UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ALVARO ANTONIO RAMOS SILVA

MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA NA TEORIA DE DETECÇÃO FOTOPIROELÉTRICA

BRAGANÇA, PA
2024

ALVARO ANTONIO RAMOS SILVA

MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA NA TEORIA DE DETECÇÃO FOTOPIROELÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do Grau de Licenciado(a) em Matemática pelo Campus Universitário de Bragança da Universidade Federal do Pará

Orientador: Prof. Dr. Marcos Lázaro de Souza Albuquerque

BRAGANÇA, PA
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586m Silva, Alvaro Antonio Ramos.
Matemática básica aplicada na teoria de detecção fotopiroelétrica / Alvaro Antonio Ramos Silva. — 2024.
37 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcos Lazaro de Souza Albuquerque
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2024.

1. Matemática básica. 2. Eletricidade. 3. Efeito piroelétrico. I. Título.

CDD 510

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITARIO DE BRAGANCA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO/TCC Nº 1/2024 - CBRAG (11.11)

Nº do Protocolo: 23073.001875/2024-56

Bragança-PA, 15 de janeiro de 2024.

ALVARO ANTONIO RAMOS SILVA

MATEMÁTICA BÁSICA APLICADA NA TEORIA DE DETECÇÃO FOTOPIROELÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requesito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado(a) em Matemática pelo Campus Universitário de Bragança da Universidade Federal do Pará
Orientador: Prof. Dr. Marcos Lazaro de Souza Albuquerque

Data da Defesa: 15/01/2024
Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA

(Assinado digitalmente em 15/01/2024 11:30)
EDSON JORGE DE MATOS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CBRAG (11.11)
Matrícula: ###905#3

(Assinado digitalmente em 15/01/2024 11:26)
MARCOS LAZARO DE SOUZA ALBUQUERQUE
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CBRAG (11.11)
Matrícula: ###234#1

Para verificar a autenticidade deste documento entre em https://sipac.ufpa.br/public/documentos/index.jsp informando seu número: **1**, ano: **2024**, tipo: **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO/TCC**, data de emissão: **15/01/2024** e o código de verificação: **7e6beffd5d**

RESUMO

A essência deste trabalho engloba, uma fundamentação teórica matemática e física como base explicativa para uma aplicação na detenção de um fenômeno físico chamado efeito fotopiroelétrico utilizando materiais com as propriedades piroelétricas. No desenvolver do trabalho fizemos uso na abordagem dos conceitos e exploração de algumas características, propriedades e algumas definições nos campos de estudos dos números complexos, das derivadas de funções transcendentes, das integrais definidas e explanando alguns fenômenos sobre corrente alternada, com a intenção de formar a base fundamental explicativa na descrição matemática da detenção do efeito fotopiroelétrico em material com propriedades piroelétricas. A presente obra, se faz útil para auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos e físicos inseridos neste trabalho e também a entender os fundamentos e característica que cercam os efeitos fotopiroelétrico, dos tópicos abordados e detenção piroelétrica, pois quando procuramos material de apoio para estudos são poucas as referências encontradas relativas aos assuntos desse campo estudo.

Palavras-chave: Matemática básica. Eletricidade. Efeito piroelétrico.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 6
1 NÚMEROS COMPLEXOS 8
1.1 Propriedades 8
1.2 Definições 9
1.3 Módulos e conjugados 10
1.4 Trigonometria e números complexos 12
2 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS 15
2.1 A derivada da função do logaritmo natural 15
2.2 A derivada da função exponencial 16
3 INTEGRAL DEFINIDA 17
4 CORRENTE ALTERNADA 20
4.1 Carga resistiva 20
4.2 Carga capacitiva 22
5 APLICAÇÃO DA FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA DETECÇÃO FOTOPIROELÉTRICA 31
5.1 O efeito piroelétrico 31
5.2 A interpretação da eletrônica de detecção 33
CONSIDERAÇÕES FINAIS 36
REFERÊNCIAS 37

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estão reunidas as fundamentações de alguns tópicos matemáticos e físicos com o intuído de apresenta-los como uma sequência base de fundamentos que serão associados teoricamente e vão ser manipulados de maneira organizada, de forma lógica e concisa para descreverem um fenômeno de aplicação com fundamentos físicos que é alvo deste trabalho, mais especificamente tratando sobre uma modelagem na descrição matemática do efeito piroelétrico ou fotopiroelétrico quando houver um fluxo de feixes de ondas térmicas incidindo sobre algum material que tenha a propriedade piroelétrica.

O trabalho é estruturado de maneira ordenada, tratando incialmente de uma abordagem dos números complexos, destacando suas principais propriedades e o modo em como operamos com estes números. No enredo desse primeiro capítulo evidenciamos algumas características sem se preocupar com a solução, mas sim, com sua usualidade e posterior utilidade na modelagem de aplicação física no fenômeno principal em questão. O campo dos complexos foi explorado pois, dão possibilidade de realizar associação de suas propriedades e do plano cartesiano de Argand Gauss no campo da física e também facilitam os cálculos e dá possibilidade de se obter resultados que com os outros conjuntos numéricos, tais como, conjunto dos reais e seus sub-conjuntos, não obteríamos os resultados que estamos procurando.

Em seguida, no capítulo dois, fazemos uma breve exploração nas ideias das definições acerca de derivadas de funções transcendentes, ou seja, derivadas de funções logarítmicas e funções exponenciais, apontamos de fato as suas respectivas derivadas e as definindo, e vale ressaltar, que não nos preocupamos em apresentar soluções ou exemplos e sim enfatizar sua forma matemática para a posteriori auxiliar na modelagem da descrição matemática para aplicação principal.

No capítulo em sequência, reunimos um conjunto de propriedades, definições e teoremas relacionado a integrais definidas, destacando sua forma genérica e os modos de operações com integrais de funções diferentes. Apesar de que a aplicações das integrais definidas se estende a incontáveis aplicações no mundo e na realidade, é relevante lembrar que, o capítulo 3 é tratado no trabalho como uma apresentação de algumas propriedades que serão utilizadas posteriormente, por esse motivo, o capítulo não se dispõe em realizar demonstrações.

No capítulo quatro, desenvolvemos uma apresentação teórica um pouco mais extensa, devido a necessidade de explicitação e explanação de alguns conceitos e fenômenos

físicos que servirão de base para a modelação da aplicação física. Fizemos um apontamento, no que tange sobre cargas indutivas e capacitivas nos circuitos RL e RC respectivamente, englobando os conceitos de reatância indutiva e capacitiva esclarecendo suas devidas fórmulas, e também passando num sentido explanatório pelas ideias e características físicas do fenômeno impedância complexa, apresentando sua forma matemática. Neste capítulo, seguidos dos anteriores juntamos ideias em relação a base necessária suficiente para enfim dar início a fundamentação da aplicação fotopiroelétrica.

No quinto capítulo com as fundamentações apresentadas fazemos a aplicação principal do trabalho demonstrando suas propriedades e sua modelação matemática no campo dos estudos da detenção fotopiroelétrica com bases nos acompanhamentos teóricos produzidos nesta obra.

1 NÚMEROS COMPLEXOS

Na seguinte secção, apresentaremos um conjunto de notas da fundamentação matemática do conteúdo acerca dos números complexos retirados dos estudos de livros (CESAR; PERDIGÃO; WAGNER, 1992, IEZZI; 1977, NETO; SAMPAIO; LAPA; CAVALHANTE, 1982), a fim de associar os fundamentos e propriedades na manipulação da raiz quadrada de números negativos que corresponde ao conjunto dos números complexos, os quais permitem aplicações físicas no fenômeno fotopiroelétrico que é o principal foco do trabalho.

1.1 Propriedades

Inicialmente lembrando que as operações de soma e produto de números reais possuem um certo número de propriedades fundamentais, que são as seguintes:

Propriedade I: A adição e a multiplicação são *comutativas*, isto é, se *a, b* e *c* são números reais, então

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba.$$

Propriedade II: A adição e a multiplicação são *associativas*, isto é, se *a, b* e *c* são números reais, então

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc).$$

Propriedade III: A multiplicação é *distributiva* relativamente a adição, isto é, se *a, b* e *c* são números reais, então

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Propriedade IV: Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo as condições:

$$a + 0 = a, \quad a1 = a,$$

para todo real *a.*

Propriedade V: A todo real *a* corresponde um único número real (-*a*), e se $a \neq 0$, um único número real $\frac{1}{a}$, tais que

$$a + (-a) = 0 \qquad e \qquad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

A razão pela qual estas propriedades são consideradas, é que a partir delas podemos deduzir todas as regras das operações aritméticas sobre os números reais. Por exemplo:

- De (4), admitimos que (-1)1 = -1

- De (3), (4) e (5) admitimos que $a + a0 = a(1+0) = a1 = a$, isto é, $a0 = 0$.

Observando as propriedades acima, podemos deduzir que

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + (-1)1 = \{(-1)(-1) + 1\} = (-1)0 = 0$$

e, portanto,

$$(-1)(-1) + (-1) + 1 = 1,$$

donde

$$(-1)(-1) = 1$$

Das propriedades apresentadas temos que, o quadrado $a^2 = aa$ de um número real a nunca é negativo. De forma análoga, no conjunto dos números reais não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Os números complexos nascem desse obstáculo, queremos dispor de um conjunto, que chamaremos de números complexos, que possam ser somados e multiplicados e nos quais seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo, que também os números reais estejam lá.

1.2 Definições

Os números complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição (indicado pelo sinal +) e de multiplicação (indicada pela simples justaposição de letras) com as propriedades (1), (2), (3), (4) e (5) acima mencionadas. Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:

a) Existe um número complexo i^2 = -1, como este trabalho é uma aplicação física a unidade imaginária que em matemática é representada por *i*, nos livros de física essa mesma unidade é representada por *j*, pois *i* e representa a corrente elétrica.

b) Todo número complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$, onde a e b são reais (a é chamada *parte real* e b é chamada *parte imaginária* do complexo $a + bi$). Usa-se a notação $\mathrm{Re}(a + bi) = a$ e $\mathrm{Im}(a + bi = b$.

Usando as propriedades de (I) a (V), podemos operar com os complexos de maneira análoga à que operamos com os reais, como cuidado de tomar i^2 = -1.

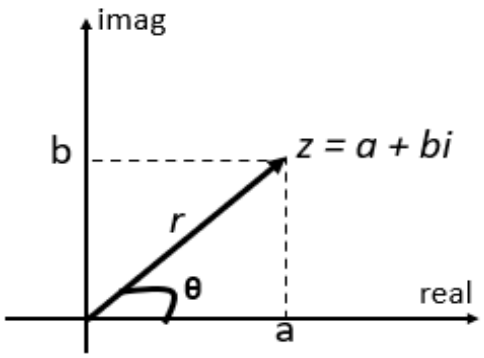
Por exemplo,

i. $(5 + 3i) + (8 + 5i) = 5 + 8 + (3 + 5)i = 13 + 8i$

ii. $(7+2i)(4+3i) = 7(4+3i) + 2i(4+3i) = 28 + 21i + 8i + 6i^2 =$
$= 28 - 6 + (21+8)i = 22 + 29i$

Da definição adotada, podemos pensar no número complexo da forma $z = a + bi$ como o ponto (a,b) do plano cujas coordenadas são a e b, ou ainda como o vetor (isto é, o segmento orientado) de origem no par ordenado (0,0) do sistema de coordenadas e extremidade (a,b), isto é, o complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{0z}$ (figrura 1), sendo (0,0) a origem do sistema cartesiano.

Figura 1 – vetor $\overrightarrow{0z}$



Fonte: autor.

No primeiro caso, o ponto (a,b) é chamado de imagem do complexo $z = a + bi$ e no último caso, os números a e b são chamados componentes do vetor $\overrightarrow{0z}$.

Vamos ver como se traduzem as operações de soma e produto, quando pensamos nos complexos como vetores no plano. Usando as propriedades de (1) a (5) obteremos:

$$(a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

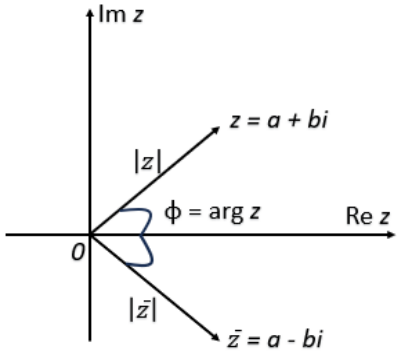
Em outras palavras, a soma de dois complexos é representada por um vetor, cujas componentes são a somas das componentes dos vetores dados.

1.3 Módulos e conjugados

Dado um número complexo $z = a + bi$, sabemos por (5) que se $z \neq 0$, deve existir um complexo tal $\frac{1}{z}$ que $z.\frac{1}{z} = 1$. Vamos determinar o complexo $1/z$ na forma $c + di$.

Para isto, convém definir o *conjugado* de um número complexo $z = a + bi$ como o número complexo $\bar{z} = a - bi$. Geometricamente o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z relativamente ao eixo 0x (figura 2).

Figura 2 – Conjugado de um número inteiro z.



Fonte: autor.

Dado um número $z = a + bi$, chama-se *módulo* de z ($|z|$) ao número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância de 0 a z, ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo z, como se vê facilmente pelo teorema de Pitágoras.

Observe uma relação entre os dois conceitos acima é obtida do seguinte modo.

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2;$$

isto é, o produto de um complexo z pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z.

Exemplo 1. Se $z = 1 + 2i$, então

Solução:

$$\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

Da mesma maneira que para números reais, dados dois complexos z_1 *e* $z_2 \neq 0$, definimos o *quociente* $\frac{z_1}{z_2}$ como sendo o produto $z_1\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Proposição: Se z_1 *e* z_2 são números complexos, então

a) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z_1}\bar{z_2}$.

b) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

Demonstração: Escreva-se $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$; então

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(bc + ad).$$

Por outro lado, $\bar{z_1} = a - bi$, $\bar{z_2} = c - di$, e, portanto,

$$\bar{z_1}\bar{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - i(bc + ad) = \overline{z_1 z_2},$$

o que demonstra (a).

Para demonstrar o item (b), considera-se $z_1 = a = bi$, $z_2 = c + di$; então

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i.$$

Por outro lado, $\bar{z}_1 = a - bi$, $\bar{z}_2 = c - di$, e, portanto,

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2},$$

o que demonstra o item (b).

Corolário: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Solução:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2.$$

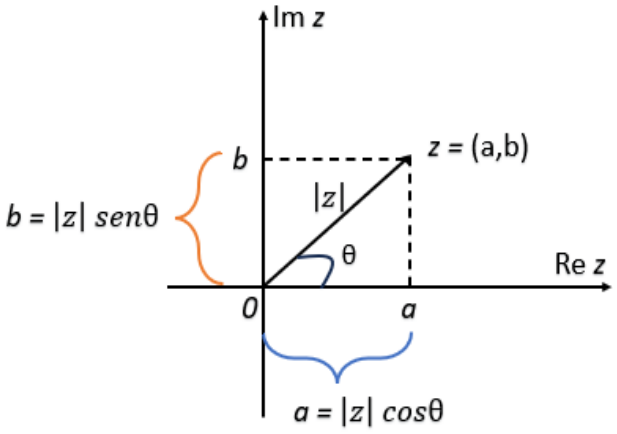
Como módulos são positivos ou nulos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da expressão acima e obter $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

1.4 Trigonometria e números complexos

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser pensado com um ponto do plano, de coordenadas (a,b) ou como um vetor $\overrightarrow{0z}$, de origem 0 e extremidade (a,b). A representação $z = a + bi$ dá ênfase às coordenadas do ponto z. Uma representação que dá ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{0z}$ é obtida do modo seguinte:

Indiquemos por $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{0z}$ que suporemos diferente de zero, e por θ o ângulo positivo *x0z* (Figura 3)

Figura 3 – Forma trigonométrica do número complexo.



Fonte: autor.

Então

$$\frac{a}{r} = cos\theta, \qquad \frac{b}{r} = sen\theta$$

isto é,

$$z = a + bi = rcos\theta + risen\theta = r(cos\theta + isen\theta),$$

onde os elementos geométricos r e θ do vetor $\overrightarrow{0z}$ estão destacados. A representação $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ é chamada a *forma trigonométrica* do complexo *z*.

Observa-se que substituindo θ na expressão acima por $\theta + 2k\pi$, onde *k* é um inteiro positivo, negativo ou nulo, o complexo *z* não se altera. Em muitos casos é conveniente usar esta expressão mais geral:

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\text{sen}(\theta + 2k\pi)),$$

e dizer que os valores de $\theta + 2k\pi$ são os *argumentos* de *z*.

Teorema (fórmulas de adição da trigonometria.) Se x e y são reais quaisquer:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - sen\ x\ sen\ y; \qquad (1)$$

$$sen(x + y) = sen\ x \cos y + sen\ y \cos x\,. \qquad (2)$$

Solução: Se *x* e *y* satisfazem à condição:

$$0 \leq x\ 2\pi, \quad 0 \leq y < 2\pi,$$

escrevemos

$$w_1 = \cos x + isen\ x, \quad w_2 = \cos y + isen\ y.$$

Pela interpretação geométrica do produto, $w_1 w_2$ é obtido de w_1 dando-lhe uma rotação positiva de ângulo *y*. Portanto,

$$w_1 w_2 = \cos(x + y) + isen(x + y). \qquad (3)$$

Por outro lado,

$$w_1 w_2 = (\cos x + isen\ x)(\cos y + isen\ y);$$

$$w_1 w_2 = (\cos x \cos y - sen\ x\ sen\ y) + i(sen\ x \cos y + sen\ y \cos x). \qquad (4)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (3) e (4), obtemos

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - sen\ x\ sen\ y,$$

$$sen(x + y) = sen\ x \cos y + sen\ y \cos x,$$

o que demonstra o teorema neste caso.

Teorema: (Fórmula De Moivre) Considerando que *n* seja um inteiro positivo, geometricamente, a formula abaixo significa que multiplicar o complexo unitário cos *x* + i sem *x* por si próprio *n* vezes equivale a dar-lhe *n* rotações sucessivas de ângulo *x*.

$$(\cos x + \ i\ sen\ x)^n = \cos(nx) + isen(nx).$$

Uma das utilidades da formula de De Moivre é permitir a determinação de cos *nx* e sem *nx* , sem o uso das fórmulas de adição. Outra utilidade da fórmula de De Moivre é a determinação de raízes de números complexos.

Proposição: (Lei do cosseno) Em um triangulo A, B e C qualquer, temos que

$$a^2 = \ b^2 + \ c^2 - 2bc\ .\cos \hat{A}$$

onde *a, b* e *c* são os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.

Proposição: (Função de Euler**)** Considerando o círculo como um subconjunto, $S^1 = \{z \in; |z| = 1\}$, do plano complexo, a aplicação $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, toma a forma $E(x) = \cos x + i$ sem x. Usando as fórmulas de adição (1) e (2), é fácil verificar que

$$\begin{aligned} E(x+y) &= \cos(x+y) + isen(x+y) \\ &= (\cos x + isen\ x)(\cos y + isen\ y) \\ &= E(x).E(y). \end{aligned}$$

Portanto, *E* é uma função complexa que se comporta como uma exponencial. Isto levou Euler (em homenagem a quem, indicamos a função acima por *E*) a propor a seguinte definição

$$e^{ix} = \cos x + isen\ x.$$

Na próxima seção abordaremos os conteúdos sobre derivadas e funções exponenciais e logarítmicas.

2 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

As derivadas das funções exponenciais e logarítmicas serão brevemente abordadas nesta seção a fim de explicitar as funções transcendentes e a analisar as suas respectivas derivadas, enfatizando sua diferenciação. Esta curta secção contou com o apoio didático de livros (GUIDORIZZI, 2001, HOFFMANN, 1990, MUNEM; FOULIS, 1978) que serviram de base para a elaboração destas anotações.

2.1 A derivada da função do logaritmo natural

A função logarítmica natural, é dada por ln, podendo ser descrita por esta integral. Vamos brevemente abordar uma assimilação do que seja a integral pois não se trata nesse tópico explicar sobre ela, mas como podemos associar um dos escopo de estudo nesse tópico que é o logarítmo natural a primitiva da integral, então, dizemos f(x) seja contínua em [a,b] e que a integral da f(x) representado por $\int f(x)$, é o cálculo da área abaixo de uma curva ou de uma função dada nesse intervalo [a,b] do eixo das ordenadas e fazendo a diferença das primitivas no ponto *b* e no ponta *a* encontramos essa área. A primitiva da função da integral abaixo é a ln x e se nós derivarmos a ln x em relação a x temos o integrando dessa integral.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{para } x > 0.$$

Evidentemente, o domínio da ln é o intervalo (0,*x*) e, para *x* > 1. Ln pode ser interpretado geometricamente com a área abaixo do gráfico de y = 1/t. t > 0, entre t = 1 e t = *x*, da definição temos:

$$\ln 1 = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = 0$$

também, para 0 < *x* < 1, ln é a área abaixo do gráfico de *y* = 1/t. t > 0, entre t = *x* e t = 1, porém com o sinal negativo. Em resumo, temos que ln *x* < 0 se 0 < *x* < 1. Ln *x* = 0 se *x* = 1 e ln *x* > 0 se *x* > 1.

Como ln *x* = $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ para *x* > 0, segue do teorema fundamental do cálculo que D_x ln *x* = 1/*x*. Em geral vale o seguinte teorema.

Teorema 1: (A derivada de ln *u*) Se *u* é uma função diferenciável de *x* e *u* > 0, então

$$D_x \ln u = \frac{1}{u}\, D_x\, u.$$

Solução: Já sabemos que por definição de ln e do teorema fundamental do cálculo que D_x ln *u* = $\frac{1}{u}$. Logo pela regra da cadeia,

$$D_x \ln u = \frac{1}{u}\, D_x\, u.$$

Teorema 2: (Derivadas de funções logarítmicas) Seja *u* uma função diferenciável de *x*, com *u* > 0 e suponhamos que *a* > 0 com $a \neq 1$. Então

$$D_x \log_a u = \frac{1}{u \log a} D_x u.$$

Solução: Como $\log_a u$ = ln *u*/ln *a*. Como $D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$, segue-se que

$$D_x \log_a u = \frac{D_x \ln u}{\ln a} = \frac{1}{u \ln a} D_x u.$$

Teorema 3: (A derivada da ln u(*x*) de funções deriváveis) Seja *u* uma função diferenciável de *x*, com *u* > 0 e também *a > 0 e* $a \neq 1$. Então

$$D_x [\ln h(x)] = \frac{D_x \, \mathrm{h(x)}}{h(x)}$$

2.2 A derivada da função exponencial

Teorema 1: A função exponencial é a sua própria derivada, isto é, $D_x e^x = e^x$.

Solução 1: Seja $y = e^x$, logo *x* = ln *y*. Diferenciando em ambos os lados esta última equação, em relação a *x*, obteremos

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right) D_x y,$$

isto é,

$$D_x y = y, \quad ou \;\; D_x e^x = e^x.$$

Combinando esse resultado com a regra da cadeia, veremos que, se *u* é uma função diferenciável de *x* então

$$D_x e^u = e^u D_x u$$

Teorema 2: (A derivada de b^x) Se *b* é uma constante positiva, então $D_x b^x = b^x \ln b$.

Solução:

$$D_x b^x = D_x e^{x \ln b} = e^{x \ln b} D_x (x \ln b) = b^x \ln b.$$

É claro que este resultado pode ser combinado com a regra da cadeia para obtermos a fórmula

$$D_x b^u = b^u \ln b \, D_x u.$$

Teorema 3: (a derivada de $e^{h(x)}$) se *h(x)* é derivável então temos que

$$D_x\left[e^{h(x)}\right] = [D_x h(x)]. e^{h(x)}.$$

Abordaremos, a seguir, o assunto sobre a integral definida.

3 INTEGRAL DEFINIDA

Na seção presente, no tópico sobre integrais definidas, conceituaremos de modo compacto e breve algumas de suas propriedades e aplicações num modelo técnico, sem se preocupar com soluções ou aplicações, com o intuito de servir de base para posterior aplicação dos fundamentos de integrais definidas, na principal aplicação que é o fenômeno fotopiroelétrico. As anotações e os fundamentos foram obtidos a partir de estudos e leituras nos livros didáticos (GUIDORIZZI, 2001, HOFFMANN, 1990, MUNEM; FOULIS, 1978).

Admitindo que conhecemos esta variação $f\,(x) = \frac{dF}{dx}$ de uma determinada grandeza *F* e que queremos calcular a quantidade da variação entre $x = a$ e $x = b$. Com isso, procuraríamos a primitiva de *F* e, depois, calcularíamos a variação de *F* entre $x = a$ e $x = b$. Assim, temos:

$$\mathrm{F(b)} - \mathrm{F}(a).$$

Este resultado chamamos de **integral definida** da função original *f*, que pode ser representando por

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

A integral definida de *f* de *a* até *b* é a diferença,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F}(a),$$

onde *F* é a primitiva de *f*. Isso nos diz que: a integral definida é a variação líquida da primitiva, entre $x = a$ e $x = b$, sendo os números *a* e *b* os limites de integração.

Definição: (Existência da integral de Riemann de uma função contínua) Praticamente toda função encontrada no trabalho prático científico é Riemann-integrável em qualquer intervalo fechado contido em seu domínio. Isto inclui não apenas todas as funções monótonas (crescente ou decrescente), mas também todas aquelas que são limitadas e "seccionalmente contínuas" ou "seccionalmente monótonas". As provas de Riemann-integrabilidade são desconsideradas aqui.

Teorema 1: (Integral de uma função constante) Seja *f* uma função constante definida pela equação $f\,(x) = K$, onde *K* é um número constante. Então

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b K\ dx\ = K(b - a).$$

Teorema 2: (Propriedade da homogeneidade) Se f é uma função Riemann-integrável no intervalo $[a,b]$ e K é um número constante, então Kf é também Riemann-integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b Kf(x)\ dx = K \int_a^b f(x)\ dx.$$

Teorema 3: (Propriedade aditiva) se f e g são funções Riemann-integráveis no intervalo $[a,b]$, então $f + g$ é também Riemann-integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [\, f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Teorema 4: (Comparação) Se f e g são funções Riemann-integráveis no intervalo $[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$ é válidos para rodos os valores de x no intervalo $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Teorema 5: (Propriedade do valor absoluto) Se f é Riemann-integrável no intervalo $[a,b]$, então o $|f|$ também o será e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

Teorema 6: (Aditividade com respeito ao intervalo de integração) Seja $a < b < c$ e suponhamos que a função f é Riemann-integrável no intervalo $[a,b]$ bem como no intervalo $[b,c]$. Então, f é também Riemann-integrável no intervalo $[a,c]$ e

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$

Teorema 7: (Teorema do valor médio para integrais) Suponhamos que f seja uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Então existe um número c em $[a,b]$ tal que

$$f(\mathrm{c}).(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Definição: (A integral definida $\int_a^b f(x)\, dx \quad para\ a \geq b$

i. Se f é uma função qualquer e a é um número no domínio de f, definiremos

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

ii. Se $a > b$ e f é Riemann-integrável em $[b,a]$, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Teorema 8: (Aditividade geral com respeito ao intervalo de integração) Suponhamos que a f seja Riemann-integrável num intervalo limitado I e sejam a, b e c três números em I. Então

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

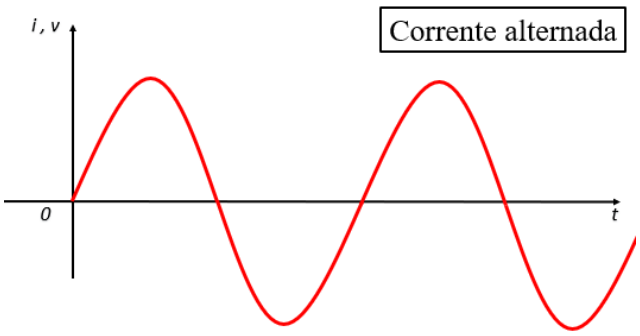
4 CORRENTE ALTERNADA

Apresentaremos nessa secção, uma abordagem aos fundamentos e propriedades da corrente alternada num circuito e alguns de seus componentes e fenômenos, explanando as aplicações matemáticas e fórmulas que ajudem a solucionar problemas e aplicar esse fenômenos físicos-matemáticos posteriormente no principal escopo do presente trabalho, sobre o efeito fotopiroelétrico. O conteúdo desta secção foi elaborado a partir dos estudos e leituras dos livros didáticos, técnicos e científicos (HALLIDAY; RESNICK, 2016, JOHNSON; NILBURN; JOHNSON, 1994, NUSSENZVEIG, 1997).

Corrente alternada é um tipo de corrente elétrica na qual o sentido em que as cargas elétricas fluem é invertido periodicamente, diferentemente daquilo que acontece com a corrente direta, em que os elétrons são conduzidos ao longo de um único sentido.

Esse tipo de corrente é obtido a partir da indução eletromagnética em geradores de corrente alternada, os quais são formados por uma espira condutora desenvolvida para rotacionar em alta velocidade quando inseridas entre ímãs muito fortes. A rotação da espira faz com que ocorra uma mudança no fluxo magnético através de sua área, que, por sua vez, induz uma formação de uma corrente elétrica de polaridade variável, cuja frequência relaciona-se com a velocidade em que ocorre a rotação da espira.

Figura 4 – gráfico senoidal da corrente alternada.



Fonte: autor.

4.1 Carga resistiva

Considere uma fonte de tensão alternada:

$$\xi = \xi_m \text{sen}(\omega_d t)$$

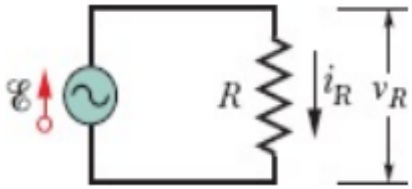
conectada em um resistor de resistência R com corrente i_R. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um resistor, a queda de tensão v_R é igual a fem (força eletromagnética) da fonte:

$$v_R = V_R \text{sen}(\omega_d t)$$

com $V_R = \xi_m$ representando a amplitude da tensão. O comportamento é dado pela lei de Ohm:

$$i_R = \frac{V_R}{R} \text{ sen}(\omega_d t) = I_R \text{sen}(\omega_d t).$$

Figura 5 – fonte de corrente alterada conectada a um resistor



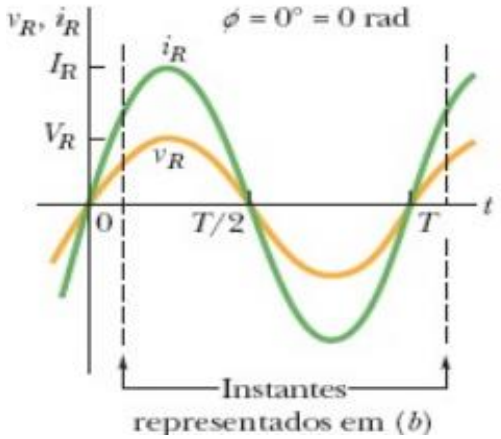
Fonte: Halliday e Resnick (2016).

Podemos representar a tensão e a corrente no formato gráfico (Figura 6) ou no diagrama de fasores (Figura 7). Os gráficos da tensão e corrente mostram que as curvas estão em fase, com os picos atingidos no mesmo instante.

O diagrama de fasores é formado por vetores dispostos na direção radial que rotacionam no sentido horário do plano cartesiano com o eixo de rotação na origem do sistema de coordenadas. Cada vetor representa a amplitude de uma grandeza que está sendo medida. A frequência de rotação é a frequência de oscilação da fonte do circuito. A projeção dos vetores no eixo das ordenadas representa o valor instantâneo da grandeza.

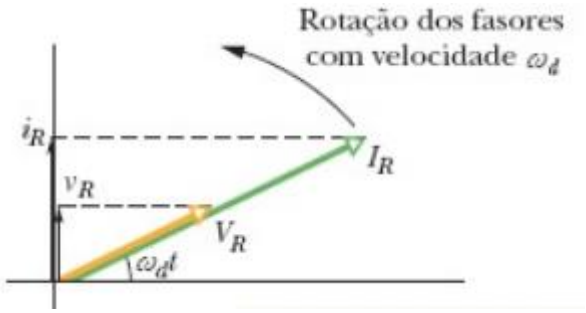
O diagrama (Figura 7) mostra que os fasores de corrente e tensão do circuito com carga resistiva estão em fase, *i.e.,* estão sobrepostos, indicando que atingem os pontos de máximo e mínimo no mesmo instante, conforme vimos na análise anterior. Porém, conforme veremos, existem casos em que os fasores não estão em fase.

Figura 6 – tensão e corrente no gráfico senoidal



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Figura 7 – Fasores da corrente e tensão.



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

4.2 Carga capacitiva

Considere agora que a mesma fonte de tensão alternada (Figura 8) está conectada em um capacitor de capacitância *C* com corrente i_C. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um capacitor, a queda de tensão v_C é igual a fem da fonte:

$$v_C = V_C \operatorname{sen}(\omega_d t)$$

em que V_C é a amplitude de tensão. A carga e a corrente no capacitor são dadas por:

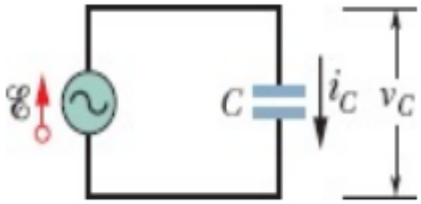
$$q_C = C v_C = C V_C \operatorname{sen}(\omega_d t)$$

$$i_C = \frac{dq_c}{dt} = \omega_d C V_C \cos(\omega_d t) = \omega_d C V_C \operatorname{sen}(\omega_d t + 90°)$$

onde o termo $1/\omega_d C$ é chamado de reatância capacitiva X_C (dada em Ohms no SI):

$$i_C = \frac{V_c}{X_C} \operatorname{sen}(\omega_d t + 90°) = I_C \operatorname{sen}(\omega_d t + 90°) \text{ com } V_c = X_C I_C$$

Figura 8 - Fonte de tensão conectada a um capacitor.



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

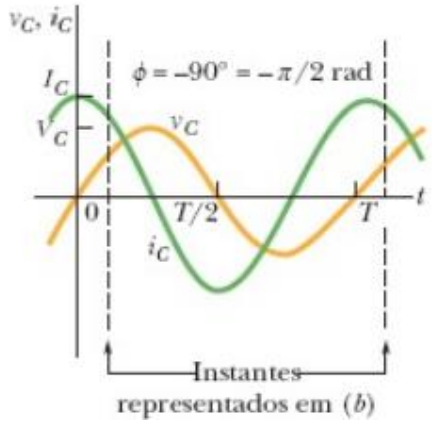
4.2.1 Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{1}{C\omega_d}$$

Mede uma resistência variável do circuito. O aumento da capacitância *C* faz com que mais cargas sejam acumuladas nas placas para uma mesma frequência; logo, a corrente i_C aumenta. O aumento da frequência $\omega_d$também aumenta a corrente i_C devido o carregamento do capacitor num período menor.

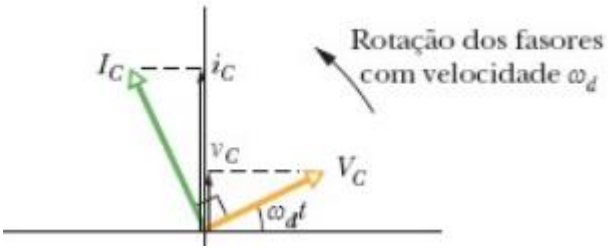
O diagrama de fasores (Figura 10) mostra que a amplitude de corrente está 90° na frente da amplitude de tensão

Figura 9 - Gráfico da corrente em relação a diferença de potencial



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Figura 10 – Rotação dos fasores da amplitude de corrente e tensão



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

$$q = \int i dt = \int \frac{V_c}{X_C} \cos(\omega_d t)\, dt = C\omega_d V_C \int_{t_0}^{t} \cos(\omega_d t)\ dt = CV_C sen(\omega_d t)|_{t_0}^{t}$$

$$q = CV_C sen(\omega_d t)|_0^{\frac{T}{4}} = CV_C = (1)(1) = 1C \rightarrow$$

Carga acumulada no capacitor após ¼ de período de oscilação da fonte

Amplitude da carga no capacitor não depende da frequência da fonte; logo, é a mesma carga total para diferentes frequências. Isso mostra que o capacitor é carregado mais lentamente para frequências menores, implicando na redução da corrente elétrica e aumento da reatância capacitiva.

4.3 Carga indutiva

Considere agora que a mesma fonte de tensão alternada (Figura 11) está conectada em um indutor de indutância L com corrente i_L. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um indutor, a queda de tensão v_L é igual a fem da fonte:

$$v_L = V_L \text{sen}(\omega_d t)$$

$$v_L = V_L \text{sen}(\omega_d t)$$

em que V_L é a amplitude de tensão. A corrente no indutor é dada por:

$$v_L = L\frac{di_l}{dt} = V_L \text{sen}(\omega_d t) \quad \therefore \quad i_L = \frac{V_l}{L}\int \text{sen}(\omega_d t)$$

$$i_L = -\frac{V_l}{\omega_d L}\cos(\omega_d t) = \frac{V_l}{\omega_d L}\text{sen}(\omega_d t - 90°)$$

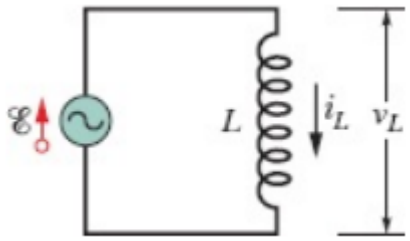
$$i_L = -\frac{V_l}{\omega_d L}\cos(\omega_d t) = \frac{V_l}{\omega_d L}\text{sen}(\omega_d t - 90°) \quad \rightarrow$$

A corrente está 90° atrás da tensão

onde o termo $\omega_d L$ é chamado de reatância indutiva X_L (Dada em ohms no SI):

$$i_L = -\frac{V_l}{X_l}\cos(\omega_d t) = -I_L \cos(\omega_d t) \quad \text{com} \quad V_L = X_L I_L$$

Figura 11 – Fonte de tensão alternada conectada a um indutor



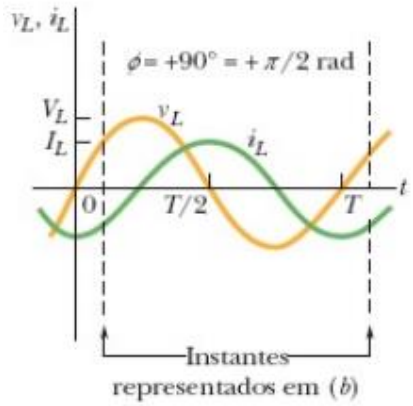
Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

4.3.1 A reatância indutiva

$$X_L = \omega_d L$$

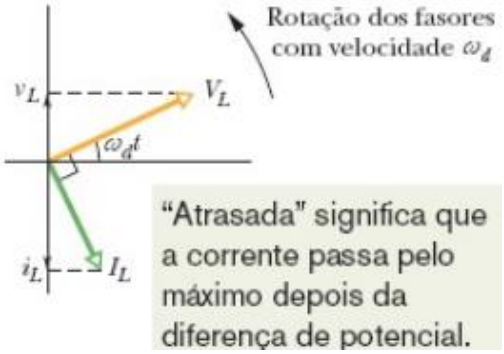
mede uma resistência variável do circuito. O aumento da indutância L e da frequência ω_d provocam a redução da corrente i_L devido o aumento da fem induzida. O diagrama de fasores (Figura 13) mostra que a amplitude de corrente está 90° atrás da amplitude de tensão.

Figura 12 – Gráfico comparativo da corrente e tensão



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Figura 13 – Gráfico da rotação dos fasores corrente e diferença de potencial

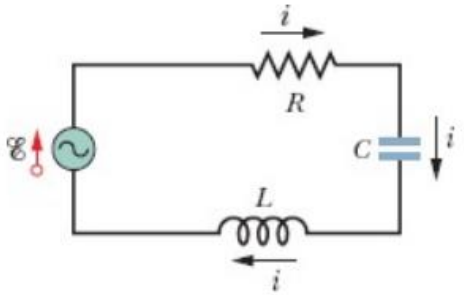


Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

4.4 Circuito RLC em série e constante de fase

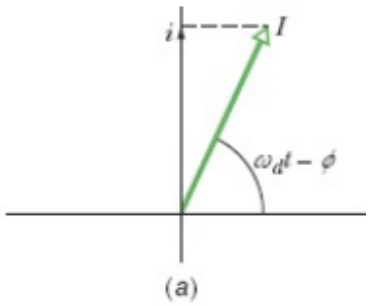
Para acompanhar os estudos acerca do circuito RLC em série (Figura 14), vamos utilizar o diagrama de fasores. A corrente no circuito é a mesma para todos os componentes. Assim, representamos o fasor da corrente como *I*. O fasor da resistência está em fase com a corrente, enquanto o fasor do capacitor está 90° atrás e o fasor do indutor está 90° a frente.

Figura 14 – Fonte de tensão conectada a um resistor, um capacitor e a um indutor.



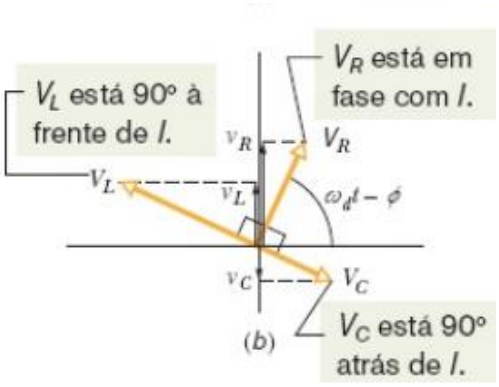
Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Figura 15 - Fasor que representa a corrente alternada



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Figura 16- Fasores de tensão do indutor, resistor e capacitor.



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

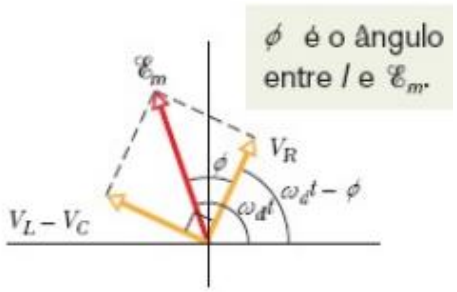
O diagrama de fasores obedece a soma vetorial; logo, podemos realizar a subtração V_L - V_C e somar, em seguida, com o fasor por meio da equação de Pitágoras para calcular a amplitude da fonte de tensão:

$$\xi_m{}^2 = V_R{}^2 + (V_L - V_C)^2 \qquad (1)$$

Com o diagrama de fasores, também é possível calcular na constante de fase do circuito que mostra se ele é mais capacitivo ou indutivo:

$$tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (2)$$

Figura 17 – Fasor força eletromotriz dos três fasores de tensão.



Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

Com a definição de reatância, podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

$$\xi_m{}^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 = I^2\left[R^2 + (\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C})^2\right]$$

onde,

$$I = \frac{\xi_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C})^2}} \quad (3)$$

As equações (2) e (3) mostram que:

i. o circuito é mais capacitivo para $\omega_d < \omega$;

$$X_L < X_C \therefore \tan\phi < 0$$

ii. o circuito é mais indutivo para $\omega_d > \omega$;

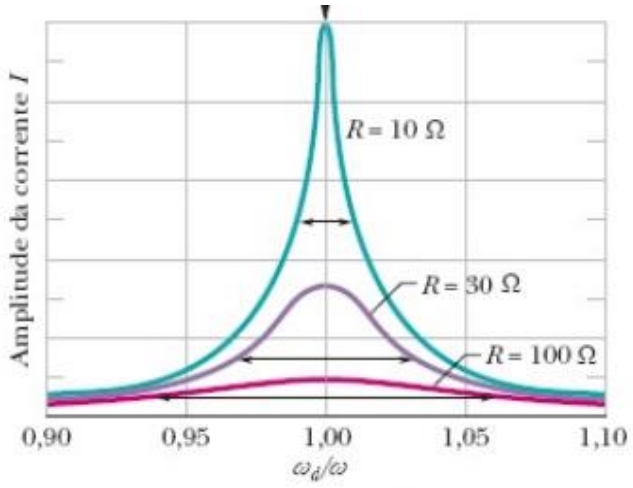
$$X_L > X_C \therefore \tan\phi > 0$$

iii. o circuito entra em ressonância para $\omega_d = \omega$;

$$X_L = X_C \therefore \tan\phi = 0$$

$$\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C} = 0 \therefore \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \text{(Frequência de ressonância)}$$

Figura 18 – Curvas de ressonância do circuito RLC



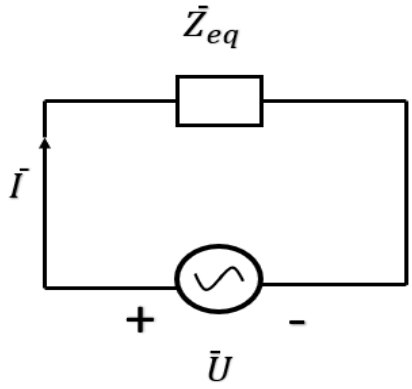
Fonte: baseado no Halliday e Resnick (2016).

4.5 Impedância complexa

Impedância pode ser interpretado como um elemento do circuito que aparece quando tensão e corrente estão envolvidas e os fenômenos resistivos, indutivos e capacitivos estão presentes nesse circuito. A impedância tem como uma de suas propriedades reunir os

efeitos resistivos, indutivos e capacitivos de forma atrelada numa só. As aplicações e efeitos de impedância só são úteis quando se trata de circuitos com tensão alternada ou senoidal.

Figura 19 – Circuito com uma impedância representado por um retângulo.



Fonte: autor.

O valor da impedância é dado por:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}},$$

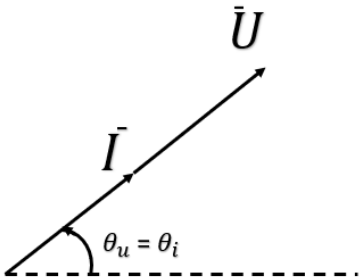
onde $\bar{U}$ é o fasor de tensão dos terminais da impedância e $\bar{I}$ é o fasor da corrente do circuito que atravessa a impedância, logo o valor da impedância é complexo que podem ser apresentados tanto na forma polar como na forma retangular.

Quando apresentamos a impedância na forma polar, tem-se três possibilidades para o valor do ângulo de impedância, são eles:

- **Impedância puramente resistiva**

  Onde a impedância é unicamente resistiva, ou seja, $\bar{Z} = R$, o diagrama fasorial mostrará que a tensão e a corrente que atravessa a os terminais da impedância estarão em fase.

Figura 20 – Fasores tensão e corrente em fase.

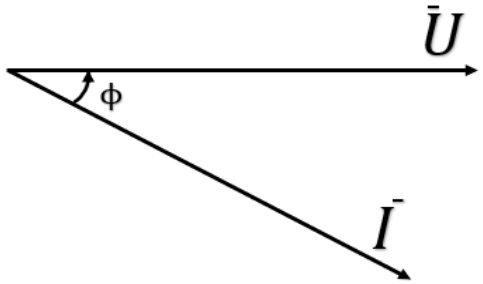


Fonte: autor.

- **Impedância indutiva**

Onde os fenômenos de maiores efeitos são os resistivos e indutivos, logo a corrente está atrasada em relação a tensão. Notamos que quando o comportamento é unicamente indutivo, o ângulo de atraso da corrente é de 90º, já no caso de o efeito ser resistivo e indutivo o ângulo é menor que 90º e maior que 0º.

Figura 21 – Fasor corrente atrasado em relação ao fasor tensão.

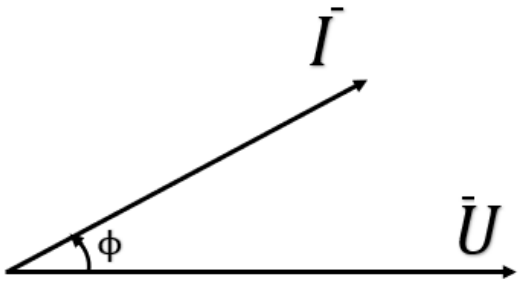


Fonte: autor

- **Impedância capacitiva**

Onde os fenômenos de maiores efeitos resistivo e capacitivo, com isso o fasor corrente estará adiantado em relação a tensão. Quando o efeito é unicamente capacitivo a corrente estará adiantada em 90º, mas quando estão em conjunto os efeitos resistivos e capacitivos, a corrente estará adiantada a um valor maior 0º e menor que 90º do fasor tensão.

Figura 22 – Fasor corrente adiantado em relação ao fasor tensão



Fonte: autor

4.5.1 Representação matemática da impedância em circuitos

É comum encontrar em circuitos a associação de resistências e capacitâncias ou indutâncias. Quando essas associações apresentam apenas resistências e reatâncias capacitivas, dizemos que a impedância total é capacitiva. Se essas associações apresentam somente

resistência e reatâncias indutivas, dizemos que a impedância total é indutiva. Logo com a expressão abaixo podemos descrever a impedância matematicamente

$$\bar{Z} = R \pm jX_L$$

onde j(em matemática é denominada por i) é a unidade imaginária complexa, R é a resistência X_L é a reatância indutiva e o símbolo $\pm$ é utilizado acima para enfatizar que a impedância pode ter efeito tanto indutivo(+) quanto pode ter efeito capacitivo(-)

5 APLICAÇÃO DA FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA DETECÇÃO FOTOPIROELÉTRICA

A presente seção conta com a última parte do trabalho, iremos tratar sobre a utilização de todos os artifícios matemáticos e físicos já apresentados nos capítulos que antecederam este, no qual vamos reunir e associar todos esses elementos, afim de montar um modelo que expresse a deteção fotopiroelétrica uma aplicação física. Os conteúdos expresso nesse capítulo foram retirados de notas adquiridas das pesquisas feita em bibliografia específica do assunto (HOLEMAN, 1972).

5.1 O efeito piroelétrico

Podemos considerar que um material seja piroelétrico – turmalina é um material com propriedades piroelétricas quando aquecida atrai cinzas de palhas – quando produz corrente elétrica ao ser incidido por uma fonte de calor. Compreendemos que o efeito piroelétrico acontece quando a polarização em um material é diretamente proporcional a variação da temperatura neste material, conforme a expressão

$$\Delta P \text{ α } \Delta T.$$

Cada material piroelétrico tem uma constante de proporcionalidade característica, conhecido como coeficiente piroelétrico, representado pela letra *p*, levando a expressão anterior ficar desta forma

$$\Delta P = p\Delta T$$

A unidade de polarização elétrica é descrita pelo Coulomb (unidade de carga elétrica) por metro quadrado (unidade de área), portanto a polarização pode ser definida como uma quantidade de carga Δq por unidade de área A, isto é

$$\frac{\Delta q}{A} = p\Delta T$$

Se associarmos esta expressão com o coeficiente piroelétrico em função de x, temos

$$\Delta q = p(x)A\Delta T(x)$$

que é correspondente a variação de carga elétrica na superfície do piroelétrico.

É interessante ressaltar que a variação de carga elétrica causada pela variação de temperatura decorrente da propagação da onda térmica de fato acontece no piroelétrico não

apenas em sua superfície, mas também em sua profundidade. No entanto, torna-se muito difícil analisar a propagação da onda térmica tridimensionalmente, ou seja, em superfície e profundidade. Para simplificar essa interpretação, devemos considerar um sistema unidimensional em que um feixe de onda eletromagnética atinge e aquece a superfície A (coordenadas *y* e *z*) de um piroelétrico de espessura *L* (coordenada *x*). Para que a condição unidimensional seja satisfeita, a largura do feixe incidente deve ser muito maior que a espessura do piroelétrico. Sendo a espessura total do piroelétrico igual a *L*, então a profundidade alcançada pela onda térmica pode ser variada de um Δx, estendendo-se de 0 a *L*. Logo,

$$\Delta q = p(x)A\Delta T(x)\frac{\Delta x}{L}$$

Neste caso, torna-se claro perceber que a variação de temperatura no piroelétrico também depende da profundidade de penetração da onda térmica, ou seja, ΔT torna-se uma função de *x* (consequentemente, *p* também dependerá de *x*).

Para uma variação infinitesimal suficiente para que o coeficiente *p* seja uma constante e utilizando o recurso da integral, podemos reescrever a expressão como

$$q = pA\frac{1}{L}\int_{x=0}^{x=L} \Delta T\,(x)dx$$

em que a definição do valor médio da variação de temperatura ao longo da profundidade do piroelétrico é

$$\bar{T} \equiv \frac{1}{L}\int_{x=0}^{x=L} \Delta T(x)dx$$

Assim, podemos escrever a expressão como

$$q = p\Delta\bar{T}$$

Até aqui, tratamos de um material piroelétrico que sofre polarização em suas moléculas quando é submetido à presença de uma variação de temperatura ΔT causada por uma onda térmica incidente e que este material de espessura *L* possui uma temperatura média ao longo de sua profundidade. Agora consideramos que esta onda térmica que incide no material piroelétrico seja modulada, ou seja, o feixe incidente depende de uma frequência angular ω. Dessa maneira, a variação de temperatura pode ser reescrita como:

$$\Delta T(x) = T(\omega, x)[\cos\omega t + j\sin\omega t] = T(\omega, x)e^{j\omega t}$$

e o valor médio da variação de temperatura ao longo da espessura do piroelétrico também dependerá de uma onda senoidalmente modulada, tornando-se

$$\bar{T} = T_m(\omega)e^{j\omega t},$$

e voltando à expressão da carga elétrica no piroelétrico em função da frequência angular, temos

$$q = pAT_m(\omega)e^{j\omega t}$$

onde $T_m(\omega)$ é a temperatura média em função da frequência angular ω [Holeman, 1972]. Podemos fazer uma manipulação matemática para encontrar a definição da temperatura média em função da frequência angular. Portanto, substituindo as devidas expressões

$$T_m(\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{x=L} T(\omega, x)e^{j\omega t}dx$$

em que a interpretação torna-se plausível ao se considerar a temperatura média do piroelétrico em função da frequência angular.

5.2 A interpretação da eletrônica de detecção

A corrente elétrica *i* gerada pelo efeito piroelétrico poderá ser encontrada ao se derivar em função do tempo a equação da carga elétrica *q*,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[pAT_m(\omega)e^{j\omega t}\right]$$

$$i = j\omega pAT_m(\omega)e^{j\omega t}$$

O piroelétrico é metalizado em ambas as faces para o contato elétrico e facilitar o deslocamento de cargas elétricas na superfície, comportando-se como um capacitor plano de placas paralelas, em que a espessura *L* do piroelétrico é a distância entre as placas do capacitor. Substituindo na expressão anterior a definição de um capacitor plano paralelo, a equação da corrente elétrica gerada no sensor piroelétrico poderá ser reescrita como:

$$i = j\omega p\frac{CL}{k\varepsilon_0}T_m(\omega)e^{j\omega t}$$

Ressaltamos que a corrente elétrica total gerada pelo piroelétrico de fato percorre um circuito elétrico formado por dois ramos, sendo este circuito conhecido como RC paralelo em um circuito de corrente alternada, onde R é a resistência e C representa a capacitância. Pelas leis das malhas, temos que a corrente total que circula no circuito é a somo das correntes nos ramos do mesmo, ou seja, é a soma da corrente elétrica no ramo resistivo mais a corrente que passa no ramo capacitivo,

$$i = i_R + i_C.$$

Dividindo a equação da lei das malhas das correntes pela voltagem

$$\frac{i}{V} = \frac{i_R}{V} + \frac{i_C}{V}$$

e aplicando a lei de Ohm para a corrente alternada, obtemos a expressão do inverso da impedância elétrica para um circuito RC paralelo, representada pela soma dos inversos da resistência e da reatância capacitiva X_C:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C}.$$

A reatância capacitiva X_C é definida como o inverso de ωC, em que ω é a frequência angular e C a capacitância existente no circuito. No entanto, este termo corresponde à parte imaginária da impedância complexa. Logo, a reatância na forma complexa é escrita como $X_C = 1/j\omega C$, ou seja,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{R},$$

que podemos reescrever como

$$Z = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Pela lei de Ohm da corrente alternada, a voltagem fotopiroelétrica complexa em função da frequência angular é o produto entre a corrente elétrica e a impedância,

$$V(\omega) = iZ,$$

E substituindo os termos para *i* e *Z*, obtemos a expressão

$$V(\omega) = \left(j\omega p \frac{CL}{k\varepsilon_0} T_m(\omega) e^{j\omega t}\right)\left(\frac{R}{1 + j\omega RC}\right),$$

que pode ser reescrita como

$$V(\omega) = \frac{j\omega RCpLT_m(\omega)e^{j\omega t}}{k\varepsilon_0(1 + j\omega RC)}.$$

Definimos RC como a constante de tempo τ, então, temos:

$$V(\omega) = \frac{j\omega\tau pLT_m(\omega)e^{j\omega t}}{k\varepsilon_0(1 + j\omega\tau)}.$$

Assume-se que o piroelétrico funciona no modo calorimétrico, que pode operar em duas maneiras de detecção: modo de detecção de corrente e modo de detecção de voltagem. No modo de detecção de corrente o termo ωτ é muito menor que um, enquanto no modo de detecção de voltagem, ωτ torna-se muito maior que um. Consideramos que o piroelétrico funcione no modo de detecção de voltagem. Portanto,

$$V(\omega) = \frac{pLT_m(\omega)e^{j\omega t}}{k\varepsilon_0},$$

que é a expressão da voltagem fotopiroelétrica complexa em função da frequência angular (ou frequência de modulação).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como o intuito do presente trabalho era apresentar conceitualmente de modo ordenado partes sequenciais de tópicos matemáticos e físicos, para posteriormente serem associados em conjunto e expressar um fenômeno de aplicação física, chamado de deteção fotopiroelétrica, tal objetivo fora alcançado, pois com o desenvolver do mesmo, adquirimos fundamentação base suficiente para acompanhar a modelagem da descrição matemática da aplicação, apresentando desde os conceitos mais simples até os mais abstratos que foram usados para a modelagem.

Com a abordagem feita nos complexos, facilitamos o entendimento de suas principais propriedades, o modo em os operamos, destacando sua forma gráfica, pois podemos facilmente associar com os fasores da representação física, e também fora muito útil na assimilação e utilidade na montagem da descrição matemática da aplicação. As derivadas de funções transcendentes, devido sua propriedade de conceder valores de variação, foram adicionadas, pois sua utilidade fora muito importante e seu uso é constante quando se trata de movimentos.

Por conta de sua característica em calcular áreas, fluxos, movimentos, taxas de variação entre outras utilidades, a abordagem dos conceitos de integral definidas, foram salientadas nesse trabalho, pois suas propriedades se estendem a inúmeras aplicações em vários campos, e o principal, serviu para ajudar a compor e facilitar na modelagem da aplicação. Apesar de ter sido uma abordagem pouco exploratória em relação as demonstrações das soluções no tópico de integrais, o objetivo fora alcançado.

No quarto capítulo, sobre a corrente alternada, os conteúdos que foram apresentados, foram suficientes para dar base de entendimento e associação para construir a modelagem da aplicação fotopiroelétrica, com a ajuda dos capítulos anteriores , a manipulação para se obter a parte final da aplicação se tornou mais evidente pois com ajuda de vários artifícios matemáticos e físicos embasados nos capítulos anteriores se tornou muito mais conciso explicitar e alcançar a base pra dar forma modelada da aplicação fotopiroelétrica.

No quinto capítulo, damos uma ideia do efeito piroelétrico mostrando sua forma matemática, desenvolvemos algumas mudanças de variáveis pra chegar em fórmulas precisas associadas ao coeficiente piroelétrico e abordagens a outros conceitos. Também empregamos a ideia da interpretação eletrônica da detenção fotopiroelétrica.

REFERÊNCIAS

CESAR, Augusto; PERDIGÃO, Manfredo; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria números complexos.** Rio de janeiro: editora L.A.G. 1992

DE OLIVEIRA, Ana Maria. **Manual de matemática.** São Paulo: DCL. 2007

GUIDORIZZI, Hamilton Luis. **Um curso de cálculo 1.** Rio de Janeiro: 5º edição. LTC. 2001.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de física 3:** Eletromagnetismo. Rio de Janeiro: LTC. 10º edição. 2016

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo 1:** Um curso moderno e suas aplicações. Rio de janeiro: LTC. 1990

HOLEMAN, B. R. Sinusoidally modulated heat flow and the pyroelectric effect. **Infrared Physics**, 12(2), pp. 125-135, 1972

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar:** Complexos polinômios equações. São Paulo: ATUAL ADITORA. 1977

JOHNSON, David E.; HILBURN, John L.; JOHNSON, Johny R. **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos.** Rio de janeiro: PHB. 1994

MUNEM, Mustafa; FOULIS, David. **Cálculo com Geometria Analítica.** New York: Worth Publishers, Inc. 1978

NETO, Aref Antar; SAMPAIO, Jose L. Pereira; LAPA Nilton; CAVALHANTE, Sidney Luiz. **Números complexos, polinômios e equações algébricas.** São Paulo: Editora. MODERNA. 1982

NUSSENZVEIG, Herch M. **Curso de física básica 3:** Eletromagnetismo. São Paulo: Edgard Blucher. 1997