



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

CAIO RAFAEL MIRANDA DA SILVA

TAMIRIS DA COSTA SOUSA

**A APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS À GEOMETRIA: EM BUSCA DE UM TESOURO  
PERDIDO DO SÉCULO XX.**

BRAGANÇA-PA

2023

CAIO RAFAEL MIRANDA DA SILVA

TAMIRIS DA COSTA SOUSA

**A APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS À GEOMETRIA: EM BUSCA DE UM TESOURO  
PERDIDO DO SÉCULO XX.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Dr. Elizardo Fabrício Lima Lucena

BRAGANÇA-PA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S586a Silva, Caio.  
A aplicação dos complexos à geometria : Em busca de um  
tesouro perdido do século xx / Caio Silva, Tamiris Sousa. — 2023.  
52 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Elizardo Lucena  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Pará, , 3, Bragança, 2023.

1. Números Complexos . 2. Aplicação dos complexos à  
Geometria . 3. Ilha do Tesouro . I. Título.

CDD 512.788

---

CAIO RAFAEL MIRANDA DA SILVA

TAMIRIS DA COSTA SOUSA

**A APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS À GEOMETRIA: EM BUSCA DE UM TESOURO  
PERDIDO DO SÉCULO XX.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Faculdade de Matemática, do Campus  
Universitário de Bragança, da Universidade  
Federal do Pará, como requisito para obtenção  
do grau de Licenciado(a) em Matemática.

Data da aprovação: 06/07/2023

Conceito: Excelente.

**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena.  
Orientador – UFPA



Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosario Miranda.  
Examinador Externo – UFPA



Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda.  
Examinador Interno – UFPA



## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos primeiramente a Deus, por ter nos ajudado nesta caminhada, dando forças para superar os diversos obstáculos. Em seguida, nossos mais sinceros e profundos agradecimento a todos os nossos familiares, por todo apoio e incentivo ao longo do curso.

Ao nosso orientador Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena que nos orientou e apoiou nesse processo de conclusão de curso. Aos professores, membros da banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosario Miranda e o Professor MSc. Nelson Ned. Nascimento Lacerda, por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho.

Aos nossos colegas de curso, em especial, ao Gilberto Gil Asevedo Pires Junior, o qual muito contribuiu para a realização deste trabalho. A esse respeito, não poderíamos deixar de agradecer à Eliane Cância Silva, Divanilce Campelo da Silva e a Kátia Batista Furtado, nossas queridas amigas e companheiras que compartilharam conosco muitos momentos de descoberta e aprendizados ao longo de todo o curso.

A Universidade Federal do Pará, Campus Bragança, bem como a todo o corpo docente da faculdade de Licenciatura em Matemática, agradecemos pelo maior bem do mundo: o conhecimento. Agradecemos a cada um, que juntos, contribuem para a existência dessa Instituição de Ensino, e, sobretudo, contribuíram para nossa formação acadêmica.

*“Suas ideias podem mudar o mundo.”*

(CAMERON, CODY; PEARN, KRIS; TÁ CHUVENDO HAMBÚRGUER 2, 2013)

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo uma Aplicação dos Complexos à Geometria. A esse respeito, partimos inicialmente do caráter histórico e seu desenvolvimento ao longo tempo acerca dos Números Complexos, com intuito de entender quais foram as primeiras pessoas que buscaram compreender e contribuir para essa parte tão fascinante da matemática. Em seguida, abordaremos de forma detalhada suas definições e propriedades, relacionando os conceitos algébricos, além de uma atenção especial ao aspecto geométrico e trigonométrico, pois, tudo isso, nos ajudará a resolver alguns impasses matemáticos. Por fim, este trabalho buscar solucionar um problema de geometria, motivado pela busca de um tesouro.

**Palavras-chave:** Números Complexos; Aplicação dos Complexos à Geometria; Ilha do Tesouro de Barbeau.

## ABSTRACT

This course completion work aims at an Application of Complexes to Geometry. In this regard, we initially start from the historical character and its development over time about Complex Numbers, in order to understand who were the first people who sought to understand and contribute to this fascinating part of mathematics. Then, we will approach in detail its definitions and properties, relating the algebraic concepts, in addition to paying special attention to the geometric and trigonometric aspect, since all this will help us to solve some mathematical impasses. Finally, this work seeks to solve a geometry problem, motivated by the search for a treasure.

**Keywords:** Complex numbers; Application of Complexes to Geometry; Barbeau's Treasure Island.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: O conjunto dos Reais é um subconjunto dos Complexos .....	21
Figura 2: Imagem de $M(Z)$ , $M'(Z)$ e $M''(-Z)$ .....	26
Figura 3: Interpretação Geométrica do Módulo .....	27
Figura 4: Círculo de raio 1 e centro na origem .....	27
Figura 5: Vetores $OM_1 (Z_1) + OM_2 (Z_2)$ .....	28
Figura 6: Vetores $OM (8 + 5i)$ .....	28
Figura 7: Vetor $OM (4 + 4i)$ .....	29
Figura 8: Vetor $OM (-7 - i)$ .....	30
Figura 9: Vetor $OM (5 + 1i)$ .....	30
Figura 10: Múltiplo positivo e negativo do vetor associado a $Z$ .....	31
Figura 11: Vetor $OM' (4 + 6i)$ .....	32
Figura 12: Vetor $OM' (8 - 6i)$ .....	32
Figura 13: Compreensão das Coordenadas Polares .....	33
Figura 14: Interpretação Geométrica do Seno e Cosseno .....	34
Figura 15: Representação polar de $Z$ .....	36
Figura 16: Imagem de $M_3(Z_1, Z_2)$ .....	40
Figura 17: Rotacionando o vetor no sentido anti-horário .....	40
Figura 18: Rotacionando o vetor no sentido horário .....	40
Figura 19: Tesouro enterrado no ponto médio $X$ .....	41
Figura 20: A palmeira não existe.....	42
Figura 21: Encontrando o ponto $X$ através da álgebra e dos vetores .....	42
Figura 22: Ponto $P$ e ponto $B$ .....	44
Figura 23: Segmento $PB$ e sua Perpendicular .....	45
Figura 24: Circunferência com centro em $B$ .....	45
Figura 25: Pontos de interseção da reta perpendicular .....	46
Figura 26: Ponto $A$ .....	46
Figura 27: Segmento $PA$ .....	47
Figura 28: Perpendicular ao segmento $PA$ .....	47
Figura 29: Circunferência com centro em $A$ .....	48
Figura 30: Pontos de interseção da reta perpendicular da circunferência de centro $A$ .....	48
Figura 31: Reta que liga os pontos $M$ e $N$ .....	49
Figura 32: Ponto médio, $X$ .....	49
Figura 33: Ocultando os traços de apoios.....	50

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Sobre os Números .....</b>	<b>12</b>
<b>1.2 As Equações Algébricas.....</b>	<b>13</b>
<b>1.3 Histórias dos Complexos .....</b>	<b>15</b>
<b>1.4 Fórmula de Cardano .....</b>	<b>17</b>
<b>2 NÚMEROS COMPLEXOS.....</b>	<b>21</b>
<b>2.1 Números Complexos .....</b>	<b>21</b>
2.1.1 Conjugado de um Número Complexo .....	24
2.1.2 Módulo de um Número Complexo .....	25
<b>2.2 Imagem Geométrica de um Número Complexo.....</b>	<b>26</b>
2.2.1 Interpretação Geométrica do Módulo.....	27
2.2.2 Interpretação Geométrica das Operações Algébricas .....	28
2.2.3 Múltiplos Real de um Número Complexo.....	31
<b>3 A APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS À GEOMETRIA .....</b>	<b>33</b>
<b>3.1 As Coordenadas Polares no Plano .....</b>	<b>33</b>
3.1.1 A Representação Polar de um Número Complexo .....	35
3.1.2 Operações com Números Complexos na Representação Polar .....	37
3.1.3 Interpretação Geométrica da Multiplicação .....	39
<b>4 ILHA DO TESOURO .....</b>	<b>41</b>
<b>4.1 Ilha do Tesouro .....</b>	<b>41</b>
<b>4.2 Problema da Ilha do Tesouro Aplicado ao Geogebra .....</b>	<b>44</b>
4.2.1 Reproduzindo a Ilustração do Problema no Geogebra .....	44
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>50</b>
<b>6 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>51</b>

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a história dos Números Complexos e o desenvolvimento desse conjunto ao longo do tempo, bem como o pensamento dos nossos antepassados que foram grandes responsáveis pelas descobertas citadas neste trabalho.

O conjunto dos Números Complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. Dessa forma, é necessário compreendermos os processos das operações básicas os quais constituem esse conjunto: aritmética, as relações de trigonometria e as noções dos cálculos algébricos. A partir dessa compreensão, o conjunto dos Números Complexos nos promovem técnicas alternativas de demonstração e resolução de problemas, resgatando conceitos e atribuindo significados. Sendo assim, vamos usar desse artifício para solucionarmos o empecilho apresentado por Barbeau (1989).

O problema original relatado por Barbeau (1989) apresenta instruções para a descoberta de um tesouro enterrado em uma ilha. A dificuldade está no fato de ser desconhecido o ponto de partida para essa descoberta. A partir dessa ideia, de não conhecer o ponto inicial da busca, propõe-se utilizando Números Complexos, solucionar este problema. Naturalmente esse trabalho tem a preocupação de trazer pontos importantes e detalhes sobre o conjunto dos números complexos permitindo ao leitor uma compreensão com mais significado.

No primeiro capítulo, intitulado História dos Números Complexos, relatamos os acontecimentos que culminaram no aparecimento dos números complexos, assim como a contribuição de diversos matemáticos nesse processo e os problemas de aceitação pelos quais esses números passaram em diferentes momentos da história.

Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos ao leitor de forma detalhada as definições, as propriedades, as proposições e teoremas em relação aos Números Complexos.

No capítulo três, abordaremos o estudo do aspecto geométrico e trigonométrico dos Números Complexos. Tal fato, nos ajudará a solucionar o impasse acerca do clássico problema do Mapa do Tesouro de Barbeau (1989), no capítulo quatro.

Por fim ilustraremos através da geometria dinâmica do software geogebra o mesmo problema, de maneira mais esclarecedora.

# Capítulo 1

## HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo discorreremos sobre a história dos Números Complexos, bem como o desenvolvimento do pensamento dos nossos antepassados que foram grandes responsáveis pelas descobertas citadas neste trabalho, visto que em algumas áreas da matemática, ao tentar resolver problemas é muito provável nos depararmos com questões que envolvam soluções com raízes quadradas negativas. Atualmente, sabemos que usando o conjunto dos Números Complexos é possível resolvê-los. Segundo Neto (2009), demonstrar como um número ao quadrado pode ter resultado negativo sucedeu uma das aplicações dos números complexos, esta questão foi descoberta pelo matemático Rafael Bombelli<sup>1</sup> (1526-1572) buscando uma tentativa de resolução de uma equação polinomial de terceiro grau onde a possível solução envolvia raiz quadrada de um conjunto negativo. Esse dilema continuou aparecendo até o século XVIII e não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes, na época- símbolos sem significado-manipuladas de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que às vezes não podiam ser obtidos de outra maneira.

### 1.1 Sobre os Números

A evolução numérica na civilização iniciou-se nos tempos mais remotos da humanidade, no qual nossos antepassados já possuíam uma noção de número, eram capazes de ver a diferença entre variações de quantidade, tanto para mais quanto para menos. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se indispensáveis a contagem simples. Assim, surgiu a Matemática, com o objetivo de formalizar tudo aquilo que pensamos, escrevemos ou enumeramos.

O número é um conceito fundamental em Matemática que foi construído numa longa história. Existem evidências arqueológicas de que o homem, já há 50.000 anos, era capaz de contar. O número e a Matemática nasceram e se desenvolveram juntos e tanto as atividades práticas do homem e das sociedades quanto àquelas intrínsecas à Matemática, como ciência, foram determinadas na evolução deste conceito. A necessidade de contar objetos deu origem ao número natural e todas as civilizações que criaram alguma forma de linguagem escrita desenvolveram símbolos para o número natural e operaram com eles. (CARNEIRO, 2008). Passado o tempo em que o pensamento do homem era puramente rudimentar, teve uma

---

<sup>1</sup> Rafael Bombelli, matemático (1526 - 1572)

evolução nas capacidades de raciocínio, lhe permitindo a ideia de divisão juntamente com as demais operações matemáticas.

Desta forma, conhecemos o conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) que são exatamente os que nos ajudam a quantificar as coisas, contar os dedos da mão, os dias do mês, as horas ou até mesmo contar mercadorias. Logo, surgiu a necessidade de criar os inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) que englobam também os números negativos, são aqueles que nos ajudam a saber quanto estamos devendo, por exemplo. Os números racionais ( $\mathbb{Q}$ ) vieram para nos auxiliar em casos de partilha quando temos que dividir algo, ideia usada até pelos antigos, quando precisavam partilhar alimentos, entre outros. Temos os irracionais ( $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ), que é um conjunto disjunto com os racionais, ou seja, nenhum elemento dos irracionais é racional. Logo temos o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) que formam o conjunto que engloba todos os conjuntos citados anteriormente.

No processo evolutivo da matemática, nos deparamos com os números negativos, os quais demandaram um tempo significativo para serem percebidos. Sabe-se apenas que o surgimento dos números negativos aconteceu na China (BOYER, 2012). Posteriormente, os povos hindus utilizaram os negativos, logo após foram os árabes, mas os números negativos demoraram a ser admitidos, bem como no restante dos povos, havendo uma grande rejeição por parte dos matemáticos até meados do século XII.

## 1.2 As Equações Algébricas

Resolver equações sempre foi um assunto que fascinou matemáticos ao longo da história. Os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do 2º grau baseados no que hoje chamamos de “complemento de quadrado”.

Os matemáticos gregos resolviam algumas equações de segundo grau por meio de construções, utilizando régua e compasso. Segundo Silveira (2005), os antigos gregos não conheciam a Álgebra abstrata e seu raciocínio matemático. As suas provas e as suas demonstrações eram geométricas.

De acordo com o matemático Garbi (2009), os primeiros a realizar tentativas de métodos de resolução das equações de grau três foram os babilônios, os mesmos criavam espécies de tabelas com raízes cúbicas para auxiliar na busca de equações do terceiro grau.

Uma equação é uma sentença aberta que envolve uma igualdade entre duas expressões Matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis. Desta forma, podemos definir equações algébricas como sendo toda equação redutível na forma, em que  $p(x)$  é um polinômio de grau  $n \leq 1$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo, os coeficientes são Números

Complexos e a variável  $x$  também é complexa, isto é,  $x$  pode ser substituída por um número complexo qualquer.

Logo pode ser expressa da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

Onde o maior expoente determina o grau da equação. O teorema demonstrado pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) diz que toda equação polinomial de grau  $n$ , irá admitir exatamente  $n$  raízes complexas. São exemplos de equações algébricas:

$$ax + b = 0$$

$$ax^2 + by + c = 0$$

$$3x^2 + 17x - 15 = 0$$

A necessidade da utilização de notações mais desenvolvidas começou a se acentuar quando os povos começaram a sentir outras necessidades que a Matemática até então não resolvia, enquanto os egípcios começavam a resolver equações algébricas de primeiro grau (e algumas exceções de equações de segundo grau), os babilônios já possuíam suas formas gerais que resolviam algumas equações.

Garbi<sup>2</sup> (2009) relata que por volta do século XVIII *a.c*, os matemáticos resolviam equações quadráticas sem nenhuma demonstração, eles representavam a solução como se fosse uma prescrição e aplicavam para diferentes problemas. Quando pensamos na resolução de equações polinomiais do segundo grau, imediatamente lembramos a fórmula de resolução das equações quadráticas ou fórmula resolvente das equações polinomiais de grau dois. De acordo com Carneiro (2015), a tal fórmula foi criada pelo matemático hindu Sridhara<sup>3</sup> no século XI, mas foi publicada somente por Leonardo Fibonacci<sup>4</sup> (1175-1250), mais conhecido como Fibonacci, em sua obra chamada Liber Abaci. Ele a publicou com o objetivo de substituir os algarismos romanos, que de certa forma, acabavam sendo pouco úteis para o desenvolvimento das resoluções das equações algébricas. A fórmula, nos garante que dada a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração da fórmula da equação quadrática pelo método de completar quadrados de forma algébrica.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

---

<sup>2</sup> Gilberto Geraldo Garbi, Engenheiro eletrônico (1623)

<sup>3</sup> Sridhara Acharya, matemático indiano (870-930 d.c)

<sup>4</sup> Leonardo Fibonacci, matemático italiano (1175-1250)

$$\begin{aligned}
a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= 0a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = 0 \\
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c &= 0 \\
a\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right) + c &= 0 \\
ax + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= 0 \\
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{b^2 - \frac{4ac}{4a^2}} \\
x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - \frac{4ac}{4}} \\
x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\
x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Dependendo da equação poderiam acontecer mais alguns casos. Considerando  $\Delta = b^2 - 4ac$ , se  $\Delta = 0$  só teríamos uma raiz real; se  $\Delta < 0$  não há raízes, porém, na época isso não afligia muito os matemáticos, pois eles apenas declaravam que não existia solução para aquela equação.

Carneiro (2015), afirma que o hábito de dar o nome de fórmula de Bhaskara para o algoritmo de resolução da equação de segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960, e aparentemente, é um costume só brasileiro, pois não se encontram nome de Bhaskara associado a esse algoritmo na literatura internacional, para o restante do mundo ela é apenas a fórmula resolvente de uma equação do segundo grau.

### 1.3 Histórias dos Complexos

Foi no meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram. Quando Fibonacci se tornou um matemático de grande reputação, o imperador romano Frederico II resolveu realizar uma disputa para testar os

conhecimentos de Leonardo, uma das propostas feitas, era encontrar por métodos euclidianos, um valor para  $x$  que satisfizesse a equação  $x^3 + 2x^2 + 10 - 20 = 0$ , Fibonacci conseguiu provar que não era possível encontrar as raízes por métodos euclidianos, entretanto o, mesmo determinou uma única raiz aproximada até a nona casa decimal, sendo ela 1,3688081075 (GARBI, 2009).

Houve outras tentativas de resolução das cúbicas, uma delas foi feita por Luca Bartolomeo de Pacioli<sup>5</sup>, que não obteve muito sucesso e chegou até a publicar que não havia solução para tal equação. Em meados de 1510, Scipione Del Ferro<sup>6</sup> acabou encontrando uma forma geral para resolução das cúbicas do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , mas acabou falecendo e revelou apenas para duas pessoas muito próximas dele, seu aluno Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave seu futuro genro.

Naquela época era muito comum que as pessoas desafiassem umas das outras para conseguir mérito por algo ou para ver quem era o mais inteligente, desta forma, eles conseguiam ter certeza da veracidade de suas teorias e divulgar seu nome em publicações. Com essa grande descoberta em mãos, Fiore, em 1535, desafia Nicolás Fontana, mais conhecido como Tartaglia, para uma disputa do método de resolução das equações de grau três, mas Tartaglia descobre que Antônio estava planejando e então começa buscar conhecimento e Carneiro (2015) afirma que, “no dia 10 de fevereiro de 1535, determinou um método de resolução das equações cúbicas do tipo  $x^3 + px + q = 0$  e também determinou um método de resolução das equações do tipo  $x^3 + px^2 + q = 0$ ”.

A notícia sobre a conquista de Niccoló logo se propaga, até que chega nos ouvidos de Girolano Cardano (1501-1576), filósofo, físico, matemático, médico, astrólogo e professor, também nascido na Itália, em Pavia. Nessa época, Cardano estava criando um livro sobre álgebra e pediu para que Tartaglia lhe revelasse qual era o tal método que resolvia as cúbicas para que ele pudesse publicar em sua obra. Tartaglia não concordou, pois queria fazer o mesmo. Cardano continuou insistindo para que Tartaglia lhe mostrasse o método, e após muitos juramentos que manteria segredo de tal fórmula, Nicolás resolve enviar o segredo em formato de poema.

Apesar do poema, Cardano não conseguiu decifrar o que Tartaglia havia escrito, então continuou insistindo na revelação do segredo, até que Tartaglia cede; porém, Cardano não

---

<sup>5</sup> Luca Bartolomeo de Pacioli, matemático italiano (1455-1514)

<sup>6</sup> Scipione Del Ferro, matemático italiano (1465-1526)

cumprir com a sua palavra e acaba publicando em uma de suas principais obras *Ars Magna*, o segredo da resolução das equações de terceiro grau.

## 1.4 Fórmula de Cardano

Sabemos resolver, quando possível, equações da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quando  $a, b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ . É comum usarmos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para encontrarmos suas soluções. Mas, quando  $b^2 - 4ac$  é um valor negativo, concluímos que a equação não tem solução no conjunto dos números reais. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

em  $\mathbb{R}$ , encontramos as soluções

$$x = -6 \pm \sqrt{\frac{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}{2}} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

e como o símbolo  $\sqrt{-16}$  não representa um número real, segue que a equação dada não tem solução em  $\mathbb{R}$ . Mas, sendo usado a operar com um novo símbolo, a saber  $\sqrt{-1}$ , como se fosse um número, ficaríamos com o resultado

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Qualquer um dos dois resultados será uma solução para a equação  $x^2 - 6x + 13 = 0$ , se tratarmos o símbolo  $\sqrt{-1}$  como um número com a particularidade que  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ . Vejamos o que acontece para  $x = 3 + 2\sqrt{-1}$  quando substituimos na equação dada:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (3 + 2\sqrt{-1})^2 - 6(3 + 2\sqrt{-1}) + 13 \\ &= 9 + 12\sqrt{-1} + 4(\sqrt{-1})^2 - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

O caso de  $x = 3 - 2\sqrt{-1}$  é análogo. Isto é, para  $x = 3 \pm 2\sqrt{-1}$  teríamos uma raiz para a equação. Assim, operando ousadamente com o símbolo como discutido acima, estaríamos encontrando uma solução para equações quadráticas que antes não tinha soluções.

Destacamos, no entanto, que o surgimento dos números complexos não está ligado às resoluções de equações algébricas do 2º grau cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. O surgimento dos números complexos está ligado diretamente à

resolução de equações algébricas do 3º grau. Quando equações do 2º grau apresentavam raízes quadradas de números negativos de imediato eram consideradas insolúveis (no conjunto dos números reais).

No início do século XVI, um grupo de matemáticos italianos procurava uma fórmula que desse as raízes das equações algébricas de 3º grau em função dos seus coeficientes (reais), semelhante à fórmula da equação do 2º grau.

Devemos lembrar que o método de resolução das cúbicas descoberto por Del Ferro e as demonstrações apresentadas por Tartaglia encontrava apenas uma raiz na equação de terceiro grau.

Ao considerarmos a equação  $x^3 = -15x - 4 = 0$ , podemos obter por métodos vistos no ensino básico testando as raízes da equação, por exemplo, que  $x = 4$  será solução da equação. E, ainda, se dividirmos a equação por  $x - 4$ , iremos encontrar outras duas soluções ( $x = -2 \pm \sqrt{3}$ ) da equação que serão números reais.

O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número  $\sqrt{2}$ , que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico, nascido na Itália, na cidade de Bolonha, em 1526 quem aplicou a fórmula da raiz quadrada de Cardano-Tartaglia para resolver a equação  $x^3 = -15x - 4 = 0$ , obtendo a equação  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  como solução (o que é diferente do resultado visto anteriormente), aparecendo uma raiz quadrada de número negativo.

Quando essas questões surgiram, os matemáticos não podiam simplesmente ignorá-las, pois, além da extração de raízes quadradas de números negativos, havia também uma extração de raízes de natureza desconhecida. E, por mais que nas resoluções de exercícios de equação polinomial do segundo grau levasse à raízes negativas, era comum dizer que a solução não existia. Agora, com a equação de grau três, não dava mais para se conectar com tal declaração.

Não dava mais para negar que os números usados não supriam as necessidades para explicar a matemática, como Cerri e Monteiro (2001) declararam em sua obra, assim como aconteceu no século XVI com os gregos antigos, onde se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número  $\sqrt{2}$ , que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Em 1545, Girolamo Cardano (1501-1576) publica uma fórmula, em seu livro *Ars Magna*, que dava a solução para a equação cúbica do tipo  $x^3 + px + q = 0$ . Tal fórmula era dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

conhecida hoje como Fórmula de Cardano - Tartáglia.

Observe que essa fórmula só se aplicava quando

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0,$$

para garantir a existência da raiz evitando assim a mesma situação das equações do 2º grau com raízes quadradas de números negativos.

Nesse contexto, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573) fez um estudo sobre a resolução de equações de grau inferior a quatro e resolvendo a equação  $x^3 - 15x = 4$ , verificou por inspeção que  $x = 4$  era solução da equação, pois  $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$ , mas, ao usar a fórmula de Cardano - Tartáglia para verificar se encontrava a mesma solução, ele obteve:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right) - \left(\frac{3375}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right) - \left(\frac{3375}{27}\right)}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \end{aligned}$$

Assim Bombelli chegou a um grande impasse, por um lado sabia-se que  $\sqrt{-121}$  não existia. Logo, a equação não teria solução. Por outro lado,  $x = 4$  era uma solução da equação, pois satisfazia a igualdade.

Para tratar essa questão, Bombelli passou a trabalhar com raízes quadradas de números negativos como se fosse números. Ele assume que o número  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  poderia ser representado da forma  $a + \sqrt{-b}$ , como  $a, b \in \mathbb{R}$ . Isto é, existem números reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Com isso, obteve que  $a = 2$  e  $b = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ x &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \end{aligned}$$

Assim encontrando a solução desejada. A fórmula com essa solução foi encontrada e considerada duvidosa. Mas o método funcionava, embora ninguém ainda podia explicar. Durante muito tempo trabalhou-se com essas raízes quadradas de números negativos, sempre com a sombra de dúvida da existência de tais números.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) propôs, em 1777, a utilização do símbolo  $i$  para representar  $\sqrt{-1}$  e avançou nos estudos de Bombelli. Euler também identificou as raízes da equação  $n = 1$  como sendo os vértices de um polígono regular de  $n$  lados e definiu a função exponencial no conjunto dos números complexos pela fórmula:  $e^{i\theta} = \cos\theta + \text{sen}\theta i$ .

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduziu a denominação número complexo e utilizou a representação geométrica deles por meio de pontos de um plano. Com essa representação Gauss usa os complexos para obter resultados sobre Geometria plana, sobre os números 5 reais e até sobre os números inteiros. Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois (o que equivale ao Teorema Fundamental da Álgebra).

Jean Robert Argand (1786-1822) e Caspar Wessel (1745-1818), utilizaram a representação dos números complexos como segmentos orientados conquistando maior aceitação no meio matemático. Tanto Wessel quanto Argand, perceberam que os números complexos podem ser operados algebricamente, como no caso de vetores. Além disso, nesta representação dos números complexos por vetores, a multiplicação por  $i$  representa uma rotação de  $90^\circ$ . Desse modo, Wessel e Argand imprime no conjunto dos números complexos a interpretação geométrica, em termos atuais, que a soma deles faz translações no plano, e que a multiplicação deles faz rotações e dilatações.

Em 1800, com Argand e Gauss usando um sistema de coordenadas retangulares (convencionando que eixo horizontal representaria os números reais, o eixo vertical representaria os números imaginários) e fazendo relacionar um complexo com um par ordenado; isto é,  $a + bi$  corresponderia ao par  $(a; b)$ , tem-se uma maior aceitação dos matemáticos da "existência" desses números. Com essas conversões um complexo  $a + bi$  representaria geometricamente um ponto (ou um vetor), nesse plano bidimensional que hoje é denominado de plano de Argand-Gauss.

## Capítulo 2

### NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo veremos um pequeno resumo do conjunto dos números complexos e, também, abordaremos algumas propriedades, cujo quais usaremos para resolvermos problemas de geometria a partir das notações oriundas dos números complexos. O que segue uma releitura de Oliveira (2014), o qual pode ser consultada para maior aprofundamento.

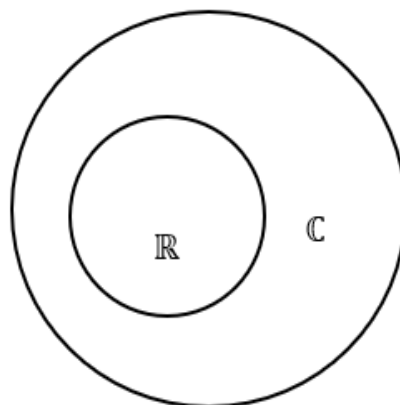
#### 1.5 Números Complexos

Dado um número complexo da forma  $Z = a + bi$ , dizemos que  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  chamamos de *unidade imaginária*. O símbolo  $i$ , cujo qual chamamos de *unidade imaginária*, representar a expressão  $\sqrt{-1}$  ou podemos definir por  $i^2 = -1$ . Além disso, dada um número complexo  $Z = a + bi$ , representamos  $Re(Z) = a$  e  $Im(Z) = b$  para dizer que  $a$  é *parte real* e  $b$  é a *parte imaginária* de  $Z$ . Ademais, um número complexo da forma  $Z = a + bi$ , onde  $a = 0, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $Z$  é um número imaginário puro.

Definimos como condições para que dois números complexos sejam iguais quando temos dois números complexos  $Z_1 = a_1 + ib_1$  e  $Z_2 = a_2 + ib_2$  e  $Z_1 = Z_2$ , isto é,  $a_1 = a_2$  e  $b_1 = b_2$ . Dessa forma, dizemos que  $Z_1 = Z_2$  se, e somente se,  $Re(Z_1) = Re(Z_2)$  e  $Im(Z_1) = Im(Z_2)$ .

O conjunto de todos os números complexos é representado pelo símbolo  $\mathbb{C}$ . A esse respeito, observamos que os números da forma  $Z = a + 0i$ , apenas possuem a parte real. Ou seja, temos que o conjunto dos números reais, cujo qual é representado pelo símbolo  $\mathbb{R}$ , é um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Observe a imagem abaixo:

Figura 1: O conjunto dos Reais é um subconjunto dos Complexos



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Dado dois números complexos,  $Z_1 = a_1 + ib_1$  e  $Z_2 = a_2 + ib_2$ , definimos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de dois números complexos da seguinte forma:

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1a_2 + ia_1b_2)(ib_1a_2 + ib_1b_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1a_2 + ia_1b_2)(ib_1a_2 + i^2b_1b_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1a_2 + ia_1b_2)(ib_1a_2 - b_1b_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + b_1b_2).$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1a_2 + ib_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \text{ onde } a_2 \neq 0 \text{ ou } b_2 \neq 0.$$

Vejamos que a soma de dois números complexos possui como resultado final um número complexo cuja parte real (a parte imaginária) é a adição das partes reais (imaginárias) dos números dados, isto é

$$Re(Z_1 + Z_2) = Re(Z_1) + Re(Z_2);$$

e

$$Im(Z_1 + Z_2) = Im(Z_1) + Im(Z_2).$$

Em relação à subtração, observe que

$$Re(Z_1 - Z_2) = Re(Z_1) - Re(Z_2);$$

e

$$Im(Z_1 - Z_2) = Im(Z_1) - Im(Z_2).$$

para a multiplicação, note que

$$Re(Z_1 \cdot Z_2) = Re(Z_1) \cdot Re(Z_2) - Im(Z_1) \cdot Im(Z_2);$$

e

$$Im(Z_1 Z_2) = Im(Z_1) \cdot Re(Z_2) + Im(Z_2) \cdot Re(Z_1).$$

Observe que a adição e a multiplicação possuem propriedades associativa, comutativa e também a distributividade da multiplicação quando comparado à adição, ou seja,

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1 \\ Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 Z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3 \\ Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 \end{cases}$$

$$\{Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$$

É importante pontuar acerca do elemento neutro da adição, cujo qual chamamos de Zero e podemos representar por  $0 = 0 + 0i$ . Agora, o elemento neutro da multiplicação é chamado de unidade e podemos representado por  $1 = 1 + 0i$ . Sendo assim, se  $Z = a + ib$ , temos que  $Z + 0 = Z$  e  $Z \cdot 1 = Z$ , isto é:

$$Z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = a + 0 + i(b + 0) = a + ib = Z.$$

e

$$Z \cdot 1 = Z \cdot (1 + 0i) = Z.$$

Veja que as potências  $i$  possuem um comportamento interessante. Porém, antes de falarmos acerca desse assunto com mais detalhes, observe o cálculo das sete primeiras potências inteiras  $i$ .

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1; & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; \\ i^1 = i; & i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i; \\ i^2 = -1; & i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1; \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i; & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot -i = -i. \end{array}$$

À vista desse cenário, observe que estas potências se repetem em ciclos de 4. O que torna este um fato muito interessante, ou seja,  $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$ . Sendo assim, podemos estabelecer uma regra para o cálculo de potências de  $i$ . Para isso, calculamos  $i^n$ , dividimos  $n$  por 4; se  $r$  é o resto dessa divisão, temos  $i^n = i^r$ . Com efeito, se  $q$  é o quociente da divisão,

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Para maior esclarecimento, observe o exemplo a seguir  $i^{1\ 845\ 357}$ . Onde devemos encontrarmos o resto da divisão de 1 845 357 por 4. Para encontrarmos o resto da divisão por 4, basta pegarmos os dois últimos algarismos formados, neste caso, 57. Ao dividir 57 por 4 temos resto 1, assim  $i^{1\ 845\ 357} = i^1 = i$ .

### 1.5.1 Conjugado de um Número Complexo

Quando temos  $Z = x + yi$  o número complexo  $\bar{Z} = x - yi$  é chamado conjugado de  $Z$ . Com isso, existem algumas propriedades que são importantes para a compreensão do conjugado de um número complexo. Veja na proposição a seguir:

**Proposição 2.1.1** As seguintes propriedades são satisfeitas em  $\mathbb{C}$ .

- I. A igualdade  $Z = \bar{\bar{Z}}$  é válida se, e somente se,  $Z \in \mathbb{R}$ .
- II. Para qualquer número complexo  $Z$ , a igualdade  $Z = \bar{\bar{Z}}$  é válida.
- III. Para qualquer número complexo  $Z$ , o número  $Z \cdot \bar{Z} \in \mathbb{R}$  é um número real não negativo.
- IV.  $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$  (o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados).
- V.  $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$  (o conjugado de um produto é o produto dos conjugados).
- VI. Para qualquer número complexo diferente de zero  $Z$  a igualdade  $\overline{Z^{-1}} = (\bar{Z})^{-1}$  é válida.
- VII.  $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$ ;  $Z_2 \neq 0$  (o conjugado de um quociente é o quociente entre os conjugados).
- VIII. Dado  $Z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Compreendido o conjugado de um número complexo e algumas de suas propriedades, podemos fazer a divisão de dois números complexos, tais como  $Z_1 = a_1 + ib_1$  e  $Z_2 = a_2 + ib_2$ , com  $Z_2 \neq 0$ . Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \left( \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

O leitor interessado pode consultar às demonstrações de I à VIII no livro: Os Fundamentos da Matemática Elementar e Trigonometria/Números Complexos.

### 1.5.2 Módulo de um Número Complexo

Podemos compreender o módulo de um número complexo da seguinte forma: o número  $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  é chamado o módulo do número complexo  $Z = x + yi$ . Para melhor entendimento, vejamos o exemplo a seguir:

Dados os números complexos  $Z_1 = 4i, Z_2 = 4 + 3i$ , e  $Z_3 = 1$

$$|Z_1| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4;$$

$$|Z_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{e}$$

$$|Z_3| = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1.$$

**Proposição 2.1.2** As seguintes propriedades de módulo de um número complexo são sempre satisfeitas:

- I.  $-|Z| \leq \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$  e  $-|Z| \leq \operatorname{Im}(Z) \leq |Z|$ .
- II.  $|Z| \geq 0$  para todo  $Z \in \mathbb{C}$ . Além disso,  $|Z| = 0$  se, e somente se,  $Z = 0$ .
- III.  $|Z| = |-Z| = |Z|$ .
- IV.  $Z\bar{Z} = |Z|^2$ .
- V.  $|Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$  (o módulo de um produto é o produto dos módulos).
- VI.  $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ .
- VII.  $|Z^{-1}| = |Z|^{-1}, Z \neq 0$ .
- VIII.  $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, Z_2 \neq 0$ . (o módulo de um quociente é o quociente entre os módulos).
- IX.  $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 - Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ .

O leitor interessado pode consultar às demonstrações de I à IX no livro: Os Fundamentos da Matemática Elementar e Trigonometria/Números Complexos

## 1.6 Imagem Geométrica de um Número Complexo

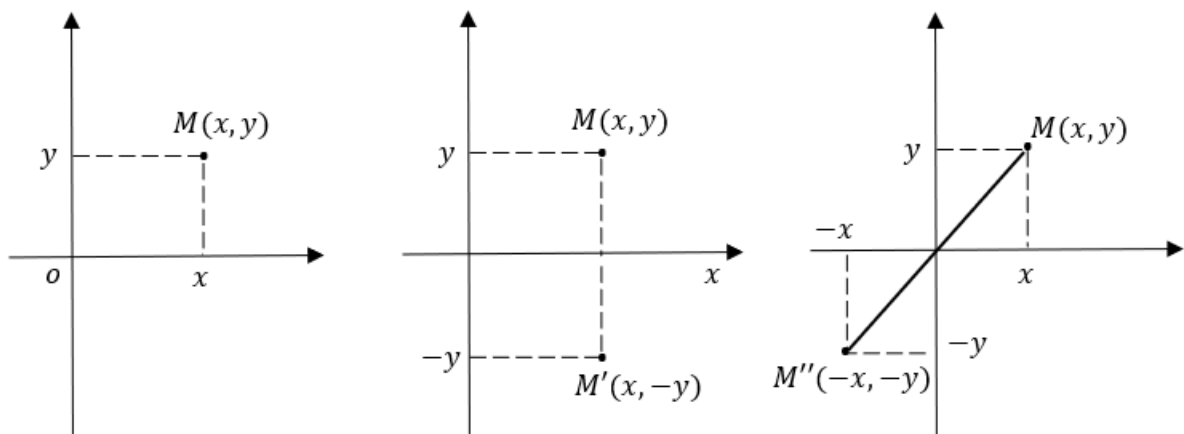
Podemos definir um complexo da forma  $Z = x + yi$  de par ordenado dos números reais  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  como imagem geométrica de  $Z$ . Sendo assim, um número complexo da forma  $Z = x + yi$  possui um ponto  $M = (x, y)$  no plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Para maior entendimento, vamos considerar  $M = (x, y)$  como sendo um ponto de um plano  $\Pi$  e suas coordenadas dadas num sistema coordenado  $xOy$ . Adotando a função bijetiva,

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow \Pi$$

$$Z \mapsto \phi(Z) = P$$

Definimos o ponto  $M = (x, y)$  como sendo a imagem geométrica de um complexo  $Z = x + yi$ . Ademais, chamamos um complexo da forma  $Z = x + yi$  de coordenada complexa do ponto  $M = (x, y)$ . Para facilitar a compreensão acerca do assunto, usaremos a notação  $M(Z)$  para indicar que  $P$  é o ponto com coordenada complexa  $Z$ . Observe as imagens abaixo para maior entendimento:

Figura 2: Imagem de  $M(Z)$ ,  $M'(Z)$  e  $M''(-Z)$



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Observe que imagem geométrica do conjugado  $\bar{Z}$  de um complexo  $Z = x + yi$  é o ponto  $M' = (x, -y)$ , cujo qual é obtido pela reflexão em relação ao eixo  $X$  do ponto  $M = (x, y)$  (ver figura 02). Agora, veja que a imagem geométrica do inverso aditivo  $-Z$  de um complexo  $Z = x + yi$  é o ponto  $M'' = (-x, -y)$ , cujo qual é obtido pela reflexão em relação à origem do ponto  $M = (x, y)$  (ver figura 02).

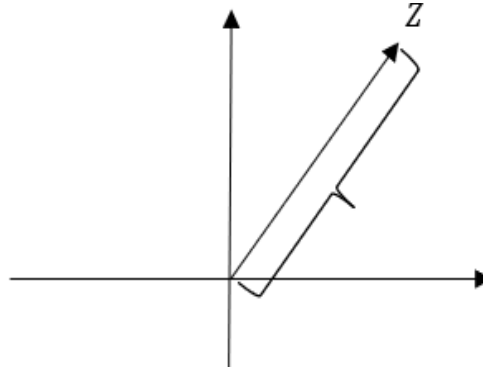
### 1.6.1 Interpretação Geométrica do Módulo

Seja  $Z = x + yi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , um número complexo. Chamamos módulo do complexo  $Z$  o número real

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente  $|Z|$  representa a distância do ponto  $(a, b)$  do complexo  $Z$  à origem do plano de Argand-Gauss.

Figura 3: Interpretação Geométrica do Módulo



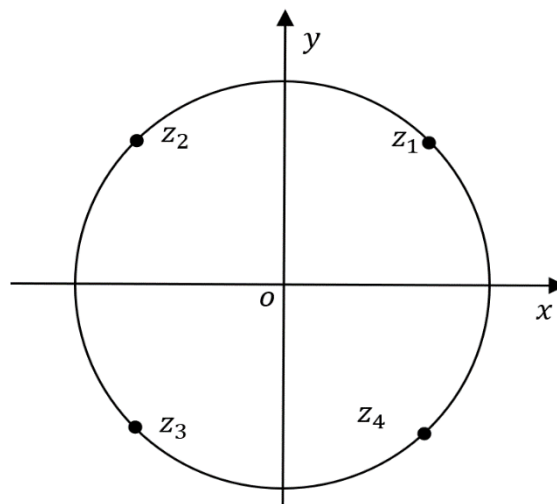
Fonte: Própria dos autores, (2023).

Observação: Para um número real  $r$  positivo, o conjunto dos números complexos com módulos  $r$  corresponde, no plano complexo, a um círculo  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ , que representamos por  $C(O, r)$ .

Dados os complexos  $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$ ;  $Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$ ;  $Z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$ ;  $Z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$ , podemos representá-los no plano complexo por quatro pontos no círculo unitário centrado na origem (ver Figura 04), onde

$$|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = |Z_4| = 1.$$

Figura 4: Círculo de raio 1 e centro na origem

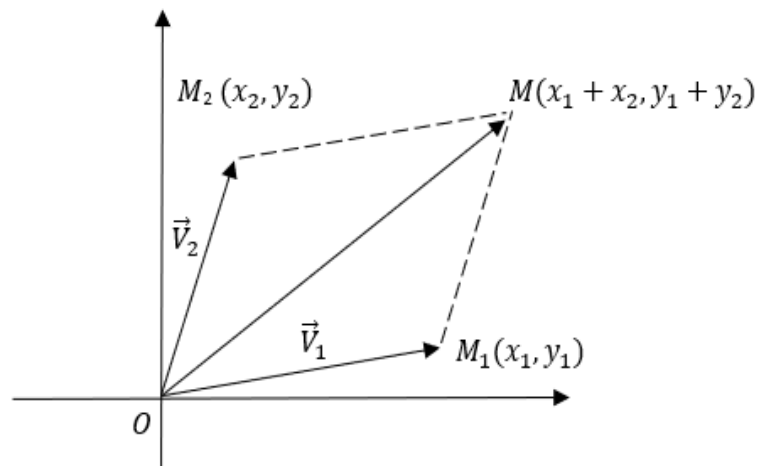


Fonte: Própria dos autores, (2023).

### 1.6.2 Interpretação Geométrica das Operações Algébricas

Ao somarmos e subtrairmos os complexos  $Z_1 = x_1 + y_1i$  e  $Z_2 = x_2 + y_2i$  e os vetores  $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  e  $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ , observe que a soma dos complexos é  $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ , assim como a soma dos vetores é  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ . Dessa forma, temos que a soma  $Z_1 + Z_2$  corresponde à soma  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ .

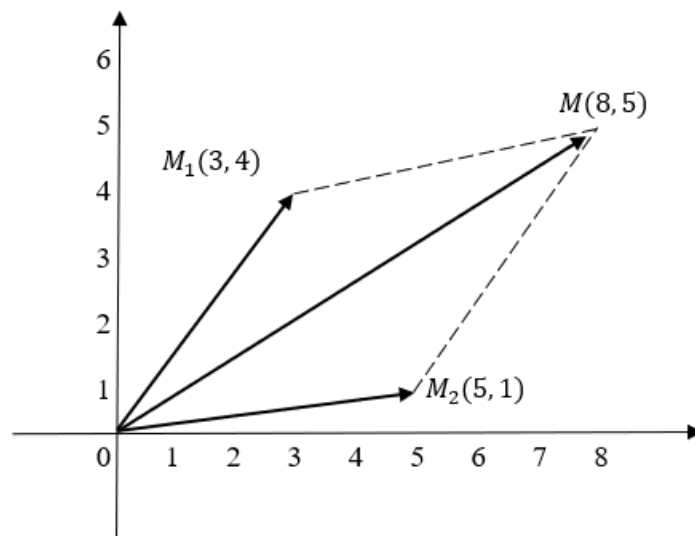
Figura 5: Vetores  $\vec{OM}_1(Z_1) + \vec{OM}_2(Z_2)$



Fonte: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2340/5/PDF%20-%20Stanley%20Borges%20de%20Oliveira.pdf>

Neste exemplo, temos que  $(3 + 4i) + (5 + i) = 8 + 5i$ , a imagem geométrica da soma é dado na figura abaixo:

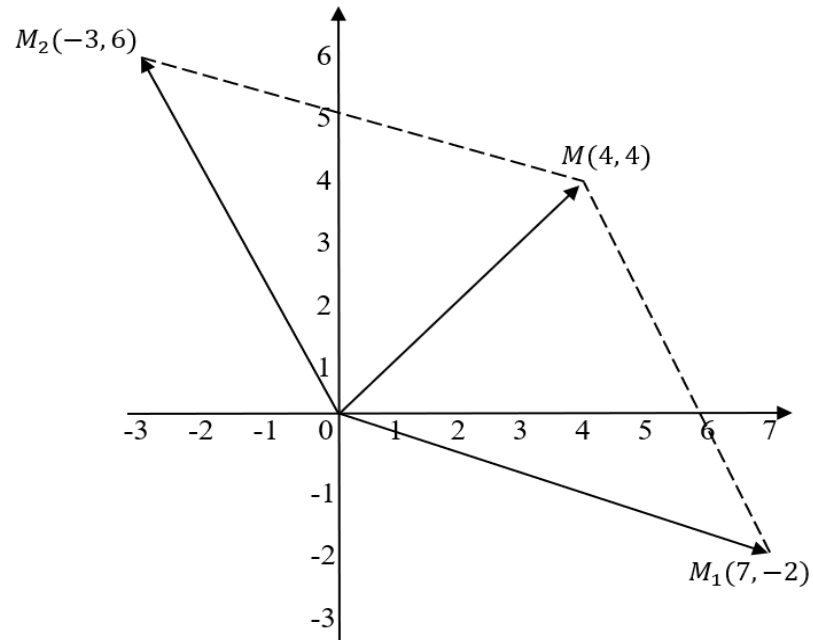
Figura 6: Vetores  $\vec{OM}(8 + 5i)$



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Observe que  $(7 - 2i) + (-3 + 6i) = 4 + 4i$ . Portanto, a imagem geométrica da soma destes dois números complexos é o ponto  $M = (4, 4)$  (ver a figura 07).

Figura 7: Vetor  $\overrightarrow{OM}$  ( $4 + 4i$ )

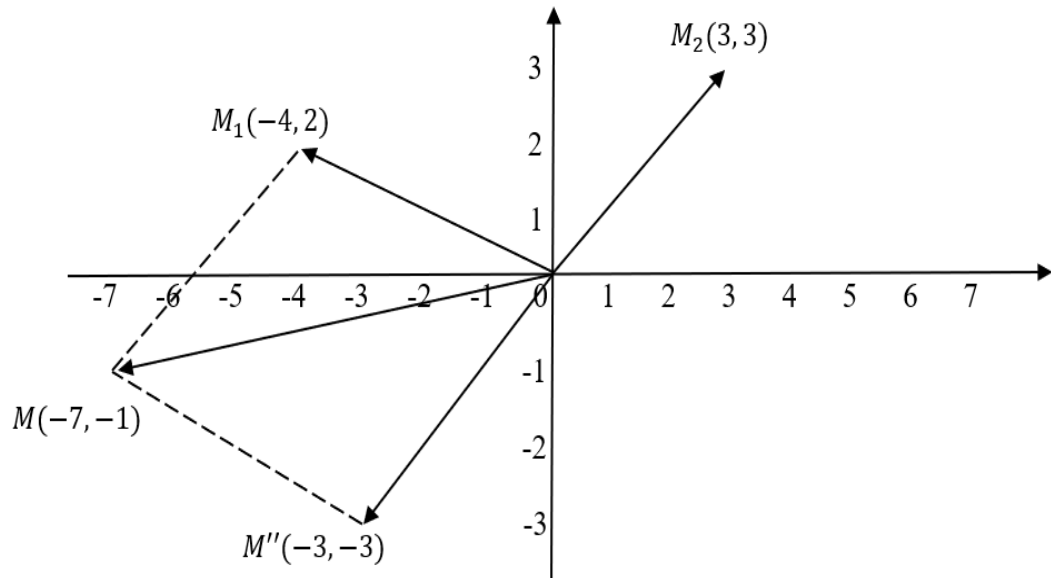


Fonte: Própria dos autores, (2023).

À vista desse cenário, faz-se necessário abordar acerca da diferença entre dois Números Complexos. A esse respeito, dado dois Números Complexos,  $Z_1$  e  $Z_2$ , a diferença entre esses Complexos  $Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ .

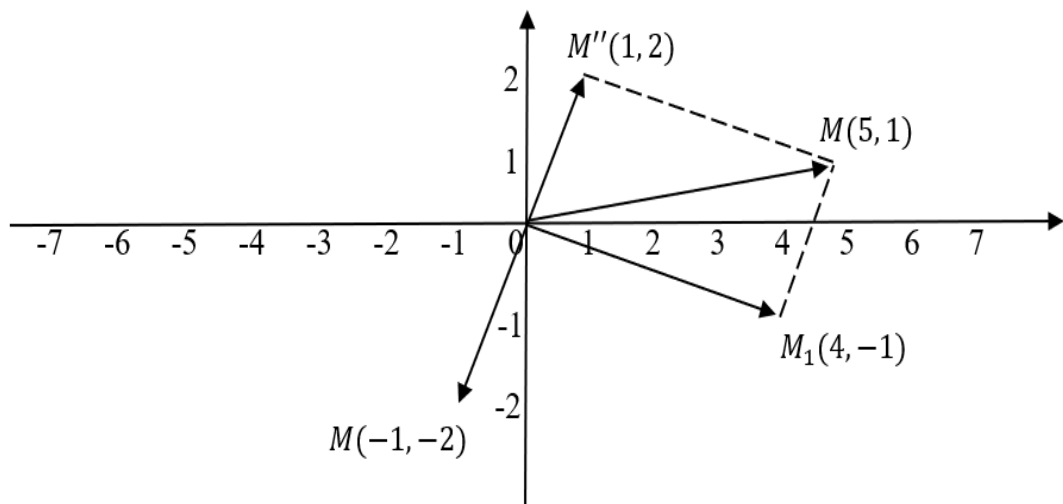
Isto é, a diferença entre os vetores  $V_1$  e  $V_2$  segue a mesma linha de pensamento:  $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$ . Sendo assim, a diferença entre  $Z_1 - Z_2$  corresponde à diferença entre  $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ . Veja os exemplos abaixo para melhor entendimento:

Temos  $(-4 + 2i) - (3 + 3i) = (-4 + 2i) + (-3 - 3i) = -7 - i$ , daí a imagem geométrica da diferença destes dois números complexos é o ponto  $M = (-7, -1)$  dada na figura (08).

Figura 8: Vetor  $\overrightarrow{OM}$  ( $-7 - i$ )

Fonte: Própria dos autores, (2023).

A seguir, temos que  $(4 - i) - (-1 - 2i) = (4 - i) + (1 + 2i) = 5 + i$ , logo o ponto  $M = (5, 1)$  é a imagem geométrica da diferença destes dois complexos números (ver figura 09).

Figura 9: Vetor  $\overrightarrow{OM}$  ( $5 + 1i$ )

Fonte: Própria dos autores, (2023).

Sejam  $M_1 = (x_1, y_1)$  e  $M_2 = (x_2, y_2)$ , onde a distância entre  $M_1$  a  $M_2$  é igual ao módulo do complexo  $Z_1 - Z_2$  ou igual ao comprimento do vetor  $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ . Isto é,

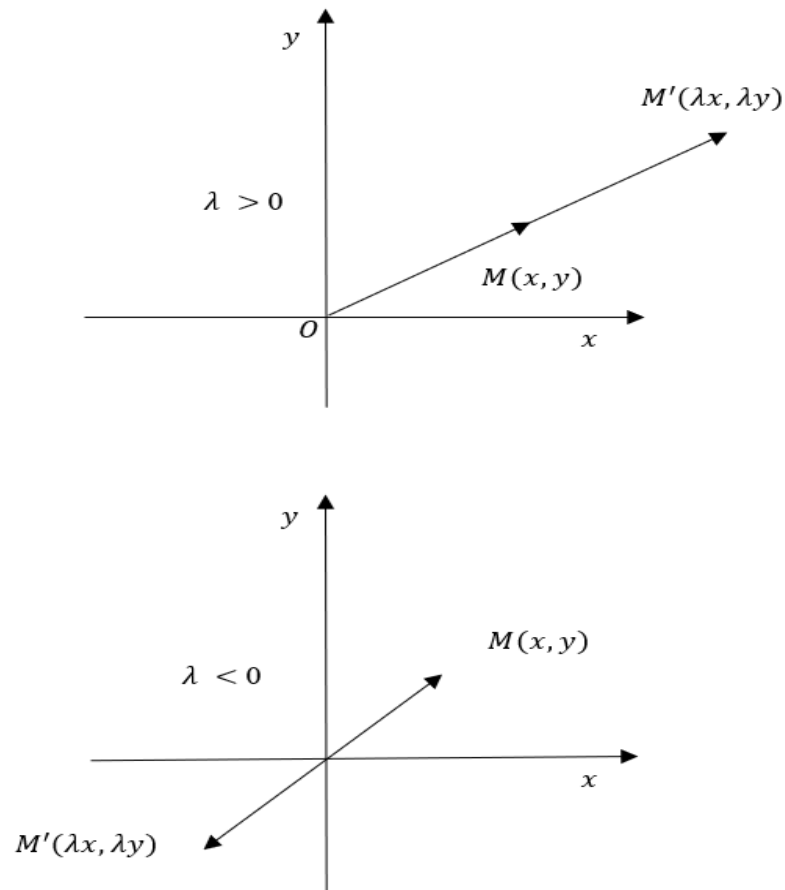
$$|M_1 - M_2| = |Z_1 - Z_2| = |\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

### 1.6.3 Múltiplos Real de um Número Complexo

Imagine um complexo da forma  $Z = x + iy$  com vetor correspondente  $\vec{V} = \vec{x}i + \vec{y}j$ . Agora, adotemos  $\lambda$  como um número real. Em seguida, multipliquemos o complexo  $Z = x + iy$  por pelo número real, isto é,  $\lambda Z = \lambda x + i\lambda y$ ; cujo qual resulta no vetor  $\lambda\vec{V} = \lambda\vec{x}i + \lambda\vec{y}j$ .

É importante destacarmos que se  $\lambda > 0$ , os vetores  $\lambda\vec{V}$  e  $\vec{V}$  têm a mesma orientação e  $|\lambda\vec{V}| = \lambda|\vec{V}|$ . Agora, quando  $\lambda < 0$ , o vetor  $\lambda\vec{V}$  tem orientação oposta a  $\vec{V}$  e  $|\lambda\vec{V}| = -\lambda|\vec{V}|$ . Por fim, se  $\lambda = 0$ , então  $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ .

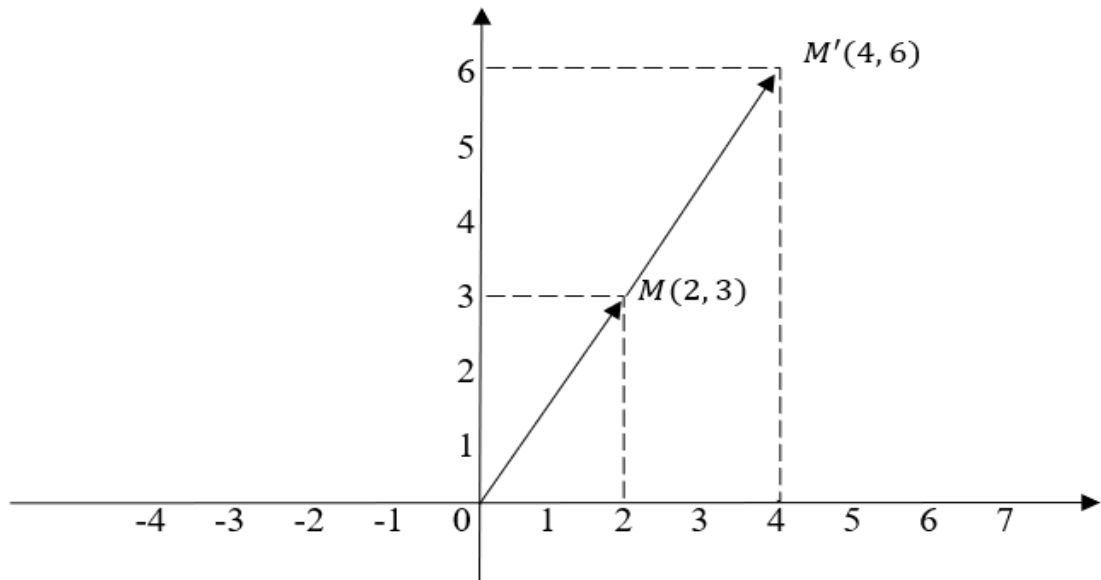
Figura 10: Múltiplo positivo e negativo do vetor associado a  $Z$



Fonte: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2340/5/PDF%20-%20Stanley%20Borges%20de%20Oliveira.pdf>

Temos que  $2(2 + 3i) = 4 + 6i$ , portanto  $M' = (4, 6)$  é a imagem geométrica do produto de 2 por  $Z = 2 + 3i$ .

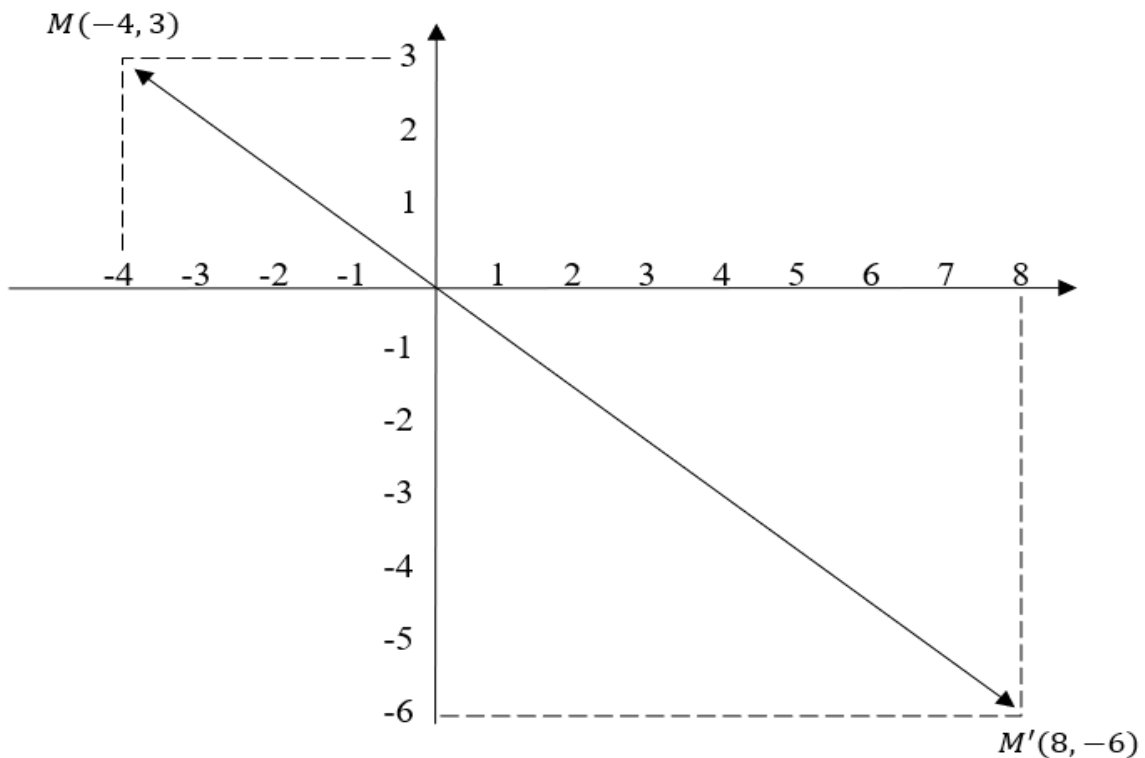
Figura 11: Vetor  $\overrightarrow{OM'}$  ( $4 + 6i$ ).



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Observe que  $-2(-4 + 3i) = 8 - 6i$ . Dessa forma, o ponto  $M' = (8, -6)$  como a imagem geométrica do produto de  $-2$  por  $Z = -4 + 3i$ .

Figura 12: Vetor  $\overrightarrow{OM'}$  ( $8 - 6i$ ).



Fonte: Própria dos autores, (2023).

## Capítulo 3

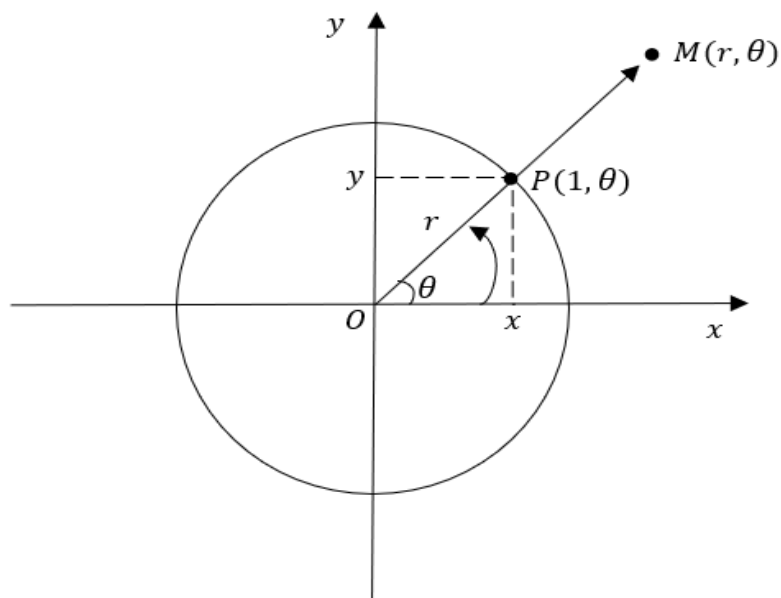
### A APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS À GEOMETRIA

Neste capítulo abordaremos Aplicação dos Complexos à Geometria e, posteriormente, a Rotação de Complexo. Além disso, veremos algumas propriedades, os quais usaremos para resolvermos alguns exercícios de geométricos e trigonometria que envolvam os Números Complexos. Vamos admitir conhecida a álgebra básica dos vetores. Reiteramos que este trabalho segue uma releitura de Oliveira (2014), cujo leitor interessado pode consultada para maior aprofundamento.

#### 1.7 As Coordenadas Polares no Plano

Para compreendermos as Coordenadas Polares, imagine um plano cartesiano e um ponto  $M = (x, y)$  que não esteja localizado na origem. Partindo do centro  $O$ , temos o número real  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , no qual chamamos de raio polar do ponto  $M$ . Agora, considere o ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , no sentido anti-horário, entre o vetor  $\overrightarrow{OM}$  e o semi-eixo  $x$  positivo, no qual chamamos de argumento polar do ponto  $M$ . O par  $(r, \theta)$  é chamado as coordenadas polares do ponto  $M$ . Veja a ilustração abaixo para maior entendimento:

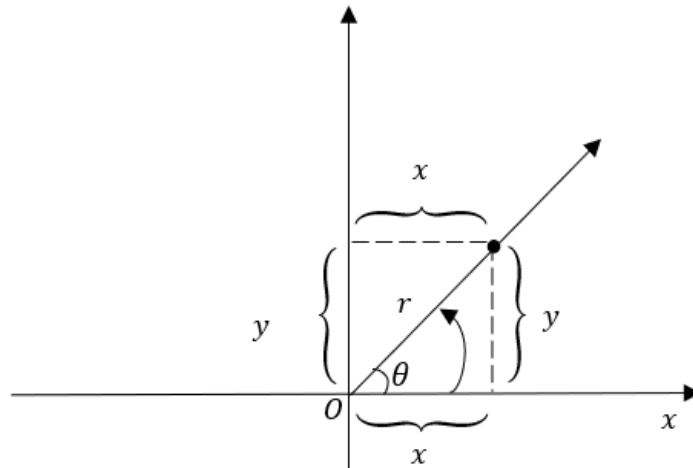
Figura 13: Compreensão das Coordenadas Polares



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Ao utilizarmos as definições das funções seno e cosseno, concluímos que:  $x = r \cos\theta$  e  $y = r \sin\theta$ . Caso não esteja bem definidas essas ideias, observe o gráfico a seguir para melhor compreensão:

Figura 14: Interpretação Geométrica do Seno e Cosseno



Fonte: Própria dos autores, (2023).

A partir da ilustração acima, podemos entender com maior clareza de que forma obtivemos  $x = r \cos\theta$  e  $y = r \sin\theta$ . Para tal resultado, sabemos que  $\cos\theta = \frac{x}{r}$ . Isolando  $x$ , temos  $x = r \cos\theta$ . De modo análogo, sabemos que  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ . Isolando  $y$ , temos  $y = r \sin\theta$ . Sendo assim, fica fácil de obter as coordenadas cartesianas de um ponto se as suas coordenadas polares forem dadas.

Agora, vamos considerar um ponto  $M = (x, y)$ . O raio polar é  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para determinar o argumento polar estudamos os seguintes casos:

i) Se  $x \neq 0$ , do fato de  $\tan\theta = \frac{y}{x}$ , deduzimos que  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$ , onde

$$K = \begin{cases} 0, & \text{para } x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 1, & \text{para } x < 0 \text{ e } y \text{ é qualquer valor} \\ 2, & \text{para } x > 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

ii) Se  $x = 0$  e  $y \neq 0$ , temos que

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{para } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{para } y < 0. \end{cases}$$

Neste momento, vejamos como podemos determinar as coordenadas polares dos pontos  $M_1 = (3, 3)$ ,  $M_2 = (4, 0)$ ,  $M_3 = (-3\sqrt{3}, -3)$ .

Neste caso, temos  $r_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ;  $\theta_1 = \arctg(1) + 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ , de modo que  $M_1 = (3\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4})$ .

Para  $M_2$  temos  $r_2 = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ ;  $\theta_2 = \arctg(0) + \pi = 0 + \pi = \pi$ , de modo que  $M_2 = (4, \pi)$ .

Para  $M_3$  temos  $r_3 = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$ ;  $\theta_3 = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ , de modo que  $M_3 = (6, \frac{7\pi}{6})$ .

Agora, vamos encontrar as coordenadas cartesianas dos pontos  $M_1 = (4, \frac{4\pi}{3})$ ,  $M_2 = (5, \frac{6\pi}{3})$  e  $M_3 = (-2, \frac{\pi}{3})$ .

Temos que  $x_1 = r \cos\theta$  e  $y_1 = r \sen\theta$ . Assim

$$x_1 = 4 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4 \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

$$y_1 = 4 \sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}. \text{ Com isso, temos que } M_1 = (-2, -2\sqrt{3}).$$

Para  $M_2$  temos

$$x_2 = 5 \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 5 (1) = 5.$$

$$y_2 = 5 \sen\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 5 (0) = 0. \text{ Com isso, temos que } M_2 = (5, 0).$$

Para  $M_3$  temos

$$x_3 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

$$y_3 = -2 \sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}. \text{ Com isso, temos que } M_3 = (-1, -\sqrt{3}).$$

### 1.7.1 A Representação Polar de um Número Complexo

Seja um complexo da forma  $Z = x + yi$ , conseguimos representá-lo na forma polar  $Z = r(\cos\theta + i\sen\theta)$ , onde  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$  os quais dizemos que são as coordenadas polares da imagem geométrica de  $Z$ .

É importante ressaltar que argumento polar  $\theta$  pertencente à imagem geométrica de  $Z$  chamamos de argumento de  $Z$ , e expressamos por  $\text{Arg } Z$ . Além disso, o módulo de  $Z$  é igual ao raio  $r$  polar da imagem geométrica de  $Z$ , sendo  $Z \neq 0$ .

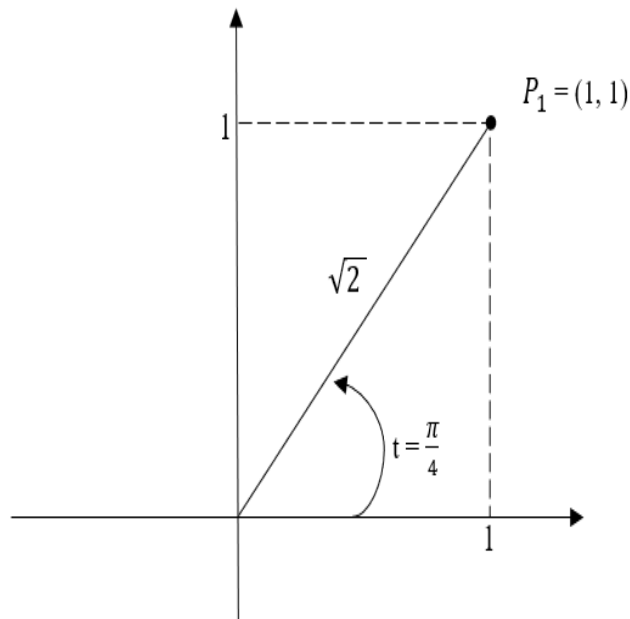
À vista desse cenário, o módulo e o argumento de  $Z$  estão unicamente determinados. Vamos considerar  $Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ , e adotando  $\phi = \theta + 2k\pi$  para um inteiro  $k$ , temos  $Z_k = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\text{sen}(\theta + 2k\pi)] = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = Z$ , ou seja, qualquer complexo  $Z_k$  podemos representá-lo como  $Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ , onde  $r \geq 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Chamamos o conjunto  $\text{Arg}(Z) = \{\phi : \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  de argumento prolongado do número  $Z$ . A partir disso, dados os complexos  $Z_1, Z_2 \neq 0$ , sendo  $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$  e  $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$ , dizemos que são iguais se, e somente se,  $r_1 = r_2$  e  $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ , com algum número inteiro  $k$ .

A seguir, vamos trabalhar a representação polar do número  $Z = -1 - i$ . Em seguida, vamos determinar seu argumento prolongado.

Nesse viés, temos que a imagem geométrica  $P_1 = (1, 1)$  encontra-se no primeiro quadrante. Então  $r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  e  $\theta_1 = \arctg \frac{y}{x} + 0 \cdot \pi = \arctg 1 + 0 = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$ . Dessa forma, temos  $Z_1 = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen} \frac{\pi}{4})$  e  $\text{Arg } Z_1 = \{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$ .

Figura 15: Representação polar de  $Z$



Fonte: Própria dos autores, (2023).

A representação polar dos números complexos  $1, i, -1, -i$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0; & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}; \\ -1 &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi; & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}; \end{aligned}$$

### 1.7.2 Operações com Números Complexos na Representação Polar

Veremos como multiplicar números complexos na forma polar. A esse respeito, entenderemos que tal operação é auspicioso para trabalharmos com o cálculo de potência inteiras de um número complexo.

**Proposição 3.1.2.1** Sejam  $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$  e  $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ . Com isso, temos que

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Nota-se que

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1 i\operatorname{sen}\theta_2)$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 ((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2))$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Dados  $Z_1 = 2 + 2i$  e  $Z_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$ . Então

$$Z_1 = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right), Z_2 = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right); \text{ assim}$$

$$Z_1 Z_2 = \sqrt{8} \sqrt{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$Z_1 Z_2 = \sqrt{8} \cdot 8 \left( \cos \left( \frac{3\pi + 2\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi + 2\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z_1 Z_2 = \sqrt{64} \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z_1 Z_2 = 8 \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

A Fórmula de Moivre <sup>7</sup> nos mostra como encontrar um número complexo elevado a uma potência natural.

**Proposição 3.1.2.2** Se  $Z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$Z^n = r^n (\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Aplicando a fórmula para  $Z = Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n$ , temos:

$$\begin{aligned} Z_n &= \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ vezes}} \underbrace{(\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta))}_{n \text{ vezes}} + i \operatorname{sen} \underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{n \text{ vezes}} \\ &= r^n (\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta). \end{aligned}$$

Vamos calcular o número complexo  $(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)^{1200}$ . Assim, temos que a forma polar do número  $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$  é

$$\sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right).$$

Aplicando a Fórmula de Moivre, obtemos

$$\begin{aligned} (\sqrt{6} + \sqrt{2}i)^{1200} &= \sqrt{8}^{1200} \left( \cos 1200 \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 1200 \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 8^{600} (\cos 300\pi + i \operatorname{sen} 300\pi) \\ &= 8^{600} (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 8^{600}. \end{aligned}$$

**Proposição 3.1.2.2** Se  $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$  e  $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \neq 0$ , então

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$

Temos que  $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

---

<sup>7</sup> Abraham de Moivre, matemático francês (1667-1754)

Dados os números complexos  $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$  e  $Z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ , determine  $\frac{Z_2}{Z_1}$ . A esse respeito,

temos que a forma polar de  $Z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$  e  $Z_2 = \sqrt{12} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$ .

Aplicando a fórmula, temos

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{12}}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi - \pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi - \pi}{6} \right) \right)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{6} \right) \right)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{3} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

### 1.7.3 Interpretação Geométrica da Multiplicação

Sejam os complexos  $Z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $Z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$  e os seus pontos correspondentes no plano  $M_1 = (r_1, \theta_1), M_2 = (r_2, \theta_2)$ . Os pontos  $P_1, P_2$  são intersecções entre o círculo  $C(O; 1)$  com as semirretas  $\overrightarrow{OM_1}$  e  $\overrightarrow{OM_2}$ . Ao construirmos o ponto  $P_3 \in C(O; 1)$  com argumento polar  $\theta_1 + \theta_2$  e marcando o ponto  $M_3 \in \overrightarrow{OP_3}$  tal que  $\overline{OM_3} = \overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}$ . Ou seja, o ponto  $M_3 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$  é a imagem geométrica do produto  $Z_1 \cdot Z_2$  (ver Figura 16).

Considerando o ponto A e a imagem geométrica do número complexo 1, temos que

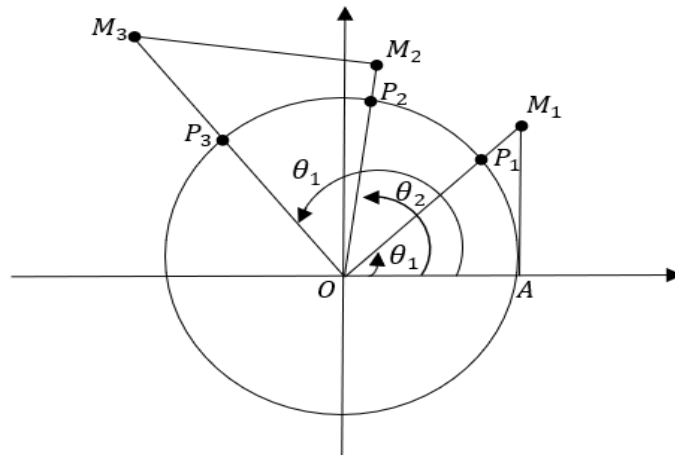
$$\frac{\overline{OM_3}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{1}$$

ou seja,

$$\frac{\overline{OM_3}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OA}}$$

e  $M_2 \hat{O} M_3 = A \hat{O} M_1$ , isto é, os triângulos  $OAM_1$  e  $OM_2M_3$  são semelhantes. Tal construção representa a imagem do quociente, de tal forma que a imagem de  $\frac{Z_3}{Z_2}$  é  $M_1$ . Dessa forma, o ponto  $M_3$ , geometricamente, é obtido por uma rotação no sentido positivo (anti-horário), de  $M_1$  (ou  $M_2$ ) de um ângulo igual ao de  $Z_2$  (ou  $Z_1$ ).

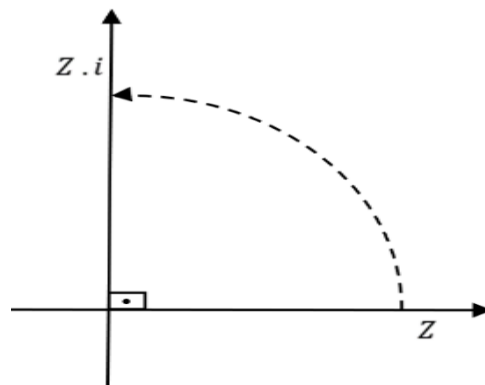
Figura 16: Imagem de  $M_3(Z_1, Z_2)$



Fonte: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2340/5/PDF%20-%20Stanley%20Borges%20de%20Oliveira.pdf>

**Observação 3.1.3** Ao multiplicarmos um complexo  $Z$  por  $i$  rotacionamos esse complexo de  $90^\circ$  no sentido anti-horário.

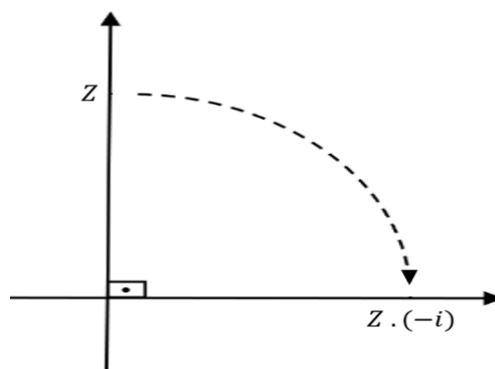
Figura 17: Rotacionando o vetor no sentido anti-horário



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Caso multipliquemos  $Z$  por  $-i$ , o complexo  $Z$  vai rotacionar  $90^\circ$  no sentido horário.

Figura 18: Rotacionando o vetor no sentido horário



Fonte: Própria dos autores, (2023).

**Observação 3.1.3.1** A diferença de complexo  $A_1 - B_2$  é o vetor  $\overrightarrow{B_2 A_1}$ . Ou seja,  $\overrightarrow{B_2 A_1} = A_1 - B_2$ .

## Capítulo 4

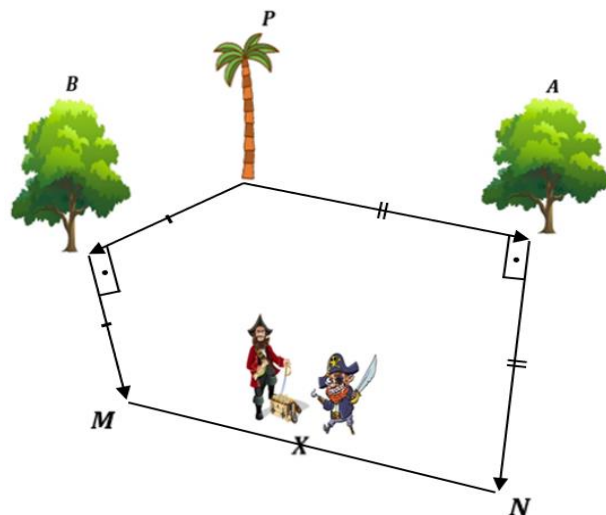
### ILHA DO TESOURO

Veremos neste capítulo o clássico problema chamado de Ilha do Tesouro, cujo qual foi inspirado em um exercício do livro *Polynomials*, de E. J. Barbeau<sup>8</sup>. A esse respeito, vamos resolver esse problema matemático através da Geometria aplicado aos Números Complexos. Após resolvermos esse impasse matemático, aplicaremos o problema de Barbeau no Geogebra e estudaremos seu comportamento.

#### 1.8 Ilha do Tesouro

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma palmeira e dois carvalhos. Começando na palmeira, medem o número de passos até o primeiro carvalho. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de  $90^\circ$ , à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à palmeira, medem o número de passos desde a palmeira até o segundo carvalho, dobram à esquerda, segundo um ângulo de  $90^\circ$ , e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Figura 19: Tesouro enterrado no ponto médio X



Fonte: Própria dos autores, (2023).

<sup>8</sup> Edward Barbeau, matemático canadense (1938)

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a palmeira não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado).

Figura 20: A palmeira não existe

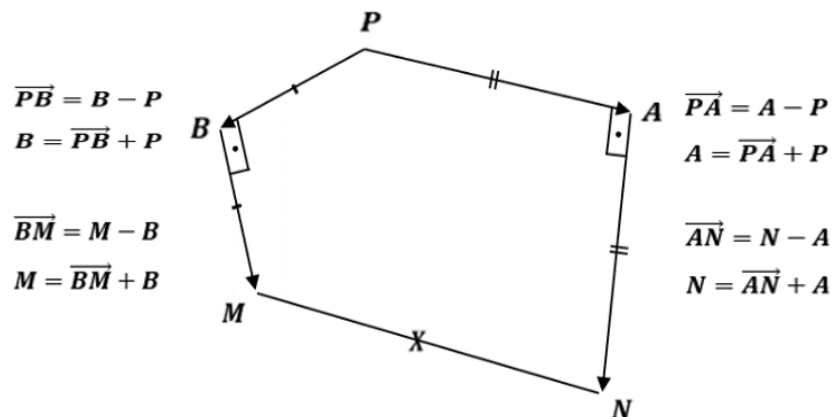


Fonte: Própria dos autores, (2023).

Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a palmeira estivesse aqui.” Repetimos os mesmos procedimentos de quando havíamos enterrado o tesouro: contamos os passos até o primeiro carvalho, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro. Será possível solucionar esse mistério e desenterrar o Tesouro mesmo não existindo a palmeira como referência?!

Para resolver esse problema vamos utilizar as observações 3.1.3 e 3.1.3.1 do final do capítulo anterior e vamos admitir conhecida por parte do leitor a álgebra básica acerca dos vetores.

Figura 21: Encontrando o ponto X através da álgebra e dos vetores



Fonte: Própria dos autores, (2023).

Sabemos que  $X = \frac{M+N}{2}$ ; onde sabemos ainda que

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{BM} + B + \overrightarrow{AN} + A}{2}$$

A esse respeito, temos que o vetor  $\overrightarrow{BM}$  é resultado de  $\overrightarrow{PB} \cdot i$  e, de modo análogo, temos que o vetor  $\overrightarrow{AN}$  é resultado de  $\overrightarrow{PA} \cdot (-i)$ . Sendo assim, temos

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{BM} + B + \overrightarrow{AN} + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot i + B + \overrightarrow{PA} \cdot (-i) + A}{2}$$

note que o vetor  $\overrightarrow{PB} = B - P$ ; e o vetor  $\overrightarrow{PA} = A - P$ . Com isso, segue que

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{BM} + B + \overrightarrow{AN} + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot i + B + \overrightarrow{PA} \cdot (-i) + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{(B-P) \cdot i + B + (A-P) \cdot (-i) + A}{2}$$

aplicando as devidas distribuições e eliminando os termos semelhantes, temos

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{BM} + B + \overrightarrow{AN} + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot i + B + \overrightarrow{PA} \cdot (-i) + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{(B-P) \cdot i + B + (A-P) \cdot (-i) + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{Bi - Pi + B - Ai + Pi + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{Bi - \cancel{Pi} + B - Ai + \cancel{Pi} + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{Bi + B - Ai + A}{2}$$

$$X = \frac{M+N}{2} = \frac{(A+B) + (B-A)i}{2}.$$

Concluimos, portanto, que o ponto X pode ser encontrado através de Geometria, Números Complexos, noções básicas de vetores e álgebra. Ou seja, o ponto X, isto é, o Tesouro, pode ser encontrado mesmo que a palmeira não esteja no local de origem. Para solucionarmos o problema basta pegarmos um ponto qualquer, como afirmou um dos piratas, repetir os mesmos procedimentos de quando haviam enterrado o tesouro: conta os passos até o primeiro carvalho, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

## 1.9 Problema da Ilha do Tesouro Aplicado ao Geogebra

Agora, com o intuito de fazermos o problema mais proativo, utilizaremos a geometria dinâmica através do software Geogebra, para ilustrar as informações apresentadas na seção 4.1.

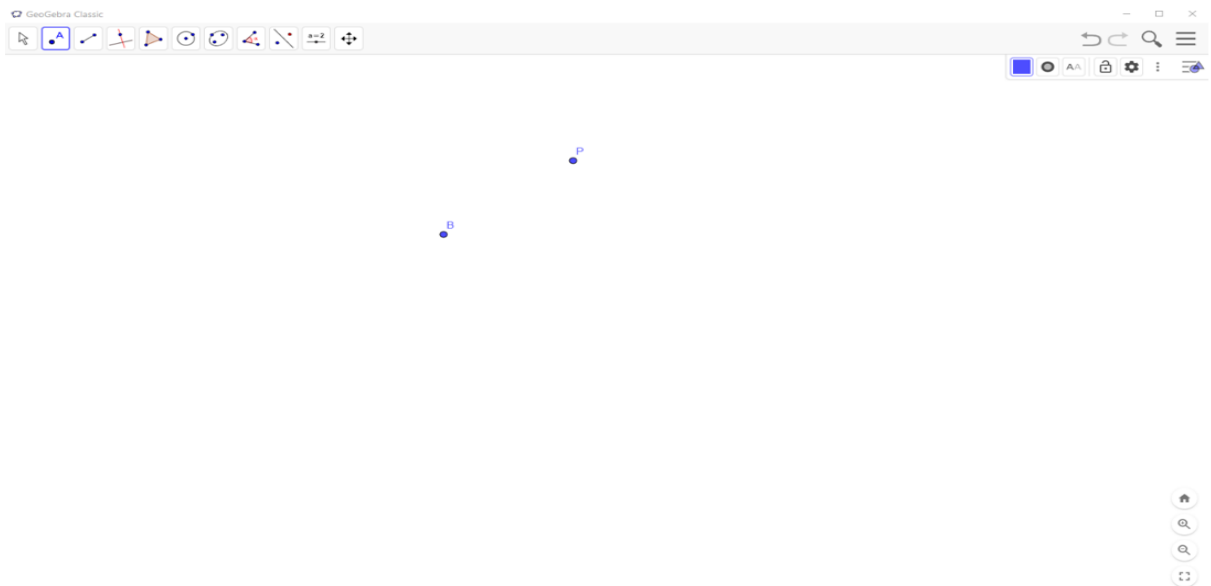
Inicialmente, o Geogebra é um programa livre de geometria dinâmica criado por Markus Hojenwarter<sup>9</sup> para ser utilizado em ambiente de sala de aula, com o início do projeto em 2001, na University of Salzburg. O programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria, com as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Assim tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si, sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Deste modo, mostraremos que o ponto inicial realmente não interfere na posição final onde o tesouro se encontra através do Geogebra.

### 1.9.1 Reproduzindo a Ilustração do Problema no Geogebra

Passo 01 - Inicialmente, com a opção “Malha” desativada no Geogebra e com a janela de álgebra fechada, marcamos o ponto de partida da nossa busca (ponto P), palmeira, em seguida, marcamos a localização do primeiro carvalho da direita (ponto B). Representado pela figura 22.

Figura 22: Ponto *P* e ponto *B*



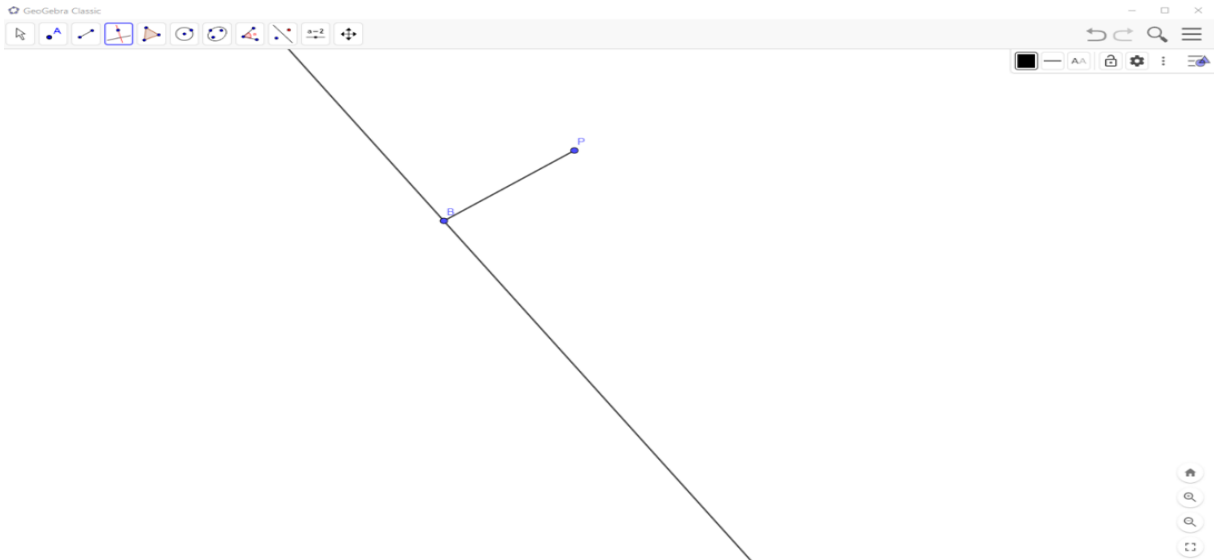
Fonte: Própria dos autores, (2023)

---

<sup>9</sup> Markus Hojenwarter, matemático (1976)

Passo 02 - Para traçarmos uma perpendicular, devemos traçar antes o segmento  $PB$ , em seguida traçamos, por  $B$ , uma perpendicular ao segmento  $PB$ . Formando um ângulo de  $90^\circ$ . Vale lembrar que uma reta é um conjunto infinito de pontos, por isso ela não tem começo nem fim). Representado pela figura 23.

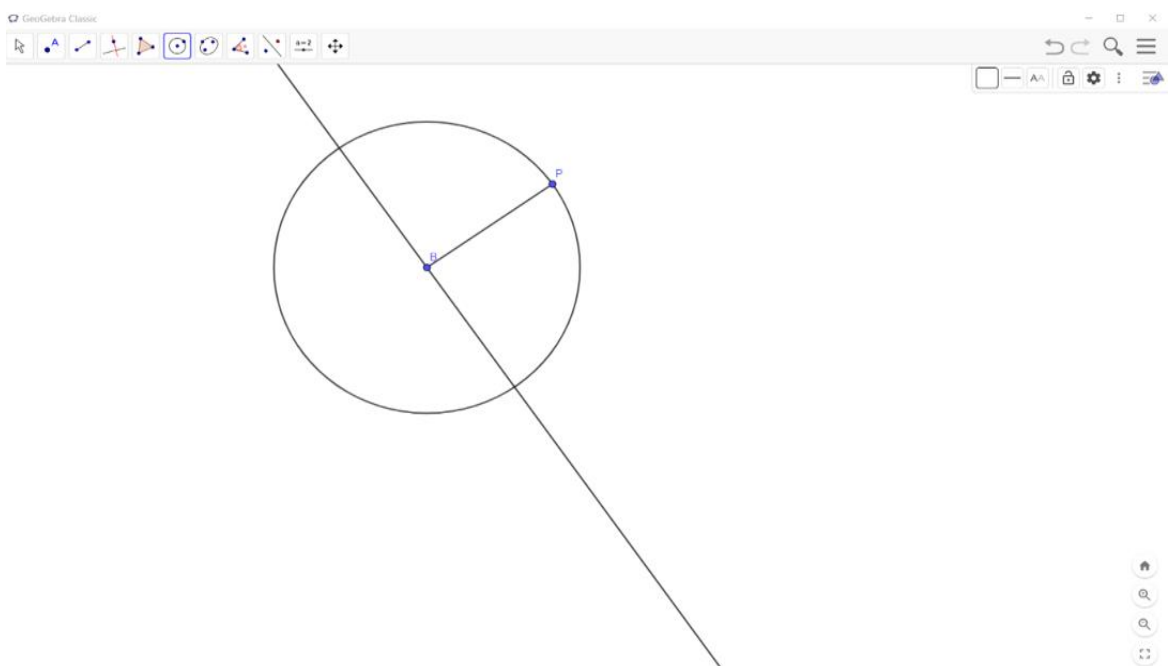
Figura 23: Segmento  $PB$  e sua Perpendicular



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 03 - É preciso traçar a circunferência com centro em  $B$  e raio  $PB$ . (Cabe destacar que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto dado. Utilizamos a circunferência porque devemos, segundo o mapa, fazer uma marca na perpendicular que tenha a mesma distância de  $P$  até  $B$ . Representado pela figura 24.

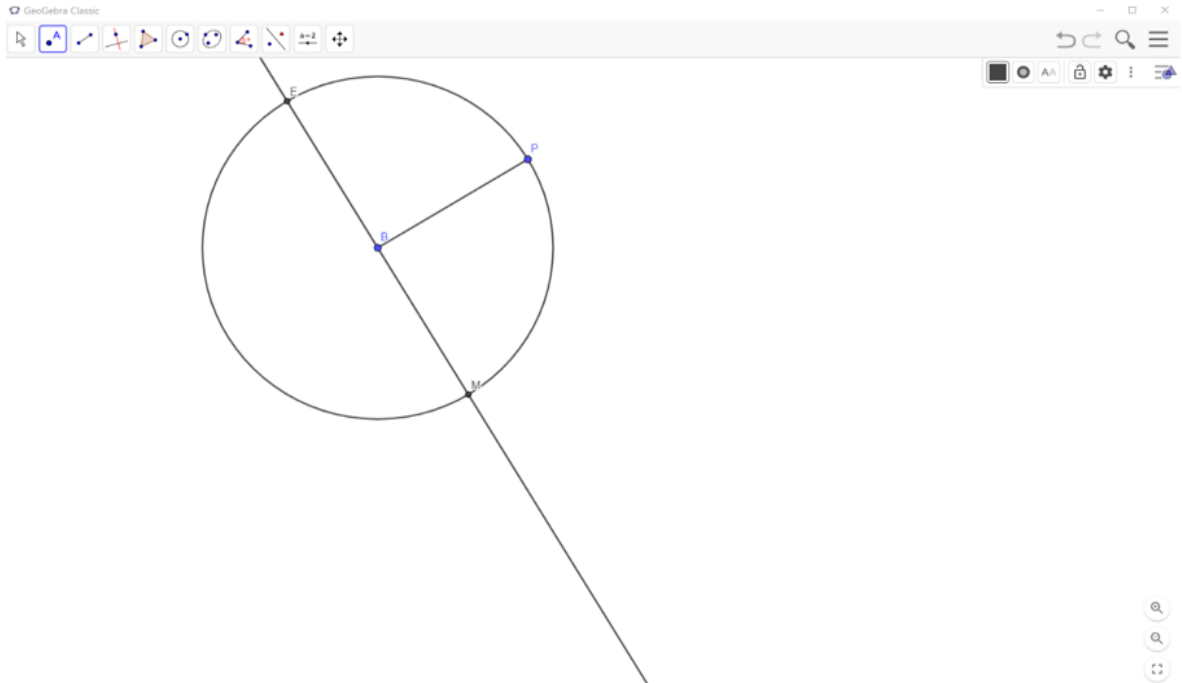
Figura 24: Circunferência com centro em  $B$



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 04 - Marcamos os pontos de interseção da reta perpendicular com a circunferência. Representado pela figura 25.

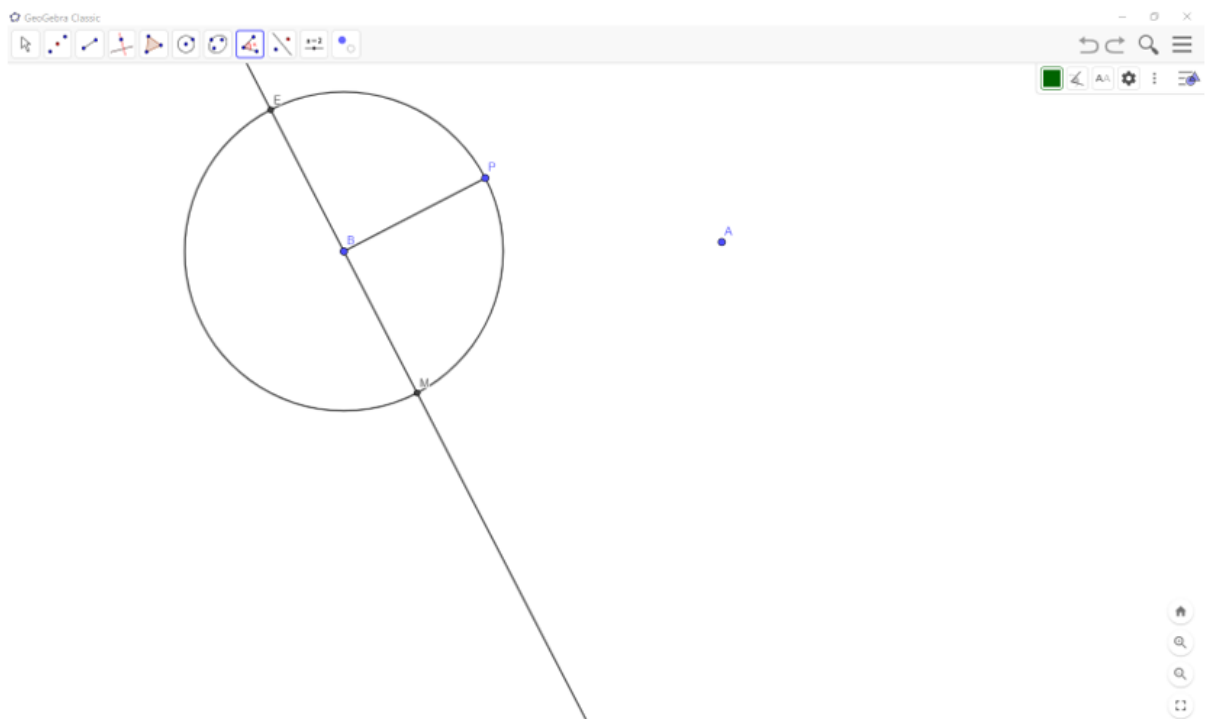
Figura 25: Pontos de interseção da reta perpendicular



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 05 - Marcamos a localização do segundo carvalho da esquerda (ponto A). Representado pela figura 26.

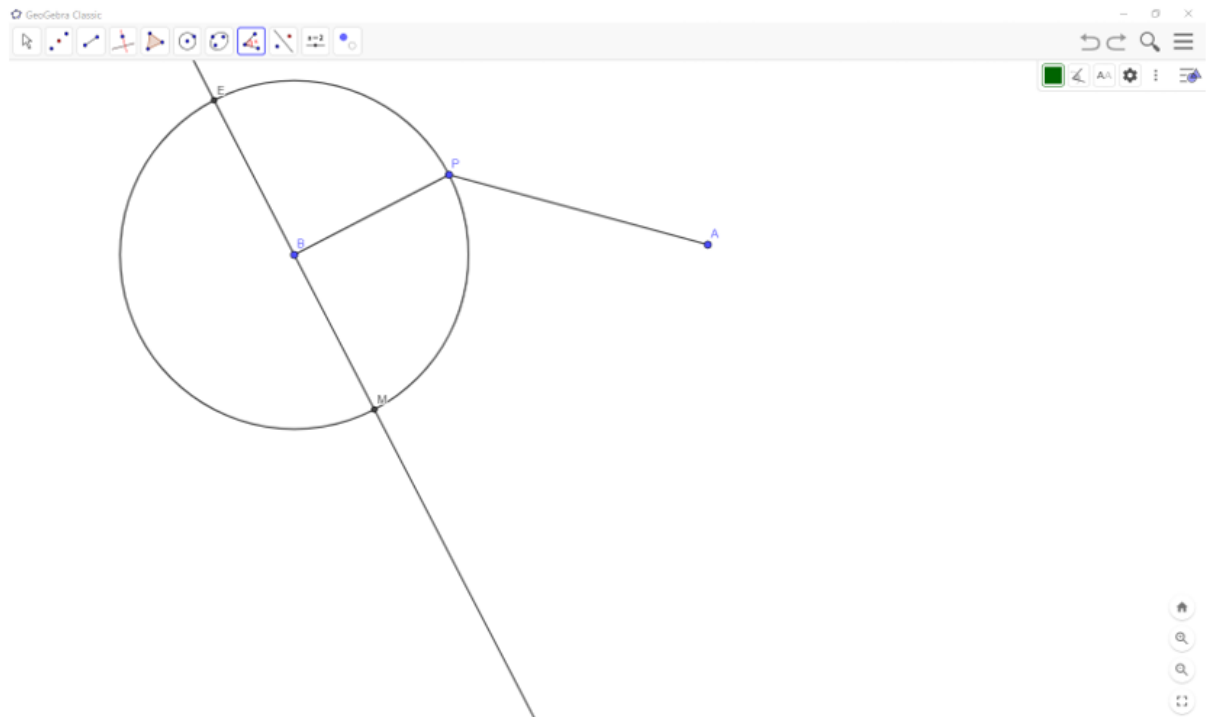
Figura 26: Ponto A



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 06 - Para traçarmos uma perpendicular, devemos traçar antes o segmento  $PA$ . Representado pela figura 27.

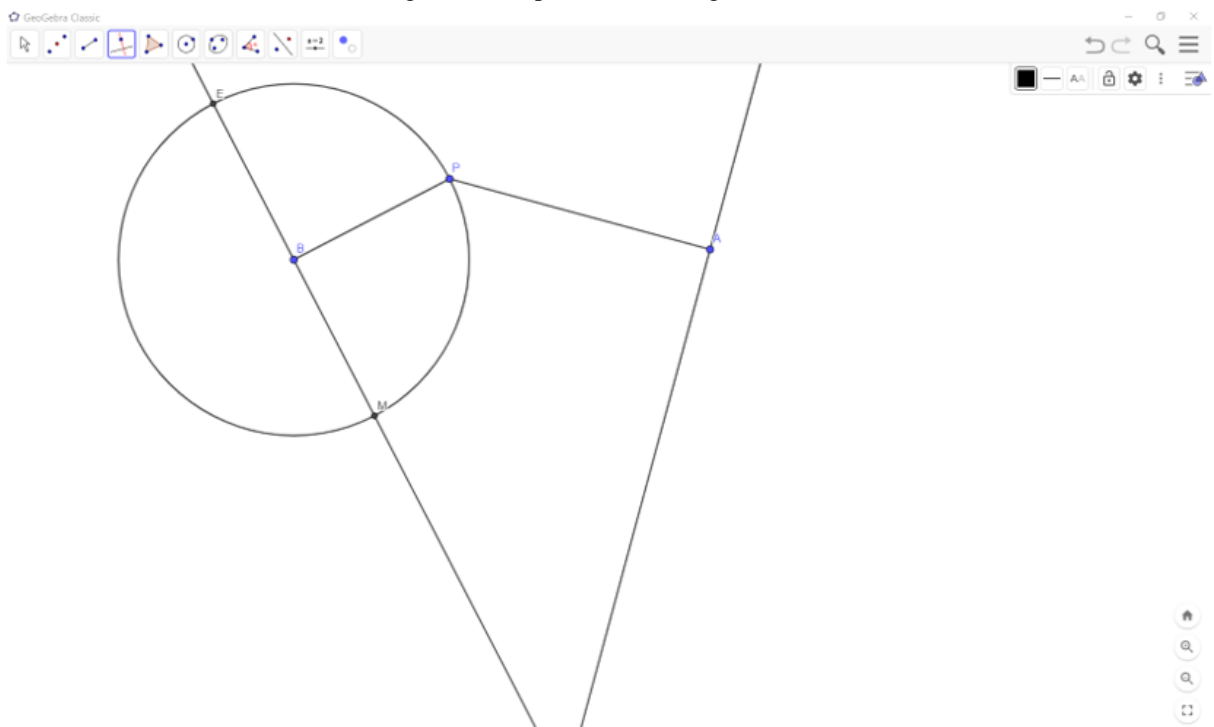
Figura 27: Segmento  $PA$



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 07 - Traçamos, por A, uma perpendicular ao segmento  $PA$ . (Pois as instruções do mapa mandam girar  $90^\circ$ ). Representado pela figura 28.

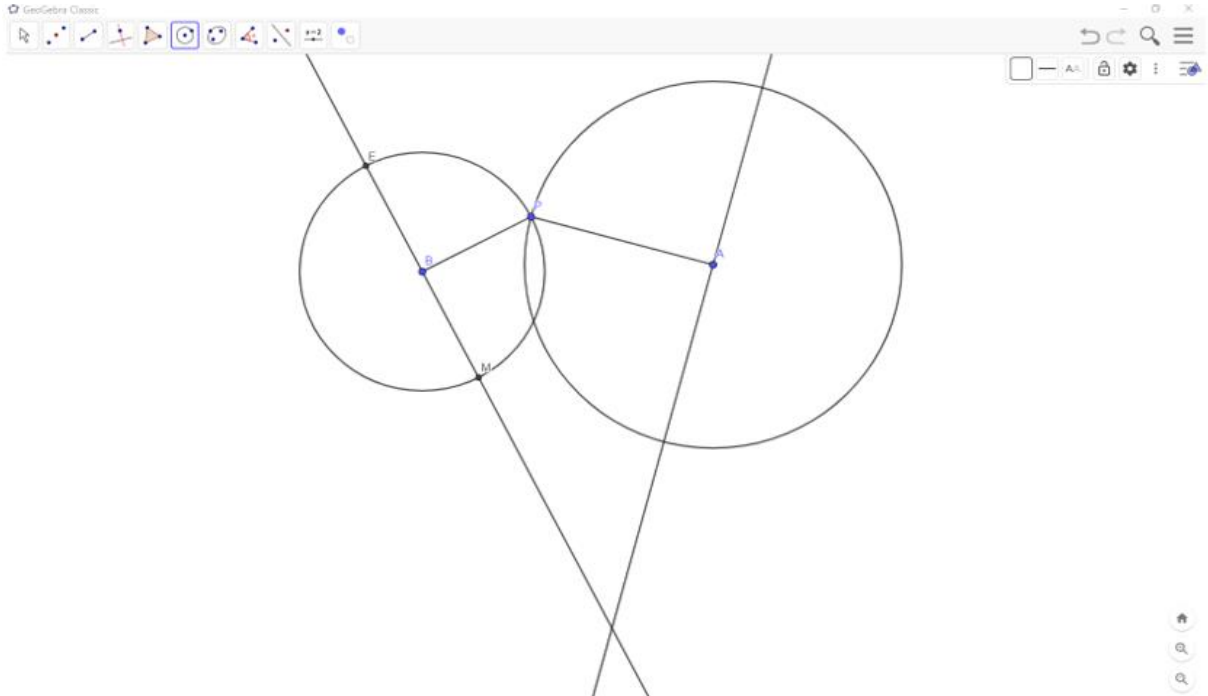
Figura 28: Perpendicular ao segmento  $PA$



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 08 - Traçamos a circunferência com centro em A e raio PA. (Utilizamos a circunferência porque devemos, segundo o mapa fazer uma marca na perpendicular que tenha a mesma distância de A que o P). Representado pela figura 29.

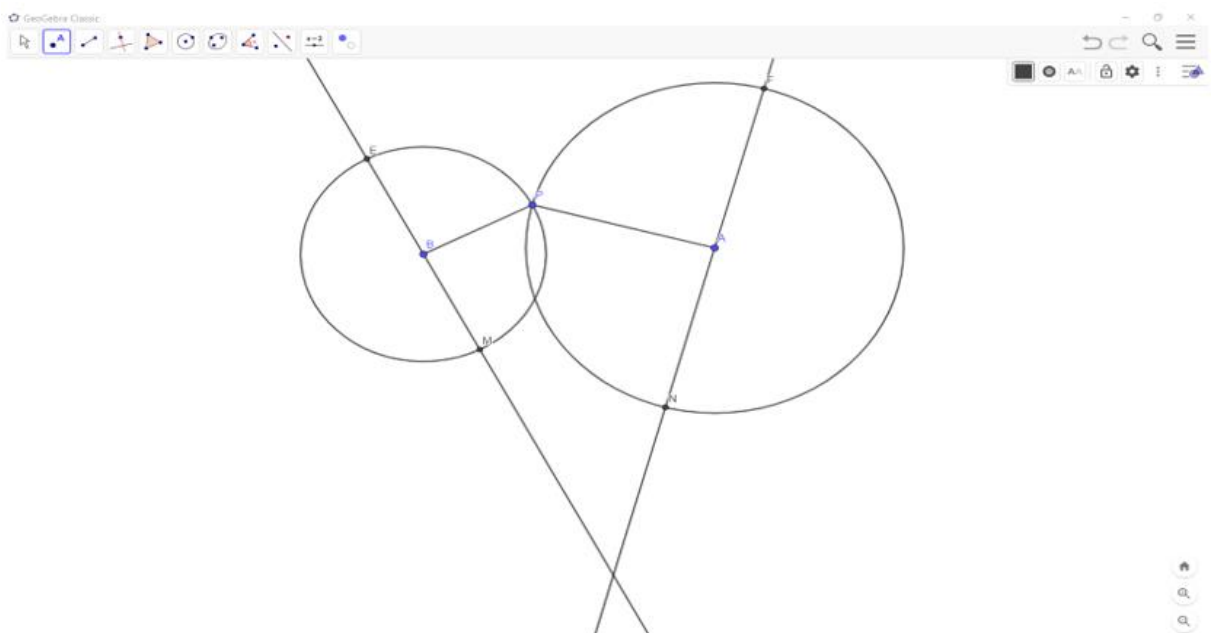
Figura 29: Circunferência com centro em A



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 09 - Marcamos os pontos de interseção da reta perpendicular com a circunferência. (Questionamos qual dos dois pontos devemos utilizar). É preciso lembrar que o mapa mandou girar à esquerda e caminhar o mesmo número de passos). Representado pela figura 30.

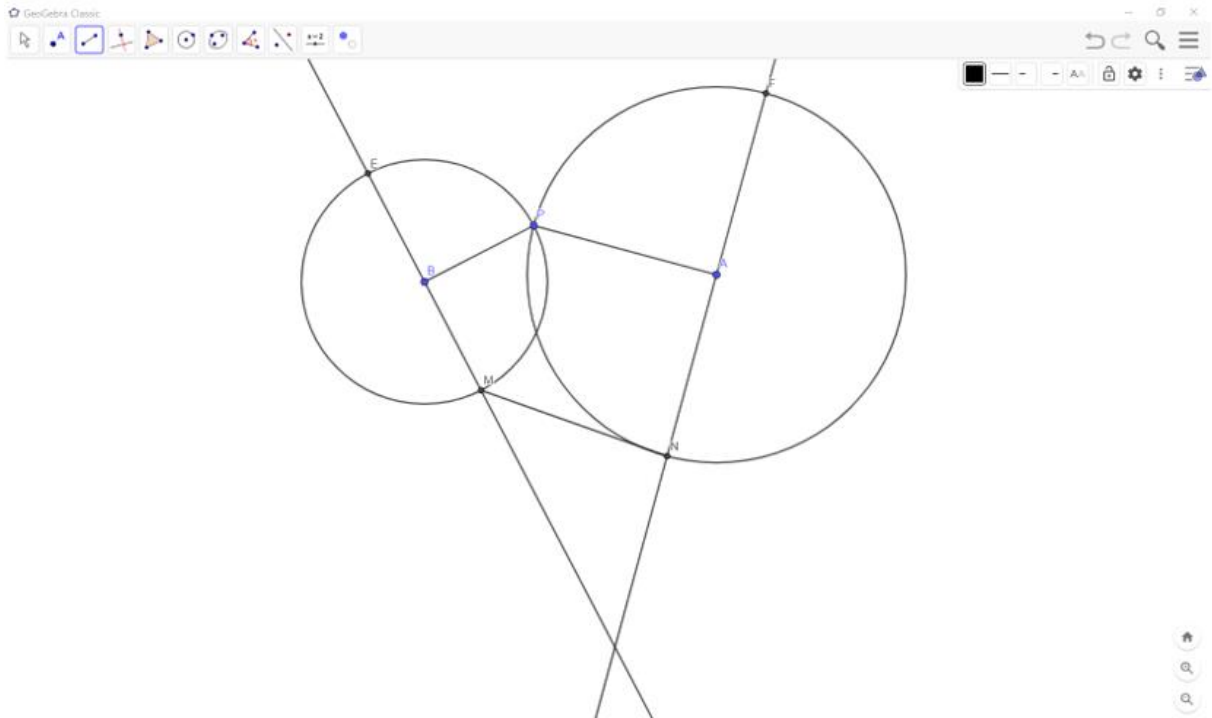
Figura 30: Pontos de interseção da reta perpendicular da circunferência de centro A



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 10 - O mapa trouxe a seguinte informação. “O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas...” Vamos traçar a reta que liga os pontos  $M$  e  $N$ . Representado pela figura 31.

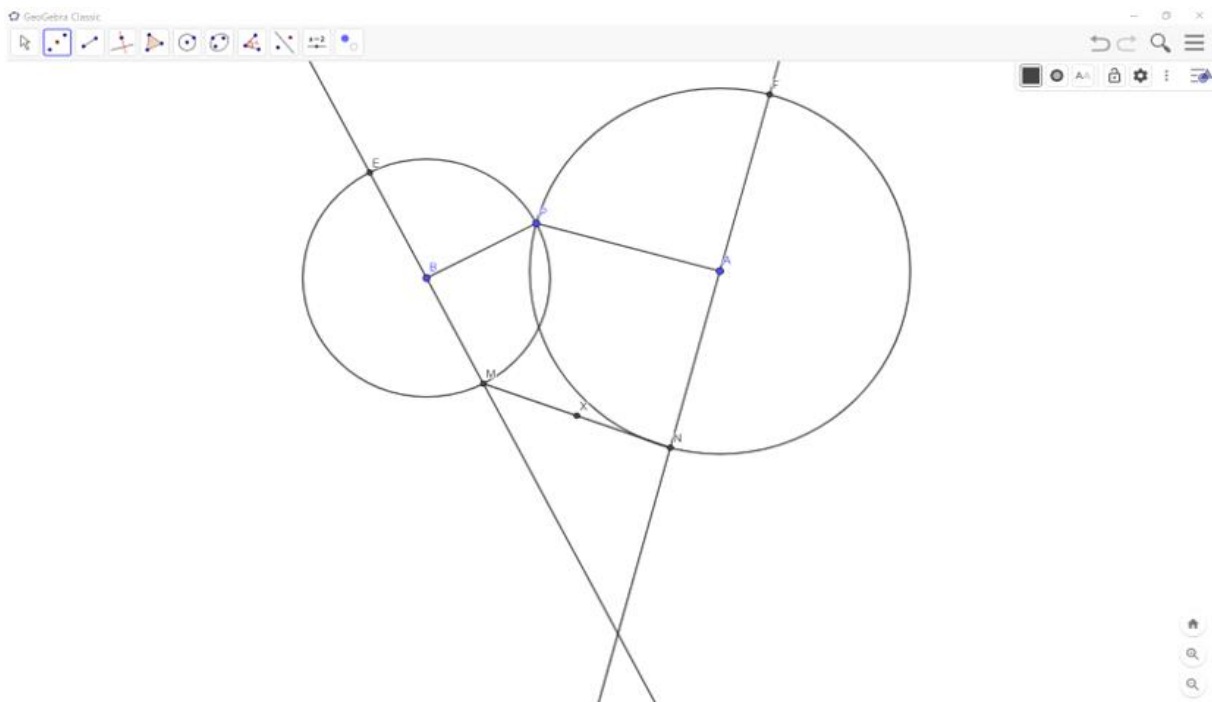
Figura 31: Reta que liga os pontos  $M$  e  $N$



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 11 - Segundo a instrução do mapa que diz. “...e à mesma distância das duas marcas”, marcamos o ponto médio entre  $M$  e  $N$ , denotado por  $X$ . Representado pela figura 32.

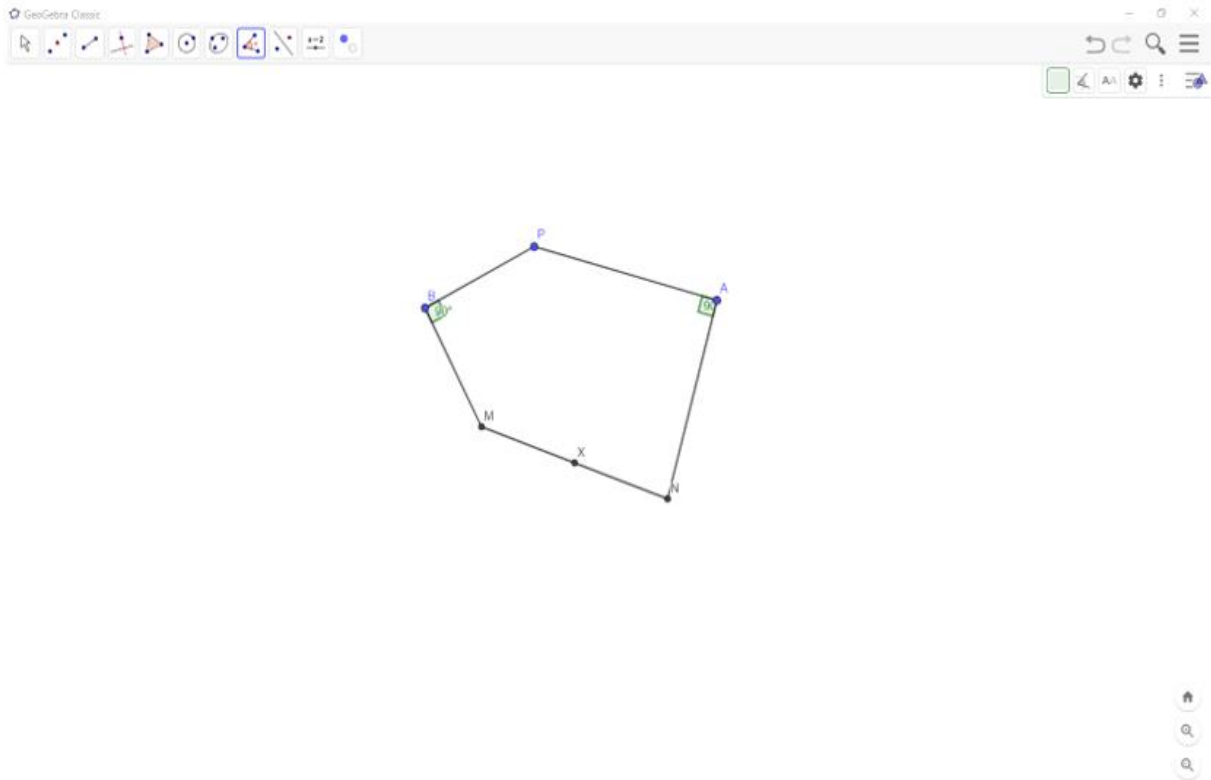
Figura 32: Ponto médio,  $X$



Fonte: Própria dos autores, (2023)

Passo 12 - Para facilitar a visualização, podemos ocultar o traçado de apoio. Representado pela figura 33.

Figura 33: Ocultando os traços de apoios



Fonte: Própria dos autores, (2023)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aplicação dos Complexos à Geometria, teve como objetivo mostrar o problema do Mapa do Tesouro de Barbeau (1989). A esse viés, a história dos Números Complexos, bem como o estudo da Geometria foram amplamente exploradas. Além disso, a linguagem matemática utilizada, bem como os vários exercícios os quais foram desenvolvidos ao longo do trabalho, contribuem para que o leitor interessado possa compreender e interpretar de forma mais esclarecedora o Conjunto dos Números Complexos. Ademais, a abordagem algébrica, geométrica e o estudo dos vetores foram cruciais para solucionarmos o impasse de Barbeau, somados às ilustrações criadas no Software Geogebra, cujo qual entendemos como mais uma alternativa para compreendermos a solução do Mapa do Tesouro. Desta forma, acreditamos que o produto final do nosso trabalho contribuirá no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático, números complexos, de modo que professores e alunos se apropriem de seu significado e utilizem como ferramenta que facilite a resolução de várias situações-problema reais.

## REFERÊNCIAS

BARBEAU, E.J. **Polynomials**. Springer-Verlag, 1989.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CARNEIRO, Raylson dos Santos. **Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal do Tocantins, [S. /], 2015.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **História dos Complexos**, [s. /], [2008?].

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **Histórias dos Complexos**. 2001. 13 p. Artigo (Instituto de Matemática e Estatística) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 17 mai. 2023.

Copyright © 2005, 2004, 2001, 1999, 1998 by Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cezar Morgado.

**Fundamentos da matemática elementar**, 6: complexos, polinômios, equações/ Gelson Iezzi. -8. Ed. – São Paulo: Atual, 2013.

GARBI, Gilberto G. **O Romance Das Equações Algébricas**. 3. ed. [s. /] Livraria da Física, 2009. 151 p.

[http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat\\_ReisNetoR\\_1.pdf](http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_ReisNetoR_1.pdf). Acesso em: 6 mai. 2023.

NETO. Raimundo Martins Reis. **Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos**. 2009. 143 p. Dissertação (Mestre em Ensino de Matemática.) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. Disponível em

OLIVEIRA, Stanley Borges de. **Números Complexos e Geometria**. Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

RPM 47- **A ilha do tesouro: dois problemas e duas soluções**.

SILVEIRA, Fernando Lang da. **A matemática dos antigos gregos era a Geometria. Raciocínios Geométricos**, UFSJ.

**Trigonometria/Números Complexos** Copyright © 1992-2005, Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner.