se tocando superficialmente; não será considerada colisão neste caso, calculando-se a inequação. (c) Existência de colisão; para pelo menos um ponto do elipsoide já existente a inequação será verdadeira. Fonte: acervo pessoal.



Foi utilizada, ainda, a proposta de PIANEZZER (2012) para a verificação de proximidade entre elipsoides. De acordo com o autor, é possível economizar esforço computacional analisando previamente duas esferas com raio igual ao semieixo maior dos elipsoides: se as esferas colidem, é provável que os elipsoides também colidam; caso contrário, não há a necessidade de se verificar a colisão entre as regiões elipsoidais (Figura 20).

Figura 20 – Colisão entre esferas. (a) As duas esferas de raio igual ao maior semieixo dos elipsoides estão separadas; logo, certamente os elipsoides estarão separados. (b) As duas esferas se sobrepõem; então existe a possibilidade de que os elipsoides estejam colidindo. Fonte: PIANEZZER (2012).



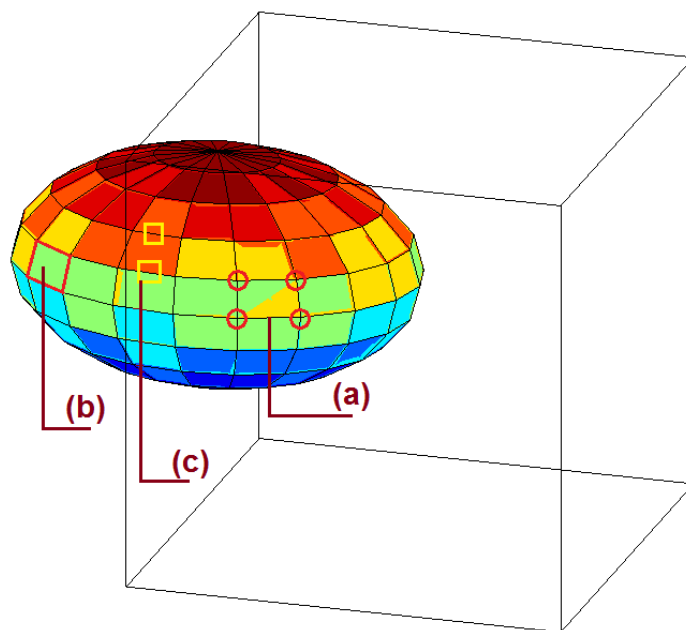
3.2.3 Ajuste geométrico nas faces

Para os agregados que estiverem parcialmente fora do RVE, realiza-se um procedimento para ajuste geométrico, adaptando o formato do elipsoide ao formato da face, aresta ou vértice, conforme a situação. De acordo com KLEIN (2012), a interseção entre um plano e um elipsoide resulta em uma elipse. No entanto, devido a composição dos elipsoides por segmentos de planos definidos pelos vértices, optou-se pela verificação, segmento a

segmento, da interseção entre as retas formadas por pares de pontos e os planos que definem as faces. Esperava-se que, desta forma, o número de pontos a serem considerados no ajuste geométrico fosse reduzido a ponto de se estabelecer critérios de alteração de coordenadas para os pontos excedentes.

A cada conjunto de quatro pontos, que são coplanares e definem os vértices de um segmento de plano, verifica-se se o segmento de plano intercepta cada uma das seis faces do RVE. Caso isto ocorra, registram-se as coordenadas de interseção (Figura 21).

Figura 21 – Exemplo de um elipsoide que intercepta uma das faces de um cubo. (a) Em destaque, estão assinalados os pontos que definem os vértices de um segmento de plano; neste caso, os quatro estão no interior do cubo. (b) Os quatro vértices formam quatro retas, em destaque; neste caso, os vértices e retas estão fora do cubo. (c) Quando um segmento de plano intercepta uma das faces, existem pontos que ficam no interior e no exterior do cubo; em destaque, estão as localizações aproximadas da interseção entre a face e os segmentos de reta, como exemplo. Fonte: acervo pessoal.



A interseção é verificada, em primeiro lugar, estudando-se a posição entre os pontos do segmento e os vértices das faces: se os valores de x , y e z para todos os pontos do segmento estiverem contidos ou no interior ou no exterior do RVE, então claramente não há interseção entre o segmento de plano e a face do elemento representativo; caso contrário (Figura 22a), aplicam-se os procedimentos que seguem.

São obtidas as equações dos dois planos (segmento de plano e face do RVE, como apresentado na Equação (22), onde a , b e c são os componentes do vetor normal e d é o coeficiente obtido ao substituir x , y e z por valores de um ponto pertencente ao plano) e

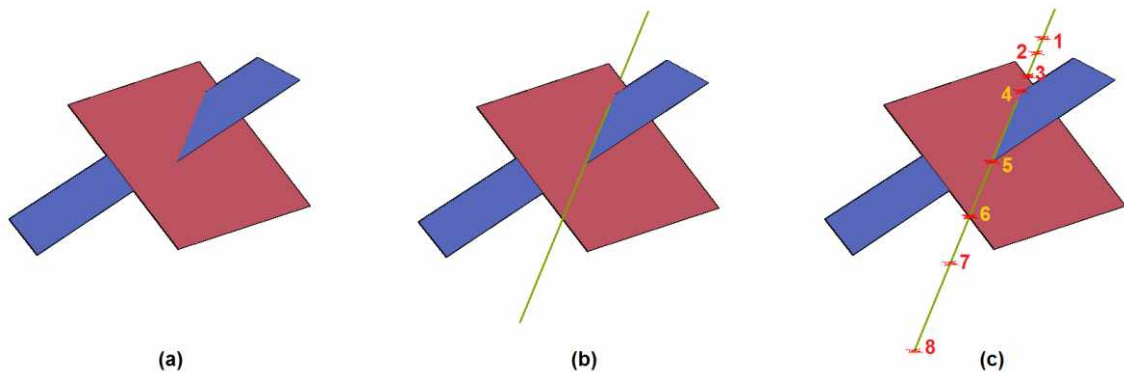
verificado o ângulo entre os seus vetores normais: se os vetores forem paralelos, não haverá interseção entre os planos. Para planos não-paralelos, obtém-se a reta de interseção entre eles (Figura 22b) por meio do cálculo do vetor normal aos dois planos (vetor diretor da reta) e de um ponto pertencente à reta. São obtidos, em seguida, os pontos de interseção entre a reta formada pelos pares de pontos e a reta de interseção entre os planos (Figura 22c) por meio da determinação dos parâmetros t e s (Equação (23), na qual a_i e c_i são coordenadas de pontos pertencentes às retas p e r , respectivamente, e b_i e d_i são os componentes dos vetores diretores das retas) (SANTOS, 2012; LEON, 2010).

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (22)$$

$$p: \begin{cases} x = a_1 + b_1t \\ y = a_2 + b_2t \\ z = a_3 + b_3t \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = c_1 + d_1s \\ y = c_2 + d_2s \\ z = c_3 + d_3s \end{cases} \quad (23)$$

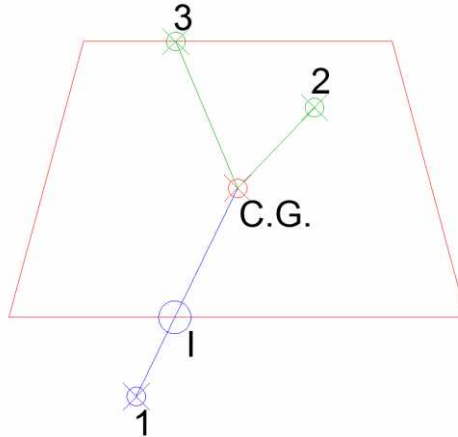
Figura 22 – Determinação dos pontos de interseção entre segmentos de planos. (a) Dois planos não-paralelos. (b) Reta de interseção entre os dois planos. (c) Pontos de interseção entre a reta de interseção e os segmentos de reta formados pelos vértices dos segmentos de planos; no exemplo, apenas os pontos 4 e 5 atendem aos três critérios para serem considerados interseção entre os segmentos de plano.

Fonte: acervo pessoal.



Estes pontos é que serão registrados como interseções entre o elipsoide e a face, desde que atendam, caso a caso, aos seguintes critérios: (1) esteja no interior do segmento de plano (interior incluindo as bordas); (2) esteja no interior do outro segmento de plano (no presente caso, aquele que define a face do RVE); e (3) esteja no interior do segmento de reta formado pelos pares de pontos. Os dois primeiros critérios são realizados verificando-se a interseção entre a reta que une o ponto de interseção (Figura 22c) e o centroide do segmento de plano (Figura 23). Uma analogia de caso particular do terceiro critério também está ilustrado na Figura 23 (ponto I).

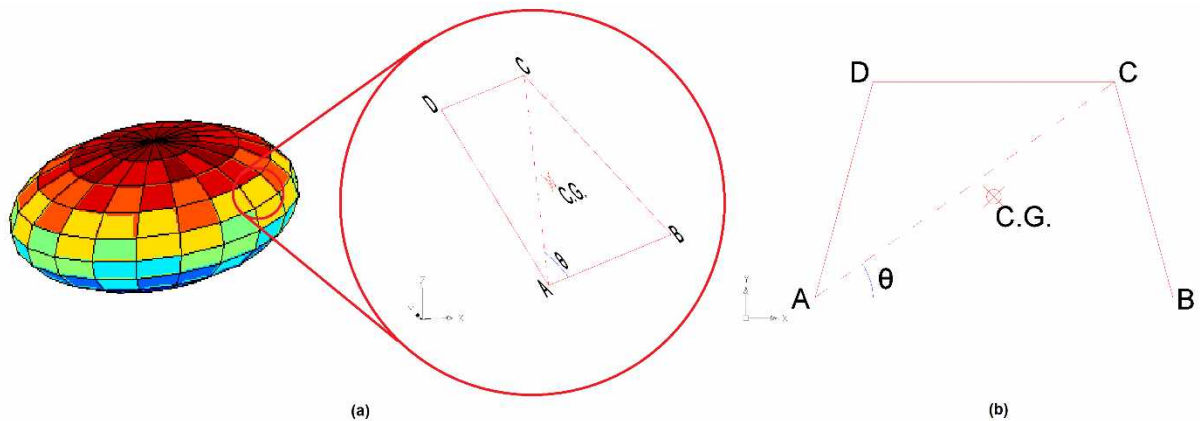
Figura 23 – Determinação de estado dos pontos. O ponto 1 está fora do segmento, pois existe um ponto de interseção (ponto I) no segmento de reta que une o ponto ao centro geométrico do segmento de plano. Os pontos 2 e 3 estão no interior, porque não há ponto de interseção no segmento de reta que os unem ao centroide (para o ponto 3, observar que a interseção é o próprio ponto). Fonte: acervo pessoal.



Para a determinação do centroide do segmento de plano, efetuam-se mudanças nas coordenadas dos pontos que definem os vértices de maneira que o segmento passe a ser paralelo ao plano xy . O ajuste é feito adotando-se coordenadas polares. Com relação à Figura 24, o ponto A sempre possuirá as coordenadas $(0,0)$; o ponto B será definido como $(\text{dist}(A,B),0)$; o ponto C estará localizado em $(\text{dist}(A,C),\theta)$; para o ponto D, efetua-se procedimento análogo ao do ponto C. Conhecidas as coordenadas dos vértices do segmento de plano, o cálculo do centro geométrico é realizado com a Equação (24), onde C_x e C_y representam a abscissa e a ordenada do centroide, n é o número de pontos que definem o segmento de plano, S indica a área do segmento e x e y são as coordenadas dos vértices (MADEIRA, 2009).

$$\begin{cases} C_x = \frac{1}{6 \cdot S} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) \cdot (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n + x_1) \cdot (x_n y_1 - x_1 y_n) \right] \\ C_y = \frac{1}{6 \cdot S} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (y_n + y_1) \cdot (x_n y_1 - x_1 y_n) \right] \end{cases} \quad (24)$$

Figura 24 – Esquema representativo da transformação de um segmento de plano no espaço para um segmento no plano xy . Fonte: acervo pessoal.



A última etapa do ajuste geométrico é a substituição das coordenadas dos pontos que estiverem fora do RVE pelos que estiverem na interseção com a face.

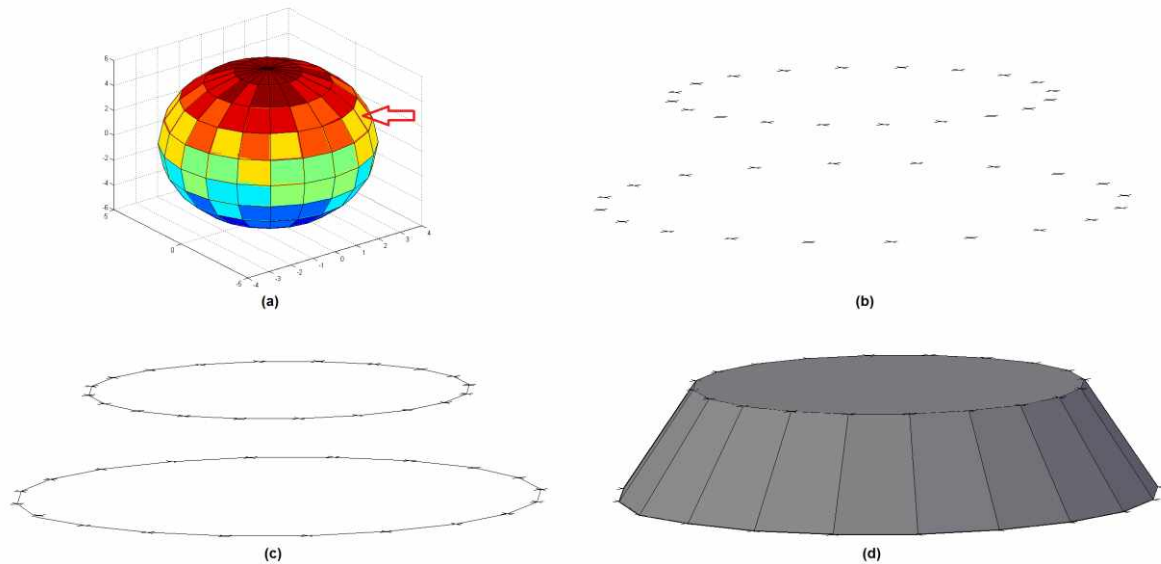
3.2.4 Verificação dos volumes de acordo com a granulometria

Após a realização do ajuste geométrico, calcula-se o volume do agregado. Efetua-se o cálculo por meio de uma aproximação da quádrica a um poliedro cujos níveis possuam cotas alinhadas após o mapeamento dos pontos da superfície (Figura 25a). Sendo conhecidas as diferenças de cotas (Figura 25b), calculam-se as áreas de dois níveis sucessivos por meio do processo de Gauss (Figura 25c; Equação (25), onde S representa a área da poligonal, x e y representam as coordenadas no plano e n , o número de pontos a serem estudados), obtendo-se o volume para cada intervalo (Figura 25d), conforme a Equação (26), onde V representa o volume a ser calculado, S_1 e S_2 indicam as áreas das cotas inferior e superior e h representa a diferença de cotas. O volume do agregado é obtido pelo somatório dos volumes das camadas. Por se tratar de uma aproximação, ocorre um erro em torno de 3%. Uma demonstração da Equação (26) está inserida no Apêndice B.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i x_{i+1} + y_n x_1 \right) \right] \quad (25)$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h \quad (26)$$

Figura 25 – Aproximação do elipsoide usando um poliedro para o cálculo de volume por camadas. (a) Indicação da camada utilizada como exemplo. (b) Pontos dos dois níveis que formam a camada. (c) Polígonos formados pelos pontos em cada nível; correspondem às áreas S_1 e S_2 . (d) Sólido cujo volume será calculado. Fonte: acervo pessoal.

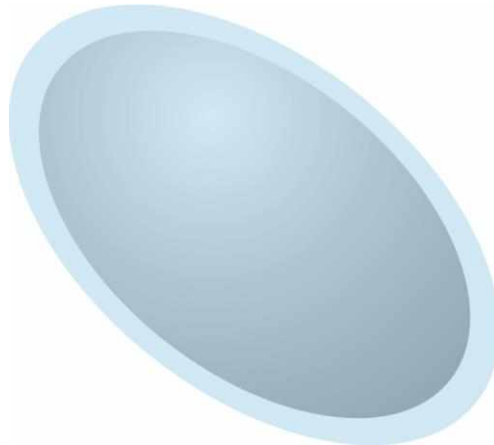


Após a inserção do agregado, verifica-se a possibilidade de geração de novos agregados na mesma seção por meio da comparação entre o seu volume disponível e possível volume de um novo agregado (suposto uma esfera de raio igual à abertura da peneira em questão). Havendo volume suficiente, repete-se o procedimento; caso contrário, reiniciam-se os procedimentos para a próxima seção, conforme abordado no início do tópico.

3.2.5 Zonas de transição

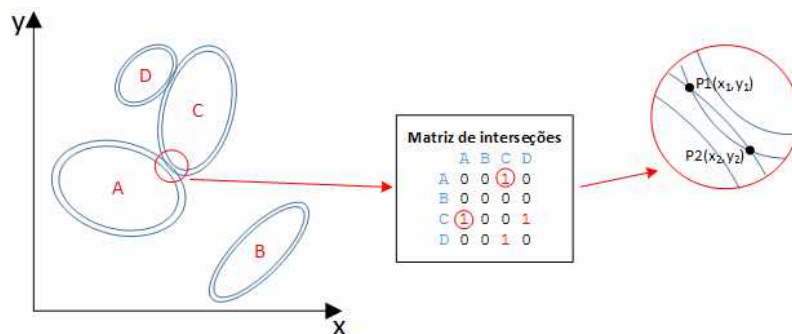
Sendo conhecidas as dimensões dos semieixos de cada agregado, considera-se a zona de transição como um elipsoide com um acréscimo, definido pelo usuário, nos valores dos semieixos (Figura 26).

Figura 26 – Representação esquemática com ampliação das dimensões usuais da zona de transição do agregado. Fonte: acervo pessoal.



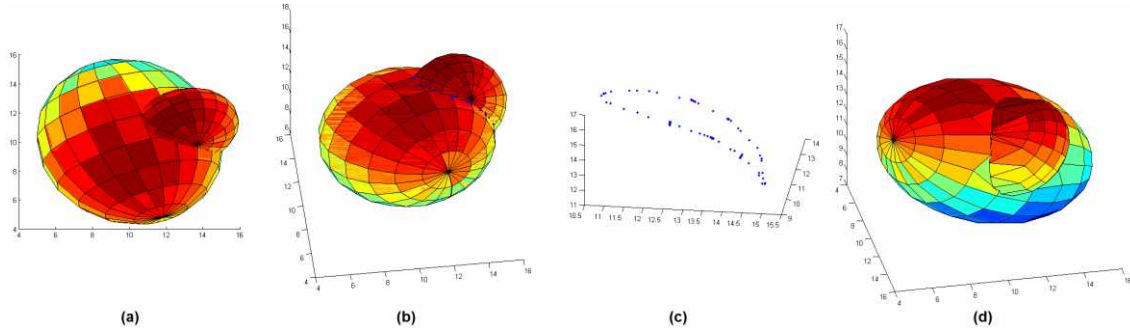
Verifica-se para cada agregado a existência de colisão entre as zonas de transição próximas. Inicialmente, apenas sinalizam-se os casos em que há ocorrência (Figura 27).

Figura 27 – Exemplo bidimensional sobre a obtenção da matriz de interseções. Em destaque, o caso das elipses A e C. Para três dimensões, verificam-se as interseções pelo método iterativo de detecção entre segmentos de plano. Fonte: acervo pessoal.



Em seguida, definem-se os pontos que delimitam a zona de transição. Caso exista alguma colisão, efetua-se um procedimento análogo à identificação da interseção entre as faces do RVE e os segmentos de plano que formam os agregados: a interseção entre segmentos de plano que formam um par de agregados (Figura 28). Quando definidos os locais em que a interseção possa ser representada, verificam-se quais pontos estão no interior da outra quádriga e realiza-se a alteração de coordenadas para um dos pontos de interseção (Figura 28d).

Figura 28 – Exemplo de ajuste devido a interseção entre dois elipsoides (passo do ângulo das coordenadas esféricas: $\pi/10$). Profundidade de interseção intencionalmente ampliada para melhor visualização. (a) Elipsoides colidindo. (b) Detecção das interseções entre os segmentos de plano que formam os elipsoides. (c) Interseções entre os segmentos de plano. (d) Elipsoides após o ajuste geométrico. Fonte: acervo pessoal.



3.3 DADOS DE SAÍDA

Ao término do processamento, são organizados os dados que servirão como entrada para etapa de análise de tensões. São exibidos para o usuário uma representação gráfica da disposição dos agregados e da zona de transição no RVE e um relatório contendo o resumo da geração (Figura 29). A informação pode ser salva para utilização futura.

Figura 29 – Exemplo de resumo dos resultados obtidos após o processamento. Fonte: acervo pessoal.

```

Resultado =

    VolumeConcreto: '100000 mm3'
    TaxaAgregados: '35%'
    Resultado: 'Concluído com sucesso!'
    TaxaAgregadosEfetiva: '35.0%'
    Iteracoes: 1
    Tentativas: 12293
    MediaTentativas: 8.5073
    Parametros: [1445x11 double]
    EstruturaAgregados: [1x1445 struct]

1x1445 struct array with fields:

    SEMaior
    SEMenor1
    SEMenor2
    XCentro
    YCentro
    ZCentro
    AnguloX
    AnguloY
    AnguloZ
    Matriz
    TransfLinear
    ForaDoRVE
    StructPontos
    Tentativas
    Volume
    ZT_SEMaior
    ZT_SEMenor1
    ZT_SEMenor2
    ZT_TodosOsPontos
    ZT_Intersecoes
  
```

3.3.1 Resumo dos dados de entrada

No resumo são apresentados os dados para confirmação dos valores informados pelo usuário no início do processo, a saber: o volume de concreto, dado em milímetros cúbicos, e a taxa de agregados.

3.3.2 Resumo sobre o processamento

Informa se o processamento foi concluído com sucesso e a quantidade de iterações e tentativas para o posicionamento do agregado. Durante o posicionamento do agregado, foi criado um mecanismo para que se evite o laço infinito. Consiste na limitação do número de tentativas de posicionamento de um agregado: atingindo o limite, reinicia-se todo o processo. Também existe um número limite de tentativas de geração a partir do início, sendo nomeado no relatório como “iterações”. Por último, a média de tentativas é a razão entre o número total

de tentativas de posicionamento para cada agregado e o número de agregados, servindo como uma referência conforme o percentual estipulado pelo usuário.

3.3.3 Resumo e detalhes sobre os agregados

A taxa de agregados efetiva consiste na soma dos volumes das inclusões, servindo como referência para o usuário. O processo adotado para o cálculo do volume gera um erro numérico em torno de 3% para menos, quando comparado ao processo analítico. Este valor foi obtido por meio de várias observações e verificações no desenvolvimento do algoritmo. O erro pode ser reduzido diminuindo-se a distância entre os pontos que definem o elipsoide (valor do passo, conforme indicado na Figura 17).

A matriz “parâmetros” é constituída pelas propriedades elementares dos elipsoides: valores dos semieixos, coordenadas do centro e ângulos de orientação em torno de cada eixo. Nela, não é levada em conta o ajuste devido ao posicionamento parcial fora dos limites do RVE. O maior número de dados consta na estrutura de dados, denominada “estrutura agregados”, na qual, além das informações elementares sobre as quádricas, constam a matriz do elipsoide após a transformação linear, a matriz de transformação linear, a indicação se o agregado está dentro ou parcialmente fora dos limites do RVE, o número de tentativas de posicionamento, o volume da inclusão, os valores dos semieixos para a zona de transição e os pontos que formam a malha tanto do agregado quanto da zona de transição.

3.3.4 Ilustração do posicionamento

Consiste em um gráfico tridimensional onde são plotados os pontos que compõem os agregados e as zonas de transição, deixando claro para o usuário o resultado que consta na “estrutura agregados”.

4 RESULTADOS

A seguir, exemplos de RVEs criados por meio do algoritmo desenvolvido. Para todos os casos, adotou-se como curva granulométrica os valores exibidos na Tabela 1. Apesar de a classificação não ser de agregado graúdo para todas as peneiras, optou-se pelos valores a fim de se alinhar os resultados com aqueles nos trabalhos adotados como referências (MEHTA; MONTEIRO, 2006; MOFTAH; WRIGGERS, 2006; PIANEZZER, 2012). Também foram dados comuns a todos os exemplos a espessura da zona de transição, com um valor de 0,01 mm (MEHTA; MONTEIRO, 2006), e o volume de concreto, igual a 10^5 mm³, resultando em um cubo de arestas aproximadamente iguais a 46,4 mm.

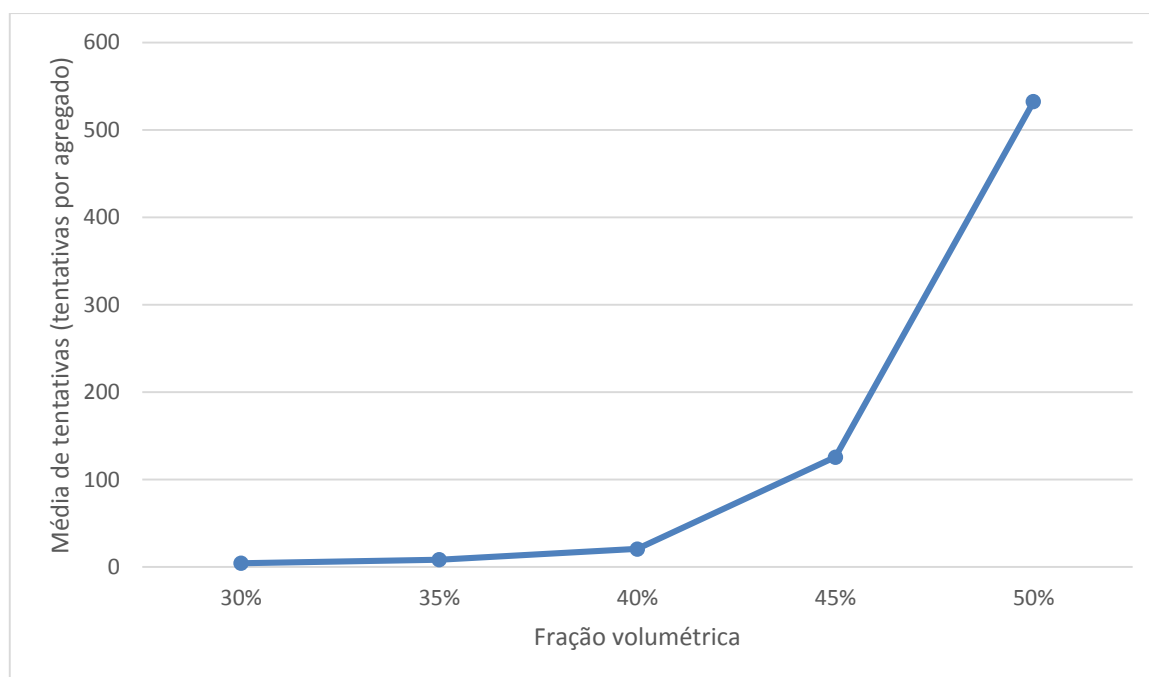
Tabela 1 – Granulometria adotada na geração dos RVEs. Fonte: MOFTAH e WRIGGERS (2006).

Abertura da peneira (mm)	Volume total retido (%)
12,70	0
9,50	23
4,75	74
2,36	100

Para a geração dos RVEs foi utilizado um *desktop* com processador QuadCore i5-3470 3,20 GHz, 8 GB de memória RAM com placa de vídeo 3D. O tempo de processamento para as frações volumétricas iguais ou inferiores a 45% foi cerca de quatro horas; para a fração volumétrica de 50%, cerca de seis horas.

Todos os elementos foram gerados na primeira iteração, isto é, não foi atingido o limite de tentativas de posicionamento para nenhum agregado. Na Figura 30 apresenta-se uma curva da média de tentativas de posicionamento (razão entre o total de tentativas e o número de agregados) em função da fração volumétrica de agregados. Observa-se o comportamento não-linear à medida em que se aumenta a fração volumétrica. Deve-se atentar para o fato de que o algoritmo foi escrito de maneira a se posicionarem primeiro os agregados de maior diâmetro, pois certamente existe maior facilidade em se posicionar posteriormente aqueles retidos nas peneiras de menor abertura.

Figura 30 – Média de tentativas de posicionamento dos agregados no RVE em função da fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



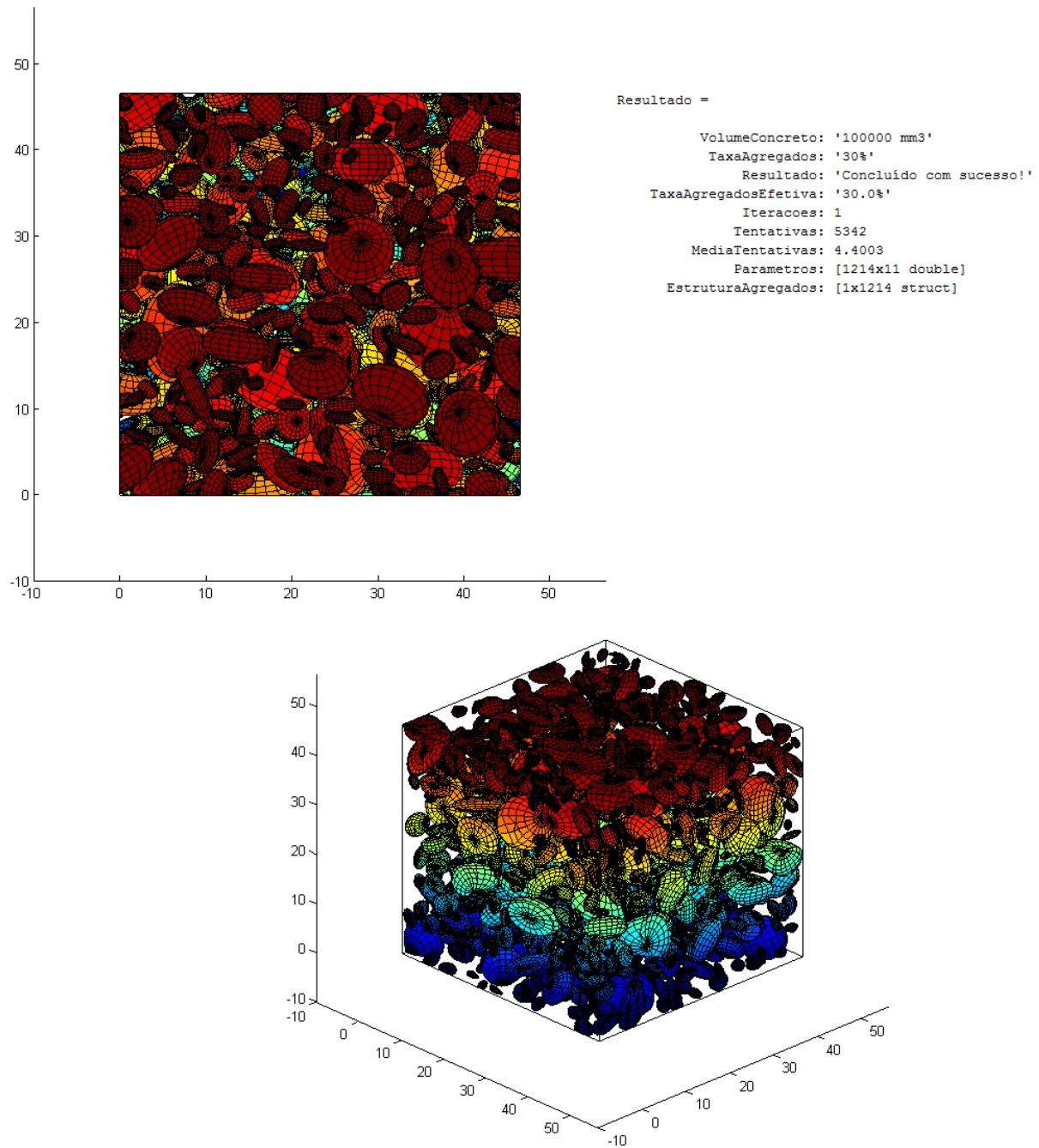
O método *take-and-place* em sua forma convencional apresenta a desvantagem de não se eliminarem as coordenadas que já estejam no interior de algum elipsoide, pois os fatores aleatórios adotados no cálculo obedecem a uma distribuição uniforme. Acredita-se que possam se obter resultados de maneira mais rápida se for desenvolvido um algoritmo de ajuste das funções densidade de probabilidade.

Outro aspecto que influencia a duração do processamento é o passo do ângulo para definição dos pontos que formam o elipsoide. Nos exemplos apresentados, adotou-se passo igual a $\pi/10$. Um ajuste deverá ser avaliado quando houver a aplicação na obtenção das propriedades do concreto e análise de tensões (TEIXEIRA, 2012), verificando-se a necessidade de maior ou menor refinamento.

4.1 ELEMENTO COM 30% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Na Figura 31 consta um exemplo de RVE com 30% de fração volumétrica (vistas superior e isométrica).

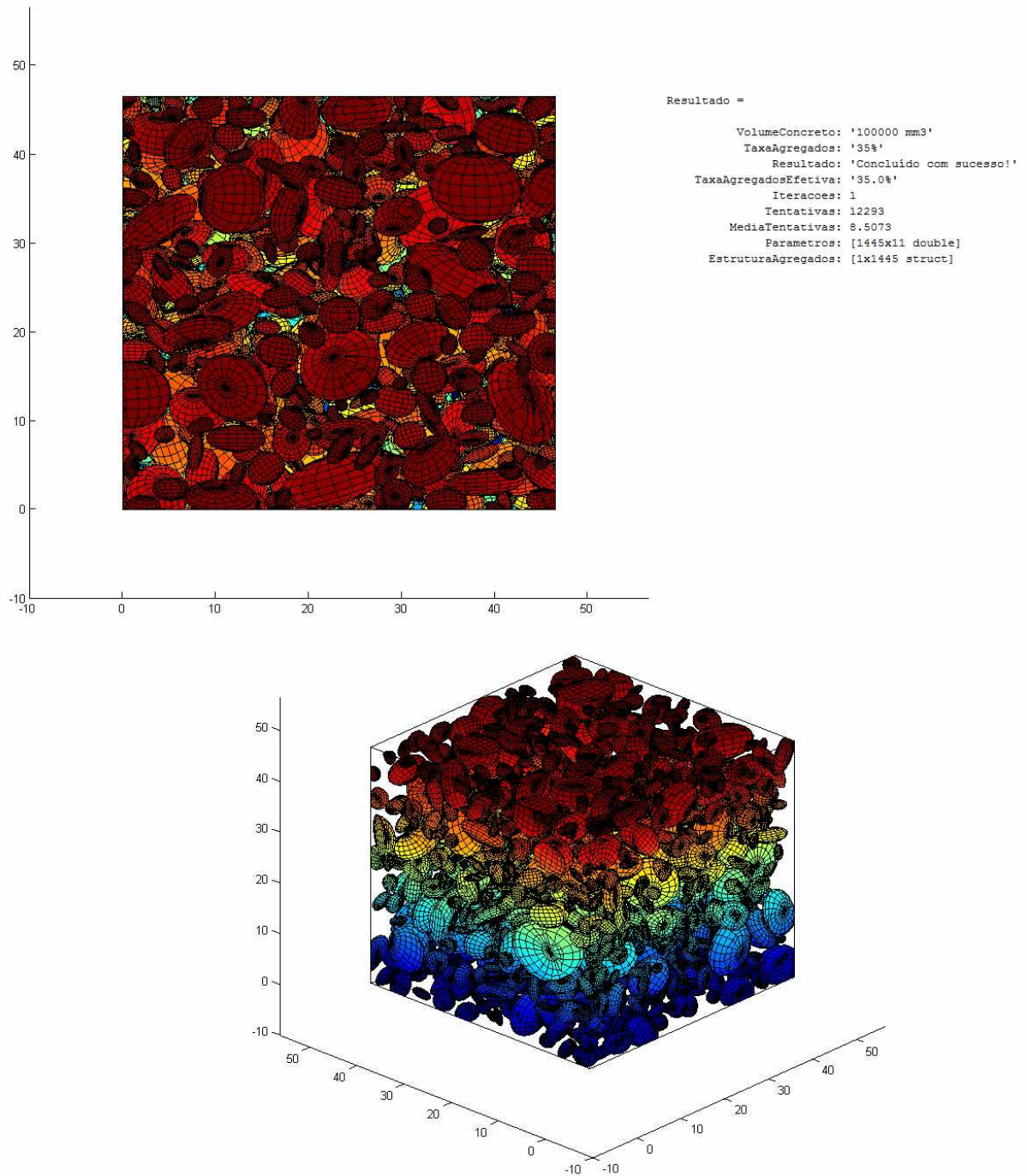
Figura 31 – RVE com 30% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



4.2 ELEMENTO COM 35% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Na Figura 32, um exemplo com 35% de fração volumétrica.

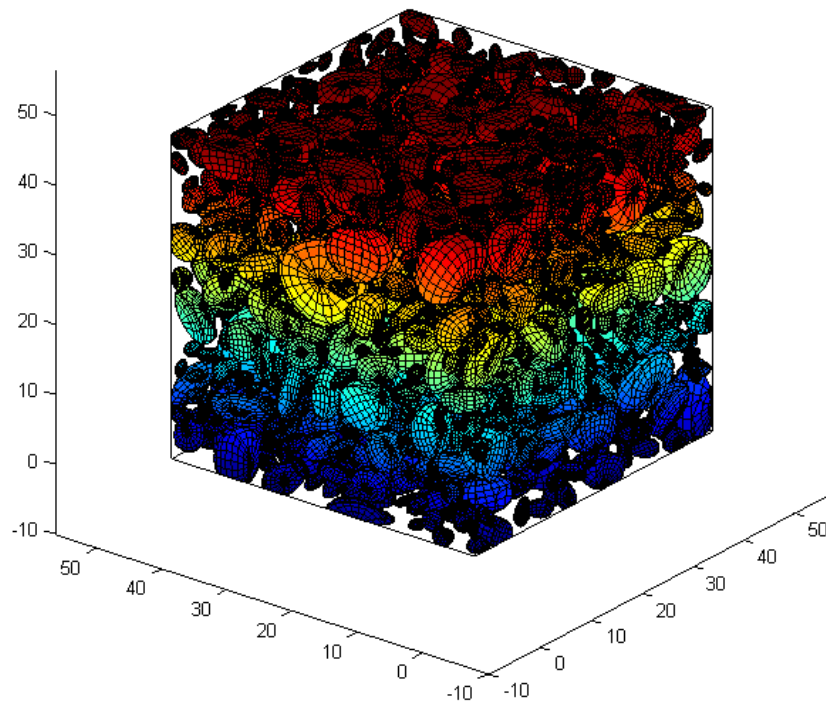
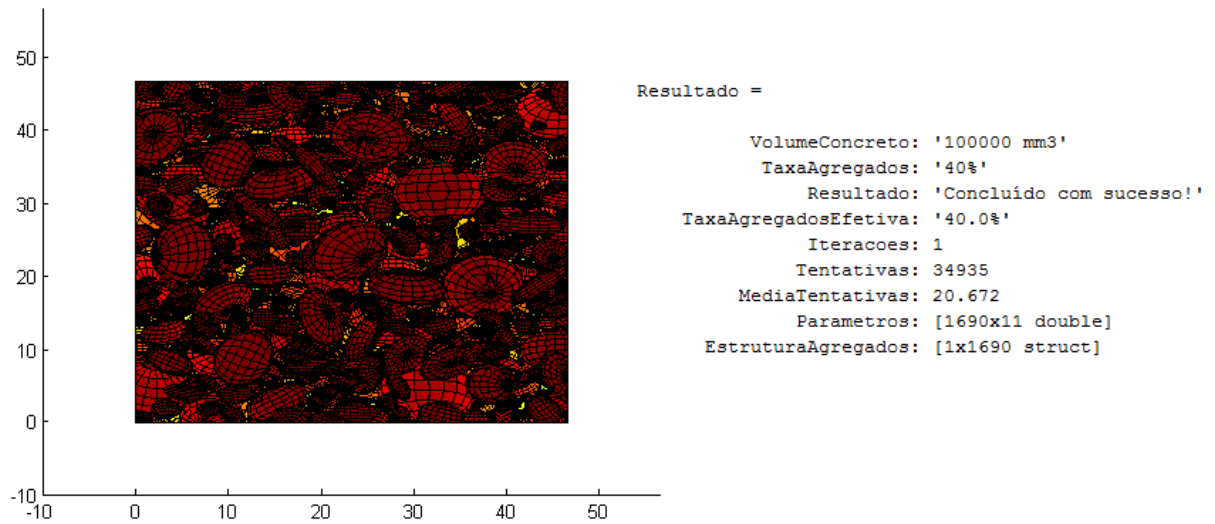
Figura 32 – RVE com 35% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



4.3 ELEMENTO COM 40% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Na Figura 33, um exemplo com 40% de fração volumétrica.

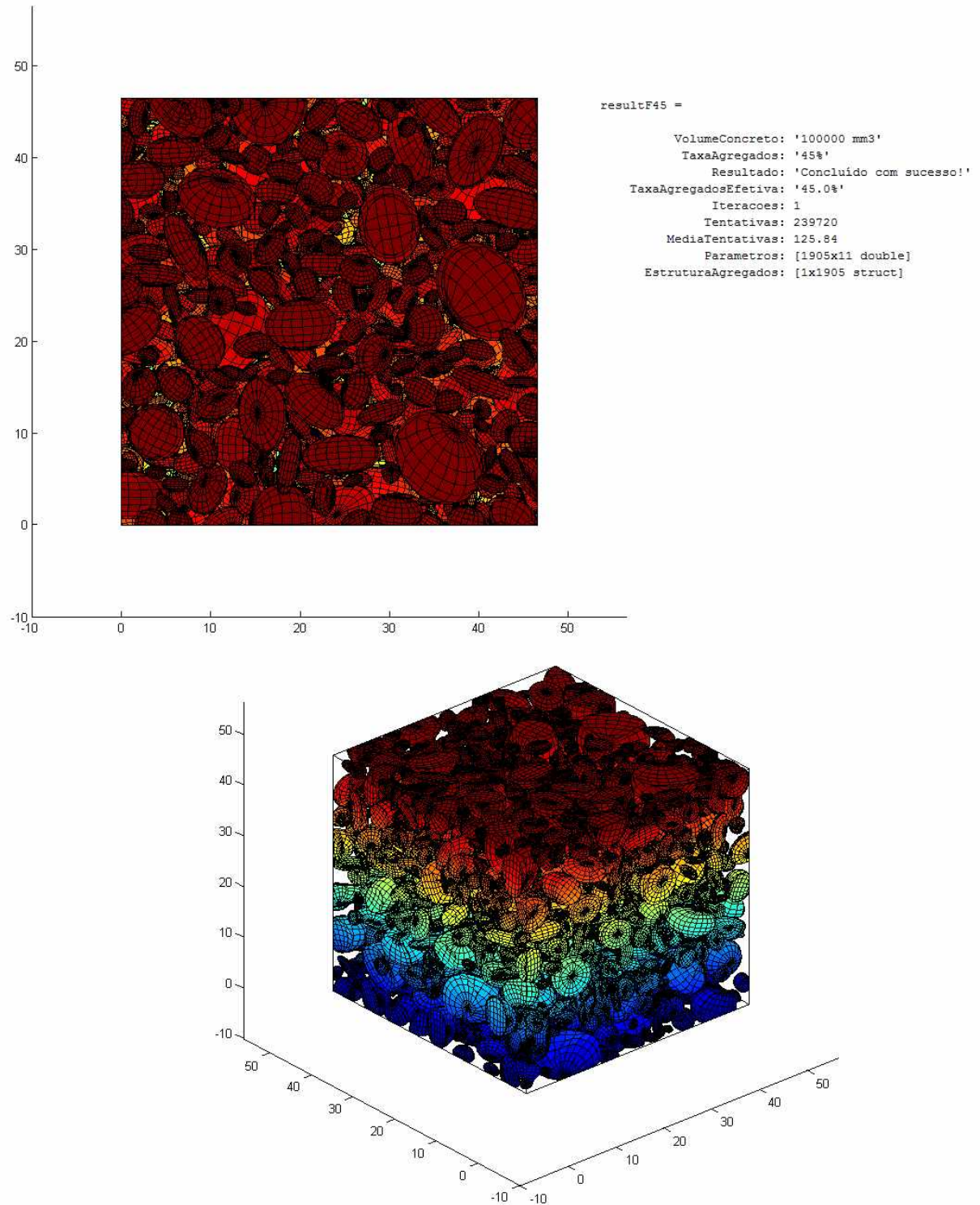
Figura 33 – RVE com 40% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



4.4 ELEMENTO COM 45% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Na Figura 34, um exemplo com 45% de fração volumétrica.

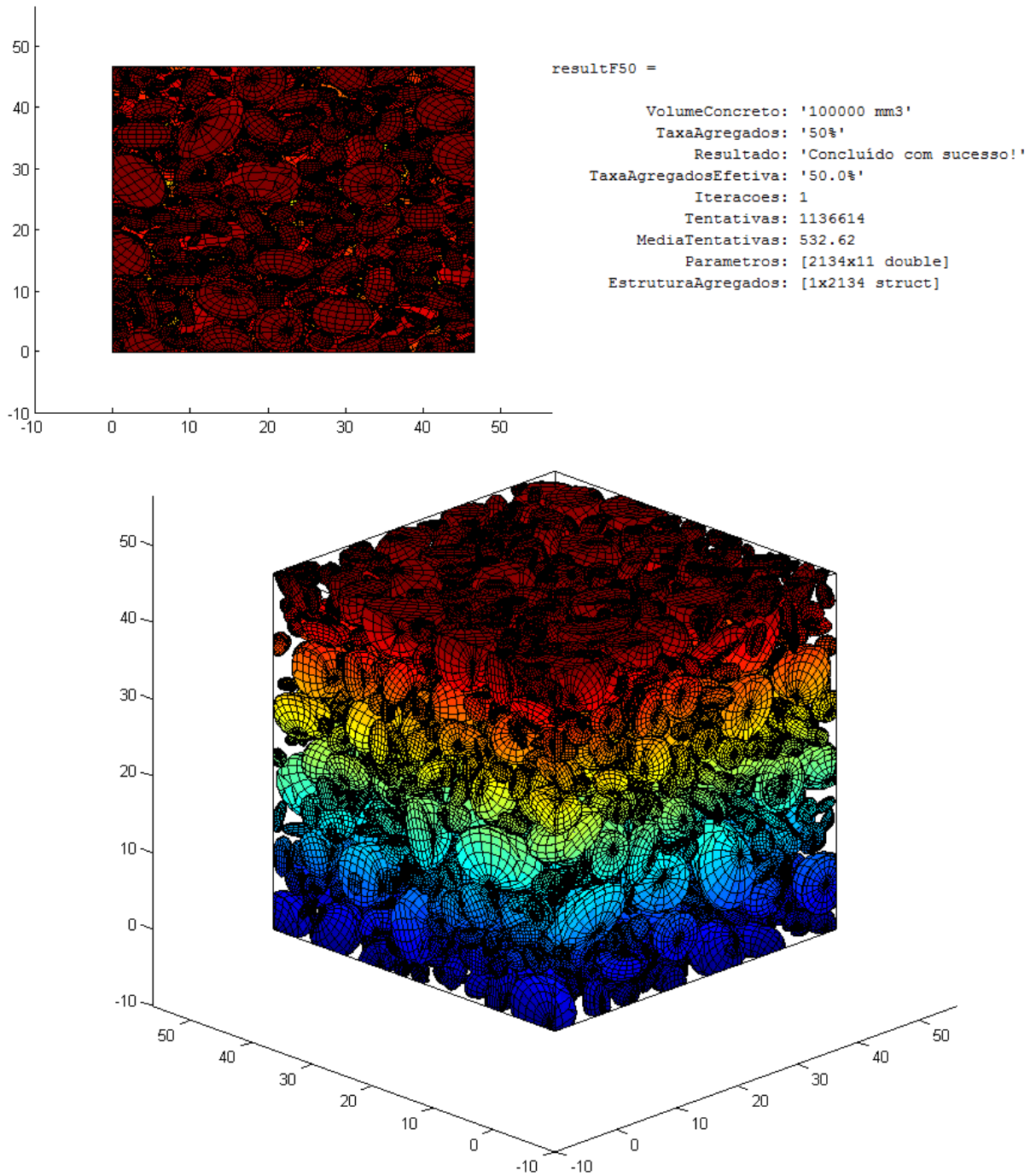
Figura 34 – RVE com 45% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



4.5 ELEMENTO COM 50% DE FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Na Figura 35, um exemplo com 50% de fração volumétrica.

Figura 35 – RVE com 50% de fração volumétrica. Fonte: acervo pessoal.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de modelos computacionais para a previsão e monitoramento do envelhecimento de estruturas de concreto depende do aprimoramento de *softwares* que procurem reproduzir fielmente os sistemas físicos reais. Buscou-se no presente trabalho contribuir com os estudos na área por meio do desenvolvimento, baseado na literatura técnica, de um algoritmo que gerasse de maneira aleatória os agregados em um elemento de volume representativo. Os RVEs gerados servirão como parâmetro de entrada para o estudo das propriedades do material e análise de tensões utilizando-se uma abordagem multiescala.

Verificou-se a viabilidade de se utilizar elipsoides como aproximação da forma dos agregados graúdos, visto que são superfícies com formulação bem definida. Admitiu-se como hipótese simplificadora apenas a aproximação geométrica, não sendo consideradas outras propriedades dos agregados, como rugosidade ou aspectos geométricos que influenciem na absorção, por exemplo. A formulação adotada foi suficiente para garantir o posicionamento de maneira aleatória utilizando uma distribuição uniforme e para se adotar um mecanismo que evitasse a superposição entre as novas quádricas e aquelas já existentes no RVE.

Também foi objetivo no presente trabalho o aprimoramento do método *take-and-place* especificamente no ajuste geométrico de inclusões que fossem posicionadas próximo às faces do RVE. De tal forma, elimina-se a simplificação que consiste em apenas posicionar o agregado caso esteja completamente no interior do elemento. Contudo, quando se define o centro da quádrica, este ainda deve estar localizado dentro dos limites do RVE. O mesmo processo de ajuste geométrico também pode ser utilizado quando se estiver realizando o ajuste das zonas de transição que, porventura, estejam colidindo. Logo, foi satisfeita uma condição necessária para se viabilizar a inserção desta terceira fase do material no modelo, haja vista a sua importância quando se trata da resistência do concreto.

A definição da geometria da zona de transição foi o terceiro objetivo deste trabalho. Para alcançá-lo, foi necessária a utilização de todos os métodos supracitados: seu posicionamento depende da posição do agregado (formas concêntricas); sua dimensão depende de valor estipulado pelo usuário; caso extrapole os limites do RVE, adota-se o processo de ajuste geométrico desenvolvido neste trabalho; caso colida com alguma outra zona de transição, verificando-se este fato com o processo de detecção de colisão entre quádricas, sinaliza-se para modificação de sua geometria; por último, realiza-se a detecção de interseção entre segmentos de plano, que foi a aproximação numérica necessária para viabilizar o algoritmo, ajustando os pontos necessários.

Apesar dos avanços obtidos, é possível listar recomendações para futuros trabalhos. Em primeiro lugar, sugere-se o desenvolvimento de um algoritmo que permita alterar a função densidade de probabilidade para a definição das coordenadas do centro, pois acredita-se que este aprimoramento resultará em um menor número de tentativas e, conseqüentemente, em redução de esforço computacional e tempo de processamento. Recomenda-se também a pesquisa de um critério mais eficiente para a detecção de colisão entre quádricas, pelos mesmos motivos já mencionados. Acredita-se na importância de se implementar neste algoritmo técnicas de detecção de equações que descrevam a interseção entre quádricas e entre quádricas e planos, pois, mesmo que haja a possibilidade de não existir ganhos relevantes em tempo de processamento, geometricamente poderá se trabalhar com mais versatilidade o aspecto e os detalhes quando for necessário modificar os elipsoides. Por último, recomenda-se o desenvolvimento de modelos que incluam outras propriedades relevantes dos agregados graúdos, aproximando ainda mais a representação do sistema físico real, bem como a inserção de relações entre as características do agregado e parâmetros como, por exemplo, a espessura da zona de transição.

Espera-se que as contribuições aqui presentes sejam úteis no avanço da análise multiescala do concreto, servindo como mais um instrumento na segurança de grandes empreendimentos já existentes e futuros. Procurou-se estabelecer uma organização lógica nos resultados do processamento visando a praticidade quando necessário incorporar os dados nas ferramentas de análise. Portanto, acredita-se que o trabalho desenvolvido seja útil no âmbito da engenharia, cooperando para a pesquisa, desenvolvimento e inovação.

REFERÊNCIAS

Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL, Brasil). **Atlas de energia elétrica do Brasil**. Brasília: ANEEL, 2002. 153p.

AYDIN, A. C.; ARSLAN, A.; GÜL, R. Mesoscale simulation of cement based materials' time-dependent behavior. **Computational Materials Science**, n. 41, pp.20-26, abr. 2007.

CABALLERO, A.; LÓPEZ, C. M.; CAROL, I. 3D meso-structural analysis of concretespecimens under uniaxial tension, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, n. 195, pp. 7182-7195, maio 2005.

GARBOCZI, E. J. Three-dimensional mathematical analysis of particle shape using X-ray tomography and spherical harmonics: application to aggregates used in concrete. **Cement and Concrete Research**, n. 32, pp. 1621-1638, abr. 2002.

GRIGORIU, M.; GARBOCZI, E.; KAFALI, C. Spherical harmonic-based random fields for aggregates used in concrete. **Powder Technology**, n. 166, pp. 123-138, jul. 2006.

HÄFNER, S. *et al.* Mesoscale modeling of concrete: geometry and numerics. **Computers and Structures**, n. 84, pp. 450-461, dez. 2005.

Itaipu Binacional. **Itaipu binacional: a maior geradora de energia limpa e renovável do planeta**. Disponível em: <http://www.itaipu.gov.br>. Acesso em: 30 ago. 2014.

KIM, S. M.; AL-RUB, R. K. A. Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites. **Cement and Concrete Research**, n. 41, pp. 339-358, dez. 2011.

KLEIN, P. P. On the ellipsoid and plane intersection equation. **Applied Mathematics**, n. 3, pp. 1634-1640, nov. 2012.

LEITE, J. P. B.; SLOWIK, V.; APEL, J. Computational model of mesoscopic structure of concrete for simulation of fracture processes. **Computers and Structures**, n. 85, pp. 1293-1303, jan. 2007. Figura.

LEITE, J. P. B.; SLOWIK, V.; MIHASHI, H. Computer simulation of fracture processes of concrete using mesolevel models of lattice structures. **Cement and Concrete Research**, n. 34, pp. 1025-1033, nov. 2003.

LEON, S. J. **Linear algebra with applications**. 8.ed. Nova Jersey: Pearson Education, 2010. 490p.

MADEIRA, D. A [sic] centroide de um polígono. **Dan Scientia**. Disponível em: <http://dan-scientia.blogspot.com.br/2009/10/centroide-de-um-poligono.html>. Acesso em: 14 abr. 2014. Blog.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: microstructure, properties and materials**. Berkeley: University of California, 2006.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. Amsterdam: Elsevier, 1999. 786p.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 4.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. pp. 41-44. Rotações finitas.

PIANEZZER, G. A. **Geração do elemento representativo do concreto com agregados graúdos em formato elíptico**. Curitiba: UFPR, 2012. 85p. Dissertação.

SANTOS, R. J. **Matrizes, vetores e geometria analítica**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012. 657p.

SCANDIUZZI, L.; ANDRIOLO, F. R. **Concreto e seus materiais: propriedades e ensaios**. São Paulo: PINI, 1986.

SONG, Z.; LU, Y. Mesoscopic analysis of concrete under excessively high strain rate compression and implications on interpretation of test data. **International Journal of Impact Engineering**, n. 46, pp. 41-55, fev. 2012.

SOUTIS, C.; BEAUMONT, P. W. R. **Multi-scale modelling of composite material systems: the art of predictive damage modelling**. [S.l.]: Woodhead publishing in Materials, 2005.

TEIXEIRA, M. R. **Uma contribuição para a modelagem numérica da heterogeneidade do concreto com o Método de Galerkin Livre de Elementos**. São Paulo: USP, 2012. 102p. Tese.

WANG, Z. M.; KWAN, A. K. H.; CHAN, H. C. Mesoscopic study of concrete I – generation of random aggregate structure and finite element mesh, **Computers and Structures**, n. 70, pp. 533-544, ago. 1998.

WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. O. Mesoscale models for concrete: homogenisation and damage behaviour. **Finite Elements in Analysis and Design**, n. 42, pp. 623-636, jan. 2006.

YU, Y.; CUI, J.; HAN, F. An effective computer generation method for the composites with random distribution of large numbers of heterogeneous grains. **Composites Science and Technology**, n. 68, pp. 2543-2550, maio 2008.

ZHOU, X. Q.; H. HAO. Mesoscale modelling and analysis of damage and fragmentation of concrete slab under contact detonation. **International Journal of Impact Engineering**, n. 36, pp. 1315-1326, maio 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA MATRIZ DISCRIMINANTE DE UM ELIPSOIDE A PARTIR DA SUA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Segundo LEON (2010), a Equação (A.1) é a expressão que define uma quádriga, grupo de superfícies no qual estão incluídos os elipsoides.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (\text{A.1})$$

A Equação (A.1) é obtida efetuando-se o produto entre matrizes, conforme a Equação (A.2), na qual o vetor \mathbf{x} representa as coordenadas homogêneas, conforme a Equação (A.3), e a matriz \mathbf{K} é a matriz discriminante, que pode ser entendida como a matriz de coeficientes que definem o elipsoide, sendo apresentada na Equação (A.4).

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A solução do problema consiste em se determinar os elementos k_i , relacionando-os aos coeficientes da Equação (A.1); procedendo de tal forma, estará se definindo a matriz discriminante do elipsoide.

Substituindo as Equações (A.3) e (A.4) na (A.2) e efetuando o produto entre as matrizes, obtém-se a Equação (A.5).

$$\begin{aligned} &k_1x^2 + (k_2 + k_5)xy + k_6y^2 + (k_3 + k_9)xz + (k_7 + k_{10})yz + k_{11}z^2 + \dots \\ &\dots + (k_4 + k_{13})x + (k_8 + k_{14})y + (k_{12} + k_{15})z + k_{16} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Comparando as Equações (A.1) e (A.5), obtêm-se as Equações (A.6). Desta forma, a matriz \mathbf{K} pode ser representada conforme a Equação (A.7), sendo definida, portanto, a matriz discriminante do elipsoide.

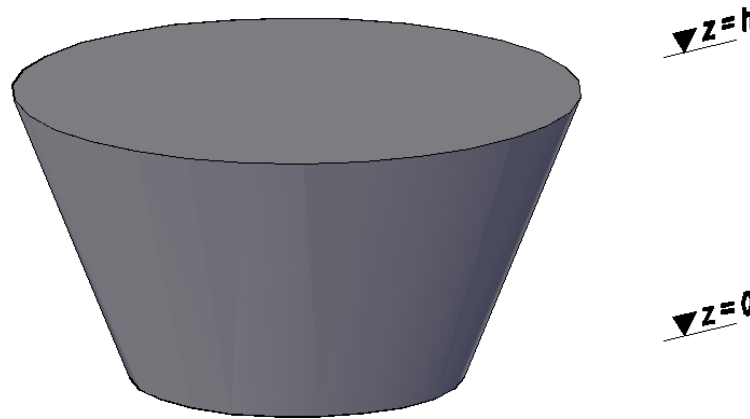
$$\left\{ \begin{array}{l} A = k_1 \\ B = k_2 + k_5 \\ C = k_6 \\ D = k_3 + k_9 \\ E = k_7 + k_{10} \\ F = k_{11} \\ G = k_4 + k_{13} \\ H = k_8 + k_{14} \\ I = k_{12} + k_{15} \\ J = k_{16} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 & G/2 \\ B/2 & C & E/2 & H/2 \\ D/2 & E/2 & F & I/2 \\ G/2 & H/2 & I/2 & J \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO (26), PARA CÁLCULO APROXIMADO DE VOLUME, CONSIDERANDO CASOS DE VARIAÇÃO LINEAR

Considere-se o problema de determinar o volume de um sólido sabendo que sua seção transversal, posicionada ortogonalmente a um eixo orientado para cima, possui uma lei de variação linear (Figura 36) e conhecendo inicialmente as áreas nas cotas inicial (cota zero) e final (cota h) (S_1 e S_2 , respectivamente).

Figura 36 – Problema de determinação de volume. Fonte: acervo pessoal.



Suponha-se que o volume do sólido seja a soma de volumes infinitesimais, cada um deles sendo calculado conforme a Equação (B.1). O somatório destes volumes infinitesimais pode ser calculado pela integração em z da função área, $S(z)$, como observado na Equação (B.2), onde h representa a cota até onde se deseja conhecer o volume.

$$dV = S \cdot dz \quad (\text{B.1})$$

$$V = \int_0^h S(z) dz \quad (\text{B.2})$$

A função $S(z)$ é de grau um, possuindo dois coeficientes a serem determinados (Equação (B.3)). Como são conhecidas as áreas nas cotas inicial e final, é possível chegar aos resultados da Equação (B.4).

$$S(z) = \alpha z + \beta \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} \beta = S_1 \\ \alpha = \frac{S_2 - S_1}{h} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as Equações (B.3) e (B.4) na (B.2) e integrando, obtém-se a (B.5), que, finalmente, resultará na (B.6), demonstrando, portanto, o resultado da Equação (26).

$$V = \left[\frac{S_2 z^2}{2h} - \frac{S_1 z^2}{2h} + S_1 z \right]_0^h \quad (\text{B.5})$$

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h \quad (\text{B.6})$$