



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – FACET
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JEFFERSON NAHUM DE OLIVEIRA

**ASPECTO HISTÓRICO E DESENVOLVIMENTO DE NÚMEROS COMPLEXOS:
APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE NA ÁREA DA GEOMETRIA PLANA**

Abacetuba-PA

2022

JEFFERSON NAHUM DE OLIVEIRA

**ASPECTO HISTÓRICO E DESENVOLVIMENTO DE NÚMEROS COMPLEXOS:
APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE NA ÁREA DA GEOMETRIA PLANA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Abaetetuba-PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N153a NAHUM DE OLIVEIRA, JEFFERSON.
Aspecto Histórico E Desenvolvimento De Números
Complexos: Aplicação Das Fórmulas De Moivre Na Área Da
Geometria Plana / JEFFERSON NAHUM DE OLIVEIRA. — 2022.
42 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Educação do Campo, Abaetetuba, 2022.

1. Fórmula de Moivre. 2. Rotações. 3. Polígono Regulares.
4. Aplicações. I. Título.

CDD 510

JEFFERSON NAHUM DE OLIVEIRA

**ASPECTO HISTÓRICO E DESENVOLVIMENTO DE NÚMEROS COMPLEXOS:
APLICAÇÃO DAS FÓRMULAS DE MOIVRE NA ÁREA DA GEOMETRIA PLANA**

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Aprovado em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA



**Prof. José Francisco da Silva Costa
Presidente/Orientador**



**Prof. Dr Rômulo Correa Lima
Membro Interno – FACET/CUBT**



**Prof. Dr. Manoel de Jesus dos Santos Costa
Membro Interno – FACET/CUBT**



**Prof. Ms. José Maria dos Santos Lobato Júnior
Membro Externo –IFPA-Tucuruí-PA**

Dedico este trabalho a meus filhos, porque neles encontrei
forças em momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, minha eterna gratidão a Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Agradeço aos meus amigos Natanael Pantoja pelo incentivo e ajuda no curso e Jucicleiton Antunes Melo, excelente professor, que infelizmente faleceu antes da minha conclusão de curso.

A todos os professores do curso pela contribuição para minha formação acadêmica. Em especial ao meu orientador Prof. Dr. José Francisco da Silva, pela dedicação e orientação deste trabalho.

À minha família por sempre me inspirar e apoiar, a toda turma de matemática 2015 pela amizade e parceria durante a graduação.

*A Matemática é a única linguagem que temos
em comum com a natureza.*

Stephen Hawking

RESUMO

O presente artigo traz como temática aspecto histórico e desenvolvimento de números complexos e cálculo das raízes a partir de rotação de polígono regular inscrito na circunferência e procura fazer uma breve abordagem histórica sobre o surgimento dos números complexos no período do renascimento que resultou no desenvolvimento do conjunto complexo e de propriedades algébricas de equações quadrática e cúbicas. Outra abordagem se concentra no plano de Argand-Gauss e fórmulas de Moivre com aplicações em polígonos regulares inscritos na circunferência de raio unitário e centro na origem. Inserido nesse contexto, dedica-se e enfatiza-se um processo analítico relacionado a rotações de polígono regulares numa circunferência de raio unitário para obter coordenadas de um polígono de n lados sem a necessidade de utilizar a 2ª fórmula de Moivre. Aplicam-se esse processo de ensino em polígonos regulares de n lados, mostrando como encontrar todas as raízes de cada um de seus vértices. Conclui-se a pesquisa considerando que o procedimento analítico utilizado sem a necessidade de envolver a 2ª fórmula de Moivre, representa uma interessante estratégia de ensino para calcular raízes enésimas de um número complexo.

Palavras-chaves: Fórmula de Moivre; Rotações; Polígonos regulares; Aplicações

ABSTRACT

The present article has as its theme History of complex numbers and calculation of roots from the rotation of a regular polygon inscribed in the circumference and seeks to make a brief historical approach to the emergence of complex numbers in the renaissance period that resulted in the development of the complex set and of algebraic properties of quadratic and cubic equations. Another approach focuses on the Argand-Gauss plane and de Moivre formulas with applications to regular polygons inscribed in the circle of unit radius. Inserted in this context, it dedicates and emphasizes an analytical process related to regular polygon rotations in a unit radius circle to obtain coordinates of a polygon with n sides without the need to use the 2nd Moivre formula. This teaching process is applied to regular polygons of n sides, showing how to find all the roots of each of their vertices. The research concludes considering that the analytical procedure used without the need to involve the 2nd formula of Moivre, represents an interesting teaching strategy to calculate n th roots of a complex number.

Keywords: Formula de Moivre; rotations; regular polygons; applications

Sumário

1-INTRODUÇÃO.....	10
2-HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES COM RAÍZES IMAGINÁRIAS.....	11
2.1 O PROBLEMA DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS.....	11
2.2 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CÚBICA POR DEL FIERRO.....	14
2.3 TARTAGLIA E CARDANO.....	14
2.4 VIÈTE.....	16
2.5 RAFAEL BOMBELLI E AS EQUAÇÕES CÚBICAS.....	18
2.6 AS FUNÇÕES POLINOMIAIS E OS NÚMEROS COMPLEXOS.....	18
3- AS FÓRMULAS DE MOIVRE.....	19
3.1 ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO.....	19
3.2 PLANO DE ARGAND-GAUSS.....	19
3.3 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DE UM COMPLEXO.....	20
3.4 POTENCIAÇÃO.....	21
3.4.1 Módulo e Argumento de Produto.....	21
3.4.2 Primeira fórmula de Moivre.....	22
3.5 RADICIAÇÃO.....	23
3.5.1 Raiz enésima.....	23
3.5.2 Segunda fórmula de Moivre.....	23
3.6 O SIGNIFICADO DA UNIDADE IMAGINÁRIA.....	25
3.6.1 Rotação de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio unitário	25
3.7 SIGNIFICADO DA UNIDADE IMAGINÁRIA.....	27
CONSIDERAÇÃO FINAL.....	37
REFERÊNCIA.....	38

1-INTRODUÇÃO

Esse trabalho de conclusão procura abordar um breve aspecto histórico de números complexos (FLAMENT, D., 2003). enfatizando nas fórmulas de Moivre e aplicabilidade na área da geometria plana utilizando a primeira e a segunda fórmulas para obter as coordenadas dos vértices de um polígono de n lados, pois a segunda fórmula possui uma relação geométrica com os polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio unitário e centro na origem. Outro fato interessante é a modificação na 2ª fórmula de Moivre devido uma rotação do polígono inscrito na circunferência que corresponde acréscimo do ângulo que rotaciona o polígono.

O trabalho mostra ainda um interessante teorema que demonstra como se deve obter todas as coordenadas de um polígono de n lados sem a necessidade de utilizar a 2ª fórmula de Moivre. Esse teorema mostra que expoente da unidade imaginária que está relacionado com a rotação de um ângulo reto ou raso e que devido a isso, verifica-se como se torna fácil obter todos os vértices do referido polígono de uma forma interessante e sucinta.

Para mostrar aplicabilidade de determinar as coordenadas dos vértices de um polígono de n lados, usam-se algumas aplicações envolvendo o teorema demonstrado e em cada aplicação, usa-se a 2ª fórmula de Moivre para mostrar que se obtém os mesmos resultados. Essa forma de aplicação da unidade imaginária, leva a certeza de considerar a unidade imaginária como um operador algébrico que faz um vetor ou um polígono rotacionar de um ângulo 90° para a unidade i e 180° para i^2 .

Em relação ao corpo do trabalho de conclusão de curso, desenvolve-se, primeiramente, o processo histórico de como aconteceram as soluções da equação cúbica e quem foram os matemáticos que começaram a desvendar e interpretar raízes de ordem complexa. Quanto ao formalismo matemático, concentra-se o estudo no desenvolvimento das fórmulas de Moivre, para aprofundar o conhecimento com utilização da geometria plana correspondente a polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio unitário para determinação enésimas raízes complexas que representam as coordenadas dos vértices do polígono regular inscrito.

Dessa maneira, considera-se que o estudo abordado nesse trabalho possa oferecer uma maneira diferente de utilizar tanto a fórmula de Moivre quanto o teorema desenvolvido como

uma alternativa de obter mais facilmente as raízes enésimas de um número complexo representando as coordenadas de cada vértice de um polígono regular.

2-HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES COM RAÍZES IMAGINÁRIAS

2.1 O PROBLEMA DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Os números complexos começaram a serem desenvolvidos quando se chegou à função quadrática de raízes não reais, ou seja, cálculos de alguma equação de 2º grau com discriminante negativo. Mas historicamente suas origens são atreladas as resoluções de equações de 3º grau. O maior conjunto conhecido era o conjunto dos números reais que possuía propriedades peculiares (CERRI, Cristina. 2006). Em relação ao conjunto dos números complexos, evidencia-se que tenha ocorrido na Itália, no período do renascimento, entre o fim do século XV e XVI, e nessa época houve a retomada do conhecimento, ocasionando uma grande ascensão nas áreas da arte, filosofia e matemática (BOYER, 1985)

Em relação a equação do 3ª grau supracitada, fato que tornou esse argumento válido foi verificar que nesse período não era considerado número negativo. Então não havia nenhuma possibilidade de concebê-lo como número complexo. Na Grécia antiga, no período pitagórico havia um sólido desenvolvimento da geometria, uma aritmética não tão complexa, mas com certo avanço, e nesse período existiam os primeiros indícios de que números poderiam ser algo mais, um exemplo disso é usando no teorema de Pitágoras, em que num triângulo retângulo "a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa" (BOYER, 1974).

Considere um triângulo retângulo com catetos de 1 e 1, é fácil ver que sua hipotenusa é $\sqrt{2}$. Ainda no tempo de Pitágoras acreditava-se que números era uma razão de $\frac{p}{q}$, onde p e

$q \in \mathbb{N}$. Observe que para $\frac{p}{q}$ irredutível:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad p^2 = 2q^2 \quad (1)$$

Como todo número ímpar elevado ao quadrado é ímpar, p tem que ser par, então $p=2k$.

$$4k^2=2q^2 \quad 2k^2=q^2 \quad q=2l \quad (2)$$

Portanto com o teorema de Pitágoras, houve forte argumento que instigava os gregos, que começaram a perceber que os números eram algo a mais que isso, eles até conseguiram resolver esse problema, mas de uma maneira diferente da qual é utilizada hoje em dia, usando métodos mais trabalhosos. O grego Eudoxo (408 a.C – 355 a.C), foi o autor dessa solução, que basicamente consistia em separar os números de suas grandezas, ou seja, chamava-se um lado do quadrado de uma grandeza e a área do quadrado de outra grandeza, porém não diziam que essa área era o produto dessas duas grandezas L (lado), por que não havia sido estabelecido a definição de produto entre as grandezas (GONÇALVES, 2010).

Para o Grego Arquimedes não estava explícito que a área de um círculo de raio r era πr^2 , ele apenas proferiu que a área de um círculo de raio r é igual à área de um triângulo retângulo que tem um dos catetos igual a r e outro cateto igual à circunferência. A grande vantagem dos europeus do renascimento em relação aos gregos antigos é que esses primeiros já trabalhavam com a numeração de posição, e também começaram a imaginar um número como algo a mais, isso a datar de 1518. Essas ideias não haviam sido trabalhadas o suficiente na matemática da Itália renascentista, um exemplo disso é que os coeficientes considerados válidos na época, eram sempre quantidades estritamente positivas. A seguinte equação do 3º grau:

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \quad (3)$$

Se a equação não apresentasse o termo em x^2 , por exemplo, era considerada diferente de outra que o tivesse. Essas limitações devia-se a negação em aceitar números negativos, e sem os números negativos dificultaria muito resolver equações cúbicas, e mesmo sabendo que haveria muito apreço a quem conseguisse resolvê-la a tarefa era árdua.

O primeiro a encontrar uma solução algébrica para uma equação cúbica foi um professor da Universidade de Bolonha, chamado Scipione del Ferro (1465 - 1526). Sobre del Ferro, embora descrito por várias fontes como um talentoso algebrista, não há trabalhos escritos remanescentes até a presente data, por volta de 1515, Scipione finalmente conseguiu encontrar uma fórmula de resolução para equação do 3º grau (BOYER, pág. 207).

A equação resolvida por del Ferro tinha a forma $x^3+px=q$. Embora não correspondesse ao caso geral, pode-se transformar qualquer cúbica geral numa que tenha o formato daquela de Scipione, de modo que se pode reduzir o problema original. Consideremos a equação cúbica geral

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (4)$$

Em que $a, b, c, d \in R$ e $a \neq 0$. Fazendo

$$x=y+\delta, \quad (5)$$

com δ a ser determinado, substituindo (5) em (4), segue que,

$$a(y+\delta)^3+b(y+\delta)^2+c(y+\delta)+d=0. \quad (6)$$

logo, fazendo o desenvolvimento, obtém-se que:

$$\begin{aligned} a(y^3+3y^2\delta+3y\delta^2+\delta^3)+b(y^2+2y\delta+\delta^2)+c(y+\delta)+d &= 0 \\ a y^3+a 3 y^2 \delta+a 3 y \delta^2+a \delta^3+b y^2+b 2 y \delta+b \delta^2+c y+c \delta+d &= 0 \\ a y^3+(a 3 \delta+b) y^2+(a 3 \delta^2+b 2 \delta+c) y+a \delta^3+b \delta^2+c \delta+d &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Fazendo

$$3a\delta+b=0. \quad \rightarrow \quad \delta=\frac{-b}{3a}, \quad (8)$$

e considerando,

$$c'=(a 3 \delta^2+b 2 \delta+c) \text{ e } d'=a \delta^3+b \delta^2+c \delta+d$$

temos

$$c'=3a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2+2b\left(\frac{-b}{3a}\right)+c=\frac{-b^2}{3a}+c \quad (9)$$

e

$$d'=a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3+b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2+c\left(\frac{-b}{3a}\right)+d=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d \quad (10)$$

Portanto, transforma-se a cúbica dada pela expressão (4), após substituição de (9) e (10).

$$ay^3 + \left(\frac{-b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0 \quad (11)$$

Finalmente, multiplicando toda a equação por $\frac{1}{a}$, obtém-se a forma reduzida:

$$y^3 + py + q = 0 \quad (12)$$

em que:

$$p = \frac{-1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} \quad (13)$$

e

$$q = \frac{2}{27} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{a}\right) + \frac{d}{a}. \quad (14)$$

2.2 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CÚBICA POR DEL FIERRO

Uma descoberta deste porte deveria ter sido imediatamente publicada, o que traria notoriedade e respeito ao seu descobridor. No entanto, isso não aconteceu, Scipione preferiu manter a sua fórmula em segredo. A razão pela qual ele fez essa escolha é compreendida quando se analisa o contexto social da Itália renascentista do século XVI (BURTON, 1985). Naquela época, duelos intelectuais eram frequentes, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por uma plateia, muitos contratos de professores universitários dependiam de um bom desempenho nessas disputas.

Scipione del Ferro revelou a sua fórmula a apenas duas pessoas próximas: seu discípulo e genro Annibale della Nave e a um de seus alunos, o veneziano Antonio Maria Fiore. Com a morte de del Ferro, o misterioso método de resolução das cúbicas, exposto num manuscrito, foi herdado por della Nave. Fiore, que desejava obter fama e prestígio entre os matemáticos, resolveu também não publicar de pronto a fórmula, a exemplo do que fizera seu mestre, ele esperou a ocasião oportuna para usar o conhecimento secreto a seu favor. E esse tempo finalmente chegou, quando, em 1535, Fiore resolveu desafiar publicamente o renomado matemático italiano Niccolò Tartaglia (1499-1557).

2.3 TARTAGLIA E CARDANO

Niccolò, nasceu em Bréscia, uma cidade no Norte da Itália, em 1499. Em 19 de fevereiro de 1512, a cidade de Bréscia foi ocupada por tropas francesas, durante a ocupação Niccolò teve a boca e a cabeça golpeadas pela espada de um soldado, o golpe afetou permanentemente a sua dicção lhe causando gagueira. Por conta disso, ele passou a ser chamado de Tartaglia, que significa gago, em italiano. Tartaglia, lançou as bases da ciência hoje conhecida como Balística.

Voltando ao duelo, para a surpresa de Fiore, Tartaglia conseguiu resolver os problemas. E com muito esforço, Niccolò procurou um método para a resolução destas equações e acabou encontrando ou redescobrimdo a fórmula de Del Ferro. Por este motivo, ele acabou vencendo todas as disputas com Antonio. A seguinte fórmula criada por Scipione del Ferro e redescoberta por Tartaglia (TARTAGLIA, 1959).

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (15)$$

A descoberta das resoluções de equações de 3º grau chegou ao conhecimento de Girolamo Cardano (1501-1576). Nesse período Cardano estava concluindo seu segundo livro de Matemática, denominado “Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis” (A prática da aritmética e mensuração simples). Cardano fez contribuições importantes em diversas áreas do conhecimento, tanto na área de exatas como nas humanas: Matemática, Astrologia, Astronomia, Filosofia, Medicina, Física, Ética, Música, apenas para citar alguns (CARDANO, 1968).

Um outro avanço importante executado até o fim por Cardano e seu assistente Ferrari foi o de demonstrar que qualquer cúbica geral,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (16)$$

pode ser transformada numa cúbica do tipo de del Ferro, $y^3 + py = q$, mediante uma substituição da forma

$$x = y - \frac{b}{3a}. \quad (17)$$

Em 1545, Cardano publicou em Nuremberg, Alemanha, a “Artis magna sive de regulis algebraicis liber unus” (A grande arte ou as regras da álgebra, Livro um), mais

conhecida como “Ars Magna”. Nessa obra, de 40 capítulos, Cardano analisa detalhadamente as equações cúbicas e quárticas e suas soluções. Ele, de modo pioneiro, não se intimidou com os novos tipos de números que surgiam dessas equações: demonstrou, pela primeira vez, que as soluções de equações algébricas podem ser negativas, irracionais e até envolver raízes quadradas de números negativos, entidades a que chamou de sofisticadas (GARBI, 1997).

No caso particular das cúbicas, Cardano apresentou as soluções para cada um dos 13 tipos, algumas de sua própria autoria, outras fornecidas por Ferrari. Também ali surgiu o inédito conceito de raízes múltiplas de uma equação polinomial.

Assim, para resolver qualquer cúbica, bastaria reduzi-la à forma $x^3+px=q$, e então aplicar a fórmula para encontrar a solução, mas para equações, cujas três raízes são reais e distintas, havia empecilhos. Nestes casos, a expressão que aparece dentro de raízes quadradas torna-se negativas, e como sabemos, nessa época, calcular uma raiz quadrada de um número negativo levava a um beco sem saída, já que qualquer coisa elevada ao quadrado tem de ser positiva, se deparar com um número negativo ao resolver uma equação significava que ela não tinha solução. Essa postura que funcionava para as equações lineares e quadráticas, mas não obteve o mesmo sucesso com as equações cúbicas.

Cardano conseguiu perceber quando a situação ocorria, ele notou na equação $x^3=15x+4$, ao resolvê-la por uma das variantes da fórmula de del Ferro, que produzia como resposta:

$$z=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \quad (18)$$

Mas ele sabia como era fácil de verificar que o número quatro era a solução da equação. Então, de alguma maneira, a igualdade:

$$4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \quad (19)$$

Cardano entendeu que o entrave era de fato a raiz quadrada de uma quantidade negativa. E por isso teria de supor que aquelas entidades sofisticadas eram números. Desse modo, Cardano prosseguiu com os cálculos e, manuseando as raízes quadradas de negativos como se fossem números verdadeiros, conseguiu chegar a resultados coerentes. Entretanto, mesmo admitindo que as quantidades sofisticadas eram números, em dado momento seria preciso: Efetuar uma adição (ou uma subtração) entre uma constante numérica e um número sofisticado; e extrair a raiz cúbica do resultado do passo anterior. Cardano até conseguiu realizar

a primeira parte do problema, mas nunca a segunda. Dessa forma, o caso continuou sem solução, razão pela qual ficou conhecido como “casus irreducibilis”.

2.4 VIÈTE

Há mais um importante matemático que tentou descobrir a resolução da cúbica, dessa vez empreendida pelo célebre matemático francês François Viète (1540-1603). Viète foi um algebrista excepcional, promoveu melhoras significativas na notação algébrica.

Em 1591 publicou a sua obra matemática de maior expressão, “In artem analyticam isagoge” (Introdução à arte analítica), na qual introduziu a ideia de representar as constantes numéricas de uma equação por letras, denominando-as de coeficientes. Tinha grande habilidade com a Trigonometria, deduzindo corretamente as regras de prostaférese e as expressões para calcular o seno e o cosseno de múltiplos inteiros de um ângulo. A sua fórmula para o cálculo de π , por exemplo, nos dá uma dimensão da habilidade e criatividade extraordinária com que Viète manipulava as funções trigonométricas (GIL, P. D. B, 2001)

Viète utilizou uma substituição interessante na equação cúbica, embora não se saiba ao certo por qual motivo ou como alcançou esse resultado. A fórmula resultante é a seguinte: Considerando:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (20)$$

Fazendo:

$$x = w - \frac{p}{3w}, \quad (21)$$

Com $w \neq 0$

Logo, substituindo (21) em (20), vem que,

$$\begin{aligned} \left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p\left(w - \frac{p}{3w}\right) + q &= 0 \\ w^3 - 3w^2 \frac{p}{3w} + 3w \frac{p^2}{9w^2} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q &= 0 \\ w^3 - \frac{p^3}{27w^3} + q &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Multiplicando (22) por w^3

$$(w^3)^2 + qw^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (23)$$

Aplicando Bhaskára

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (24)$$

$$\Delta = q^2 - 4\frac{p^3}{27} \quad (25)$$

Como essa transformação de $x = y + \delta$, é uma simples translação de eixos, logo 3 raízes reais na primeira equação (16) resultaram em outras 3 raízes distintas na equação (22).

Note que para esse tipo de equação (16) ter solução dentro dos R , $q^2 - \frac{4p^3}{27} \geq 0$, observe que

para ter 3 raízes reais distintas na equação (22) $q^2 - \frac{4p^3}{27} < 0$. Portanto mesmo partindo de uma equação do 3º grau com 3 raízes reais distintos, mesmo positivas, quando feitas as transformações não temos solução nos reais.

2.5 RAFAEL BOMBELLI E AS EQUAÇÕES CÚBICAS

Bombelli teve a feliz ideia de somar um número a uma parte real, e somar o inverso relativo a adição deste número imaginário, como se diria são imaginários conjugados que levam ao número real 4. É evidente que se a soma das partes reais é 4, então a parte real de cada um é 2; e se um número da forma $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$ deve ser uma raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ e $2 - \sqrt{-121}$, então é fácil ver que $a = 2$ e $b = 1$. Logo:

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Bombelli percebeu a importância que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro. Mas, na época, a observação não ajudou no trabalho real de resolver equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma das raízes. Neste caso, a equação já estava resolvida, e não há necessidade da fórmula; sem tal conhecimento prévio, a abordagem de Bombelli falha. Qualquer tentativa para achar algebricamente as raízes cúbicas dos números imaginários na regra de Cardano-Tartaglia leva à própria cúbica, em cuja resolução as raízes cúbicas aparecem, de modo que se volta ao ponto de partida. Como esse impasse surge sempre que as três raízes são reais, esse caso é

conhecido como “caso irredutível”. Aqui, uma expressão para a incógnita é, de fato, fornecida pela fórmula, mas a forma em que aparece é inútil para quase todas. (Boyer, 2012, p. 203-204).

2.6 AS FUNÇÕES POLINOMIAIS E OS NÚMEROS COMPLEXOS

Assim, considerando-se um novo tipo de número, para $\sqrt{-1}$, Leonard Euler (1707 – 1783) usou em 1777 a letra i para representar o número, chamando-o de unidade imaginária, pois $i \cdot i = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$. Logo, seria possível encontrar uma solução para a equação, a saber;

$$x' = \frac{3}{2} + \sqrt{-2} = \frac{3}{2} + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{3 - \sqrt{-2}}{2} = \frac{3}{2} - i\sqrt{2}$$

Devido a essas considerações, surgiu, assim, um novo tipo de número, chamado por Gauss de Número Complexo.

3- AS FÓRMULAS DE MOIVRE

3.1 ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $Z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $Z \neq 0$. Chama-se o argumento de Z ao ângulo θ , tal que:

$$\begin{cases} \cos\theta i \frac{x}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta i \frac{y}{\rho} \end{cases} \quad (28)$$

onde,

$$\rho = |Z| \quad (29)$$

Note-se que: A condição $Z \neq 0$ garante $\rho \neq 0$ e que existe ao menos um ângulo θ satisfazendo-se a definição, pois:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad (30)$$

Fixando-se o complexo $Z \neq 0$, então fixado $\cos\theta$ e $\sin\theta$, mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo $Z \neq 0$ tem argumento (AVILA, 1974).

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad (31)$$

Em que θ_0 , chamado de argumento principal de Z . E $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Frequentemente trabalha-se com θ_0 , chamando-o simplesmente argumento de Z .

3.2 PLANO DE ARGAND-GAUSS

As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando se representa os números complexos da forma

$$Z = x + yi = (x, y), \quad (32)$$

pontos do plano cartesiano xOy com a convenção de marcar sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente a parte real e a parte imaginária de Z . Assim a cada número complexo $Z = (x, y)$ corresponde um único ponto P do plano xOy .

- Nomenclatura:

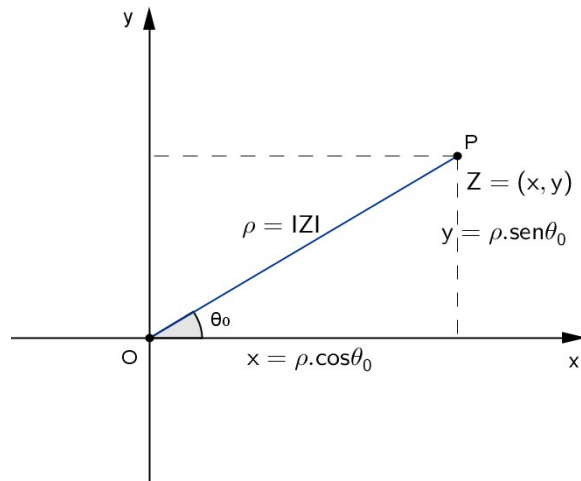
xOy : plano de Argand-Gauss

Ox : eixo real

Oy : eixo imaginário

P : afixo de Z

Figura 1: Representação da forma polar no plano de Argund-Gauss de um número complexo



Fonte: Autoria Própria (geogebra)

Note que a distância entre P e O é o módulo de Z :

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \quad (33)$$

E o ângulo formado por \overrightarrow{OP} com o eixo real é θ_0 tal que $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$ e $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$; portanto θ_0 é o argumento principal de Z (AVILA, 1974).

3.3 FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DE UM COMPLEXO

Seja $Z = x + yi \in \mathbb{C}$, tal que $Z \neq 0$, tem-se;

$$Z = x + yi = \rho \left(\frac{x}{\rho} + \frac{iy}{\rho} \right) = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (34)$$

Assim:

$$Z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (35)$$

3.4 POTENCIAÇÃO

3.4.1 Módulo e Argumento de Produto.

Teorema 2: Sejam Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{C}$, tais que:

$$Z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad (36)$$

e

Se $Z = Z_1 \cdot Z_2 = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, então se tem: $\begin{cases} \rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \theta = (\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) \end{cases}$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Se ao

produto de n fatores com $n > 2$, aplicando-se a propriedade associativa da multiplicação:

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \dots Z_n = \rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (37)$$

Portanto:

$$Z = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n) \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] \quad (38)$$

Assim,

$$\rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n) \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

logo, têm-se.

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \dots \rho_n \quad (39)$$

e

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (40)$$

isto é, o módulo do produto de n números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores. A forma algébrica facilita as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, porém não é muito prática no cálculo de potências. Se necessário calcular $(x + yi)^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, teremos de usar a fórmula do Binômio de Newton, que é bastante trabalhosa. No próximo item apresenta-se como facilitar a simplificação de operações de potenciação com complexos.

3.4.2 Primeira fórmula de Moivre

Teorema 3: Seja $Z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$, então: (DO CARMO, M.; MORGADO, 2001).

$$Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad (41)$$

Demonstração

Parte I:

Para provar que a propriedade é válida para $n \in N$, usa-se o principio da indução finita.

• Se $n=0$, então $\begin{cases} Z^0=1 \\ \rho^0 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0) = 1 \end{cases}$

• Admite-se a validade para $n=k-1$:

$$Z^{k-1} = \rho^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i \cdot \text{sen}(k-1)\theta]$$

E prova-se a validade para $n=k$:

$$Z^k = Z^{k-1} \cdot Z = \rho^{k-1} \cdot [\cos(k-1)\theta + i \cdot \text{sen}(k-1)\theta] \cdot \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

$$Z^k = (\rho^{k-1} \cdot \rho) \cdot [\cos((k-1)\theta + \theta) + i \cdot \text{sen}((k-1)\theta + \theta)]$$

$$Z^k = \rho^k \cdot (\cos k\theta + i \cdot \text{sen} k\theta)$$

Parte II:

Agora se prova para a propriedade para $n \in Z_{-}$.

Se $n < 0$, então $n = -m$ com $m \in N$, portanto a m se aplica a fórmula:

$$Z^n = Z^{-m} = \frac{1}{Z^m} = \frac{1}{\rho^m \cdot (\cos m\theta + i \cdot \text{sen } m\theta)}$$

$$\frac{1}{Z^m} = \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \cdot \text{sen } m\theta}{(\cos m\theta + i \cdot \text{sen } m\theta) \cdot (\cos m\theta - i \cdot \text{sen } m\theta)}$$

$$\frac{1}{Z^m} = \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \cdot \text{sen } m\theta}{\cos^2 m\theta + \text{sen}^2 m\theta}$$

$$\frac{1}{Z^m} = \rho^{-m} \cdot [\cos(-m\theta) + i \cdot \text{sen}(-m\theta)]$$

$$Z^n = Z^{-m} = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen } n\theta) \quad (42)$$

3.5 RADICIAÇÃO

3.5.1 Raiz enésima

Dado um número complexo Z em sua forma trigonométrica, chama-se o número Z_w como raiz n -ésima de Z , se, e somente se:

$$\sqrt[n]{Z} = Z_w \quad Z_w^n = Z, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

3.5.2 Segunda fórmula de Moivre

Teorema 4: Dado o complexo $Z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e o número natural $n (n \geq 2)$, então existem n raízes enésimas de Z que são da forma:

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Em que $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_{+}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Determinam-se todos os complexos Z_k tais que:

$$\sqrt[n]{Z} = Z_k$$

Se $Z_k = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, tem-se as incógnitas r e θ . Aplicando-se a definição de $\sqrt[n]{Z}$.

$$\sqrt[n]{Z} = Z_k \quad Z_k^n = Z$$

Então:

$$r^n [\cos(n\omega) + i\operatorname{sen}(n\omega)] = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Portanto é necessário:

- i) $r^n = \rho \quad r = \sqrt[n]{\rho}$
- ii) $\begin{cases} \cos(n\omega) = \cos\theta \\ \operatorname{sen}(n\omega) = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad n\omega = \theta + 2k\pi \quad \omega = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$

Supondo-se $0 \leq \theta < 2\pi$, vai-se determinar os valores de k para os quais resultam valores de ω compreendido entre 0 e 2π .

$$k=0 \quad \omega = \frac{\theta}{n}$$

$$k=1 \quad \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k=2 \quad \omega = \frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n}$$

$$k=n-1 \quad \omega = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

Estes n valores de ω não são congruentes por estarem todos no intervalo \hat{i} , portanto, dão origem a n valores distintos para Z_k .

Considerando-se agora o valor de ω obtido para $k=n$, tem-se:

$$k=n \quad \omega = \frac{\theta}{n} + n\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Este valor de ω é dispensável por ser congruente ao valor obtido com $k=0$.

Fato análogo ocorre para $k=n+1, n+2, n+3, \dots$ e $k=-1, -2, -3, \dots$

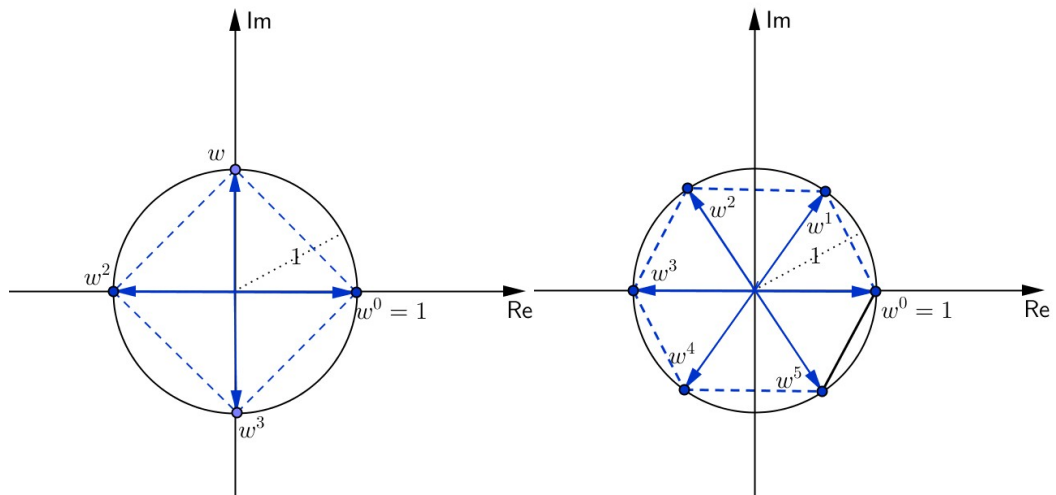
Então para se obter os valores de Z_k é suficiente fazer $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Esta é a 2ª Fórmula de De Moivre para cálculos de radiciação de números complexos na forma polar. No plano de Argand, as raízes n -ésimas da unidade distribuem-se sobre o círculo de raio unitário (centrado na origem), correspondendo-se aos vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo, conforme ilustrado na figura abaixo. Dessa maneira, todo número complexo Z não nulo admite n raízes enésimas distintas, as quais têm todo o mesmo módulo. Isto é:

$$\rho = (\sqrt[n]{|Z|})$$

E argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Figura 2: Representação das raízes complexas como sendo pontos de vértices de polígonos inscritos numa circunferência.

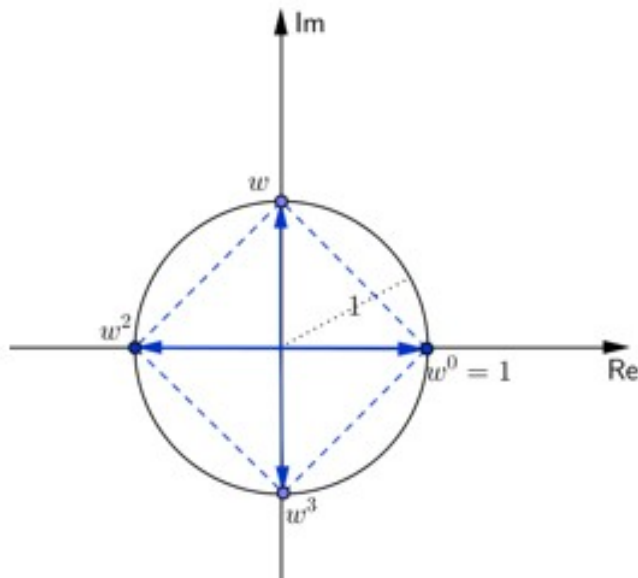


Fonte: Autoria Própria (geogebra)

3.6 O SIGNIFICADO DA UNIDADE IMAGINÁRIA

3.6.1 Rotação de um polígono regular inscrito numa circunferência e centro na origem.

Considere um quadrado inscrito num círculo de raio unitário conforme mostra a figura (Figura 2)



Fonte: Autoria própria (programa geogebra).

A 2ª fórmula de Moivre mostra que cada ponto pertencente ao vértice de um polígono inscrito na circunferência de raio R, representa cada uma das $\sqrt[n]{Z}$ de um número complexo sendo cada um determinada pela seguinte expressão matemática:

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (41)$$

A expressão dada por (1) esclarece o fato de que desde que se conheça o número complexo Z, seu módulo ρ e o argumento θ , torna-se possível calcular todas as raízes de Z_w . No entanto, diante desse fato, surge a seguinte indagação: Será possível calcular as mesmas raízes de Z_w de polígonos regulares inscritos na circunferência, sem, no entanto recorrer a expressão dada por (1)?

Para responder a essa pergunta, é necessário considerar o que na verdade representa a unidade imaginária e como interpretar essa unidade em termos de rotação de vetores ou polígonos inscritos na circunferência. Para a Matemática, essa unidade foi motivo de muitas indagações, como foi verificado nos estudos de funções quadráticas e cúbicas observado no tópico desse trabalho de conclusão. No entanto, a física traz para a unidade um outro sentido, expressando-o como um operador algébrico que faz um vetor, um polígono girar num ângulo de 90°. Para verificar essa condição, considere quadrado da figura anterior (Figura 1).

Sejam os pontos, Z_0, Z_1, Z_2 e Z_3 representados como pontos dos vértices do quadrado regular dado. Observando a figura dada, verificam-se que os pontos são dados por $w_0=1, w^1=i, w^2=-1$ e $w^3=-i$. Nesse caso, como todos os pontos possuem o mesmo módulo unitário, verifica-se que a circunferência dada possui raio unitário.

Considera, agora a seguinte situação: se o quadrado fosse rotacionado numa rotação de 90°, haveria apenas um deslocamento dos pontos em que haveria troca de posições, no entanto, as raízes não mudariam. Nesse caso, essa rotação implica uma mudança na fórmula de Moivre dada pela expressão (1), ou seja sendo:

$$\beta = \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \quad (42)$$

O argumento extraído da expressão (1), pode-se considerar que quando o polígono rotacional de um ângulo φ_R , esse valor deve ser somado no argumento dado pela expressão (2), isto é:

$$\beta = \varphi_R + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \quad (43)$$

Levando (3) em (1), vem que a 2ª fórmula De Moivre tem uma modificação, isto é:

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(\varphi_R + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right) + i \cdot \text{sen} \left(\varphi_R + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right) \right] \quad (44)$$

Ao fazer a rotação no quadrado de 90°, verifica-se que os novos valores dos vértices assumem: $w_0 = i$, $w^1 = -1$, $w^2 = -i$ e $w^3 = 1$

Tomando a fórmula de Moivre, dada pela expressão (4), vem que:

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(90 + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right) + i \cdot \text{sen} \left(90 + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right) \right]$$

pois, o quadrado foi rotacionado de 90°. Sendo ainda $Z_w = \sqrt[4]{1}$

onde $\theta = 0^\circ$, $n = 4$, pode-se calcular as raízes quarta da unidade. Logo,

$$Z_0 = 1 \cdot \left[\cos \left(90 + \left(\frac{0}{4} + 0 \cdot \frac{2\pi}{4} \right) \right) + i \cdot \text{sen} \left(90 + \left(\frac{0}{4} + 0 \cdot \frac{2\pi}{4} \right) \right) \right]$$

$$Z_0 = 1 \cdot [\cos 90^\circ + i \cdot \text{sen} 90^\circ] = i$$

De modo análogo, tem-se que:

$$Z_1 = 1 \cdot [\cos 180^\circ + i \cdot \text{sen} 180^\circ] = -1$$

$$Z_2 = 1 \cdot [\cos 270^\circ + i \cdot \text{sen} 270^\circ] = -i$$

$$Z_3 = 1 \cdot [\cos 360^\circ + i \cdot \text{sen} 360^\circ] = 1$$

O que está de pleno acordo com os valores anterior quando o quadrado regular foi rotacionado de 90°.

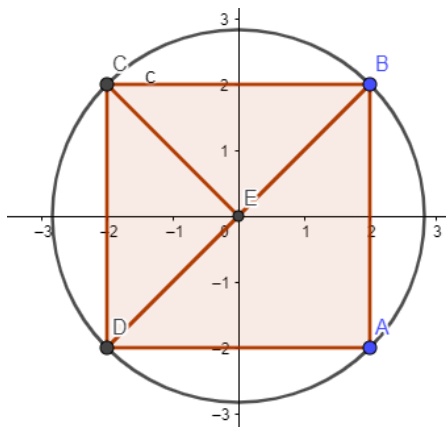
Após esse exemplo, é preciso demonstrar que a rotação de qualquer polígono regular inscrito numa circunferência de raio $R=1$, está intrinsicamente ligado com a unidade imaginária e além disso, apesar do problema ter sido feito para uma rotação de 90°, pode ser rotacionado para qualquer outro ângulo de valor φ_R .

3.7 SIGNIFICADO DA UNIDADE IMAGINÁRIA.

Tendo em vista a situação anterior, será possível compreender qual a relação que existe entre as raízes imaginárias que representam cada vértice do polígono com a unidade imaginária?

Para responder a essa questão, considere o polígono representado na figura (**Figura 2**)

Figura 3: Rotação de um polígono regular numa circunferência unitária.



Fonte: Autoria Própria (geogebra)

Verifica-se que o quadrado apresenta os vértices A, B, C e D.

Nesse caso o ponto B possui a seguinte coordenada determinada pela expressão dada por (1). Isto é:

$$B = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (5)$$

Se o quadrado receber um giro de 180° , o ponto B passa a ocupar a coordenada B' de valor simétrico ao ponto B. Para determinar esse ponto, usa-se a expressão (4). Isto é:

$$B' = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\varphi_R + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) + i \cdot \text{sen}\left(\varphi_R + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) \right] \quad (6)$$

onde $\varphi_R = 180^\circ$. Logo, B' Assume a seguinte ordenada:

$$B' = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(180 + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) + i \cdot \text{sen}\left(180 + \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) \right] \quad (7)$$

Verifica-se que,

$$\cos\left(180+\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)\right)=-\cos\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right) \quad (8)$$

e

$$\operatorname{sen}\left(180+\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)\right)=-\operatorname{isen}\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right) \quad (46)$$

Nesse caso, levando (8) e (9) em (7), vem que:

$$B'=\sqrt[n]{\rho}\left[-\cos\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)-\operatorname{isen}\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)\right] \quad (47)$$

ou

$$B'=-\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)+\operatorname{isen}\left(\frac{\theta}{n}+k.\frac{2\pi}{n}\right)\right] \quad (48)$$

Analisando as equações (11) e (5), obtém-se que:

$$B'=-B=i^2B \quad (49)$$

A notação em (12) mostra uma relação importante entre os pontos B' e B , mostrando que quando o polígono gira 180° , cada ponto do polígono recebe a mesma rotação com um aparecimento de um fator que envolve a unidade imaginária. Em outras palavras, ao rotacional o polígono de 90° , as novas coordenadas dos pontos serão obtidas, multiplicando cada coordenada pela unidade imaginária e se caso a rotação for de 180° , os pontos serão multiplicados por i^2 , como se verifica na relação (12).

Tendo em vista que a 2ª equação de Moivre determina raízes de números complexos onde cada uma representa ponto do vértice de um determinado polígono regular inscrito na circunferência de raio unitário, pode-se determinar os mesmos pontos de um determinado polígono fazendo rotação dele o que possibilita encontrar todos os outros pontos pertencentes a cada um dos vértices.

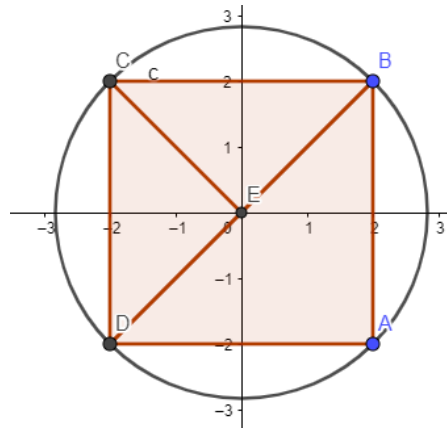
Outro fato de acordo com a demonstração apresentada, é considerar que a unidade imaginária pode representar um operador algébrico que faz um vetor, um polígono, etc rotacionar num Ângulo de 90° .

Aplicações para determinação dos pontos dos vértices de um polígono regular.

Aplicação 1

Considere a figura dada a seguir,

Figura 4: Rotação de um polígono regular numa circunferência.



Fonte: Autoria Própria (geogebra)

Seja dada a coordenada $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, sabendo-se que o polígono representa um quadrado regular inscrito no círculo, determine as coordenadas dos pontos C, D e A.

Solução

Se o polígono receber um giro de 90° , verifica-se que os pontos podem ser determinados da seguinte maneira,

$$C = i \cdot B$$

$$D = iC$$

$$A = i \cdot D$$

Sendo, $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, vem que:

$$C = i \cdot B = i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$D = iC = i \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$A = i \cdot D = i \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, verifica-se a facilidade de obter cada vértice do polígono dado.

Aplicação 2

Com base na aplicação anterior, calcule as coordenadas dos pontos A, C e D, utilizando a 2ª fórmula De Moivre.

Solução.

Sendo $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, representa uma das raízes da notação: $B = \sqrt[4]{z}$, logo,

$$z = B^4 = i$$

Usando a 1ª fórmula de Moivre, vem que:

$$Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

logo,

$$\begin{cases} \cos\theta \cdot \frac{x}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

onde

$$\rho = |Z| = 1,$$

pois

$$|Z| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 1$$

Assim sendo, vem que,

$$\begin{cases} \cos\theta \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Logo, $\theta = 45^\circ$

Usando a 1ª fórmula de Moivre, vem que, $Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$

Substituindo os valores dados, tem-se que,

$$Z^n = [\cos(4.45^\circ) + i \operatorname{sen}(4.45^\circ)] = \cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ) = -1$$

Dessa maneira, tem-se que calcular as quatro raízes da expressão: $\sqrt[4]{-1}$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre, obtém-se que

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Onde $z = -1$ e $\theta = 180^\circ$, levando na expressão, obtém-se,

$$Z_w = \left[\cos\left(\frac{180^\circ}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) \right]$$

Substituindo os valores de $K=0$, $K=1$, $K=2$ e $K=3$, vem que:

$$B = [\cos(45^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(45^\circ)] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Para os demais pontos, vem: } C = [\cos(135^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(135^\circ)] = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$D = [\cos(225^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(225^\circ)] = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

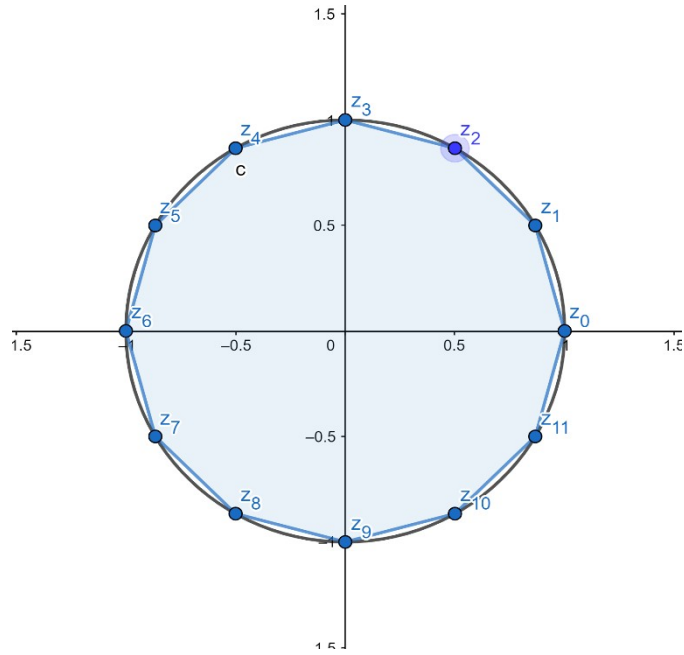
$$A = [\cos(315^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(315^\circ)] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O que está de pleno acordo com o resultado anterior. Nas duas primeiras aplicações, verifica-se que a primeira aplicação leva a determinação das raízes de uma maneira muito mais rápida.

Aplicação 3

Dado o dodecágono abaixo, e sendo, $z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ obtenha todos os outros vértices do polígono regular dado e inscrito no círculo de raio unitário. Use De Moivre, após determinar as raízes, use a fórmula de Moivre e compare os resultados.

Figura 5: Rotação de um polígono regular numa circunferência.



Fonte: Acervo do autor

Para a figura acima, tem-se que:

$z_0=1$, $z_3=i$, $z_6=-1$ e $z_9=-i$, que são pontos nos eixos x e y .

Como $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$, para uma rotação do polígono de 90° , tem-se que:

$$z_5 = i z_2 \rightarrow z_5 = i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_8 = i z_5 \rightarrow z_8 = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_{11} = i z_8 \rightarrow z_{11} = i \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Como dois vértices adjacentes do dodecágono tem angulo de 30° ; vem que:

$$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ \rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Logo, por notação de 90° do polígono, vem que: $z_4 = i z_5$, $z_7 = i z_4$, $z_{10} = i z_7$

$$z_4 = i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

e

$$z_7 = i \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

e

$$z_{10} = i \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Assim sendo, calcula-se por rotação todos as coordenadas de cada vértice do polígono dado. Assim, tem-se os dose pontos coordenados do polígono que provém da raiz: $\sqrt[12]{1}$

$$z_0 = 1,$$

$$z_7 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$z_8 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_9 = -i,$$

$$z_3 = i,$$

$$z_{10} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_4 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_{11} = i \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_5 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$z_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$z_6 = -1$$

Aplicação 4

Tendo vista o problema anterior, calcule todas as coordenadas de cada vértice, aplicando a fórmula De Moivre.

Solução

Seja o ponto

$$z = Z_2^{12} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{12}$$

Tem-se que

Como o expoente é o número 12, dividindo esse valor por 4, tem-se que o resto será zero.

Logo, Usando a expressão em (5). Isto é,

$$Z^n = \rho^n \cdot Z^R$$

Logo,

$$Z^n = \rho^n \cdot Z^R$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{12} \cdot i$$

Logo,

$$Z^{12} = 1 + 0i$$

Logo, deve-se encontrar as doze raízes do número complexo

$$w = \sqrt[12]{1+0i}$$

O argumento do número complexo dado será $\theta = 0^\circ$

Usando a 2ª fórmula de Moivre, vem que:

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Logo,

$$Z_w = \sqrt[12]{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{0}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{12}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{0}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{12}\right) \right]$$

Para os valores de $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, vem as seguintes raízes complexas:

$$Z_0 = 1 \cdot [\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0] = 1$$

$$Z_1 = 1 \cdot [\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen } 30^\circ] = z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = 1 \cdot [\cos 60^\circ + i \cdot \text{sen } 60^\circ] = z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3 = 1 \cdot [\cos 90^\circ + i \cdot \text{sen } 90^\circ] = z_3 = i$$

$$Z_4 = 1. [\cos 120^\circ + i . \operatorname{sen} 120^\circ] = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$Z_5 = 1. [\cos 150^\circ + i . \operatorname{sen} 150^\circ] = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$Z_6 = 1. [\cos 180^\circ + i . \operatorname{sen} 180^\circ] = -1$$

$$Z_7 = 1. [\cos 210^\circ + i . \operatorname{sen} 210^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$Z_8 = 1. [\cos 240^\circ + i . \operatorname{sen} 240^\circ] = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$Z_9 = 1. [\cos 270^\circ + i . \operatorname{sen} 270^\circ] = -i$$

$$Z_{10} = 1. [\cos 300^\circ + i . \operatorname{sen} 300^\circ] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

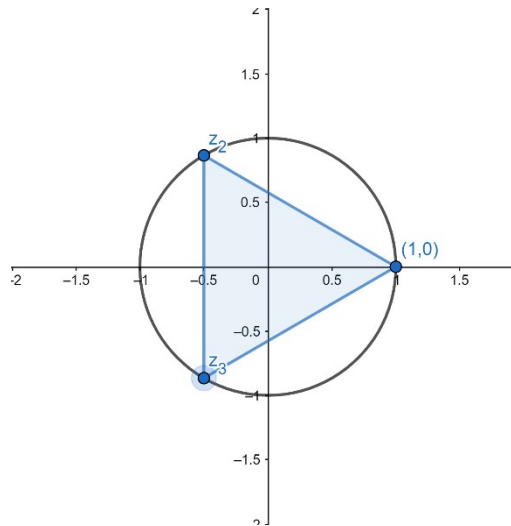
$$Z_{11} = 1. [\cos 330^\circ + i . \operatorname{sen} 330^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

O que estão de pleno acordo com os resultados anterior. Da mesma forma como se fez para o polígono de doze lados, procede-se de modo semelhantes para outros polígonos de n lados. Para Verificar a veracidade desse fato, realiza-se uma aplicação com um polígono de 24 lados para obter todos os pontos coordenados em cada um dos vértices.

Aplicação 5

Considere a figura dada a seguir,

Figura 6: Rotação de um polígono regular numa circunferência.

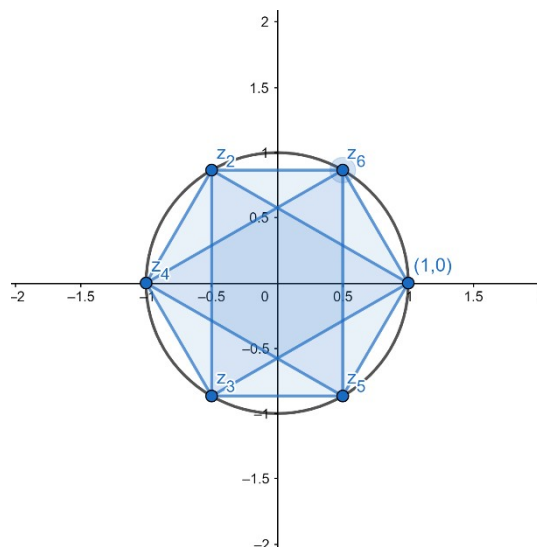


Fonte: Acervo do autor

Seja dada a coordenada $z_1=1+0i$, sabendo-se que o polígono representa um triângulo equilátero, determine as coordenadas dos pontos z_2 e z_3 .

Note que um triângulo equilátero pode ser inscrito em um hexágono;

Figura 7: Rotação de um polígono regular numa circunferência.



Fonte: Autoria Própria (Geogebra)

Aplicando a 1ª fórmula de Moivre:

$$Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

logo,

$$\begin{cases} \cos\theta \hat{=} \frac{x}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta \hat{=} \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Onde

$$\rho = |Z| = 1,$$

Pois

$$|Z| = |1 + 0i| = 1$$

Assim sendo vem que,

$$\begin{cases} \cos\theta \hat{=} 1 \\ \operatorname{sen}\theta \hat{=} 0 \end{cases}$$

logo, $\theta = 360^\circ$

Usando a 1ª fórmula de Moivre, vem que, $Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$

Substituindo os valores dados, tem-se que,

$$Z^n = [\cos(6.360^\circ) + i \operatorname{sen}(6.360^\circ)] = \cos(360^\circ) + i \operatorname{sen}(360^\circ) = 1$$

Dessa maneira, tem-se que calcular as seis raízes da expressão: $\sqrt[6]{1}$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre, obtém-se que

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Onde $z = 1$ e $\theta = 360^\circ$, levando na expressão, obtém-se,

$$Z_w = \left[\cos\left(\frac{360^\circ}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \right]$$

Substituindo os valores de $K=0, K=1, K=2, K=3, K=4$ e $K=5$ vem que:

$$k_0 = \left[\cos(60^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(60^\circ) \right] = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para os demais pontos, vem: $k_1 = [\cos(120^\circ) + i \cdot \text{sen}(120^\circ)] = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

e

$$k_2 = [\cos(180^\circ) + i \cdot \text{sen}(180^\circ)] = -1 + i0$$

Se o polígono receber um giro de 180° , verifica-se que os pontos podem ser determinados da seguinte maneira,

$$k_3 = i^2 k_0$$

$$k_4 = i^2 k_1$$

$$k_5 = i^2 k_2$$

Sendo, $k_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, vem que:

$$k_3 = i^2 k_0 = i^2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$k_4 = i^2 k_1 = i^2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$k_5 = i^2 k_2 = i^2 (-1 + i0) = 1 + i0$$

Portanto, verifica-se a facilidade de obter cada vértice do polígono dado.

$$k_3 = [\cos(240^\circ) + i \cdot \text{sen}(240^\circ)] = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$k_4 = [\cos(300^\circ) + i \cdot \text{sen}(300^\circ)] = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$k_5 = [\cos(360^\circ) + i \cdot \text{sen}(360^\circ)] = 1 + i0$$

Logo para ser obter os vértices corretos do triangulo equilátero basta escolher as raízes k_1 , k_3 e k_5 .

Aplicação 6

Com base na aplicação anterior, calcule as coordenadas dos pontos z_2 e z_3 , utilizando a 2º fórmula de Moivre.

Solução.

Sendo $z_1 = 1 + i0$, representa uma das raízes da notação: $z_1 = \sqrt[3]{z}$, logo,

$$z = (z_1)^3 = i$$

Usando a 1º fórmula de Moivre, vem que:

$$Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta)]$$

Logo,

$$\begin{cases} \cos\theta \cdot \frac{x}{\rho} \\ \text{sen}\theta \cdot \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Onde

$$\rho = |Z| = 1,$$

Pois

$$|Z| = |1 + i0| = 1$$

Assim sendo vem que,

$$\begin{cases} \cos\theta \cdot \frac{1}{1} = 1 \\ \text{sen}\theta \cdot \frac{0}{1} = 0 \end{cases}$$

Logo, $\theta = 360^\circ$

Usando a 1ª fórmula de Moivre, vem que, $Z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$

Substituindo os valores dados, tem-se que,

$$Z^n = [\cos(3.360^\circ) + i \operatorname{sen}(3.360^\circ)] = \cos(1080^\circ) + i \operatorname{sen}(1080^\circ) = 1$$

Dessa maneira, tem-se que calcular as quatro raízes da expressão: $\sqrt[3]{1}$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre, obtém-se que

$$Z_w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

Onde $z = -1$ e $\theta = 180^\circ$, levando na expressão, obtém-se,

$$Z_w = \left[\cos\left(\frac{360^\circ}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Substituindo os valores de $K=0$, $K=1$ e $K=2$, vem que:

$$z_2 = \left[\cos(120^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(120^\circ) \right] = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Para os demais pontos, vem: } z_3 = \left[\cos(240^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(240^\circ) \right] = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

E

$$z_1 = \left[\cos(360^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(360^\circ) \right] = 1 + i0$$

O que está de pleno acordo com o resultado anterior. Nas aplicações com raízes de índice ímpar, verifica-se que a primeira aplicação leva a determinação das raízes de uma maneira mais rápida principalmente se for altos índices.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho representado buscou abordar o aspecto histórico do surgimento dos números complexos com um breve resumo da perspectiva da época, apontando os grandes matemáticos que de forma gradativa contribuíram para o desenvolvimento das equações algébricas e do fato quando elas apresentavam soluções complexas. Verificou-se ao longo da pesquisa as demonstrações significativas de compreender a unidade imaginária como um operador que está intrinsecamente relacionado com a rotação de um vetor, possibilitando que a partir desse conceito, fosse possível operar com as fórmulas De Moivre na descoberta de obter as coordenadas de um determinado polígono regular inscrito numa circunferência.

Portanto, foi com base nesse critério de entender o significado físico da unidade imaginária que levou a soluções de problemas de cálculo de raízes complexas, tendo em vista uma segunda alternativa de obtê-las, sem, no entanto, recorrer a conhecida fórmula polar e as fórmulas De Moivre. Assim sendo, a pesquisa realizada obteve seu objetivo a partir do momento que a introdução de um ângulo de rotação no argumento da segunda fórmula De Moivre, conduziu a importantes resultados no cálculo das determinações das coordenadas de cada vértice de um polígono regular inscrito na circunferência escritos ao longo da pesquisa realizada.

Portanto tendo em vista as propriedades algébricas de um número complexo, representação no plano Argand-Gauss e sua representação trigonométrica, além da demonstração e aplicação com uma mudança na 2ª fórmula de De Moivre, onde a relevância do estudo se concentrou no operador algébrico i , abriu uma lacuna de uma melhor maneira de obter as raízes de um número complexo, dando dessa maneira, uma segunda alternativa de realizar os cálculos. Todavia, acreditou que as soluções realizadas para esse fim, afluíram na certeza de que a partir da simetria entre os pontos de vértices, a unidade imaginária inserida no significado físico, tornou-se fundamental para encontrar os pontos dos vértices.

REFERÊNCIA

AVILA, G.S.S. - ' Funções de uma Variável Complexa. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.

BOYER, Carl B. (Carl Benjamin) (b. 1906) A history of mathematics. Wiley, 1968. Reimp: Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 1985.

BROWN, J. W, Variáveis Complexas e Aplicações, 2015.

BURTON, David M. The history of mathematics: an introduction. Allyn & Bacon: Boston, 1985.

CARDANO, G. Ars Magna. Massachusetts Institute of Technology, 1968.

CERRI, Cristina. Desvendando os Números Reais. IME-USP. Novembro de 2006.

DO CARMO, M.; MORGADO, A.C. e WAGNER, E. - Trigonometria e Números Complexos. Publicação SBM, Rio de Janeiro, 2001.

FLAMENT, D., Histoire des nombres complexes: entre algèbre et géométrie. CNRS Éditions: Paris, 2003.

GIL, P. D. B. François Viète: o despojar da álgebra simbólica. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Janeiro de 2001.

GILBERTO G. Garbi, O romance das equações Algébricas, Makron Books, 1997.

GONÇALVES, C. H. B. ; Possani, C. . Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga. Matemática Universitária, v.47, 2010.

TARTAGLIA, N. Quesiti et Inventiones Diverse (publicação comemorativa do IV centenário da morte de Niccolo Tartaglia), Brescia, 1959.