



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Victor Daniel Pinheiro Pinto

**Solução Analítica da Equação da Onda com  
Amortecimento Kelvin-Voigt**

SALINÓPOLIS-PA

Novembro /2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Victor Daniel Pinheiro Pinto

**Solução Analítica da Equação da Onda com  
Amortecimento Kelvin-Voigt**

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Universidade Federal do Pará

SALINÓPOLIS-PA  
Novembro /2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

P659s Pinto, Victor Daniel Pinheiro.  
Solução Analítica da Equação da Onda com Amortecimento  
Kelvin-Voigt / Victor Daniel Pinheiro Pinto. — 2025.  
vii, 30 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Ramos

Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará,  
Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura em  
Matemática, Salinópolis, 2025.

1. Equação da onda. 2. Amortecimento Kelvin-Voigt. 3.  
Séries de Fourier. 4. Viscoelasticidade. 5. Simulação  
computacional. I. Título.

CDD 515.353

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Victor Daniel Pinheiro Pinto

**Solução Analítica da Equação da Onda com  
Amortecimento Kelvin-Voigt**

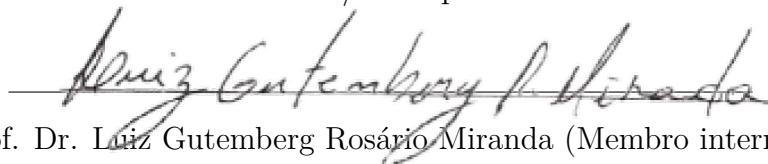
Trabalho de Curso apresentado ao corpo docente da Faculdade de Matemática – Campus Universitário de Salinópolis, como parte dos requisitos necessários para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Data da defesa: 24 de novembro de 2025

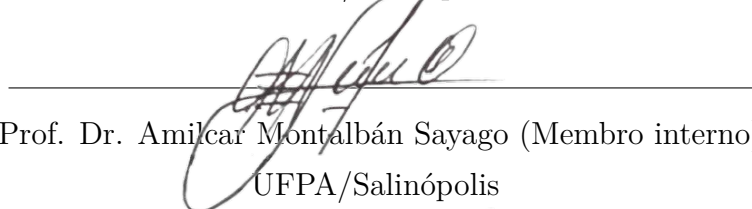
Resultado: Aprovado



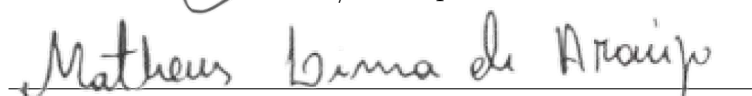
Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Presidente)  
UFPA/Salinópolis



Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Membro interno)  
UFPA/Salinópolis



Prof. Dr. Amílcar Montalbán Sayago (Membro interno)  
UFPA/Salinópolis



Mestr. Matheus Lima de Araújo (Membro externo)  
PPGME-UFPA/Belém

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus. Ele foi meu abrigo, meu consolo e minha força. Sem Ele, absolutamente nada disso teria sido possível. Sou imensamente grato pela dádiva de viver sonhos que um dia pareciam tão distantes. Durante esses quatro anos, quando o cansaço apertou, quando as dúvidas chegaram, quando as lágrimas caíram, foi Deus quem me sustentou. Ele me levantou quando eu caí, me mostrou o caminho quando errei e me fortaleceu quando pensei em desistir. Este trabalho é também um testemunho da fidelidade d'Ele na minha vida.

Agradeço profundamente à minha família, que sempre esteve ao meu lado. Ao meu pai e à minha tia, que sempre me aconselharam a buscar o caminho certo; ao meu avô, fundamental nesta reta final do curso, por todo apoio financeiro e emocional; à minha irmã e aos meus primos, que caminharam comigo em tantos momentos.

Manifesto também minha gratidão especial à minha mãe, Débora do O. Pinheiro Pinto, uma mulher guerreira que, mesmo diante de tantas dificuldades, jamais deixou de demonstrar amor, cuidado e dedicação. Minha mãe foi minha conselheira, minha força e uma das principais razões pelas quais permaneci firme em busca dos meus objetivos. Ela é minha inspiração: admiro sua coragem, sua história e tudo o que conquistou. Sou eternamente grato pela vida dessa mulher, que nunca soltou a minha mão quando eu precisei.

Minha gratidão mais profunda é para minha avó, Cléa Pinheiro Pinto. Ela é a mulher que me formou, que esteve comigo desde os meus cinco meses de vida, que me acompanhou em cada passo, cada escolha, cada conquista. Foi ela quem me ensinou o que é certo, quem me levou pela primeira vez à escola, quem acreditou em mim mesmo quando eu duvidava. Minha avó não é apenas minha avó: ela é minha mãe, meu pai, minha amiga, minha fortaleza. Tudo o que sou carrega a marca do amor e do cuidado dela. Este trabalho também é dela.

Agradeço aos meus amigos e colegas que tornaram essa jornada mais leve e marcante. Compartilhamos ideias, debates, dificuldades e, principalmente, muitos sorrisos. Meu agradecimento especial à Lorrany, que foi presença constante nesses quatro anos, sempre disposta a ajudar, aconselhar, ouvir e apoiar. Sua parceria fez toda a diferença.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos, pela orientação paciente, pelos ensinamentos dedicados e pela confiança no meu trabalho. Sua presença foi essencial para que este projeto se tornasse possível. Agradeço também a todos os docentes da UFPA-Campus Salinópolis, que contribuíram de maneira significativa para minha formação acadêmica e pessoal.

A todos que fizeram parte dessa caminhada, meu coração transborda gratidão.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal obter a solução exata da equação da onda unidimensional com amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt, utilizando o método de separação de variáveis e séries de Fourier. A equação considerada modela a propagação de ondas em meios viscoelásticos, nos quais há dissipação de energia interna proporcional à taxa de deformação. Inicialmente, são apresentados os conceitos teóricos fundamentais sobre funções periódicas, séries numéricas, convergência e séries de Fourier. Em seguida, realizamos a dedução da equação diferencial governante por meio do método direto, a partir de leis da mecânica contínua, e sua posterior adimensionalização, destacando os parâmetros físicos relevantes. A solução exata do problema com condições de Dirichlet homogêneas é então construída em forma de série de Fourier, evidenciando dois regimes distintos de comportamento: modos de vibração oscilatórios (subamortecidos) e modos superamortecidos, dependendo da relação entre o número de modo e o parâmetro adimensional de amortecimento  $\gamma$ . Por fim, o trabalho apresenta simulações computacionais implementadas em MATLAB, que ilustram a evolução da solução ao longo do tempo e demonstram a influência de  $\gamma$  na atenuação dos modos de vibração, validando o modelo teórico.

**Palavras-chave:** Equação da onda, amortecimento Kelvin-Voigt, séries de Fourier, viscoelasticidade, simulação computacional.

## Abstract

The main objective of this work is to obtain the exact solution of the one-dimensional wave equation with Kelvin-Voigt-type viscoelastic damping, using the method of separation of variables and Fourier series. The equation under consideration models wave propagation in viscoelastic media, in which internal energy dissipation is proportional to the strain rate. We begin by presenting the fundamental theoretical concepts related to periodic functions, numerical series, convergence, and Fourier series. Next, we derive the governing differential equation using the direct method based on the laws of continuum mechanics, followed by its nondimensionalization, highlighting the relevant physical parameters. The exact solution of the problem with homogeneous Dirichlet boundary conditions is then constructed in the form of a Fourier series, revealing two distinct behavioral regimes: oscillatory (underdamped) vibration modes and overdamped modes, depending on the relationship between the mode number and the dimensionless damping parameter  $\gamma$ . Finally, the work presents computational simulations implemented in MATLAB, which illustrate the temporal evolution of the solution and demonstrate the influence of  $\gamma$  on the attenuation of vibration modes, thereby validating the theoretical model.

**Key-words:** Wave equation, Kelvin-Voigt damping, Fourier series, viscoelasticity, computational simulation.

# Conteúdo

<b>Notações</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1 Definições e proposições . . . . .	6
1.1.1 Convergência de séries . . . . .	7
1.1.2 Série de Fourier . . . . .	8
1.2 Funções trigonométricas e hiperbólicas . . . . .	9
<b>2 Sistema Viscoelástico</b>	<b>12</b>
2.1 Modelagem matemática – Método direto . . . . .	12
2.2 Adimensionalização do modelo . . . . .	14
2.3 Solução exata em séries de Fourier . . . . .	15
<b>3 Simulação Computacional</b>	<b>22</b>
3.1 Código Matlab . . . . .	22
3.2 Experimentos numéricos . . . . .	26
3.2.1 Regime superamortecido . . . . .	26
3.2.2 Regime intermediário . . . . .	27
3.2.3 Regime subamortecido . . . . .	28
<b>Conclusão</b>	<b>29</b>
<b>Referências</b>	<b>30</b>

# Notações

$[0, T] :=$  intervalo fechado e limitado em  $\mathbb{R}$ ;

$(0, \ell) :=$  intervalo aberto e limitado em  $\mathbb{R}$ ;

$\mathbb{R}^+ :=$  intervalo  $[0, \infty)$ ;

$[x] :=$  parte inteira de  $x$ ;

# Introdução

Este capítulo tem como objetivo contextualizar o problema estudado neste trabalho, abordando os aspectos físicos e matemáticos que motivam a introdução do modelo de Kelvin–Voigt na equação da onda. Iniciamos com uma discussão sobre a formulação clássica da equação da onda e suas limitações na modelagem de sistemas reais que apresentam dissipação de energia. Em seguida, introduzimos o modelo viscoelástico de Kelvin–Voigt e destacamos suas propriedades fundamentais, tanto do ponto de vista físico quanto analítico. Por fim, apresentamos a formulação do problema de valor inicial e de contorno que será resolvido ao longo do trabalho, juntamente com uma descrição da organização dos capítulos seguintes.

## Motivação física

A equação da onda é uma das equações diferenciais parciais (EDPs) mais fundamentais da física matemática, modelando fenômenos de propagação em meios elásticos, como vibrações em cordas, ondas acústicas, ondas em superfícies líquidas, entre outros. Na sua forma clássica unidimensional e dissipativa, ela é expressa por

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} + \delta u_t = 0, \tag{1}$$

onde  $u = u(x, t)$  representa o deslocamento em uma posição  $x$  e instante  $t$ ,  $\rho$  a densidade linear de massa do meio,  $E$  a módulo de Young e  $\delta$  é o parâmetro de amortecimento. No entanto, tal formulação presume um meio puramente elástico e não leva em consideração efeitos dissipativos que são frequentemente observados em sistemas reais, como atenuação de vibrações, histerese ou absorção interna de energia. Para representar tais efeitos, modelos mais elaborados são necessários.

Um dos modelos mais conhecidos para descrever materiais viscoelásticos é o modelo de *Kelvin–Voigt*, proposto de forma independente por William Thomson (Lord Kelvin) e Woldemar Voigt no século XIX. Esse modelo combina uma mola (comportamento elástico

linear de Hooke) e um amortecedor viscoso (modelo de Newton) atuando em paralelo.

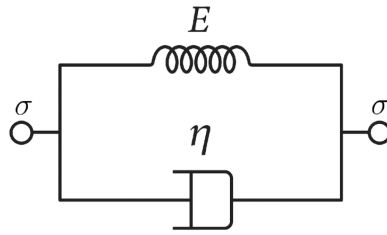


Figura 1: Diagrama mecânico análogo em que  $E$  denota o módulo de Young,  $\eta$  o coeficiente de viscosidade e  $\sigma$  a tensão aplicada.

No contexto de propagação de ondas, o modelo leva a uma modificação na equação clássica da onda com a introdução de um termo adicional relacionado à taxa de deformação temporal. A equação da onda com damping Kelvin–Voigt em uma dimensão espacial é dada por

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} - \eta u_{xxt} = 0. \quad (2)$$

O termo  $u_{xxt}$  representa a dissipação de energia causada pelo amortecedor viscoso distribuído ao longo do domínio. Esta equação tem sido amplamente estudada na literatura devido à sua relevância em engenharia estrutural, mecânica dos sólidos, geofísica e modelagem de materiais avançados [1–3].

O amortecimento introduzido pelo termo  $\eta u_{txx}$  altera significativamente as propriedades dinâmicas do sistema. Diferente do amortecimento friccional, que atua diretamente no termo de velocidade  $\delta u_t$ , o damping de Kelvin–Voigt atua na derivada espacial da velocidade, tornando a dissipação dependente da curvatura da deformação. Isso leva a uma *dissipação dependente do modo*, onde modos mais altos sofrem maior atenuação, um comportamento que está mais alinhado com sistemas físicos reais [4].

Sob o ponto de vista matemático, a equação de Kelvin–Voigt representa um sistema *hiperbólico-parabólico* acoplado, sendo de segunda ordem no tempo e de quarta ordem mista no espaço-tempo. A presença do termo  $u_{xxt}$  introduz características parabolizantes na equação, o que melhora propriedades como regularidade e estabilidade das soluções. Diversos trabalhos abordam a existência, unicidade e decaimento exponencial da energia associada a este tipo de equação [5–7].

A modelagem com este tipo de equação é particularmente relevante em aplicações de vibração de vigas e placas, onde se deseja entender não apenas como as ondas se propagam, mas também como elas se atenuam ao longo do tempo. Por exemplo, em engenharia civil, o comportamento de estruturas viscoelásticas sujeitas a excitações sísmicas pode

ser modelado com precisão superior por este tipo de formulação [8].

Neste trabalho, buscamos estudar a *solução exata* da equação da onda com damping Kelvin–Voigt no contexto unidimensional, com condições de contorno de Dirichlet homogêneas, por meio do *método de separação de variáveis* e *séries de Fourier*. Esta abordagem clássica permite descrever a evolução temporal de cada modo de vibração do sistema, bem como analisar o papel do parâmetro de amortecimento  $\eta$  na atenuação modal.

Mais especificamente, consideramos o Problema de Valor Inicial e de Contorno (PVIC) dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - E u_{xx} - \eta u_{xxt} = 0, & \text{em } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (3)$$

Dessa forma, o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt emerge como uma formulação adequada para descrever a propagação de ondas com dissipação de energia em meios reais. Com base nisso, no próximo capítulo apresentamos em detalhes a dedução matemática do modelo por meio do método direto, destacando os principais aspectos físicos e matemáticos envolvidos na formulação da equação diferencial que rege o sistema.

## Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- **Capítulo 1 – Conceitos Preliminares:** apresenta os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho, incluindo definições de funções periódicas, séries numéricas e de funções, convergência pontual e uniforme, bem como a construção dos coeficientes de Fourier e a série de Fourier para funções seccionais.
- **Capítulo 2 – Sistema Viscoelástico:** desenvolve a modelagem matemática da equação da onda viscoelástica utilizando o método direto, a partir de leis físicas fundamentais. Em seguida, realiza-se a adimensionalização da equação, com identificação dos parâmetros físicos relevantes, e é apresentada a solução exata do problema utilizando o método de separação de variáveis e séries de Fourier.
- **Capítulo 3 – Simulações Computacionais:** apresenta a implementação computacional da solução exata obtida no capítulo anterior. São exibidos exemplos

numéricos e gráficos que ilustram a dissipação modal, com destaque para o efeito do parâmetro de amortecimento  $\gamma$  sobre a evolução das soluções ao longo do tempo.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais e os principais resultados teóricos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Iniciamos com definições essenciais sobre séries numéricas e séries de funções, destacando propriedades de convergência e critérios clássicos. Em seguida, introduzimos noções básicas sobre funções periódicas e, por fim, desenvolvemos os elementos centrais da Análise de Fourier.

Grande parte da exposição segue de perto a abordagem apresentada na obra de Figueiredo [11], que adotamos como referência principal para este capítulo.

### 1.1 Definições e proposições

**Definição 1.1** (Função periódica). *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **periódica de período**  $T > 0$  se satisfaz*

$$f(x + T) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.2** (Paridade de funções). *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é:*

- (i) **Par** se  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) **Ímpar** se  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 1.1.** *Valem as seguintes propriedades para funções pares e ímpares:*

- (i) *A soma de duas funções pares (resp. ímpares) é par (resp. ímpar);*
- (ii) *O produto de duas funções pares ou de duas funções ímpares é par;*
- (iii) *O produto de uma função par com uma função ímpar é ímpar.*

**Definição 1.3** (Descontinuidade de primeira espécie). Dado  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$  e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

**Definição 1.4** (Funções seccionais). Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é:

- (i) **Seccionalmente contínua:** se possui um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado.
- (ii) **Seccionalmente diferenciável:** se é seccionalmente contínua e sua derivada também o é.

**Proposição 1.2.** Se  $f$  é integrável em  $[-\ell, \ell]$ , então:

(i) Se  $f$  é par:  $\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 2 \int_0^{\ell} f(x) dx.$

(ii) Se  $f$  é ímpar:  $\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 0.$

### 1.1.1 Convergência de séries

**Definição 1.5** (Convergência de séries numéricas). Uma série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge se a sequência das somas parciais

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j,$$

possui limite finito quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exemplos clássicos:**

(i) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge se, e somente se,  $\alpha > 1$ .

(ii) A série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ , com  $|\lambda| < 1$ , converge para  $\lambda/(1 - \lambda)$ .

**Definição 1.6** (Convergência pontual e uniforme). Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uma série de funções  $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que:

(i) A série converge pontualmente em  $x_0 \in I$  se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  converge.

(ii) A série converge uniformemente em  $I$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$  e  $x \in I$ ,

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall m > n.$$

**Proposição 1.3.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente e cada  $u_n$  é contínua, então a função soma  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  é contínua.

**Proposição 1.4.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente e cada  $u_n$  é integrável em  $I$ , então

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

**Proposição 1.5.** Se cada  $u_n \in C^1(I)$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  converge uniformemente e  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  converge para algum  $x_0 \in I$ , então

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

### 1.1.2 Série de Fourier

**Definição 1.7** (Coeficientes de Fourier). Se uma função  $f$  é periódica de período  $2\ell$  e admite a expansão

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

então os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (1.2)$$

As fórmulas de  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são obtidas usando as relações de ortogonalidade das

funções trigonométricas dadas abaixo

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} \ell, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} \ell, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = 0. \quad (1.5)$$

**Definição 1.8** (Série de Fourier). *Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\ell$ , integrável e absolutamente integrável, sua série de Fourier é*

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right],$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados pelas equações (1.1) e (1.2).

**Teorema 1.1** (Convergência de Fourier). *Se  $f$  é seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2\ell$ , então sua série de Fourier da função  $f$  dada por*

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right],$$

converge, em cada ponto  $x$  para

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right].$$

## 1.2 Funções trigonométricas e hiperbólicas

As funções trigonométricas e hiperbólicas desempenham um papel fundamental em diversas áreas da matemática, da física e da engenharia. Elas aparecem naturalmente na resolução de equações diferenciais, em séries de Fourier, no estudo de oscilações e em modelos que envolvem crescimento exponencial ou movimento harmônico.

### A relação de Euler

Uma das fórmulas mais elegantes da matemática é a chamada *relação de Euler*, que conecta exponenciais complexas às funções trigonométricas:

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Essa relação pode ser demonstrada usando a série de Taylor das funções exponencial, seno e cosseno. A partir dela, podemos expressar as funções trigonométricas em termos de exponenciais complexas da forma

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.7)$$

Essas fórmulas são amplamente utilizadas, por exemplo, na análise de sinais, onde a decomposição de uma função em senos e cossenos equivale a uma representação em termos de exponenciais complexas via transformada de Fourier.

## Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são análogas às funções trigonométricas, mas envolvem combinações das exponenciais reais. São definidas por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.8)$$

De forma análoga à relação de Euler, temos

$$e^{\pm x} = \cosh(x) \pm \sinh(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Essas funções surgem, por exemplo, na solução da equação do calor e em problemas envolvendo catenárias (o formato de um cabo suspenso sob seu próprio peso). Enquanto as funções trigonométricas estão associadas à rotação e oscilação, as funções hiperbólicas descrevem crescimento e decaimento exponencial.

## Identidades e propriedades

Assim como as funções trigonométricas satisfazem certas identidades, as funções hiperbólicas possuem propriedades análogas. Por exemplo:

- Identidade trigonométrica fundamental:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

- Identidade hiperbólica fundamental:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

- Derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin(x) &= \cos(x), & \frac{d}{dx} \sinh(x) &= \cosh(x), \\ \frac{d}{dx} \cos(x) &= -\sin(x), & \frac{d}{dx} \cosh(x) &= \sinh(x).\end{aligned}$$

Essas semelhanças reforçam a ideia de que as funções hiperbólicas constituem um análogo hiperbólico das funções circulares, embora com propriedades geométricas distintas.

# Capítulo 2

## Sistema Viscoelástico

Neste capítulo, estudamos o modelo viscoelástico de Kelvin–Voigt aplicado a uma barra unidimensional sujeita a deslocamentos transversais. Inicialmente, utilizamos o *método direto* para deduzir a equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema a partir das leis fundamentais da mecânica. Em seguida, procedemos à adimensionalização da equação de movimento, com o objetivo de simplificar a análise e evidenciar os parâmetros adimensionais que governam o comportamento físico. Por fim, aplicamos o método de separação de variáveis para obter uma solução exata do problema, expressa em termos de séries de Fourier.

A apresentação deste capítulo segue a abordagem clássica encontrada em referências de modelagem matemática contínua, tais como Logan [9] e Meerschaert [10].

### 2.1 Modelagem matemática – Método direto

Neste trabalho, empregamos o *método direto*, que consiste na utilização de leis físicas fundamentais expressas por equações diferenciais conhecidas para atuar diretamente sobre o sistema físico em estudo. A partir dessas relações, deduzimos de forma sistemática uma nova equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico da variável de interesse ao longo de uma dimensão espacial.

Considere uma barra retilínea ocupando o intervalo  $(0, \ell)$ , com deslocamento transversal no ponto  $x \in (0, \ell)$  dado por  $u(x, t)$  em função do tempo  $t$ . Analisando uma pequena porção da barra de comprimento infinitesimal  $dx$  centrada em  $x$ , a massa dessa porção é dada por

$$dm = \rho A dx,$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica da barra e  $A$  é a área da seção transversal.

De acordo com a **Segunda Lei de Newton**, a força resultante sobre esse elemento é igual à massa multiplicada pela aceleração ( $F = dm a$ ), *i.e.*,

$$F = \rho A dx u_{tt}(x, t), \quad (2.1)$$

onde  $u_{tt}(x, t)$  é a aceleração.

Por outro lado, as forças internas (tensão axial), denotada por  $\sigma(x, t)$  é a força por unidade de área transmitida internamente no material. No caso unidimensional, consideramos que a força total na seção transversal em  $x$  é dada por

$$F = \sigma(x, t) A,$$

onde  $A$  é a área da seção transversal. Então, a diferença de forças entre os extremos do elemento infinitesimal é

$$\begin{aligned} F = [\sigma(x + dx, t) - \sigma(x, t)] A &= \frac{\sigma(x + dx, t) - \sigma(x, t)}{dx} A dx \\ &\approx \sigma_x(x, t) A dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Combinando as equações (2.1)–(2.2) temos a forma final da **Equação de Movimento** unidimensional dada por

$$\rho u_{tt}(x, t) = \sigma_x(x, t),$$

onde  $\sigma_x(\cdot)$  depende da lei constitutiva adotada. Abaixo fornecemos uma tabela com dois modelos constitutivos.

Tabela 2.1: Modelos constitutivos e seus efeitos sobre a equação de movimento

<b>Tipo de material</b>	<b>Lei constitutiva</b>	<b>Resultado</b>
Elástico linear	$\sigma = E u_x$	Onda clássica
Kelvin–Voigt (viscoelástico)	$\sigma = E u_x + \eta u_{xt}$	Onda com amortecimento

Na Tabela 2.1,  $E u_x$  representa a resposta elástica e  $\eta u_{xt}$  o efeito de amortecimento interno (viscosidade). Aqui, nosso interesse é estudar o modelo de ondas viscoelásticas e para isso, adotamos  $\sigma =$  que resulta em

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} - \eta u_{xxt} = 0 \quad \text{em} \quad (0, \ell) \times (0, \infty), \quad (2.3)$$

onde  $\rho$ ,  $E$  e  $\eta$  são constantes físicas positivas, seguido das condições de contorno

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \ell. \quad (2.5)$$

## 2.2 Adimensionalização do modelo

Com o intuito de simplificar a análise e reduzir o número de parâmetros físicos da equação que rege a dinâmica da barra viscoelástica, realizamos a adimensionalização do modelo. Esse procedimento permite identificar os parâmetros adimensionais que controlam o comportamento do sistema e facilita a generalização dos resultados. Para isso, introduzimos escalas características de comprimento, tempo e deslocamento, e reescrevemos a equação diferencial original em termos de variáveis adimensionais. A seguir, apresentamos os detalhes desse processo.

Tendo em mente o sistema (2.3)–(2.5) introduzimos as variáveis adimensionais:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{u(x, t)}{U},$$

onde  $\ell$  é o comprimento característico,  $T$  é o tempo característico e  $U$  uma escala de deslocamento.

Dessa forma as variáveis e as derivadas do modelo original são transformadas em variáveis e derivadas adimensionais dadas por

$$u_{tt} = \frac{U}{T^2} \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}, \quad u_{xx} = \frac{U}{\ell^2} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \quad u_{xxt} = \frac{U}{\ell^2 T} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}}. \quad (2.6)$$

Substituindo os termos de (2.6) em (2.3), obtemos

$$\rho \frac{U}{T^2} \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} - E \frac{U}{\ell^2} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \eta \frac{U}{\ell^2 T} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = 0. \quad (2.7)$$

Dividindo por  $\rho U/T^2$  obtemos

$$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} - \underbrace{\frac{ET^2}{\ell^2 \rho}}_{\alpha :=} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \underbrace{\frac{\eta T}{\ell^2 \rho}}_{\gamma :=} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = 0. \quad (2.8)$$

Escolhendo  $\alpha := ET^2/\ell^2\rho = 1$  implica no tempo característico

$$T = \ell \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

que nos leva à

$$\gamma := \frac{\eta T}{\ell^2 \rho} = \frac{\eta}{\ell} \sqrt{\frac{1}{\rho E}}.$$

Com isso obtemos o problema adimensional dado por

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \gamma \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} = 0, & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tilde{u}(0, \tilde{t}) = \tilde{u}(1, \tilde{t}) = 0, & \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = f(\tilde{x}), \quad \tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{x}, 0) = g(\tilde{x}), & 0 < \tilde{x} < 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

com  $\gamma = \frac{\eta}{\ell} \sqrt{\frac{1}{\rho E}}$  sendo uma constante adimensional. Por simplicidade,  $\sim$  é omitido nas próximas seções.

## 2.3 Solução exata em séries de Fourier

As soluções exatas em séries de Fourier desempenham um papel fundamental na análise de equações diferenciais parciais que modelam fenômenos físicos, como propagação de ondas, condução de calor e vibrações mecânicas. Ao expandir a solução em uma série de funções ortogonais do tipo senos e cossenos, é possível representar de forma precisa o comportamento do sistema ao longo do tempo e do espaço, respeitando as condições de contorno e iniciais impostas ao problema. Uma das principais vantagens desse método é sua capacidade de fornecer soluções analíticas fechadas, que ajudam a compreender a estrutura matemática da equação, a influência dos parâmetros físicos e a separação entre regimes dinâmicos distintos (como oscilações, amortecimento e ressonância).

Com base nisso, considere o problema adimensional dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \gamma u_{xxt} = 0, & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $\gamma > 0$  é um parâmetro adimensional de amortecimento. O resultado seguinte nos mostra a solução exata do problema em séries de Fourier.

**Proposição 2.1.** *A solução formal do problema (2.10) em série de Fourier é dada por*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{n_0} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right] \sin(n\pi x) \\ &+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ a_n \cosh(\tilde{\omega}_n t) + b_n \sinh(\tilde{\omega}_n t) \right] \sin(n\pi x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $n_0 := \lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \rfloor \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_n := n\pi\sqrt{1 - \frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4}}$ ,  $\tilde{\omega}_n := n\pi\sqrt{\frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4} - 1}$  e os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  satisfazem as relações

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\omega_n} \int_0^1 \left( \gamma\pi^2 n^2 f(x) + g(x) \right) \sin(n\pi x) dx & \text{se } 1 \leq n \leq n_0, \\ \frac{2}{\tilde{\omega}_n} \int_0^1 \left( \gamma\pi^2 n^2 f(x) + g(x) \right) \sin(n\pi x) dx & \text{se } n_0 + 1 \leq n < \infty. \end{cases} \quad (2.12)$$

*Demonstração.* Usando o método da separação de variáveis, adotamos

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad (2.13)$$

e substituímos em (2.10)<sub>1</sub> para obtermos

$$F(x)G''(t) - F''(x)G(t) - \gamma F''(x)G'(t) = 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t) + \gamma G'(t)}.$$

Observamos que o lado esquerdo da equação acima depende apenas de  $x$ , enquanto que o lado direito depende apenas de  $t$ . Logo podemos concluir que ambos os lados, são independentes de  $x$  e  $t$ . Isto quer dizer que,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t) + \gamma G'(t)} = \sigma, \quad \text{para algum } \sigma \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Por outro lado, substituindo  $u(x, t) = F(x)G(t)$  nas condições de contorno  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  temos,

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & \Rightarrow & F(0)G(t) = 0 & \Rightarrow & F(0) = 0, \\ u(1, t) = 0 & \Rightarrow & F(1)G(t) = 0 & \Rightarrow & F(1) = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

e substituindo na condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  temos

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & \Rightarrow & F(x)G(0) = f(x) & \Rightarrow & G(0) = G_0, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \Rightarrow & F(x)G'(0) = g(x) & \Rightarrow & G'(0) = G_1, \end{cases} \quad (2.16)$$

de onde adotamos  $G_0, G_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Com isto, passamos a considerar o Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 & \text{em } (0, 1), \\ F(0) = F(1) = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

e o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} G''(t) - \gamma\sigma G'(t) - \sigma G(t) = 0 & \text{para todo } t \geq 0, \\ G(0) = G_0, \quad G'(0) = G_1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Para resolver o problema de valor de contorno (2.17), procedemos com a análise dos seguintes casos:

**Caso I:** Admitimos inicialmente que  $\sigma > 0$  e consideremos uma solução da forma  $F(x) = e^{\mu x}$  em (2.17). Substituindo na equação, obtemos a equação característica

$$\mu^2 - \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\sigma}. \quad (2.19)$$

Logo, duas soluções independentes da equação são

$$F(x) = e^{\sqrt{\sigma}x} \quad \text{e} \quad F(x) = e^{-\sqrt{\sigma}x}. \quad (2.20)$$

Assim, pela superposição linear, a solução geral é dada por

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}. \quad (2.21)$$

Aplicando as condições de contorno  $F(0) = F(1) = 0$ , obtemos

$$\begin{cases} F(0) = c_1\sqrt{\sigma} - c_2\sqrt{\sigma} = 0 & \Rightarrow \quad c_1 = c_2, \\ F(1) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}} - c_2 e^{-\sqrt{\sigma}} = 0 & \Rightarrow \quad c_1 e^{\sqrt{\sigma}} = c_2 e^{-\sqrt{\sigma}}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Substituindo  $c_1 = c_2$  na segunda equação, resulta

$$c_1(e^{2\sqrt{\sigma}} - 1) = 0. \quad (2.23)$$

Como  $\sigma > 0$ , temos  $e^{2\sqrt{\sigma}} \neq 1$ , logo  $c_1 = 0$  e, portanto,  $F(x) \equiv 0$ . Como a solução trivial não nos interessa, concluímos que o caso  $\sigma > 0$  não fornece soluções não nulas.

**Caso II:** Supondo agora  $\sigma = 0$ , a equação diferencial reduz-se a

$$F''(x) = 0, \quad (2.24)$$

cujas soluções gerais são funções afins:

$$F(x) = c_1 x + c_2. \quad (2.25)$$

Impondo novamente as condições de contorno  $F(0) = F(1) = 0$ , obtemos  $c_1 = c_2 = 0$ , implicando  $F(x) = 0$ . Portanto, como  $F(x) = 0$  para todo  $x$ , também neste caso a solução é trivial.

**Caso III:** Por fim, consideramos  $\sigma < 0$  e escrevemos  $\sigma = -\lambda^2$ , com  $\lambda > 0$ . Neste cenário, a equação característica (2.19) fornece raízes imaginárias e a solução geral assume a forma

$$F(x) = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}. \quad (2.26)$$

Utilizando a fórmula de Euler, podemos reescrevê-la como combinação de funções reais

$$F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x). \quad (2.27)$$

Aplicando as condições de contorno e exigindo que  $F(0) = 0$  resulta em  $A = 0$ . A condição  $F(1) = 0$  implica

$$B \sin(\lambda) = 0. \quad (2.28)$$

Como desejamos soluções não triviais ( $B \neq 0$ ), obtemos que  $\sin(\lambda) = 0$ , o que leva a

$$\lambda_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.29)$$

Portanto, as soluções admissíveis associadas a cada valor de  $n$  são dadas por:

$$F_n(x) = B \sin(n\pi x), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Por outro lado, tendo determinado que  $\sigma_n = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2$ , procedemos agora à resolução do seguinte problema de valor inicial (2.18) que nos fornece a equação característica

$$z^2 + \gamma n^2 \pi^2 z + n^2 \pi^2 = 0, \quad (2.31)$$

cujas soluções é dada por

$$z_n \equiv z = \begin{cases} -\frac{\gamma n^2 \pi^2}{2} \pm n\pi \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4}} i & \in \mathbb{C}, \quad \text{se } n < \left\lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \right\rfloor, \\ -\frac{\gamma n^2 \pi^2}{2} \mp n\pi \sqrt{\frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4} - 1} & \in \mathbb{R}, \quad \text{se } n \geq \left\lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \right\rfloor. \end{cases} \quad (2.32)$$

As duas classes de soluções para  $z_n$  decorrem do comportamento assintótico quando  $n \rightarrow \infty$ , pois existe um valor  $n_0 = n_0(\gamma)$  tal que o termo  $\Delta := 1 - \frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4}$  muda de sinal, de positivo para negativo quando  $n > n_0$ . Devido a essa bifurcação, o caráter da solução da equação (2.32) muda ao ultrapassar o valor  $n_0$ .

Assim, a solução do PVI é dada por

$$G_n(t) \equiv G(t) = \begin{cases} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ A_n \cos(\omega t) + B_n \sin(n\pi t) \right], & \text{se } n < \left\lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \right\rfloor, \\ e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ A_n \cosh(\tilde{\omega}_n t) + B_n \sinh(\tilde{\omega}_n t) \right], & \text{se } n \geq \left\lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \right\rfloor, \end{cases}$$

onde  $\omega_n := n\pi\sqrt{1 - \frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4}}$ ,  $\tilde{\omega}_n := n\pi\sqrt{\frac{\gamma^2 n^2 \pi^2}{4} - 1}$  e  $A_n, B_n$  são constantes arbitrárias.

Portanto, a solução formal geral da série de Fourier é dada por

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right] \sin(n\pi x)}_{\text{modos subamortecidos (oscilatórios)}} \\
& + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ a_n \cosh(\tilde{\omega}_n t) + b_n \sinh(\tilde{\omega}_n t) \right] \sin(n\pi x)}_{\text{modos superamortecidos (não oscilatórios)}}, \quad (2.33)
\end{aligned}$$

onde definimos  $n_0 := \left\lfloor \frac{2}{\gamma\pi} \right\rfloor \in \mathbb{N}$  e os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) são chamados de coeficientes de Fourier e são escolhidos de modo que tomando  $t = 0$  em (2.33) tenhamos (2.10)<sub>3</sub>. Note que  $f(x)$  e  $g(x)$  devem se escolhidas de modo a ser uma função ímpar e periódica de período  $2\pi$ , a fim de termos uma série de senos de argumento  $n\pi$ .

Agora nossa intenção é encontrar os valores de  $a_n$  e  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Note que tomando  $t = 0$  na equação (2.33) e integrando o resultado em  $[0, 1]$  temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x), \quad (2.34)$$

que ao ser multiplicada por  $\sin(m\pi x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) e integrada em  $[0, 1]$  resulta em

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) dx = & a_1 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(m\pi x) dx + a_2 \int_0^1 \sin(2\pi x) \sin(m\pi x) dx \\
& + a_3 \int_0^1 \sin(3\pi x) \sin(m\pi x) dx + a_4 \int_0^1 \sin(4\pi x) \sin(m\pi x) dx \\
& + \dots + \\
& + a_{n-1} \int_0^1 \sin((n-1)\pi x) \sin(m\pi x) dx \\
& + a_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \\
& + \dots + \dots.
\end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade entre as funções  $\sin(n\pi x)$  e  $\sin(m\pi x)$  para  $n \neq m$  segue que

$$\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{2} a_n, \quad n = m,$$

ou ainda,

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

De modo análogo, derivando a equação (2.33) no tempo, obtemos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) = & \sum_{n=1}^{n_0} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ -\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \right. \\ & \left. - a_n \omega_n \sin(\omega_n t) + b_n \omega_n \cos(\omega_n t) \right] \sin(n\pi x) \\ & + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} e^{-\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} t} \left[ -\gamma \frac{n^2 \pi^2}{2} (a_n \cosh(\tilde{\omega}_n t) + b_n \sinh(\tilde{\omega}_n t)) \right. \\ & \left. + a_n \tilde{\omega}_n \sinh(\tilde{\omega}_n t) + b_n \tilde{\omega}_n \cosh(\tilde{\omega}_n t) \right] \sin(n\pi x), \end{aligned}$$

e tomando  $t = 0$  temos

$$g(x) = -\gamma \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^2 \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{n_0} b_n \omega_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n \tilde{\omega}_n \sin(n\pi x).$$

Multiplicando a equação acima por  $\sin(m\pi x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) e integrando em  $[0, 1]$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) \sin(m\pi x) dx = & -\gamma \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \\ & + \sum_{n=1}^{n_0} b_n \omega_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \\ & + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n \tilde{\omega}_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx. \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo ao que fizemos em (2.34) obtemos

$$\int_0^1 g(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \begin{cases} -\gamma \pi^2 n^2 a_n + b_n \omega_n & \text{se } m = n \in [1, n_0], \\ -\gamma \pi^2 n^2 a_n + b_n \tilde{\omega}_n & \text{se } m = n \in [n_0 + 1, \infty). \end{cases} \quad (2.36)$$

Usando (2.35) resulta em

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\omega_n} \int_0^1 \left( \gamma \pi^2 n^2 f(x) + g(x) \right) \sin(n\pi x) dx & \text{se } n \in [1, n_0], \\ \frac{2}{\tilde{\omega}_n} \int_0^1 \left( \gamma \pi^2 n^2 f(x) + g(x) \right) \sin(n\pi x) dx & \text{se } n \in [n_0 + 1, \infty). \end{cases} \quad (2.37)$$

Isto conclui a prova. □

**Observação 2.1.** Para  $n < n_0$  os modos de vibração são denominados **oscilatórios**, pois a solução associada exibe comportamento senoidal amortecido no tempo. Já para  $n \geq n_0$ , os modos são chamados de **superamortecidos**, apresentando decaimento exponencial sem oscilações, com dinâmica dominada por funções hiperbólicas.

# Capítulo 3

## Simulação Computacional

Neste capítulo, apresentamos a implementação computacional da solução exata da equação da onda com amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt, obtida anteriormente por meio de séries de Fourier. Utilizamos a linguagem de programação MATLAB para simular a evolução temporal da solução  $u(x, t)$ , com base em condições iniciais escolhidas e diferentes valores do parâmetro de amortecimento  $\gamma$ . Os resultados numéricos permitem visualizar, de forma clara, o efeito dissipativo introduzido pelo termo viscoelástico, destacando a atenuação modal dos diferentes modos de vibração. Além disso, ilustramos a transição entre regimes subamortecido e superamortecido conforme o número de modo aumenta, confirmando a consistência teórica do modelo com o comportamento físico esperado.

### 3.1 Código Matlab

O código está devidamente comentado para facilitar o entendimento de cada etapa do processo, incluindo a definição das condições iniciais, o cálculo dos coeficientes de Fourier e a construção da solução  $u(x, t)$  ao longo de uma malha temporal e espacial.

```
1 % =====%
2 % Solução exata de ondas viscoelásticas com amortecimento
3 % Kelvin-Voigt via série de Fourier
4 % =====%
5 clc
6 clear
7 % Parâmetro de amortecimento viscoelástico
8 gamma = input('Digite um valor para gamma = ');
```

```

9 % Número total de modos da série de Fourier (truncamento da
   soma)
10 N = 25;
11 % Número máximo de modos oscilatórios (regime subamortecido)
12 n0 = floor(2/(gamma*pi));
13 % =====
14 % Domínio espacial e temporal
15 % =====
16 % Discretização do espaço no intervalo [0,1]
17 x = linspace(0, 1, 400);
18 % Discretização do tempo no intervalo [0,15]
19 t_vals = linspace(0, 15, 400);
20 % Geração de grade (malha) para avaliação de u(x,t)
21 [X, T] = meshgrid(x, t_vals);
22 % Inicializa a matriz solução U(x,t) com zeros
23 U = zeros(size(X));
24 % =====
25 % Condições iniciais
26 % =====
27 % Função f(x): condição inicial da solução u(x,0)
28 f = @(x) (1/2)*x.*(1-x.*x);
29 % Função g(x): condição inicial da derivada u_t(x,0)
30 g = @(x) (1/2)*x.*(1-x.*x);
31 % =====
32 % Loop principal no tempo
33 % =====
34 for i = 1:length(t_vals)
35 t = t_vals(i); % Tempo atual
36 u = zeros(size(x)); % Inicializa solução u(x,t) para este t
37 v = zeros(size(x)); % Inicializa solução v(x,t) para este t
38 % -----
39 % Modos subamortecidos (oscilatórios)
40 % -----
41 for n = 1:n0
42 k = n*pi;

```

```

43 omega_n = k*sqrt(1 - (gamma^2*k^2)/4);
44 a_n = 2*integral(@(x)f(x).*sin(n*pi*x), 0, 1);
45 integrand = @(x)(gamma*k^2*f(x) + g(x)).*sin(n*pi*x);
46 b_n = (2/omega_n)*integral(integrand, 0, 1);
47 u = u + exp(-(gamma*k^2/2)*t).* ...
48 (a_n*cos(omega_n*t) + b_n*sin(omega_n*t)).*sin(k*x);
49 end
50 % ------%
51 % Modos superamortecidos (não oscilatórios) com filtro
52 % ------%
53 for n = (n0+1):N
54 k = n*pi;
55 omega_tilde = k*sqrt((gamma^2*k^2)/4 - 1);
56 a_n = 2*integral(@(x)f(x).*sin(n*pi*x), 0, 1);
57 integrand = @(x)(gamma*k^2*f(x) + g(x)).*sin(n*pi*x);
58 b_n = (2/omega_tilde)*integral(integrand, 0, 1);
59 % ----- %
60 % Filtro para evitar overflow
61 % ----- %
62 amp = abs(a_n*cosh(omega_tilde*t))+abs(b_n*sinh(omega_tilde*
    t));
63 if exp(-(gamma*k^2/2)*t)*amp < 1e8 % tolerância ajustável
64 v = v+exp(-(gamma*k^2/2)*t).* ...
65 (a_n*cosh(omega_tilde*t)+b_n*sinh(omega_tilde*t)).*sin(k*x);
66 end
67 end
68 U(i, :) = u + v;
69 end
70 % =====
71 % Visualização 3D com duas perspectivas lado a lado
72 % =====
73 figure('Position', [100, 100, 1000, 400]); % Tamanho
    ajustado da figura
74 % ----- Subgráfico 1: perspectiva 3D -----
75 subplot(1, 2, 1);

```

```

76 surf(x, t_vals, U, 'EdgeColor', 'none');
77 xlabel('x', 'Interpreter', 'latex');
78 ylabel('t', 'Interpreter', 'latex');
79 zlabel('$u(x,t)$', 'Interpreter', 'latex');
80 title(sprintf('Evolu\\c{c}\\~ao temporal da solu\\c{c}\\~ao
      $u(x,t)$ com $\\gamma = %.2f$', gamma), ...
81 'Interpreter', 'latex');
82 view(107, 22); % ângulo da câmera para melhor visualização
83 colorbar % barra de cores representando os valores de u(x,t)
84 colormap('jet')
85 % ----- Subgráfico 2: visão lateral (t vs u) -----
86 subplot(1, 2, 2);
87 surf(x, t_vals, U, 'EdgeColor', 'none');
88 xlabel('x', 'Interpreter', 'latex');
89 ylabel('t', 'Interpreter', 'latex');
90 zlabel('$u(x,t)$', 'Interpreter', 'latex');
91 title(sprintf('Evolu\\c{c}\\~ao temporal da solu\\c{c}\\~ao
      $u(x,t)$ com $\\gamma = %.2f$', gamma), ...
92 'Interpreter', 'latex');
93 view(90, 90); % Visão lateral (projeção ortogonal sobre
      plano t-u)
94 colorbar % barra de cores representando os valores de u(x,t)
95 colormap('jet')

```

## 3.2 Experimentos numéricos

Com o objetivo de ilustrar e validar a solução exata obtida por meio de séries de Fourier, apresentamos nesta seção alguns experimentos numéricos baseados na implementação computacional do modelo viscoelástico de Kelvin–Voigt. Por meio das simulações, é possível observar com clareza o comportamento dinâmico da solução  $u(x, t)$  ao longo do tempo e verificar o efeito dissipativo induzido pelo termo de amortecimento viscoelástico.

### 3.2.1 Regime superamortecido

Neste regime, o parâmetro de amortecimento  $\gamma$  assume valores suficientemente altos, de modo que todos os modos da solução pertencem à faixa não oscilatória ou em transição.

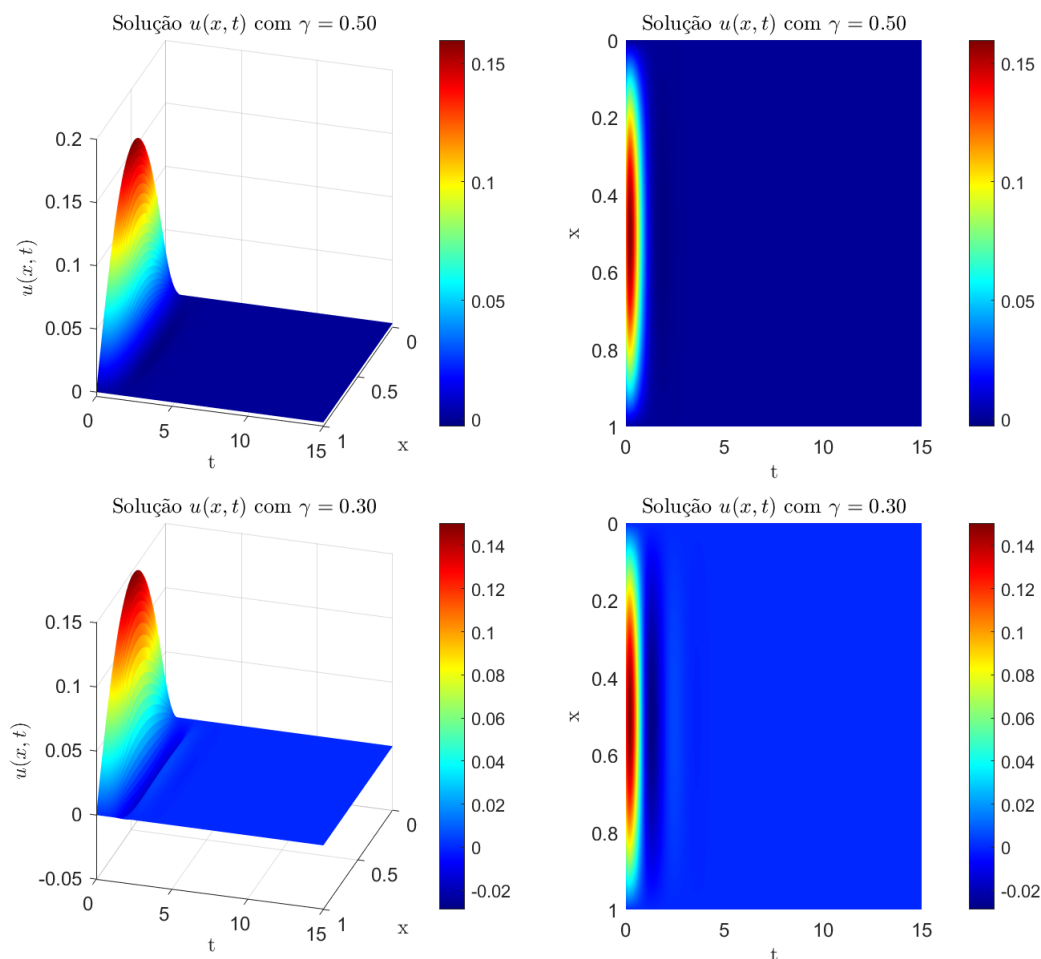


Figura 3.1: Evolução temporal da solução  $u(x, t)$  para  $\gamma \in \{0.5, 0.3\}$ .

**Observação 3.1.** Para um valor elevado do parâmetro de amortecimento  $\gamma$ , observa-se um regime fortemente superamortecido. A solução não apresenta oscilações visíveis e

tende rapidamente ao repouso, com decaimento exponencial predominante. Todos os modos vibratórios estão severamente amortecidos, caracterizando um comportamento típico de meios altamente dissipativos.

### 3.2.2 Regime intermediário

Para valores moderados de  $\gamma$ , observa-se a coexistência de modos subamortecidos e superamortecidos.

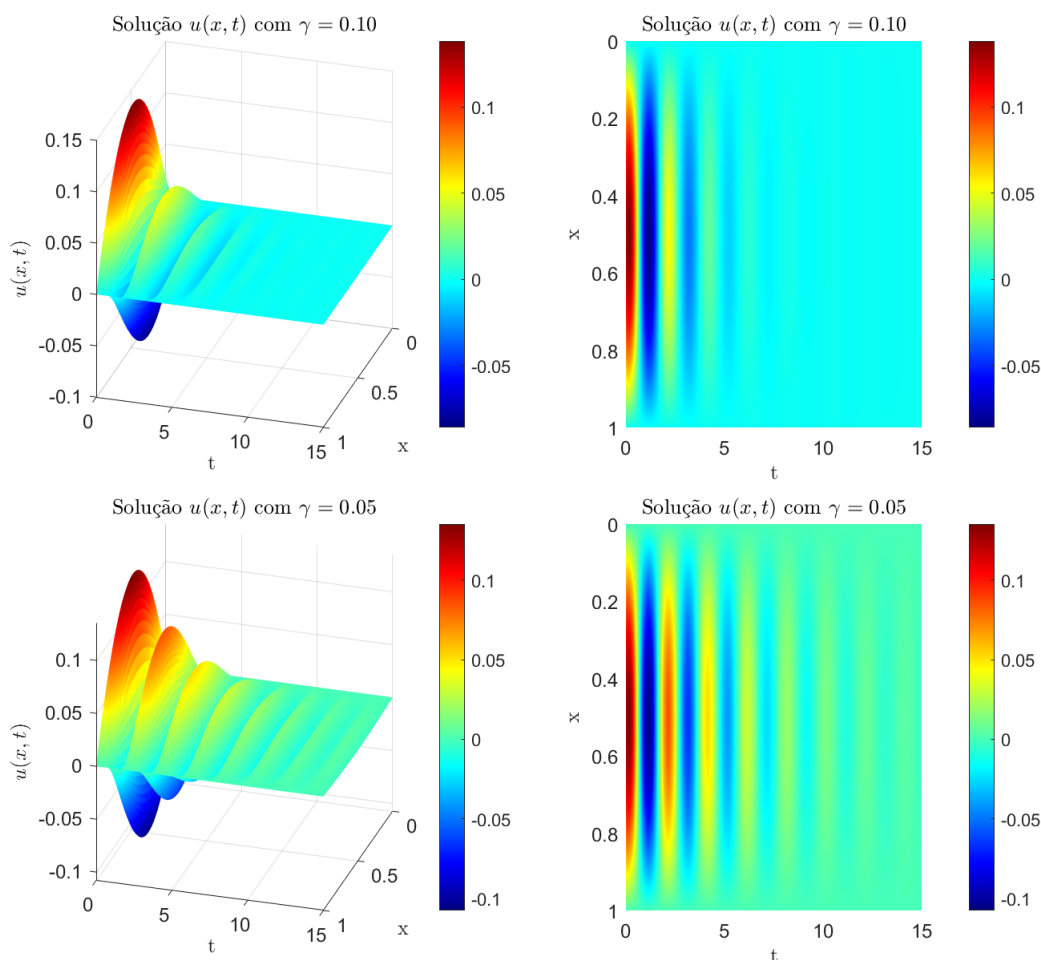


Figura 3.2: Evolução temporal da solução  $u(x,t)$  para  $\gamma \in \{0.1, 0.05\}$ .

**Observação 3.2.** Com um valor intermediário de  $\gamma$ , a solução inicia com oscilações perceptíveis, mas apresenta rápida atenuação ao longo do tempo. Esse perfil indica a presença de um regime misto, com modos subamortecidos de baixa ordem coexistindo com modos superamortecidos mais energéticos. A dissipação modal já exerce influência significativa sobre a dinâmica do sistema.

### 3.2.3 Regime subamortecido

Neste caso,  $\gamma$  é pequeno e a maioria dos modos de vibração permanece no regime oscilatório. A solução apresenta oscilações persistentes no tempo, com amortecimento gradual.

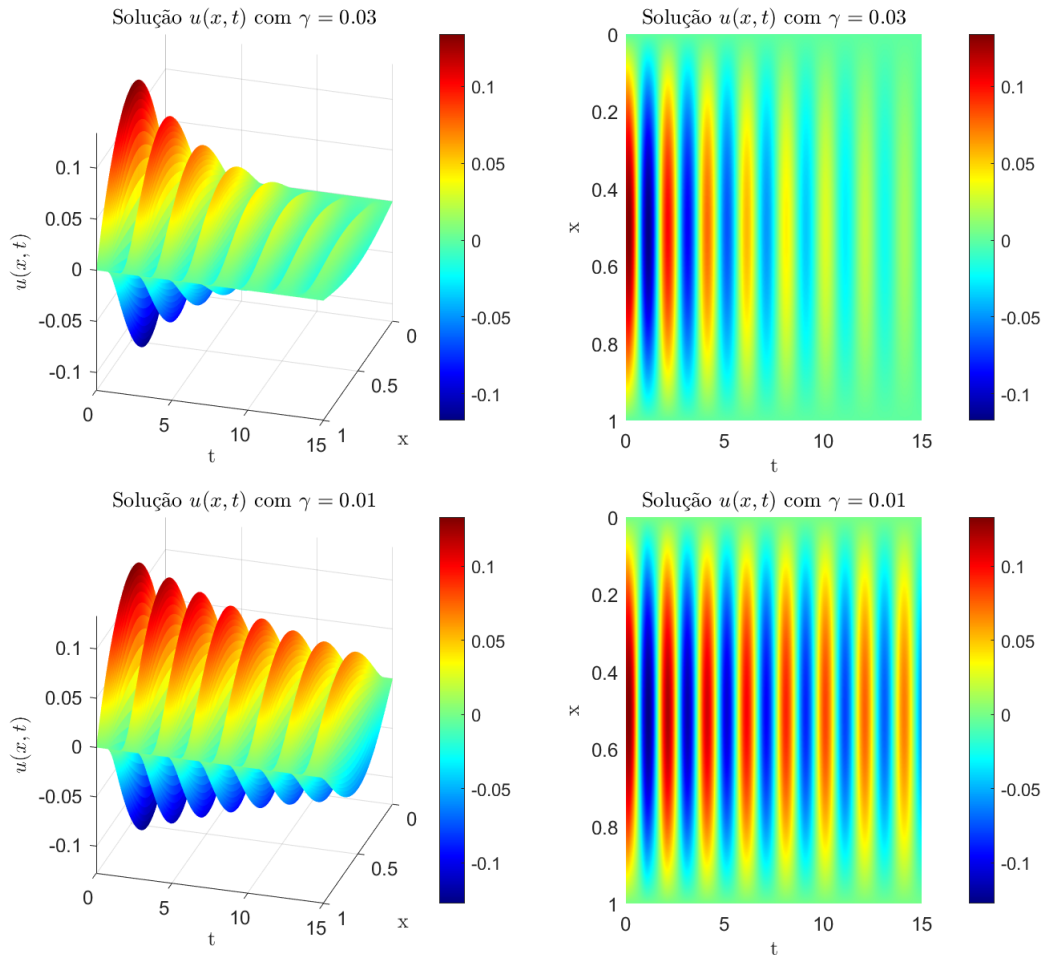


Figura 3.3: Evolução temporal da solução  $u(x, t)$  para  $\gamma \in \{0.03, 0.01\}$ .

**Observação 3.3.** Para um valor pequeno de  $\gamma$ , predomina o regime subamortecido. A solução exibe oscilações persistentes ao longo do tempo, com amortecimento suave. Os modos de vibração mantêm sua forma senoidal amortecida, evidenciando baixa dissipação interna. Esse comportamento é típico de sistemas quase conservativos, nos quais a energia se dissipa lentamente.

# Conclusão

Neste trabalho, investigamos a equação da onda com amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt em uma dimensão espacial, com condições de contorno de Dirichlet homogêneas. A partir da modelagem direta baseada nas leis fundamentais da mecânica, deduzimos a equação diferencial que rege o comportamento dinâmico de uma barra viscoelástica sujeita a pequenas vibrações transversais. Em seguida, realizamos a adimensionalização do modelo, o que nos permitiu identificar o parâmetro adimensional de amortecimento  $\gamma$  como responsável pelo regime dinâmico do sistema.

A principal contribuição deste estudo foi a obtenção da solução exata do problema via o método de separação de variáveis e expansão em séries de Fourier. A análise revelou a existência de dois regimes distintos de resposta: os modos oscilatórios, caracterizados por soluções do tipo senoidal amortecida, e os modos superamortecidos, dominados por funções hiperbólicas. A fronteira entre esses regimes depende diretamente do valor de  $\gamma$ , o que confirma o papel central do amortecimento na dinâmica das soluções.

Complementarmente, implementamos simulações computacionais em MATLAB que permitiram visualizar a dissipação modal e a evolução temporal das soluções. Os resultados numéricos confirmaram o comportamento teórico esperado, evidenciando que modos de alta frequência são mais fortemente amortecidos e que o aumento de  $\gamma$  acelera a atenuação das oscilações.

Dessa forma, o estudo confirma que o modelo de Kelvin-Voigt é eficaz para descrever fenômenos reais de propagação de ondas em meios com dissipação interna, oferecendo uma abordagem analítica para sua compreensão. Como perspectivas futuras, destaca-se a possibilidade de investigar o uso de outros tipos de condições de contorno e a análise de soluções numéricas para casos em que a solução exata não é viável.

# Bibliografia

- [1] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, 2007.
- [2] I. G. Main, *Vibrations and Waves in Physics*, 3rd ed., Cambridge University Press, 1998.
- [3] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*, Dover Publications, 2012.
- [4] M. Ghaffari, J. Eslami, M. Kiani, “On wave propagation in viscoelastic media modeled by the Kelvin–Voigt equation”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 202, pp. 240–252, 2020.
- [5] S. Zheng, *Nonlinear Parabolic Equations and Hyperbolic–Parabolic Coupled Systems*, CRC Press, 2004.
- [6] J. L. Lions, *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control*, Gordon and Breach, 1971.
- [7] R. Triggiani, “Energy decay in second-order hyperbolic equations with memory”, *Journal of Differential Equations*, vol. 36, no. 2, pp. 231–245, 1980.
- [8] S. M. Han, H. Benaroya, T. Wei, “Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, no. 5, pp. 935–988, 1999.
- [9] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, Wiley, 3rd ed., 2013.
- [10] M. M. Meerschaert, *Mathematical Modeling*, Academic Press, 2nd ed., 2013.
- [11] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.