



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

Jean Furtado da Silva

**PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR:  
Uma Abordagem para o Ensino Médio**

**BRAGANÇA-PA  
2022**

Jean Furtado da Silva

**PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR:  
Uma Abordagem para o Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda.

---

S586p Silva, Jean Furtado da.  
Programação linear : uma abordagem para o ensino  
médio / Jean Furtado da Silva. — 2022.  
51 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de  
Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2022.

1. problema de programação linear. 2. método  
gráfico. 3. resolução de problemas. I. Título.

CDD 519.72

---

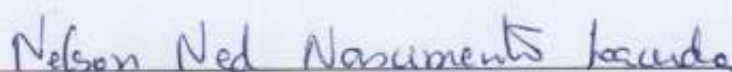
Jean Furtado da Silva

**PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR**  
**Uma abordagem para o Ensino Médio**

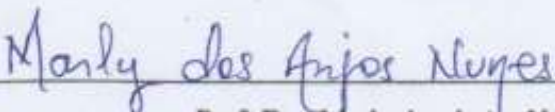
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
a Universidade Federal do Pará, como parte  
dos requisitos necessários para obtenção do  
título de Licenciado Pleno em Matemática.

Bragança 02 de dezembro de 2022.

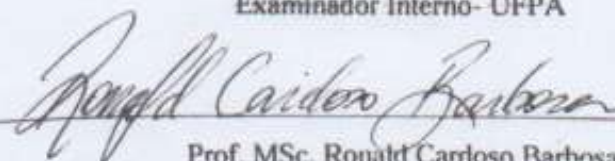
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda  
Orientador- UFPA



Prof. Dra. Marly dos Anjos Nunes  
Examinador Interno- UFPA



Prof. MSc. Ronald Cardoso Barbosa  
Examinador Interno- UFPA

Dedico esse trabalho ao meu pai Antonio Alves, que não pôde presenciar esse momento, mas que nunca poupou esforços para que se realizasse.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos docentes do Curso de Matemática da UFPA - Campus Bragança, principalmente ao docente Prof. Nelson Ned Nascimento Lacerda, que sugeriu e ajudou no desenvolvimento do tema.

Aos meus pais Antonio Alves e Maria de Lourdes que nunca mediram esforços para me ajudar.

A meu irmão Gustavo Furtado que sempre esteve do meu lado.

A minha namorada Elizandra Ribeiro me incentivou a todo momento.

Aos meus amigos que inúmeras vezes me ajudaram a superar meus problemas.

A meus colegas de turma por sempre me ajuda a superar os desafios acadêmicos.

E a todas as pessoas que me ajudaram diretamente e indiretamente.

“A escalada é longa, mas a vista vale a pena”

(Taric-2009)

## RESUMO

Este trabalho surge como uma proposta de introduzir os conceitos iniciais de Programação Linear no Ensino Médio, levando em consideração as competências e habilidades que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere. Nesse sentido, nosso objeto de estudo é primeiramente propor um ensino de Programação Linear através do Método Gráfico, assim, buscamos apresentar conceitos básicos de forma que seja compreensível para alunos do Ensino Médio. Apresentamos situações problemas de forma que venha exemplificar o modo que podemos abordar em sala de aula a Programação Linear e dessa forma relacionar a programação linear com sistemas lineares, tendo em vista que sistemas lineares é conteúdo ministrado no Ensino Médio. Além disso, somou-se o uso do software SOLVER para solução computacional de Problemas de Programação Linear (PPL) abordados neste trabalho. O desenvolvimento desta proposta se deu através de uma metodologia qualitativa, consultando referências que abordam formas de tentar inserir Programação Linear no Ensino Médio através da resolução de problemas com ou sem auxílio de ferramentas computacionais, partimos da análise de outros autores que mostrava a possibilidade do ensino deste conteúdo e de que forma poderia ser iniciada a abordagem. Assim conseguimos identificar que uma abordagem “mais leve” poderia ser através do método gráfico, obtendo assim sucesso na proposta de ensino.

**Palavras-chave:** Problema de Programação Linear; Método Gráfico; Resolução de Problemas.

## **ABSTRACT**

This work appears as a proposal to introduce the initial concepts of Linear Programming in High School, taking into account the skills and abilities that the National Common Curricular Base (BNCC) suggests. In this sense, our object of study is first to propose a teaching of Linear Programming through the Graphic Method, thus, we seek to present basic concepts in a way that is understandable for high school students. We present problem situations in order to exemplify how we can approach Linear Programming in the classroom and thus relate linear programming with linear systems, considering that linear systems is content taught in High School. In addition, the use of the SOLVER software for computational solution of Linear Programming Problems (LPP) addressed in this work was added. The development of this proposal took place through a qualitative methodology, consulting references that address ways of trying to insert Linear Programming in High School through the resolution of problems with or without the aid of computational tools, we started from the analysis of other authors who showed the possibility of teaching of this content and how the approach could be initiated. Thus we were able to identify that a “lighter” approach could be through the graphic method, thus obtaining success in the teaching proposal.

**Keywords:** Linear Programming Problem; Graphic Method; Problem solving.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	11
2	BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR - BNCC .....	13
3	SISTEMAS LINEARES .....	16
3.1	Equações lineares .....	16
3.2	Sistemas lineares.....	16
3.3	Classificação de Sistemas Lineares.....	17
3.3.1	Sistema Possível e determinado (SPD) .....	17
3.3.2	Sistema Possível e Indeterminado (SPI).....	17
3.3.3	Sistema impossível (SI):.....	18
3.4	Métodos de solução de sistemas lineares.....	19
3.4.1	Método da adição.....	19
3.4.2	Método da substituição .....	20
3.4.3	Método de Cramer .....	21
3.4.4	Eliminação Gaussiana.....	23
4	PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR – PPL .....	25
4.1	Histórico .....	25
4.2	Definição de Problemas de Programação Linear (PPL).....	25
4.3	Exemplos de Problemas de Programação Linear .....	26
4.3.1	Problema da dieta .....	26
4.3.2	Problema de alocação de recursos .....	27
4.3.3	Problema de Transporte.....	28
4.4	Modelando um Problema de Programação Linear .....	28
4.5	Definições e Teoremas .....	29
4.6	Métodos de Solução de PPL.....	30
4.6.1	Método simplex .....	30
4.6.2	Método Gráfico para duas variáveis .....	31
4.6.3	Programação Linear no Excel .....	34
5	PROPOSTA DE ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO 44	
5.1	Problemas de programação linear proposto para o ensino médio .....	45
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
	REFERÊNCIAS.....	50

# 1 INTRODUÇÃO

A Programação Linear apresenta uma relação direta com sistemas lineares que é um dos conteúdos ministrado no Ensino Médio, este trabalho busca mostrar uma proposta de ensinar programação linear através do método gráfico. Com isso buscou-se conceitos básicos de forma que seja compreensível para alunos do ensino médio. Apresentamos um breve resumo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de modo a relacionar as competências e habilidades descritas na BNCC com este trabalho, fazemos uma revisão de conteúdos necessários para o entendimento da programação linear, seguindo com os principais acontecimentos que levaram o desenvolvimento da programação linear e mostrando alguns dos problemas clássicos ao decorrer dos anos.

Apresentamos alguns dos métodos para solução de problemas com uma descrição mais aprofundada do método gráfico. Portanto, este trabalho visa conceituar, exemplificar e apresentar problemas de programação linear para que os alunos consigam resolver situações problemas através do método gráfico, ou seja até duas variáveis, se apropriando do Estudo Dirigido como forma de abordagem para o ensino médio. Além disso, exemplificamos também, um passo a passo para se resolver um problema usando o programa computacional Excel, cuja ferramenta é de grande importância e de fácil acesso aos professores e alunos, dessa forma acreditamos que o Excel possa auxílio na resolução de problemas e assim agregar ao aprendizado dos alunos.

A estrutura deste trabalho está dividida em 6 capítulos, os quais são: Capítulo 1: Introdução. Capítulo 2: Buscaremos relacionar as competências e habilidades descritas na BNCC com o ensino aprendizagem da programação linear no ensino médio. Capítulo 3: Realizaremos uma breve revisão bibliográfica acerca de conteúdos necessários para o entendimento da Programação Linear e utiliza uma linguagem voltada para o nível médio. Capítulo 4: Mostraremos um pouco do histórico da programação linear; apresenta problemas clássicos da programação linear; os métodos de soluções, enfatizando o método gráfico; seguindo com uma descrição de um modo para resolver problemas de programação linear usando a ferramenta *solver* do programa computacional Excel. Capítulo 5: Apresentaremos uma proposta de

ensino para o nível médio, de modo a mostrar problemas que podem ser aplicados a tal nível. Capítulo 6: Apresentamos uma visão a respeito dos conteúdos e objetivos mostrados neste trabalho para assim entendermos se é possível o aprendizado da Programação Linear no ensino médio.

## 2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR – BNCC

Neste capítulo apresentaremos parcialmente o documento BNCC falando um pouco da sua construção e o que representa para as escolas de modo a relacionar com a proposta de ensinar Programação Linear no ensino médio, fazendo um paralelo entre as competências e habilidades descritas na BNCC e a Programação Linear

Em Brasil (2022, p. 7), “A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.” Desta forma a BNCC é responsável por regulamentar os tipos de aprendizagem essenciais para cada nível escolar brasileiro por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas do país, ou seja, promover o aprendizado de forma igualitária.

Para Maciel (2021), a BNCC foi construída de forma conjunta com representantes entidades da sociedade civil; desde escolas, universidades, secretarias, professores e especialistas da educação. A BNCC é uma proposta que indica quais as competências devem ser desenvolvidas nos estudantes de cada etapa do processo de ensino e aprendizagem. A partir dessas competências apresentadas, o ensino público e privado deve desenvolver o seu próprio currículo com o suporte do Ministério da Educação (MEC). Veja na tabela 1; alguns marcos temporais importante para a construção da BNCC

Tabela 1: Datas importantes da BNCC

Ano	Mês	Ações Desenvolvidas
2010	Março/Abril	I Conferência Nacional de Educação (CONAE)
2013	Abril	Criação do Movimento pela Base Nacional Comum Curricular
2014	Junho	Aprovação do Plano Nacional de Educação (PNE)
2014	Novembro	II Conferência Nacional de Educação (CONAE)
2015	Junho	Publicação de portaria designando especialistas para a elaboração do documento
2015	Setembro	Apresentação da primeira versão do documento
2015	Setembro	Organização de encontros locais, regionais para

		discussão do documento
2015/2016	Setembro/Março	Disponibilização de plataforma on-line para recebimento de contribuições
2016	Maio	Apresentação da segunda versão do documento
2016	Junho a agosto	Seminários estaduais para discussão da segunda versão do documento
2016	Junho	Publicação de portaria que instituiu o Comitê Gestor da BNCC
2017	Abril	Entrega da terceira versão do documento ao CNE
2017	Junho a setembro	Realização de audiências públicas regionais pelo CNE
2017	Dezembro	Aprovação do documento no CNE
2017	Dezembro	Homologação da BNCC pelo Ministro de Estado da Educação
2018	Março	Lançamento de novo portal da BNCC
2018	Março	“Dia D” para discussões nas redes de ensino
2018	Abril	Instituição do Programa de Apoio à Implementação da BNCC
2018	Abril	MEC encaminha para CNE terceira versão da BNCC-EM
2018	Dezembro	Promulgação da BNCC-EM

Fonte: BNCC e as Ciências Exatas

A BNCC é composta por cinco competências específicas para o ensino médio, sendo elas, BRASIL (2022):

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros,

mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Cada competência possui habilidades que o aluno precisa desenvolver. Dentre as habilidades, existe a que pode relacionar com sistemas lineares: **(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.**

Relacionando essas habilidades a competência **3 (três)**, observar-se que o ensino de sistemas lineares é proposto na BNCC, tendo em vista isso podemos relacionar o ensino de sistemas lineares ao ensino de programação linear, e assim contextualizar problemas de maneira a seguir a proposta da BNCC.

Para estudar a Programação Linear, é necessário que se tenha alguns conceitos matemáticos de Sistemas Lineares. Nos capítulos a seguir, será apresentado uma base necessária para que o aluno do ensino médio, possa modelar e resolver os problemas de programação linear de duas variáveis.

### 3 SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo faremos um breve estudo acerca dos conteúdos de Sistemas Lineares, como este trabalho pretende ser voltado ao Ensino Médio, então as definições e exemplos serão direcionados a este nível de aprendizagem do aluno; para isso vamos utilizar as definições de (DANTE 2018).

#### 3.1 Equações Lineares

Toda equação linear é da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde

$x_1, x_2, \dots, x_n$  são variáveis;

$a_1, a_2, \dots, a_n$  são os coeficientes reais;

$b$  é um número real que denominamos termo independente.

#### Observações:

1. Uma equação linear não apresenta termos da forma  $x^2, xy, 2\sqrt{x}$ , etc.
2. Uma equação é dita homogênea quando o seu termo independente é zero. A equação  $2x - 7y + 2z = 0$ , por exemplo, é uma equação homogênea.

#### 3.2 Sistemas lineares

Denomina-se sistema linear  $m \times n$  o conjunto de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas, que podemos representar da seguinte maneira

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos de sistemas lineares

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3y + 2x = 9 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

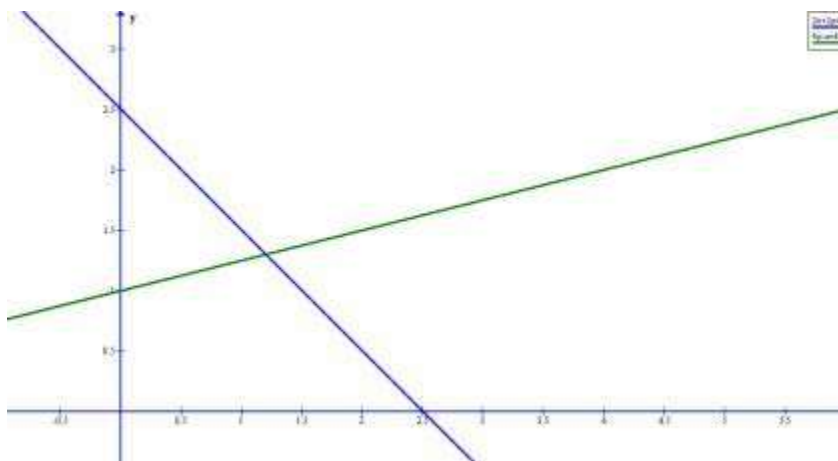
### 3.3 Classificação de Sistemas Lineares

Os sistemas lineares se classificam de acordo com suas soluções, veja a seguir as definições de: Sistema Possível e Determinado, Sistema possível e Indeterminado, Sistema Impossível, além disso vamos exemplificar com sistemas e gráficos para facilitar o entendimento. Todos os gráficos deste capítulo foram feitos usando o Software Graph disponível em <https://www.padowan.dk/>.

**3.3.1 Sistema Possível e Determinado (SPD):** quando o sistema linear possui uma única solução.

Exemplo 1: Considere o sistema  $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ -x + 4y = 4 \end{cases}$  que gera o gráfico da figura 1. Pelo gráfico, pode-se observar que a solução do sistema é a intersecção das retas que compõe o sistema; e este ponto é  $(\frac{6}{5}, \frac{13}{10})$ .

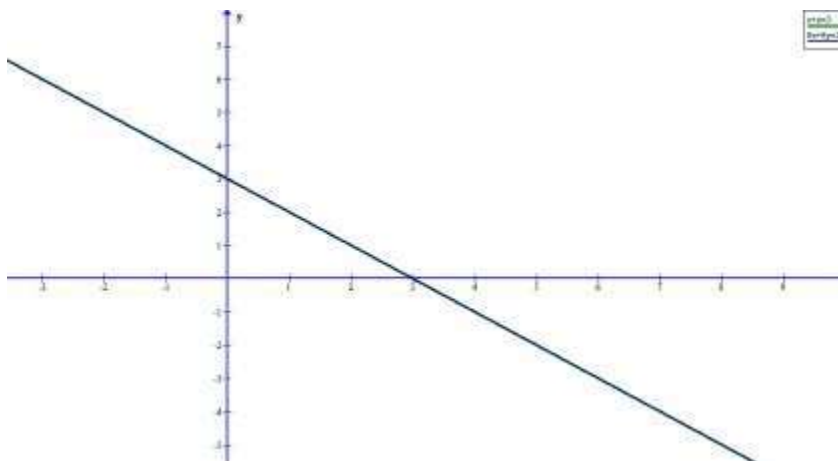
Figura 1: Representação gráfica de um sistema possível e determinado



**3.3.2 Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** É quando o sistema linear apresenta infinitas soluções.

Exemplo 2: Considere o sistema  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$  que gera o gráfico da figura 2. Pelo gráfico, pode-se observar que as retas se cruzam em infinitos pontos; ou seja, a equação  $x + y = 3$  do sistema é múltipla da equação  $8x + 8y = 24$ . As retas são coincidentes.

Figura 2: Representação gráfica de um sistema possível e indeterminado.

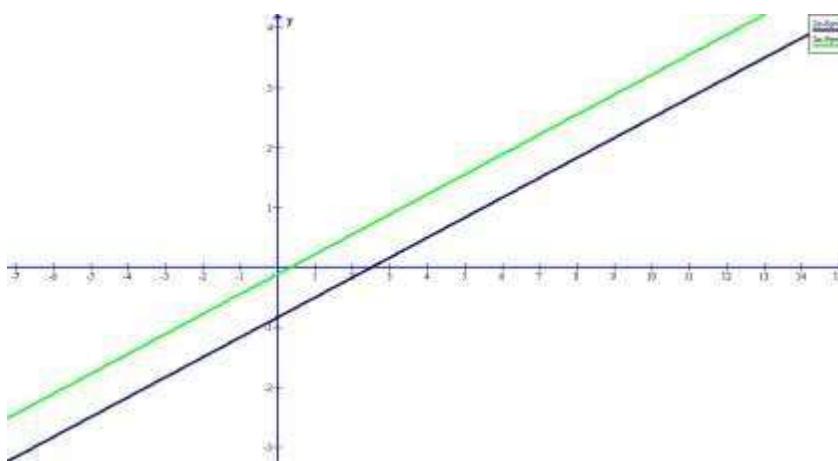


**3.3.3. Sistema impossível (SI):** É quando não existe solução possível para o sistema linear.

Exemplo 3: Considere o sistema  $\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 1 \end{cases}$  que gera o gráfico da figura 3. Pelo

gráfico, pode-se observar que as retas não se cruzam, ou seja, não existe a intersecção das retas que compõe o sistema. As retas são paralelas.

Figura 3 Representação gráfica de um sistema impossível.



### 3.4 Métodos de Solução de Sistemas Lineares

Resolver ou solucionar um sistema linear é encontrar os valores  $x_i$  variáveis que tornam o sistema verdadeiro para todas as equações do sistema, ou seja, satisfazer a igualdade.

Existem vários métodos de resolução para sistemas lineares, alguns vistos no Ensino Fundamental: Adição, Substituição e outros no Ensino Médio (Cramer e Eliminação Gaussiana).

#### 3.4.1 Método da Adição

O método de adição consiste em somarmos as equações termo a termo. Usaremos quando um dos termos de uma das equações for múltiplo do termo da outra equação.

Exemplo 4: Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ 6x - 6y = 12 \end{cases}$$

**Resolução:** Primeiro multiplicar-se uma das equações por uma constante de modo que ao somarmos as duas equações membro a membro nos reste apenas uma variável. Multiplicando a primeira equação por -3 obtemos:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 14 \cdot (-3) \\ 6x - 6y = 12 \\ -12x + 6y = -42 \\ \hline 6x - 6y = 12 \end{cases}$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação, não altera o resultado final das variáveis, em seguida somando as duas equações membro a membro obtém-se;

$$\begin{aligned} -6x &= -30 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Encontrado o valor da variável  $x$ , substituímos este valor em uma das equações do sistema, para obter o valor da variável  $y$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ 6x - 6y = 12 \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação, segue que

$$4 \cdot (5) - 2y = 14$$

$$20 - 2y = 14$$

portanto,

$$y = 3$$

Logo o conjunto solução é:  $S = \{(5;3)\}$ .

### 3.4.2 Método da Substituição

No método da substituição isolamos uma das incógnitas em função da outra incógnita para encontrarmos o valor algébrico da incógnita isolada.

Exemplo 5: Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

Isolamos a variável que vai facilitar nossos cálculos, sendo assim vamos isolar a incógnita  $y$ , logo temos

$$2x + y = 40$$

$$y = 40 - 2x$$

Dessa forma encontramos o valor algébrico da incógnita  $y = 40 - 2x$ , em seguida vamos substituir onde estiver  $y$  na outra equação do sistema dado,

$$2x - 2y = 10$$

Substituindo temos

$$2x - 2(40 - 2x) = 10$$

$$2x - 80 + 4x = 10$$

Quando substituimos encontramos uma equação do primeiro grau, resolvendo vamos encontrar o valor de  $x$ , em seguida podemos substituir o valor encontrado de  $x$  em uma das equações do sistema e assim encontrar o valor da outra incógnita.

Resolvendo a equação do primeiro grau temos

$$2x - 80 + 4x = 10$$

$$2x + 4x = 10 + 80$$

$$6x = 90$$

$$x = \frac{90}{6}$$

$$x = 15$$

Em seguida vamos substituir em uma das equações do sistema para encontrarmos o valor de  $y$ , substituindo na primeira equação segue que,

$$\begin{aligned}
 2x + y &= 40 \\
 2 \cdot (15) + y &= 40 \\
 30 + y &= 40 \\
 y &= 40 - 30 \\
 y &= 10
 \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução (15,10) para o sistema linear.

Agora abordaremos alguns métodos de solução para Sistemas lineares vistos no ensino médio em particular o método de Cramer e Eliminação Gaussiana (escalonamento).

### 3.4.3 Método de Cramer

O método de Cramer utiliza matrizes para resolução de sistemas lineares. Seja, um sistema de 2 equações e 2 incógnitas,

$$\begin{cases} Ax + By = \alpha \\ Cx + Dy = \beta, \end{cases}$$

desde que

$$M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vamos calcular o determinante da matriz  $M$

$$\det M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \text{ com } \det M \neq 0.$$

Para calcularmos  $\det M_x$ , vamos substituir os termos independentes na primeira coluna dos coeficientes,

$$\det M_x = \begin{vmatrix} \alpha & B \\ \beta & D \end{vmatrix} = \alpha D - \beta B.$$

Para calcularmos  $\det M_y$ , vamos substituir os termos independentes na segunda coluna dos coeficientes,

$$\det M_y = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ C & \beta \end{vmatrix} = A\beta - \alpha C,$$

a solução do sistema acima é dada por

$$x = \frac{\det M_x}{\det M}$$

e

$$y = \frac{\det M_y}{\det M},$$

sendo  $x$  e  $y$  incógnitas do sistema linear.

Exemplo 6: Seja  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ , resolva o sistema usando a regra de Cramer.

Solução:

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 \text{ logo } M \neq 0.$$

Calculando o determinante da matriz  $M_x$  temos,

$$M_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-4) = 9$$

Em seguida calculamos o determinante de  $M_y$  assim segue que,

$$M_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3.$$

Logo a solução do sistema será,

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

e

$$y = \frac{3}{3} = 1.$$

Assim temos como conjunto solução  $(3,1)$ .

### 3.4.4 Eliminação Gaussiana

A Eliminação Gaussiana conhecido, também pelo método do escalonamento, o método consiste em efetuar operações elementares:

- multiplicação de uma linha por uma constante não nula;
- substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
- permutação de duas linhas.

Usando essas operações elementares transformando a matriz estendida do sistema em uma matriz triangular, com a matriz triangular podemos obter a solução do sistema através da substituição regressiva.

Exemplo 7: Resolva pelo método de eliminação Gaussiana o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = -4. \end{cases}$$

Transformando o sistema linear em uma matriz estendida temos,

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{array} \right|$$

Em seguida vamos transformar a matriz estendida em uma matriz triangular, utilizando as operações citadas anteriormente, podemos multiplicar a linha dois por -2 em seguida somar com a linha um, assim temos,

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{array} \right|$$

aplicando a substituição regressiva

$$\begin{aligned} -5y &= 10 \\ y &= -\frac{10}{5} = -2 \end{aligned}$$

substituindo  $y = -2$  na equação  $2x + y = 2$  do problema

$$\begin{aligned} 2x + (-2) &= 2 \\ 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Dessa forma a solução do problema será (2,-2).

De posse da base matemática o aluno de ensino médio tem condições de compreender problemas mais práticos. Sendo assim, abordaremos os Problemas de Programação Linear como uma aplicação que relaciona problemas de Sistemas Lineares.

## 4 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR – PPL

### 4.1 Histórico

Segundo Crócoli (2016), o economista Leontief em 1936, criou um modelo formado por um conjunto de equações lineares, considerado o início das técnicas de programação linear, anos depois em 1973, recebeu o prêmio Nobel de economia pelo desenvolvimento e sua aplicação à Economia Da matriz input-output, conhecida como “Matriz de Leontief”.

O economista Kantorovich, publicou um trabalho em 1939 que falava acerca do planejamento de produção, onde uma de suas abordagens era o uso de equações lineares, em 1975 recebeu o prêmio Nobel de economia pela teoria da utilização ótima de recursos. O matemático e físico Hitchcock em 1940 apresentou uma abordagem ao método de transporte.

Na Segunda Guerra Mundial nos Estados Unidos foi apresentado um problema, “problema da dieta”, onde consistia em descobrir qual a alimentação mais econômica, levando em consideração os nutrientes, vitaminas, proteínas e etc..., mínimas que o organismo precisa. Com a repercussão nacional do problema, em 1945 George Stigler apresentou o resultado com o melhor desempenho, onde considerava apenas o aspecto econômico, onde mostrava que a dieta ideal tinha um custo anual de US\$ 59,88 e sua composição era: repolho, farinha de trigo e fígado suíno. George Stigler obteve o resultado combinando, por tentativas, 77 alimentos e considerando 9 nutrientes em cada.

O matemático e físico norte-americano, George Bernard Dantzig em 1947 consolidou essa abordagem de planejamento desenvolvendo o método simplex capaz de resolver a maioria dos problemas de programação linear. Considerado o “pai da programação linear”, autor formal do “problema de transporte”, elaborou a teoria e resolução computacional baseada no método simplex entre outras contribuições.

### 4.1 Definição de Problemas de Programação Linear (PPL)

Segundo Araújo (2012), Problemas de Programação Linear trabalham com a distribuição eficiente de recursos limitados, com o objetivo de atender a um determinado objetivo. Em se tratando de Programação Linear, esse objetivo será

expresso por uma função linear, à qual se dá o nome de função objetiva; os recursos equivalem as restrições do problema; as atividades equivalem às incógnitas do problema.

Para Moreira (1998), “A programação linear caracteriza-se pela maximização ou minimização de alguma combinação de variáveis, que pode ser a venda de dois ou mais produtos ou seu custo de fabricação”.

Ou seja, Problemas de Programação Linear, são problemas modelados em equações lineares, com o objetivo de encontrar a melhor solução (solução ótima) seja ela o máximo ou o mínimo de um sistema linear. Matematicamente, se apresenta na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Otimizar } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{Sujeito as restrições} \\ & \left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \geq; \leq; = \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right. \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

## 4.2 Exemplos de Problemas de Programação Linear

São vários problemas de aplicação, a seguir os problemas mais comuns na literatura.

### 4.3.1 Problema da dieta

Considera-se que existem  $n$  alimentos que podem ser colocados em uma dieta. Estes  $n$  alimentos possuem um determinado custo unitário e uma quantidade de cada um de  $m$  nutrientes relevantes (calorias, vitaminas, etc.); deseja-se obter uma dieta adequada de custo mínimo, ou seja, minimizar o produto dos custos unitários de alimentos pelas quantidades selecionadas, dado que os requisitos de cada um dos nutrientes, definidos pelo vetor  $b$ , sejam satisfeitos.

*Variáveis de decisão:*  $x_j$  = quantidade de alimentos que entram na dieta.

*Dados conhecidos:*  $n$  alimentos e seus custos  $c_1, \dots, c_n$

$m$  nutrientes necessários e quantidades mínimas  $b_1, \dots, b_m$

$a_{ij}$  quantidade do  $i$ -ésimo nutriente no  $j$ -ésimo alimento

*Objetivo:* obter a dieta adequada de menor custo.

*Modelo:*

*Função objetivo:*  $\text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n .$

$$\begin{array}{l} \text{conjunto de restrições do problema} \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array}$$

Sujeito também a:  $x_j \geq 0 \forall j$

### 4.3.2 Problema de alocação de recursos

Uma fábrica deseja definir a quantidade de  $n$  produtos que será produzida a partir de  $m$  insumos disponíveis em quantidades limitadas e conhecidas. Também conhece a estrutura de produção, em termos da quantidade de cada insumo  $i$  necessário para produzir uma unidade do produto  $j$ ; deseja-se maximizar alguma função das quantidades produzidas: o lucro, por exemplo, sabendo-se que cada produto também fornece um lucro unitário fixo  $c_j$ . Qual a combinação de produtos que resulta maior lucro?

*Variável de decisão:*  $x_j$ - quantidade de produto  $j$  a ser produzido ( $j=1, \dots, n$ )

*Dados conhecidos:*  $c$ : lucro unitário do produto  $j$ ;

$b_i$ : valor disponível de cada insumo  $i$ ;

$a_{ij}$ : quantidade do insumo  $i$  necessária para produzir uma unidade do produto  $jj$

*Problema:* qual a composição de produtos que dá mais lucro?

Max  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_n \\ x_j > 0 \forall j. \end{array}$$

### 4.2.3 Problema de Transporte

Uma empresa deseja transportar uma mercadoria disponível em determinadas quantidades em fábricas localizadas em diferentes regiões, até os centros consumidores, cuja demanda é conhecida. Também os custos unitários de transporte de cada fábrica até cada consumidor são dados. O Problema de Transporte consiste em determinar que quantidades serão transportadas de cada fábrica para cada centro de consumo, de modo a implicar no menor custo de transporte.

Onde:

*Variáveis de decisão:*  $x_{ij}$  quantidade do bem a ser transportado de  $i$  para  $j$

$s_i, i = 1, \dots, m$  é a quantidade de determinado bem produzido por  $m$  fábricas;

$d_j, j = 1, \dots, n$  é a quantidade deste bem consumido em  $n$  destinos.

*Dados conhecidos:* demandas e quantidades produzidas ( $s_i$  e  $d_j$ ) e custo de transporte por cada rota ( $c_{ij}$ )

### 4.3 Modelando um Problema de Programação Linear

Modelar um PPL deve ter as seguintes orientações:

**Primeiro passo:** identifique as variáveis desconhecidas a serem determinadas (elas são denominadas variáveis de decisão).

**Segundo passo:** liste todas as restrições do problema e expresse-as como equações (=) ou inequações ( $\leq$ ,  $\geq$ ) lineares em termos das variáveis de decisão definidas no passo anterior, elas podem aparecer de forma explícitas ou implícitas.

**Terceiro passo:** identifique o objetivo ou critério de otimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão. O objetivo pode ser do tipo maximizar ou minimizar.

Exemplo 8: Uma empresa pode-se fabricar dois produtos 1 e produto 2. Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina, onde a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra. Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina, onde a tecnologia é intensiva em capital. Sendo  $x_1$  e  $x_2$  as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-

se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente, quanto deve fabricar cada produto para obter o maior lucro possível?

Usando esse exemplo vamos modelar como um problema de programação linear usando os passos anteriores;

Primeiros identificamos nossas variáveis de decisão, no caso do nosso exemplo temos:

Produto 1, onde o problema propõe ser  $x_1$

Produto 2, onde o problema propõe ser  $x_2$

No segundo passo vamos listar as restrições do problema como uma função linear;

Nosso problema apresenta recursos de produção limitados, esses recursos são: horas-homem e horas-maquina. Assim podemos modelar nossas restrições em funções lineares de modo que;

Sujeito a:

$$\text{Horas-homem } 9x_1 + x_2 \leq 18 \quad e$$

$$\text{Horas-maquina } 3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$\text{Condição de não negatividade: } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

No próximo passo identificar o objetivo do nosso problema de maximizar o lucro:

$$\text{Max } L = 4x_1 + x_2$$

#### 4.5 Teoremas

Os teoremas de Programação Linear, estão em LACHTERMACHER(2016).

Teorema 1: A região viável de um programa linear-pl é convexa.

Teorema 2: A solução ótima de um PL é um ponto extremo.

Teorema 3: Se existe solução viável então existe solução básica viável.

Teorema 4: A solução básica viável de um PL é um ponto extremo da região viável.

Teorema 5: O conjunto de soluções básicas viáveis de um PL é finito.

## 4.6 Métodos de Solução de PPL

Nessa secção iremos apresentar o método simplex e também o método gráfico para solução de PPL.

### 4.6.1 Método simplex

Segundo Brasil (2018) podemos dividir o método simplex em duas partes;

- i) A Busca por Soluções Factíveis: Neste passo, calcula-se diversas soluções básicas factíveis que podem ser ótimas ou não. A cada uma solução factível encontrada faz-se imediatamente o teste de otimalidade para a mesma.
- ii) Teste de Otimalidade de Solução: A cada uma das soluções factíveis encontradas no passo ' acima verifica-se se a solução é ótima ou não

Existem também os Problemas de Programação Linear Inteira (PPI); que são PPL; em que uma ou todas variáveis de decisão necessitam assumir valores inteiros. Os tipos mais comuns de programação inteira são:

- *Programação Inteira Total* - onde todas as variáveis de decisão são do tipo inteiro.
- *Programação Inteira Mista* - onde apenas uma parte das variáveis são do tipo inteiro, enquanto outras são do tipo real.

Para solucionar os PPI, segundo Kawamura (2006); o Método *Branch and Bound* é um algoritmo exato de enumeração implícita, ou seja, um método que, embora não teste explicitamente todas as soluções possíveis, garante a otimalidade da solução obtida. Esse método é composto de duas etapas:

- i) *Branching*: dividir o problema o problema principal em sub-problemas de modo que facilite a análise, assim eliminando soluções inviáveis, sem interferir no campo de soluções.
- ii) *Bounding*: eliminar soluções de baixa qualidade através de comparação com limitante. É comum utilizar dois tipos de limitante: superior e inferior.

#### 4.6.2. Método Gráfico para duas variáveis

Para este trabalho, que tem como objetivo aplicar PPL no ensino médio, a solução gráfica é o mais indicado para o entendimento do aluno.

Descrição do método:

- i) Consiste depois de ter modelado o PPL, deve-se colocar as restrições no sistema cartesiano
- ii) Caso tenha a região viável do problema, a solução se encontra no vértice dessa região, conforme o TEOREMA II
- iii) Deve-se testar cada vértice dessa região na função a ser otimizada
- iv) Finalmente verificar qual será a melhor solução do problema

A seguir, um exemplo de programação linear com solução através do método gráfico.

Exemplo 9: Uma empresa pode-se fabricar dois produtos 1 e produto 2. Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina, onde a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra. Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina, onde a tecnologia é intensiva em capital. Sendo  $x$  e  $y$  as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente, quanto deve fabricar cada produto para obter o maior lucro possível?

Solução:

Primeiro vamos modelar nosso problema de programação linear; tendo recursos limitados temos que modelar nosso problema com algumas restrições,

$$\text{Homem hora } 9x + y \leq 18$$

$$\text{Horas maquina } 3x + y \leq 12$$

Como não podemos produzir uma quantidade negativa de produtos temos que indicar as seguintes restrições:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

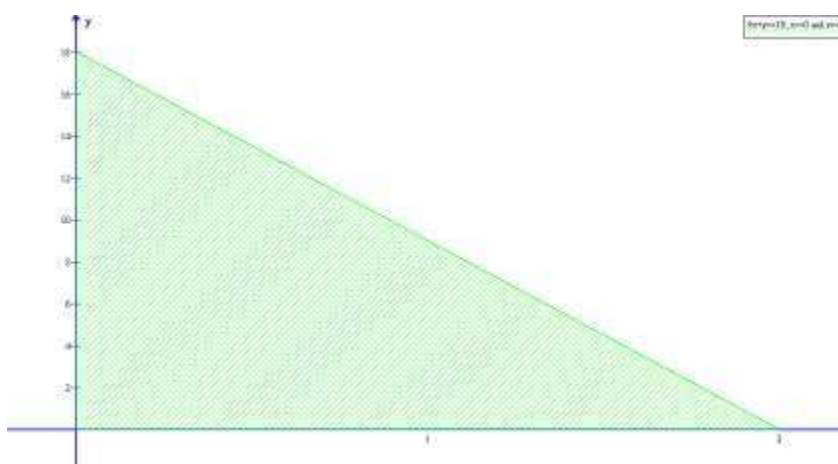
O objetivo do problema é obter o maior lucro possível com a fabricação dos produtos levando em consideração os recursos, logo o problema que maximizar os lucros, assim podemos expressar do seguinte modo:

$$\max L(x, y) = 4x + y$$

Com as devidas restrições identificadas podemos usar o método gráfico para resolver o PPL.

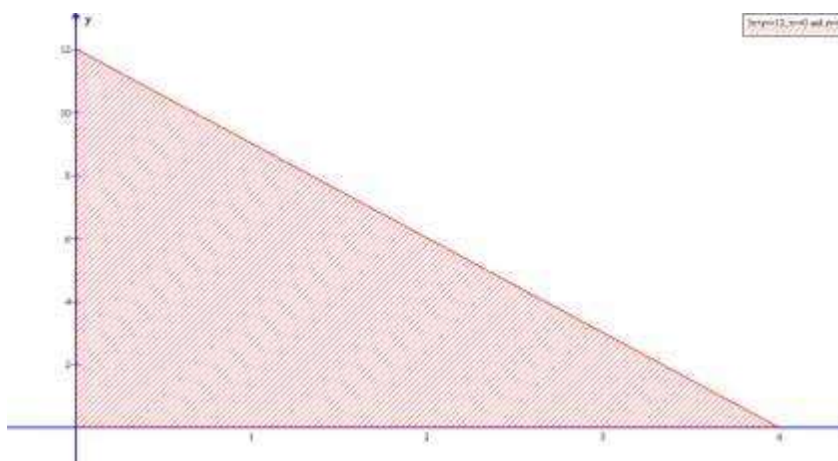
A inequação  $9x + y \leq 18$  é representada pela Figura 4

Figura 4: Representação gráfica da área de solução viável da inequação  $9x + y \leq 18$ .



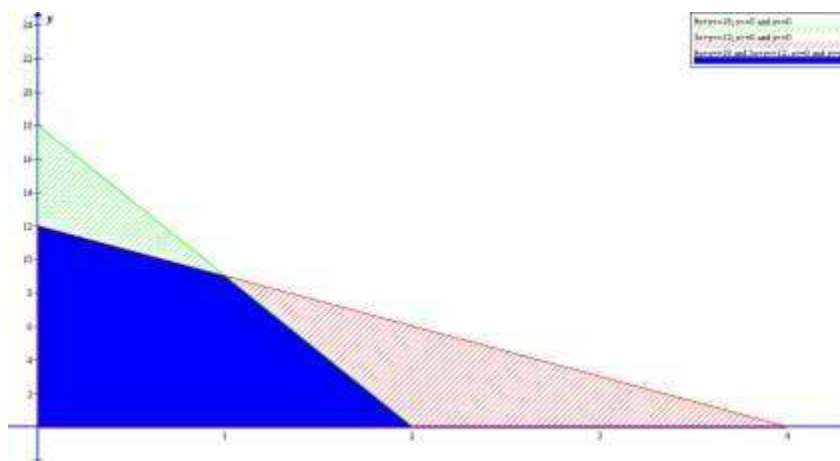
Para a inequação  $3x + y \leq 12$  temos a representação pela Figura 5

Figura 5: Representação gráfica da área de solução viável da inequação  $3x + y \leq 12$



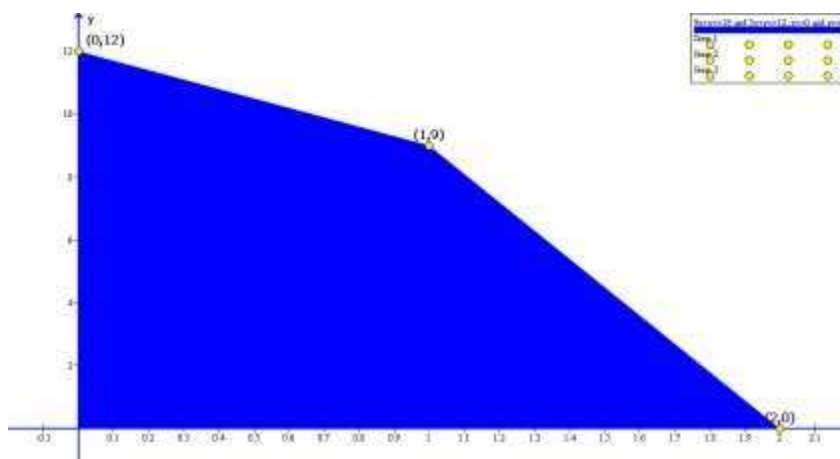
A região viável é mostrada pela Figura 6

Figura 6: Representação gráfica da solução viável do sistema  $\begin{cases} 9x + y \leq 18 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases}$



Tendo em vista a área em que todas as restrições foram atendidas, pelo teorema II a solução ótima está em um dos pontos extremos do nosso gráfico, observe a imagem abaixo que destaca as coordenadas dos pontos extremos,

Figura 7: Gráfico destacando os pontos extremos da região viável do sistema



Finalmente deve-se testar todos os vértices na função objetivo

$$\max L(x, y) = 4x + y$$

Verificando as coordenadas dos pontos temos:

Ponto (0; 0) então  $\max L(0,0) = 4(0) + 0 = 0$

Ponto (2,0) então  $\max L(2,0) = 4(2) + 0 = 8$

Ponto (1,9) então  $\max L(1,9) = 4(1) + 9 = 13$

Ponto (0,12) então  $\max L(0,12) = 4(0) + 12 = 12$

Assim observamos que a solução ótima é igual ao ponto (1,9), pois é onde atingimos o lucro máximo.

### 4.6.3 Programação Linear no Excel

Dentre todos os *softwares* disponíveis para essa utilização, Montini (2004) destaca a ferramenta *solver*, que está disponível a todos os usuários do Excel, e isso se dá ao fato de sua facilidade de utilização. O autor também afirma que o Excel é uma ferramenta poderosa, a qual é capaz de fornecer aos usuários realização de cálculos e sistematizar dados, permitindo a integração e automatização de sistemas inteiros de gerenciamento de empresas e indústrias.

Atualmente grande parte dos alunos do ensino médio tem acesso a computadores, seja na escola ou até mesmo em casa, nesse tópico vamos mostrar um passo a passo para resolver problemas de programação linear utilizando o Excel.

Exemplo 10: Uma empresa pode-se fabricar dois produtos 1 e produto 2. Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina, onde a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra. Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina, onde a tecnologia é intensiva em capital. Sendo  $x$  e  $y$  as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente, quanto deve fabricar cada produto para obter o maior lucro possível?

$$\max L(x, y) = 4x + y$$

Sujeito a:

$$9x + y \leq 18$$

$$3x + y \leq 12$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

### Resolução do problema

- i) Primeiro transferimos os dados e restrições do problema para o Excel, veja na figura 8 abaixo,

Figura 8: Planilha do Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		x	y	condição	resultado		
2	R1	9	1	<=	18		
3	R2	3	1	<=	12		
4	Função Objetivo	4	1				
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

R1 corresponde a restrição um

R2 corresponde a restrição dois

- ii) Criar duas células para receber o resultado das soluções do problema, observe na figura 9;

Figura 9: Planilha do Excel.

	A	B	C	D	E	F
1		x	y	condição	resultado	
2	R1	9	1	<=	18	
3	R2	3	1	<=	12	
4	Função Objetivo	4	1			
5						
6						
7	resultado das variáveis					
8	x					
9	y					
10						

As células em vermelho receberão o resultado das variáveis

- iii) Criar duas células para receber os valores das restrições de acordo com o resultado das variáveis, observe na figura 10;

Figura 10: Planilha do Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x	y	condição	resultado			
2	R1	9	1	<=	18			
3	R2	3	1	<=	12			
4	Função Objetivo	4	1					
5								
6								
7	resultado das variáveis							
8	x							
9	y							
10								
11	resultado das restrições							
12	R1							
13	R2							
14								

Cédulas que receberam o resultado das restrições em azul.

- iv) Vamos criar também uma célula para receber o resultado da função objetivo,

Figura 11: Planilha do Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x	y	condição	resultado			
2	R1	9	1	<=	18			
3	R2	3	1	<=	12			
4	Função Objetivo	4	1					
5								
6								
7	resultado das variáveis							
8	x							
9	y							
10								
11	resultado das restrições							
12	R1							
13	R2							
14								
15	Função Objetivo							
16								

Célula para receber o resultado da função objetivo em azul

- v) Agora vamos adicionar as operações para que as células recebam seus resultados. Nas células em azul, vamos selecionar primeiro a celular respectiva ao R1, clicamos em cima com o botão esquerdo do mouse e digitamos o sinal de igualdade e digitamos a seguinte operação:

Figura 12: Célula do Excel.



=B2\*B8+C2\*B9

Em seguida ENTER e digitamos as operações para o R2,

Figura 13: Célula do Excel.



=B3\*B8+C3\*B9

- vi) Para o próximo passo digitamos a operação para o resultado da função objetivo, de forma análoga clicamos com o botão esquerdo do mouse na célula que receberá o resultado da função objetivo (célula com a cor VERDE), logo em seguida digitamos o sinal de igualdade e colocamos a seguinte operação,

Figura 14: Célula do Excel.



=B4\*B8+C4\*B9

Note que as células que foram adicionadas as operações ficaram com o valor 0(zero)

Figura 15: Planilha do Excel.

resultado das restrições					
R1	0				
R2	0				
Função Objetivo	0				

- vii) Feito isso para encontramos a solução do problema de programação linear vamos utilizar a ferramenta do Excel chamada SOLVER, para encontra a ferramenta segue os passos da imagem a seguir.

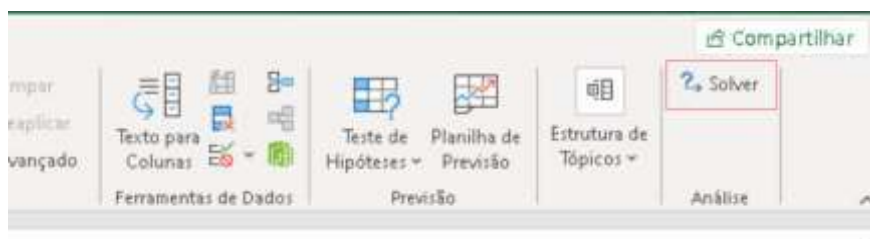
Na barra de ferramentas clique em “Dados”, conforme a figura 16

Figura 16: Barra de ferramentas do Excel.



Em seguida em “Solver”

Figura 17: Barra de ferramentas do Excel.



Deverá abrir uma janela semelhante a mostrada figura 18 abaixo,

Figura 18: Janela para definir Parâmetros e Restrições do problema.



Agora vamos adicionar os parâmetros para resolver nosso problema.

- viii) Em “definir objetivo” vamos adicionar a celular referente a função objetivo (célula destacada em verde)

Figura 19: Janela para definir os parâmetros do problema.

Definir Objetivo:

Em “alterando células variáveis” vamos adiciona as duas células referente as variáveis “x” e “y” (células destacadas em vermelho)

*Figura 20: Janela para adicionar as variáveis do problema.*

Alterando Células Variáveis:

Na opção “sujeito as restrições” vamos adicionar as restrições do nosso problema, vamos clicar em “adicionar” é deverá aparecer uma janela semelhante a ilustrada na figura 21

*Figura 21: Janela para definir as Restrições do problema.*

Adicionar Restrição

Referência de Célula:   Restrição:

Em “referência de célula” adicionamos a célula que vai receber o resultado das restrições (células destacadas em azul),

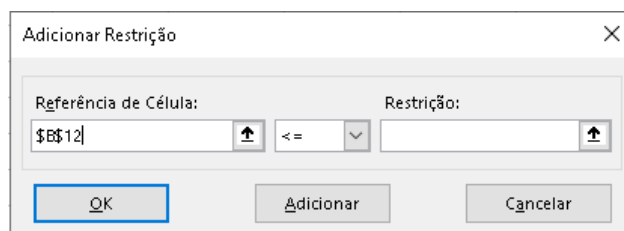
*Figura 22: Janela para definir as restrições.*

Adicionar Restrição

Referência de Célula:   Restrição:

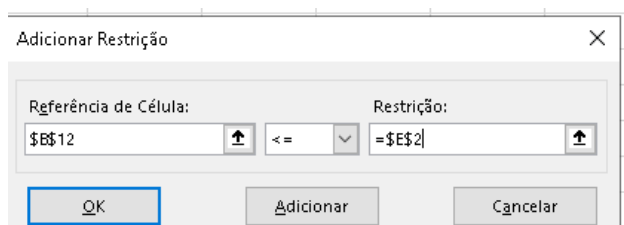
Ao meio vamos adicionar a desigualdade referente ao nosso problema que no caso é  $\leq$  (menor igual),

Figura 23: Janela para definir as restrições.



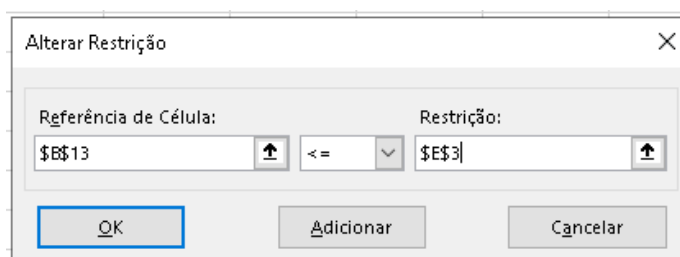
O próximo passo vamos adicionar as células que estão os valores que depois da desigualdade,

Figura 24: Janela para definir as restrições



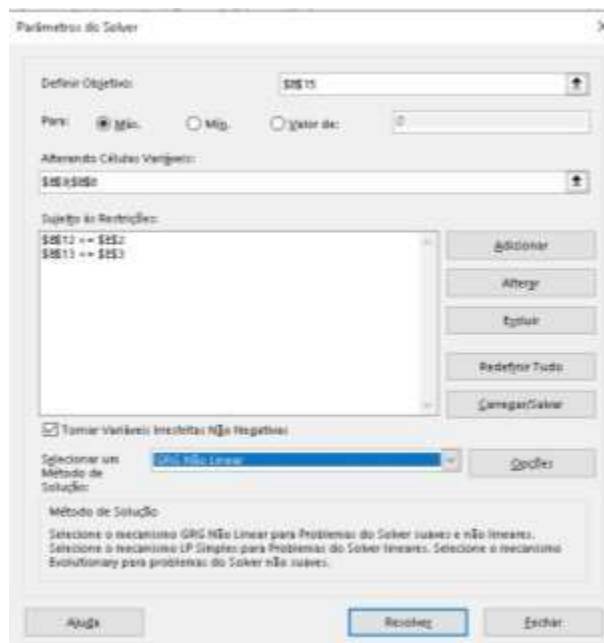
Em seguida clicamos em “adicionar”. Fazemos o mesmo processo para a restrição dois e “adicionamos”

Figura 25: Janela para definir as restrições



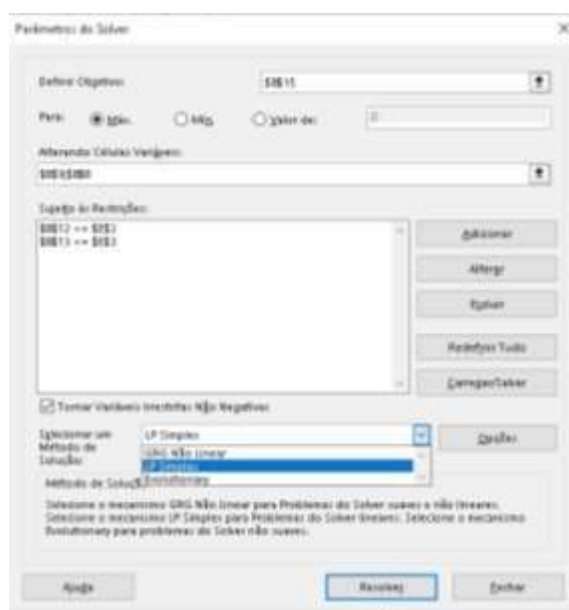
Com as restrições adicionadas clique na opção “cancelar” para voltar a janela anterior,

Figura 26: Janela para definir Parâmetros e Restrições do problema.



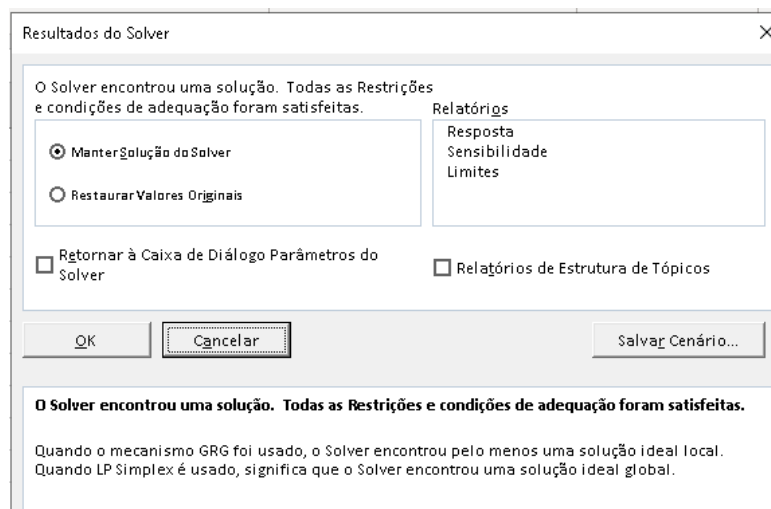
- ix) Em seguida você precisa marcar a opção “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas”, na opção “selecionar Um Método de Solução” selecione “LP Simplex”,

Figura 27: Janela para definir Parâmetros e Restrições do problema.



Com todos os parâmetros definidos apenas clique em “Resolver”, aparecerá uma caixa de diálogo apenas clique em “ok”.

Figura 28: Janela Resultados do Solver.



Feito isso a solução do problema aparecerá como na figura 29 abaixo,

Figura 29: Planilha do Excel.

7	resultado das variáveis	
8	x	1
9	y	9
10		
11	resultado das restrições	
12	R1	18
13	R2	12
14		
15	Função Objetivo	13

A “solução ótima” encontrada foi

$$x = 1$$

$$y = 9.$$

O solver gera três relatórios: de respostas, de sensibilidade e de limites. No qual o nosso interesse é o relatório de respostas, pois mostra a solução do problema e como foram satisfeitas as restrições.

A Figura 30 apresenta, o relatório gerado pelo exemplo 10, no qual mostra o valor da função igual a 13, o valor da variáveis  $x=1$  e  $y=9$ ; e também de grande valia, nos apresenta como foram satisfietas as restrições, no caso a restrição 1, igual a 18 e restrição 2 igual a 12; portanto foram totalmente utilizadas.

Figura 30: Relatório de Respostas do Excel.

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Respostas  
 Planilha: [resolucao com o excel.xlsx]Planilha1  
 Relatório Criado: 18/11/2022 12:35:11  
 Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.  
 Mecanismo do Solver  
 Mecanismo: LP Simplex  
 Tempo da Solução: 0,203 Segundos.  
 Iterações: 2 Subproblemas: 0  
 Opções do Solver  
 Tempo Máx. Ilimitado, Iterações Ilimitado, Precisão 0,000001, Usar Escala Automática  
 Subproblemas Máx. Ilimitado, Soluç. Máx. Núm. Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%, Assumir Não Negativo

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$B\$15	Função Objetivo :	13	13

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
\$B\$9	y x	9	9	Conting.
\$B\$8	x x	1	1	Conting.

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
\$B\$12	R1 x	18	\$B\$12<=\$E\$2 Associação		0
\$B\$13	R2 x	12	\$B\$13<=\$E\$3 Associação		0

Vale ressaltar que a planilha do Excel é limitada quanto a quantidade variável, mas para uso no ensino médio é de grande utilidade. Entre softwares direcionado a resolver os PPL, podemos citar: LINDO, LINGO.

## 5 PROPOSTA DE ENSINO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO

A proposta de aplicar Problemas de Programação Linear no ensino médio surge da habilidade (**EM13MAT301**) ditada na BNCC. A proposta através do método gráfico é viável, tendo em vista que todos os conceitos básicos para utilizar esse método desenvolvemos no decorrer do ensino escolar, conceitos básicos como: equação e inequação do primeiro grau, equações lineares, sistemas lineares, gráfico de função, interpretação de gráficos. Além disso com o auxílio da programação linear podemos contextualizar e relacionar com o seu meio social questões de sistemas lineares para que o aluno entenda da melhor forma possível e assim melhorar o aprendizado do aluno.

Podemos utilizar o estudo dirigido como forma de abordagem em sala de aula, a proposta de ensino pode começar com uma breve introdução acerca do histórico da programação linear em seguida uma revisão do conteúdo de sistemas lineares e métodos de solução e assim ir mostrando alguns problemas de programação linear para que o aluno comece a refletir como pode ser resolvidos, abordamos o método gráfico pois é uma forma de apresentar o conteúdo de maneira “leve” é assim despertar o interesse dos alunos, podemos transformar alguns problemas de sistemas lineares em problemas de programação linear e pedir que os alunos comentem quais as diferenças dos dois problemas, uma “vantagem” do método gráfico e estimular a interpretação gráfica de sistemas lineares e poder discutir o que cada solução do gráfico representa na solução do problema. Tendo comentado todos esses conteúdos o professor pode explicar um passo a passo de como funciona o método gráfico e assim aplicar em situações problemas, sendo elas do cotidiano do aluno ou até mesmo situações que estimulem o imaginário do aluno.

Uma metodologia utilizada em educação matemática é a resolução de problemas, que para Aurélio, Muller e Martins (2021) a resolução de problemas tem conquistado destaque, pois oferece vários benefícios ao processo ensino-aprendizagem de matemática. Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser

suficiente para que a resposta seja aceita e convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.

Brito (2006, p. 24) destaca as seguintes fases para a resolução de problemas:

- a) leitura e compreensão do problema
- b) formulação de um plano de solução, que inclui a tradução do enunciado para a linguagem matemática, a escolha de uma estratégia, a resolução propriamente dita e a obtenção de um resultado concreto;
- c) comprovação do resultado, que envolve a releitura do enunciado do problema e a verificação da adequação da resposta ao solicitado problema.

Vejamos o procedimento para exemplos práticos:

### 5.1 Problemas de programação linear proposto para o ensino médio

**Situação 1:** Uma empresa fabrica dois modelos de moveis, modelo A e modelo B, o modelo A gasta 1 unidade de tabua e uma unidade de ripa, o modelo B gasta 4 unidades de tabuas e 2 unidades de ripas. Sabendo que a empresa possui 25 tabuas e 74 ripas, quantos moveis ela conseguirá fabricar?

- a) 15 moveis A e 20 moveis B
- b) 12 moveis A e 14 moveis B
- c) 13 moveis A e 15,5 moveis B
- d) 12 moveis A e 13 moveis B

Nesse momento o aluno deverá ter contato com o problema, entender o que é pedido. Nesse caso, a solução é de um sistema linear de duas variáveis e duas equações.

Vejamos agora com novas informações sobre este mesmo problema

**Situação 2:** uma empresa fabrica dois modelos de moveis, modelo A e modelo B, o modelo A gasta 1 unidade de tabua e uma unidade de ripa, o modelo B gasta 4 unidades de tabuas e 2 unidades de ripas. Sabendo que a empresa possui 25 tabuas e 74 ripas, quantos moveis ela conseguirá fabricar? **Sabendo que o lucro do móvel**

**A é igual a 7 e o lucro do móvel B é igual a 5.** Quantos moveis ela deverá fabricar para obter o maior lucro? Assinale a alternativa correta.

- a) 18,5 moveis A e 0 moveis B
- b) 25 moveis A e 0 moveis B
- c) 0 moveis A e 0 moveis B
- d) 12 moveis A e 13 moveis B

Veja que agora com essa nova informação, torna-se um PPL, com duas variáveis.

Portanto, o professor deverá realçar essa pequena e valiosa informação. Na situação 1, o problema é de sistema linear com duas variáveis, na situação 2 ao acrescentar a informação de lucro que cada móvel gera, torna-se um PPL. Sendo assim podemos pegar alguns problemas de sistemas lineares e transformar em problemas de programação linear, dessa forma o aluno terá um melhor entendimento das situações e assim aprender conceitos básicos de programação linear.

Onde a solução será pelo método gráfico estudado no capítulo 4.

Exemplo 11: Administrador de uma pequena fábrica de móveis está pensando em otimizar a utilização dos recursos de seu estoque. Essa fábrica produz poltronas em dois modelos, "Albany" e "Bridget", forradas em brim e lona. Ele sabe que para forrar uma poltrona "Albany" são precisos 2 m<sup>2</sup> de brim e 6 m<sup>2</sup> de lona. Já para forrar uma poltrona "Bridget" são precisos 4 m<sup>2</sup> de brim e 4 m<sup>2</sup> de lona. No estoque, a fábrica dispõe de 160 m<sup>2</sup> de brim e 240 m<sup>2</sup> de lona. Qualquer dos modelos de poltrona é vendido por R\$ 160,00. Com essas informações, de que modo o administrador pode sugerir à produção da fábrica para obter a máxima renda?

Exemplo 12: A Brasicor produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, M1 e M2. A tabela 2 apresenta os dados básicos do problema:

	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	Disponibilidade máxima diária
Matéria-prima M1	6	4	24

Matéria-prima M2	1	2	6
Lucro por tonelada (R\$ 1.000)	5	4	

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 tonelada. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é 2t. qual o lucro máximo diário?

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de ensinar programação linear no ensino médio já vem sendo mostrada em trabalhos acadêmicos anteriores como Santos (2013) onde ele aborda os primeiros passos para resolver tais problemas; e livros do ensino médio também mostra proposta de ensino programação linear; por exemplo, Dante (2016) onde expõe uma proposta de ensino através de resolução de problemas usando o método gráfico. Este trabalho lançou uma proposta voltada para o ensino médio, em particular atrelou o estudo de sistemas lineares e programação linear, relacionando as competências e habilidades citadas na BNCC, dessa forma apresentando o método gráfico como principal modo de iniciar os estudos acerca desse conteúdo. Nesse sentido mostramos os conceitos básicos de tal maneira a ser acessível para o nível escolar proposto, relacionando problemas de sistemas lineares a programação linear, apenas adicionando alguns dados de forma que venha contextualizar o problema.

Apesar da programação linear não ser componente curricular no ensino médio podemos ver nesse trabalho que é importante, pois nos permite contextualizar a matemática em situações problemas do dia a dia estimulando assim a interpretação textual, dessa forma pode “cativar” o aluno e despertar o interesse do mesmo na matemática.

Com a programação linear podemos envolver problemas de grande e pequena escala, assim criar situações problemas de acordo com a necessidade que o professor definir, isso proporciona ao professor seguir a metodologia desse trabalho ou criar sua própria metodologia de modo que seja conveniente a facilitar o entendimento do aluno.

A aplicação de *software* computacionais para ajudar no entendimento da programação linear também é importante, pois com o aumento do acesso a tecnologia devemos inovar para nossas metodologias não ficarem “obsoletas”, e assim criar novas práticas de ensino e aprendizagem na matemática.

Podemos concluir que a proposta de ensinar programação linear no ensino médio é uma boa forma para se abordar as competências e habilidades que a BNCC sugere que os alunos desenvolvam, tendo em vista que todos conteúdos que aplicamos em programação linear são estudados no decorrer da vida escolar do aluno. Por conta da pandemia do COVID-19, esbarramos em situações práticas em sala de aula, sendo assim, colocamos a disposição para trabalhos futuros um estudo voltado a aplicação prática em escolas do ensino Médio.

Por fim acreditamos no êxito deste trabalho pois conseguimos cumprir os objetivos de apresentar uma proposta de ensino da programação linear para ensino médio, exemplificamos e mostramos problemas de modo que os alunos consigam resolver utilizando o Método Gráfico, somando isso ao software do Excel, temos boas práticas para introduzir a Programação Linear no Ensino Médio.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Pedro Felipe da Silva. **Programação linear e suas aplicações: definição e métodos de soluções. 2012.** Dissertação (Mestrado Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás ). Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2012.

BRASIL, Gutemberg Leão. **Programação Linear: uma possível abordagem para o ensino médio.2018.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2022.

CAMARGO, Ramina Samoa Silva. **Introdução à programação linear no Ensino Médio utilizando a resolução gráfica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade federal do Amazonas, Manaus 2014.

CLÍMACO, João Namorado; ANTUNES, Carlos Henggeler; ALVES, Maria João Gomes. **Programação linear multiobjectivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objectivo.** Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2003.

CRÓCOLI, Osmar Crócoli. **Programação Linear: Uma Abordagem para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

DE ALMEIDA, Rangel Calmon. **O teorema fundamental da programação linear e modelagem matemática no ensino médio.** Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ, Minas Gerais, 2013.

Dante, Luiz Roberto Dante. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016

KAWAMURA, Marcio Seiti. **Aplicação do método *branch-and-bound* na programação de tarefas em uma única máquina com data de entrega comum sob penalidades de adiamento e atraso.** Dissertação (Mestrado – Departamento de Engenharia de Produção), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo 2006.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa operacional na tomada de decisões: modelagem em Excel.** 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 4- Reimpressão.

MACIEL, Paulo Roberto Castor Maciel. **BNCC e as ciências exatas.** Artigo – Uniasselvi, Indaial 2021.

MELO, Jorge Nazareno Batista. **Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no ensino médio**. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MOREIRA, Daniel Augusto Moreira. **Administração da Produção e Operações**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

OLIVEIRA, Uéric Silva; DE JESUS, Gilson Bispo. **Sistemas de Inequações Lineares: Uma Ferramenta para Resolver Problemas de Programação Linear**. Educação Matemática em Revista, p. 57-64, 2014.

RIBAS, Cibele Cristina Gomes Barboza. **Programação linear: abordagem para ensino médio**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

SANTOS, J. M. **Programação Linear: Uma aplicação possível no ensino médio**. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal da Bahia – UFBA, Salvador, 2013

SILVA, Gilmara Aparecida. **Programação Linear: uma possibilidade para o Ensino Médio**. Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, matemáticas y Tecnología, v. 1, n. 2, 2016.

ZACHI, Juliana Mallia. **Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas) Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2016.