



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**PROJETO E ANÁLISE DO FLUXO DE UM TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE
HORIZONTAL.**

ARTHUR DOS REIS LEMOS FONTANA

**TUCURUÍ
2018**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**PROJETO E ANÁLISE DO FLUXO DE UM TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE
HORIZONTAL.**

ARTHUR DOS REIS LEMOS FONTANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica, do Campus Universitário de Tucuruí, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador:
Profº Dr.º André Luiz Amarantes Mesquita

**TUCURUÍ
2018**

F679p Fontana, Arthur dos Reis Lemos.

PROJETO E ANÁLISE DO FLUXO DE UM TÚNEL DE ÁGUA HORIZONTAL DE BAIXA VELOCIDADE / Arthur dos Reis Lemos Fontana, . — 2019.
90 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Universitário de Tucuruí, Universidade Federal do Pará, Tucuruí, 2019.

1. Túnel de água. 2. Projeto. 3. CFD. I. Título.

CDD 620.1064

ARTHUR DOS REIS LEMOS FONTANA

**PROJETO E ANÁLISE DO FLUXO DE UM TÚNEL DE ÁGUA HORIZONTAL DE
BAIXA VELOCIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia **Mecânica**, do Campus Universitário de Tucuruí, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia **Mecânica**.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Luiz Amarante Mesquita
NDAE/UFPA

Prof. Me. Maciel da Costa Furtado
FEM/CAMTUC/UFPA

Prof. Me. Jessé Luís Padilha
FEM/CAMTUC/UFPA

Conceito: _____

Tucuruí, _____ de _____ de 2019

A minha mãe Wânia dos Reis Lemos Fontana e ao Meu Pai João Eduardo Fontana, pelo imenso apoio que me deram ao longo de toda essa caminhada. Vocês sempre estiveram ao meu lado em todas as etapas da minha vida e sem vocês, muito provavelmente não estaria onde estou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, João Eduardo Fontana e Wânia dos Reis Lemos Fontana e ao meu Irmão, João dos Reis Lemos Fontana. Juntos sempre conseguimos desenrolar qualquer coisa e sem vocês, nada disso seria possível. Amo vocês.

A Universidade Federal do Pará e a todos os colaboradores do Campus de Tucuruí, pela oportunidade de ter me graduado em Engenharia Mecânica.

A cidade de Tucuruí, levarei essa cidade em meu coração independente da cidade que irei daqui pra frente.

Aos professores da faculdade de engenharia mecânica, em especial Jessé Padilha, Maciel Furtado, Adry Lima, Alisson Lima, Paulo Machado, Ezequiel Belo, Bruno Wallace, Ronaldo Raposo, Walter Santos, Douglas Garcias, Leopoldo Bastos, Wassin Raja e André Mesquita por me ensinarem tudo o que sei sobre engenharia.

Ao Professor André Mesquita pela orientação nesse trabalho bem como em vários outros que realizei durante o meu tempo de graduação como bolsista. Uma ótima pessoa e um ótimo engenheiro, espero poder encontrar mais vezes pela vida.

Ao Professor Luis Paulo Machado da faculdade de engenharia Elétrica por ter me iniciado na carreira de iniciação científica, pela paciência e por colocar meus pés no chão sempre que precisei.

Aos meus colegas da turma de 2014 pela paciência e tolerância que tiveram uns com os outros para que terminássemos o curso como uma turma unida.

A minha amiga Isabella Farias pela amizade que se estendeu desde antes da graduação até hoje, com certeza é uma pessoa que eu tenho um carinho especial.

Ao meu amigo Thomé Rocha pela amizade que tivemos durante a graduação, espero que perdure por muito tempo ainda, vamos assar aquela picanha sempre que puder (agora sem miséria de querer economizar).

Ao meu amigo Rodrigo Santos, que só tem cara de bravo mesmo, mas é uma pessoa muito gente fina, espero que consiga concretizar tudo o que planeja para a sua vida.

A minha amiga Victória, machado por me apoiar durante alguns períodos turbulentos que passei na faculdade. Com certeza, vai ser uma arquiteta brilhante no futuro e que o rumo de sua vida seja aquilo que você planeja, sucesso.

Aos meus amigos Vinícius Leal e Marx Araújo, que estão desde antes da faculdade sempre presentes. Levarei a amizade de vocês para sempre.

Aos meus parceiros de empreitada, Ronaldo Menezes, Rodolfo Vitorino, Artur Cunha e Emanuel Laurentino, que se tornaram amigos onde espero levar para a vida toda. Sempre que possível, o encontro da galera do lab turbo tem que acontecer.

Aos meus novos parceiros de empreitada, Pedro Macias, Danilo Santos, Gabriel Guedes, Elivelton André, Alex Cunha, Ítalo José, Jefferson, Maicon Castro e João Ramalho, excelentes pessoas e excelentes amigos, tomaremos uma gelada sempre que possível.

Aos meus irmãos de Maçonaria por serem uma verdadeira família pra mim aqui em Tucuruí bem como em qualquer lugar desse planeta.

Aos Meus Irmãos/Sobrinhos da Ordem Demolay por me proporcionarem experiências de vida incríveis, em especial ao capítulo Lealdade e Justiça nº 779 pela compreensão que tiveram comigo quando me mostrei ausente algumas vezes.

A pizzeria da tia Keila e ao restaurante da Janete por me dar um suporte necessário para que eu possa trabalhar em tempo integral sempre que preciso.

“Se vi mais longe, foi por me erguer sobre os ombros de gigantes. ”

(Isaac Newton)

RESUMO

O projeto das lanchas escolares desenvolvido pelo centro Colaborador de Apoio ao Transporte escolar e financiado pelo Governo Federal ficou responsável pelo projeto e produção de embarcações que servem para garantir o acesso das crianças ribeirinhas as escolas. Um projeto grandioso como esse requer avanços nos estudos experimentais dos cascos das embarcações. Um túnel de água circulante é uma instalação perfeita para diversos tipos de experimentos envolvendo cascos de embarcações, ensaios de propulsores etc. Assim, para dar suporte nas atividades acadêmicas bem como dar amparo as pesquisas que precisam de realizar experimentos com fluxo de água contínuo e uniforme, foi projetado um túnel de água circulante que se localizará no galpão do NDAE, que se localiza no campus universitário de Tucuruí. Além disso, realizou-se a análise dinâmica do fluxo via CFD afim de minimizar as variações de velocidade e encontrar o melhor projeto para aletas direcionadoras, deixando a qualidade do fluxo ainda melhor.

Palavra-chave: Túnel de água circulante, Projeto, CFD, Método VOF, Aletas Direcionadoras

ABSTRACT

The school boat project developed by the Collaborating Center for School Transport Support and financed by the federal government was responsible for the design and production of boats that serve to guarantee the access of the riverside children to the schools. A grandiose project like this requires advances in the experimental studies of vessels' hooves. A circulating water tunnel is a perfect installation for various types of experiments involving boat hulls, propeller tests etc. Thus, to support academic activities as well as support research that needs to conduct experiments with continuous and uniform water flow, a circulating water tunnel was designed to be located in the NDAE shed, which is located on the university campus of Tucuruí . In addition, dynamic flow analysis via CFD was performed in order to minimize speed variations and to find the best design for directing fins, leaving the flow quality even better.

Keyword: Circulating Water Tunnel, Design, CFD, VOF Method, Turning Vanes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura 1: Canal do Panamá.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 2: Diferenças do escoamento para diferentes números de froude.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 3: túnel de água circulante de pramdtl.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 4: Túnel de água vertical da marinha dos Estados Unidos.</i>	<i>25</i>
<i>Figura 5: Túnel de água horizontal da Universidade de Osaka.</i>	<i>25</i>
<i>Figura 6: comprimento mínimo pela razão de contração para que não haja separação.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 7: Modelos de perfis de contração de Börger e Morel.</i>	<i>28</i>
<i>Figura 8: Comparação entre os diversos perfis de contração.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 9: Esquemas das seções transversais das colmeias: a) HCS; b) HCC; c) HCH.</i>	<i>31</i>
<i>Figura 9: Medida do ângulo do difusor (2θ)</i>	<i>33</i>
<i>Figura 10: Razão de área $\times$ ângulo do difusor.....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 11: Efeito do escoamento em diferentes tipos de curva. (a) curva normal (b) curva expandida (c) curvas contraídas.....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 12: Aletas direcionadores dentro de uma curva.</i>	<i>38</i>
<i>Figura 3: Volume de controle em coordenadas retangulares.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 13: Distância Y normal a face da parede.</i>	<i>51</i>
<i>Figura 14: Linha que indica interface entre duas fases distintas e a fração de cada fase para cada célula. ...</i>	<i>55</i>
<i>Figura 15: Fração de volume mostrado por gradiente de cor ($0 \leq \chi \leq 1$).....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 16: Balanço de massa em um volume finito.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 17: Diferença entre malha estruturada (esquerda) e malha não-estruturada (direita).....</i>	<i>59</i>
<i>Figura 18: Quadrados e triângulos equiláteros e assimétricos.....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 19: Caso estudado por McSherry et al. (2017)</i>	<i>63</i>
<i>Figura 20: contorno da velocidade do fluxo para: (a) Simulação de McSherry et al. (2017); (b) Simulação do autor.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 21: Túnel de vento de Brusca et al. (2011).</i>	<i>65</i>
<i>Figura 22: Perfil de contração.....</i>	<i>67</i>
<i>Fonte: Autoria própria.</i>	<i>67</i>
<i>Figura 23: Desenho esquemático do túnel de água circulante.....</i>	<i>71</i>
<i>Fonte: Autoria própria</i>	<i>71</i>
<i>Figura 24: Domínio discreto pelo método dos volumes finitos.</i>	<i>72</i>
<i>Figura 25: Condição de refinamento próximo a paredes.</i>	<i>72</i>
<i>Figura 26: Domínio discreto pelo método de elementos finitos para outro modelo de túnel de água.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 27: Condições de contorno para a simulação</i>	<i>74</i>
<i>Figura 28: Velocidade do escoamento do túnel de água em coordenadas de linha de corrente: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior.....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 29: Comparação da velocidade do escoamento na seção de testes em coordenadas de linha de corrente: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior</i>	<i>76</i>
<i>Figura 30: Comparação do perfil de velocidade do escoamento no difusor: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior.</i>	<i>77</i>
<i>Figura 31: Comparação do perfil de velocidade na seção de testes para as distâncias de 0 m, 2 m, 4m e 9 m: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior.....</i>	<i>78</i>

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CECATE	Centro Colaborador de Apoio ao Transporte Escolar
NDAE	Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia
UEA	Unidade Acadêmica Especializada
UFPA	Universidade Federal do Pará
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
ANSYS	Empresa de <i>software</i> de simulação numérica
CFX	Compilador de código de CFD
CAD	<i>Computer-aided design</i>
HCH	Colmeia hexagonal quadrada
HCC	Colmeias circulares
HCS	Colmeias retangulares
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
RANS	Reynold Average Navier Stokes
URANS	<i>Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
BSL	Baseline
SST	Shear Stress Transport
VOF	Volume of Fluid

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
Re	Número de Reynolds
V_m	Velocidade média
μ	Viscosidade dinâmica
R_h	Raio Hidráulico
A_c	Área da seção transversal de um canal aberto
Fr	Número de Froude
g	Aceleração da gravidade
Y	Medida de altura ou profundidade
P_m	Perímetro molhado
L	Medida para comprimento
H_1 ou H_i	Altura do perfil da seção de entrada da contração
H_2	Altura do perfil da seção na saída da contração
X'	Razão entre uma parcela do comprimento e o comprimento total
K_c	Coefficiente de perda de carga em uma contração
L_c	Comprimento da contração
f_m	Fator de atrito médio
$D_{entrada}$	Diâmetro hidráulico da entrada da contração
β_h	Porosidade da colmeia
A_{flow}	Área em que o Fluido vai passar
A_{total}	Área total de uma seção transversal
K_h	Coefficiente de perda de carga da colmeia
L_h	Comprimento da colmeia
D_{hh}	Diâmetro hidráulico da célula da colmeia
Re_{Δ}	Número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico da célula
λ_h	Constante para o cálculo de perda de carga na colmeia
2θ ou θ_d	Medida do ângulo do difusor
R_i	Raio hidráulico na entrada do difusor
A_r	Razão de área do difusor
L_D	Comprimento do difusor
K_D	Perda de carga no difusor
K_f	Perda de carga por atrito
K_{ex}	Perda de carga por expansão
N_{al}	Número de aletas
l_c	Comprimento da seção da curva
h_{al}	Distância entre uma aleta e outra
C_{al}	Corda mínima da aleta
R_{al}	Raio mínimo da aleta
u	Componente do plano cartesiano retangular
v	Componente do plano cartesiano retangular
w	Componente do plano cartesiano retangular
ρ	Massa específica
t	Tempo
∇	Operador nabla
∂	Operador de derivada parcial
$\vec{F}$	Vetor força
m	Massa

τ	Tensão de cisalhamento
σ	Tensão normal
F_s	Força de superfície
F_B	Força de corpo
$\sum$	Operador somatório
Δ	Operador de Variação
δ_{ij}	Delta de kronocker
k	Energia cinética turbulenta
ε	Taxa de dissipação de turbulência
μ_v	Viscosidade cinemática
ω	Frequência de dissipação de turbulência
μ_t	Viscosidade turbulenta
C_μ	Constante de fechamento
$C_{\varepsilon 1}$	Constante de fechamento
$C_{\varepsilon 2}$	Constante de fechamento
σ_k	Constante de fechamento
σ_ε	Constante de fechamento
ξ	Constante de fechamento
ψ	Constante de fechamento
ψ^*	Constante de fechamento
ϑ	Constante de fechamento
ϑ^*	Constante de fechamento
F_1 ou F_2	Função de mistura
ϕ	Variável aleatória
χ	Fração de volume de fluido
$\vec{n}$	Vetor normal
θ_{max}	Ângulo máximo do volume finito
θ_{ideal}	Ângulo ideal do volume finito
θ_{min}	Ângulo mínimo do volume finito
$\vec{U}$	Componente vetorial da velocidade
f	Coefficiente de atrito
ε_{wall}	Rugosidade superficial do material
k_m	Coefficiente de perda de carga da tela
K_{mesh}	Rugosidade do material da tela

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
1.2. OBJETIVOS	18
1.2.1. Objetivo geral	18
1.2.2. Objetivo específico	18
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1. ESCOAMENTO EM CANAL ABERTO	19
2.1.1. Turbulência em canais aberto	20
2.1.2. Número de froude	20
2.1.3. Canais retangulares	21
2.2. TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE	22
2.2.1. Classificação dos túneis de água	24
2.3. ANÁLISE DIFERENCIAL DE ESCOAMENTO DE FLUIDO	39
2.3.1. Conservação da massa	39
2.3.2. A EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	40
2.3.3. As equações de navier-stokes	42
2.3.4. A equação de euler para fluido sem viscosidade	44
2.4. MODELAGEM DA TURBULÊNCIA	45
2.4.1. Equação média de Reynolds Navier-Stokes (RANS)	46
2.4.2. Hipótese de boussinesq	47
2.4.3. Modelo de turbulência de duas equações	49
2.4.4. Modelo $k-\omega$ Baseline (BSL)	51
2.4.5. Modelo shear stress transport (SST)	52
2.5. ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS	53
2.5.1. Método do volume de fluido (VOF – VOLUME OF FLUID)	54
2.6. GERAÇÃO DO DOMÍNIO DISCRETO E APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	56
2.6.1. Método dos volumes finitos	57
2.6.2. Malhas estruturadas e não-estruturadas	58
2.6.3. Condições de contorno	61
3. VALIDAÇÃO DO MÉTODO VOF	62
4. DIMENSIONAMENTO DE UM TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE HORIZONTAL	65

4.2.	SEÇÃO DE TESTES	66
4.3.	CONTRAÇÃO	66
4.4.	COLMEIA.....	68
4.5.	ALETAS DIRECIONADORAS.	68
4.6.	DIFUSOR.....	69
4.7.	PERDA DE CARGA	69
5.	ANÁLISE DO FLUXO	70
5.1.	GERAÇÃO DO DOMÍNIO	70
5.2.	GERAÇÃO DO DOMÍNIO DISCRETO.....	71
5.3.	CONDIÇÃO DE CONTORNO	73
5.4.	RESULTADO DAS SIMULAÇÕES.....	74
6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	79
6.1.	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	79
7.	CONCLUSÃO.....	80
	REFERÊNCIAS	81

1. INTRODUÇÃO

Na região amazônica, as comunidades ribeirinhas possuem dificuldade com o acesso a serviços triviais para moradores dos centros urbanos, como o acesso ao ambiente escolar. Para mudar esse quadro, foi criado em parceria a outros órgãos o Centro Colaborador de Apoio ao Transporte Escola (CECATE).

O desenvolvimento de pesquisas na área de transporte marítimo foi se intensificando desde então, unindo um numeroso grupo de colaboradores com o propósito de projetar e construir lanchas escolares que atendam às necessidades dos ribeirinhos e ao mesmo tempo que tenham boa navegabilidade, sem que gere muita perturbação na água, o que prejudicaria outros barcos que estejam passando por perto.

Para dar suporte nas análises experimentais dos cascos das lanchas, foi proposto a construção de um túnel de água circulante horizontal, este por sua vez seria instalado no galpão do NDAE, uma das Unidades Acadêmicas Especializadas (UEA) pertencentes a UFPA, que se encontra no campus de Tucuruí, assim, a estrutura a ser construída deverá ter uma seção de testes que atenda a demanda experimental dos cascos de embarcação e ao mesmo tempo ter dimensões que comportem na estrutura do Galpão.

As condições de projeto fornecidos para o túnel são que ele precise ter uma velocidade na seção de testes de 3 m/s e uma largura da seção de testes de 3 m , para poder comportar os modelos de casco de embarcações a serem ensaiados, além disso, a seção de teste precisa ter um comprimento de 12 m .

O projeto do túnel de água está de acordo com a metodologia existente na literatura, uma vez que esse tipo de instalação já vem sendo construída em outros lugares para outros respectivos fins de pesquisa, tendo poucas alterações para adequar o projeto as condições externas, como o espaço físico em que ele se encontrará e os tipos de experimentos que ele irá receber.

Outro aspecto importante nesse projeto é a análise numérica do fluxo do túnel via CFD (*Computational Fluid Dynamics*), essa por sua vez, foi feita utilizando o software de simulação numérica ANSYS, com seus pacotes de programas para análise da dinâmica do fluido, CFX e fluente. A análise numérica trará um indicativo de que a estrutura projetada entregará um fluxo de boa qualidade na seção de testes, além de poder fazer uma análise prévia de cada componente antes mesmo de sua fabricação.

1.2.OBJETIVOS

1.2.1. **Objetivo geral**

Realizar o projeto hidráulico de um túnel de água circulante horizontal conforme as condições de projeto já citadas e a metodologia presente na literatura, assim como fazer a análise do escoamento via Dinâmica dos Fluidos Computacional, afim de garantir uma boa qualidade para o fluxo na seção de testes. A análise de alguns componentes isolados também será feita, afim de avaliar se para a condição de instalação, a metodologia recomendada será a mais viável.

1.2.2. **Objetivo específico**

- Realizar o projeto hidráulico de um túnel de água circulante segundo as condições de projeto estabelecidas.
- Gerar um domínio Fluido para simulação usando um *software* de CAD (*computer-aided design*).
- Gerar um domínio discreto usando o método dos volumes finitos.
- Simular a condição do fluxo do túnel utilizando o pacote de soluções para CFD do *software* comercial da ANSYS.
- Avaliar a qualidade do fluxo dos componentes do túnel de água e propor soluções para melhorar a qualidade do escoamento.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. ESCOAMENTO EM CANAL ABERTO

Escoamento em canal aberto refere-se ao escoamento do líquido, onde uma das superfícies do canal por onde o fluido está escoando está aberto para a atmosfera, ou, tem-se a presença de uma interface líquido e gás, chamado de superfície livre.

Figura 1: Canal do Panamá.



Fonte: <https://www.tropicalrealtypanama.com/en/about-panama/panama-canal/>

Em um canal aberto, a velocidade do fluido líquido é muito baixa próximo as paredes e máxima próximo a região de interface, isso acontece porque a viscosidade do fluido gasoso é muito menor que a do líquido, colocando a região de interface entre líquido e gás quase como se fosse uma parede com escorregamento livre.

O escoamento de um canal aberto pode ser uniforme ou variado, os fatores que determinam isso estão ligados à altura da seção transversal do canal. Em geral, quando temos uma velocidade constante ao longo do canal, temos um escoamento uniforme, já em casos em que há uma inclinação ou simplesmente regiões com alturas diferentes, o escoamento passa a ser variado. Ao olharmos para o tipo de regime do escoamento, aplicamos a condição de regime permanente ao escoamento uniforme, uma vez que a condição do fluxo não varia com o tempo, e de não permanente quando o escoamento é variado.

Além do tipo do escoamento, podemos classificar o escoamento de acordo com a sua turbulência e o regime da velocidade do fluido na interface.

2.1.1. Turbulência em canais aberto

O parâmetro utilizado para analisar se o escoamento será laminar, turbulento ou se estará em uma região entre o laminar e o turbulento é o mesmo usado para analisar o escoamento em dutos fechados, o número de Reynolds. Porém, para o caso do escoamento de canais abertos, a distância percorrida pelo fluido é substituída pelo raio hidráulico, representado por R_h . Assim, temos que o número de Reynolds para canal aberto é dado por:

$$Re = \frac{\rho V_m R_h}{\mu} \quad (1)$$

Sendo V_m a velocidade média do fluido.

O raio hidráulico é apresentado como a razão entre a área da seção transversal do escoamento A_c e o perímetro molhado P_m , assim:

$$R_h = \frac{A_c}{P_m} \quad (2)$$

Para que o escoamento laminar, temos um valor de número de Reynolds abaixo de 500, seguindo com a zona de transição entre o laminar e turbulento que abrange os valores entre 500 e 2500, e tendo regime turbulento um escoamento com número de Reynolds acima de 2500.

2.1.2. Número de froude

Outro parâmetro usado na mecânica dos fluidos para analisar o escoamento em canais abertos é o número de Froude, dado em homenagem ao engenheiro naval inglês William Froude (1810-1879). Este por sua vez, é a razão da inércia do escoamento pela velocidade de onda gravitacional.

$$Fr = \frac{V_m}{\sqrt{gY}} \quad (3)$$

A profundidade do escoamento Y pode ser utilizada no calculo do número de Froude quando trabalhamos com canais retangulares, do contrário, deverá considerar o comprimento característico no seu lugar.

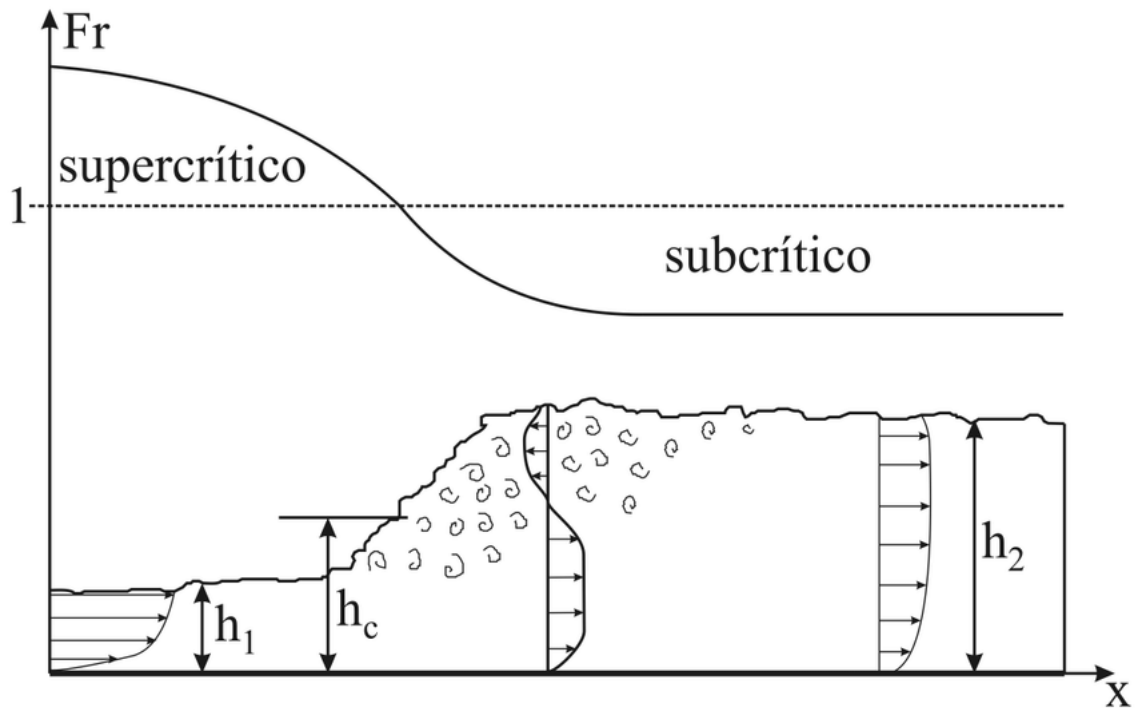
A classificação do escoamento com base no número de Froude se dá como:

$Fr < 1$ Escoamento subcrítico

$Fr = 1$ Escoamento crítico

$Fr > 1$ Escoamento Supercrítico

Figura 2: Diferenças do escoamento para diferentes números de froude.



Fonte: Simões et al, 2011.

2.1.3. Canais retangulares

Em canais retangulares, temos que sua área molhada e seu perímetro molhado são dados como:

$$A_c = hb \quad (4)$$

$$P_m = b + 2h \quad (5)$$

Onde b é o comprimento da base e h a profundidade do escoamento.

Se formos pensar pela perspectiva da resistência ao escoamento decorrente da tensão de cisalhamento na parede, chegamos à conclusão que quanto menor for a área de contato do fluido

com alguma parede, menor será a resistência que o mesmo sofrerá, em outras palavras, quanto menor o perímetro molhado, maior será a velocidade média e a vazão.

Partindo disso e analisando o raio hidráulico (equação 2), podemos chegar à conclusão que a melhor seção transversal hidráulica para um canal aberto é aquela com o raio hidráulico máximo.

Isolando a base b na equação 4 e substituindo o valor de b na equação 5, temos que o perímetro molhado pode ser escrito como:

$$P_m = \frac{A_c}{h} + 2h \quad (6)$$

Sabemos que o valor máximo de uma equação $f(x)$ é obtido quando $dx/dy = 0$, assim, aplicando esse conceito a equação 6, temos que:

$$\frac{dP_m}{dh} = -\frac{A_c}{h^2} + 2 = 0 \quad (7)$$

Substituindo a equação da seção transversal hidráulica na equação 7, encontramos a seguinte relação:

$$-\frac{b}{h} + 2 = 0 \rightarrow h = \frac{b}{2} \quad (8)$$

Ou seja, para termos um escoamento com menor resistência, e por consequência a melhor seção transversal hidráulica para um canal retangular, o comprimento da base deverá ser o dobro da profundidade do escoamento.

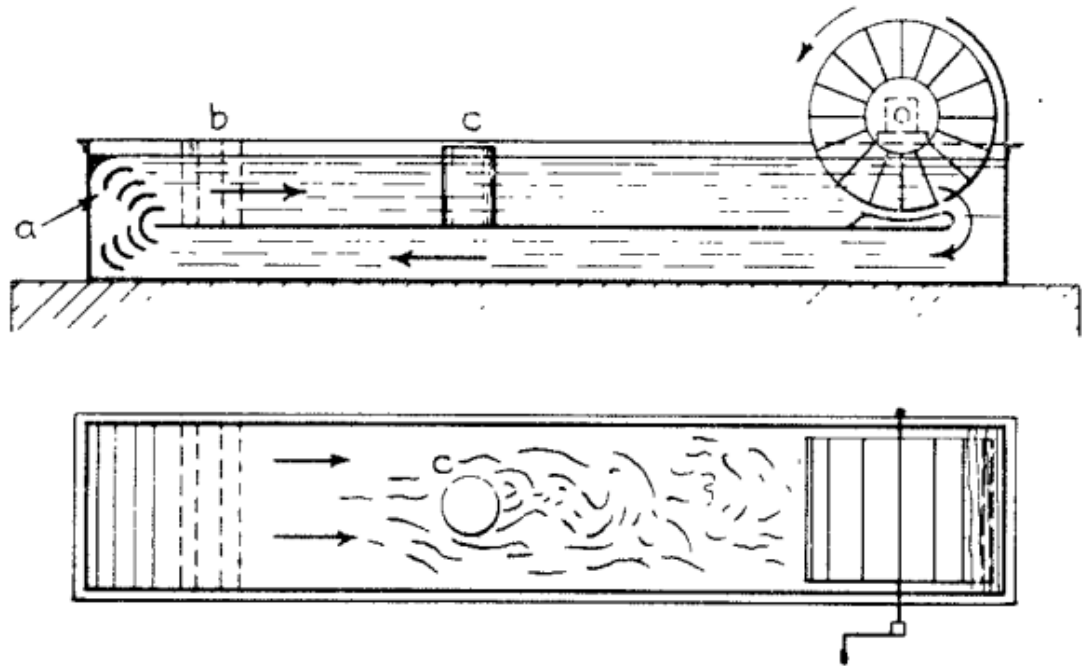
2.2. TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE

Túneis de água são uma ferramenta poderosa para a análise da natureza hidrodinâmica dos corpos submersos e/ou sobre a superfície da água (Saeed et al, 2018). Eles são geralmente preferidos a túneis de vento por serem mais fáceis de se fazer a análise do escoamento. Isso acontece porquê a visualização do fluxo em túneis de vento são mais difíceis de controlar e se dissipam rapidamente (Zahari & Dol, 2015).

O interesse da análise hidrodinâmica do escoamento em torno de um objeto de interesse (seja ele um duto ou um casco de embarcação) é bem antigo, em 1904, Prandtl por exemplo

construiu um modelo de túnel de água para fazer a análise do escoamento em torno de vários objetos (Prandtl,1927).

Figura 3: túnel de água circulante de prandtl.



Fonte: PRANDTL,1927

Stanton alguns anos depois, construiu um canal um pouco maior na Inglaterra, onde o mesmo fez a medição do arrasto de objetos de diferentes formas (Stanton, 1909).

Com o passar dos anos, alguns outros túneis de água foram sendo construídos, mas dessa vez, para trabalhos específicos, como em 1937, quando construíram um túnel de água menor para analisar o escoamento em dirigíveis (Guggenheim,1937).

As pessoas ao redor do mundo viram a facilidade que é a visualização dos resultados em um tunel de água, uma vez que era bem simples acompanhar o percurso do fluido, ideal para testes em propulsores e análise de cavitação.

As execuções de experimentos em túneis de água eram válidas porque respeitavam o princípio do movimento relativo, que diz que é indiferente considerar o fluido móvel e o sólido fixo, ou o sólido móvel e o fluido em repouso. Na prática, porém, como indicaram Dubuat e Duchemin, a resistência que uma placa imóvel sobre uma corrente de fluido é maior que a

resistência quando deixamos o fluido em repouso e passamos a placa pelo fluido. Essa diferença entre as resistências é conhecida por *Paradoxo de Dubuat*.

Algum tempo depois, Zukovskij conclui com algumas experiências que esta divergência é ocasionada pelo regime de turbulência na superfície da placa. Para que os testes em um túnel de água, ou até mesmo em um túnel de vento, estejam exatamente nas mesmas condições que em um caso não experimental, as condições de turbulência e regime de velocidade do fluido devem ser os mesmos. Assim, algumas adequações deveriam ser feitas em projetos de túneis de água para que essas condições fossem controladas, deixando o fluxo na seção de teste o mais estável o possível, essas adequações serão apresentadas ao longo desse trabalho.

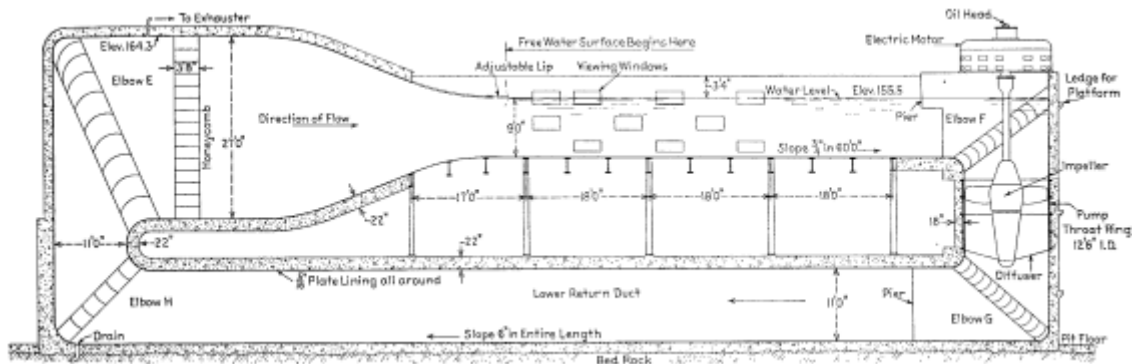
2.2.1. Classificação dos túneis de água.

Os túneis de água partilham dos mesmos princípios físicos de um túnel de vento de baixa velocidade, por esse motivo, são construídos de forma similar (BARLOW & WILLIAN, 1984). Todavia, por possuir um fluido em seu estado líquido, algumas variáveis já estão amarradas para o túnel de água, como o fato dele ter um circuito fechado. Por isso, sua classificação é dada de duas formas, quanto ao tipo de circuito e quanto a seção de testes.

2.2.1.1. Classificação quanto ao tipo de circuito

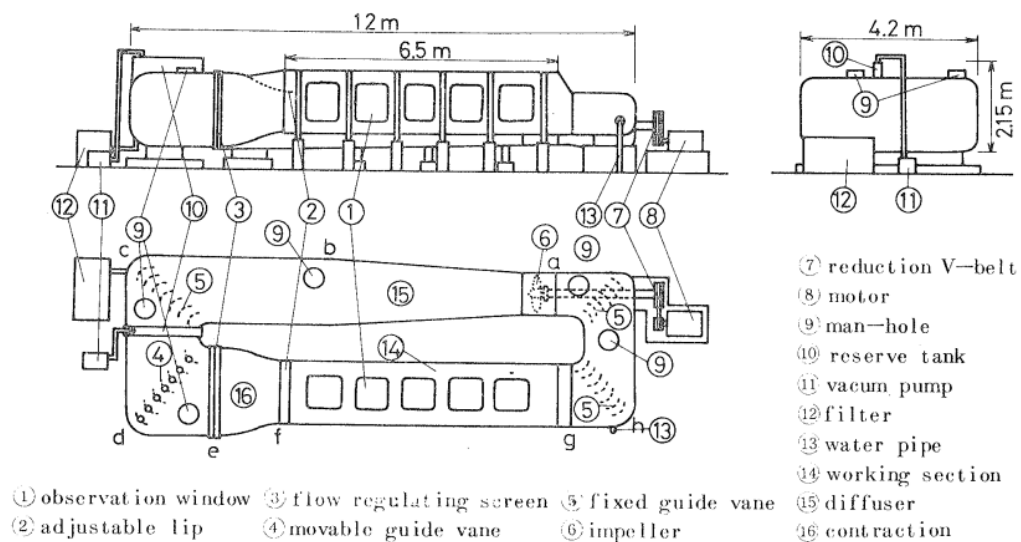
Como mencionado anteriormente, os túneis de água podem ser classificados quanto ao seu tipo de circuito, sendo ele horizontal ou vertical. A escolha do tipo de circuito dependerá das instalações em que ele estará inserido e do tamanho do espaço disponível para o mesmo. As imagens a seguir, mostram dois exemplos de túneis de água, um da marinha americana (vertical) e outro da universidade de Osaka no Japão (horizontal).

Figura 4: Túnel de água vertical da marinha dos Estados Unidos.



Fonte: SAUNDERS et al, 1940.

Figura 5: Túnel de água horizontal da Universidade de Osaka.



Fonte: TANAKA et al, 1973.

2.2.1.2. Classificação quanto a seção de teste

Para túneis de água, podemos ter seção de teste com superfície livre ou circuito totalmente fechado. O que vai dizer qual tipo de seção será utilizada são os experimentos pelo qual o túnel de água está sendo construído, em túneis projetados para atender a demanda de experimentos com embarcações por exemplo, a preferência é por seção de teste aberta.

A dinâmica do escoamento também muda, em túneis com superfície livre, deverá ser considerado o escoamento como os em canais abertos.

2.2.2. Componentes

2.2.2.1. Seção de testes

A seção de testes é a parte do túnel de água que é utilizada para fazer os experimentos, as suas dimensões de uma maneira geral, dependem do tipo de experimento que se espera ser feito, condições do fluxo (número de Froude e número de Reynolds), e as limitações de espaço que o túnel terá.

Em geral, os túneis de água encontrados na literatura são encontrados com seções quadradas ou retangulares, sendo esse último, mais utilizado em experimento com embarcações, como é o caso do túnel de água da marinha Americana.

De acordo com Mehta (1977), o comprimento da seção de testes deve ser de 0.5 a 3 vezes o seu diâmetro hidráulico. O valor mínimo está relacionado a distância mínima que o fluido deve percorrer para reduzir a um nível aceitável as não uniformidades do escoamento. Já o valor máximo de 3 vezes o diâmetro hidráulico está relacionado ao aumento do descolamento da camada limite que o fluxo teria depois de ter percorrido essa distância, deixando de ser vantajoso para fins experimentais.

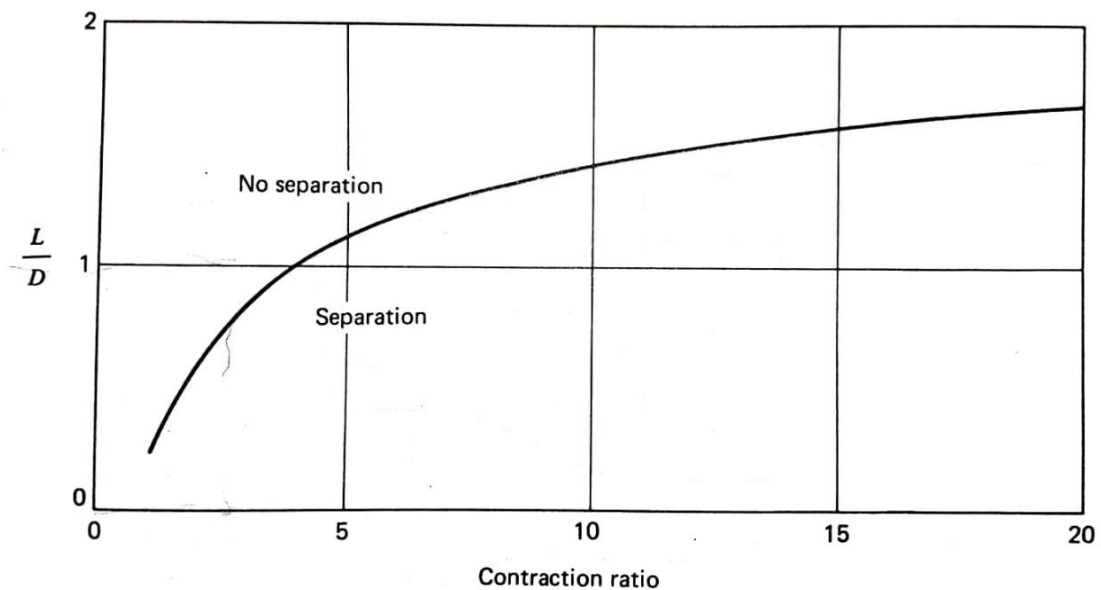
2.2.2.2. Contração

A contração é a seção do projeto de um túnel de água/vento que está em praticamente todos os projetos, isso se dá pela influência que a mesma possui na qualidade do escoamento, aumentando a velocidade do escoamento que chega na seção de testes e reduzindo as flutuações de velocidade ao longo do tempo. Além disso, a contração deixa propício que a seção de estabilização possua seção transversal maior, compensando a perda de pressão gerada pelas telas e colmeia (BELL e METHA, 1988).

Um dos parâmetros mais importantes a ser levado em consideração para que se consiga os efeitos descritos acima, é a razão de contração (c), sendo essa a relação entre as áreas da

entrada e saída da contração, além do seu comprimento (L). Todavia, segundo Wallis (1993), a razão de contração e o comprimento deverão respeitar um valor mínimo para que não tenha um processo de separação do escoamento como mostra a figura a seguir:

Figura 6: comprimento mínimo pela razão de contração para que não haja separação.



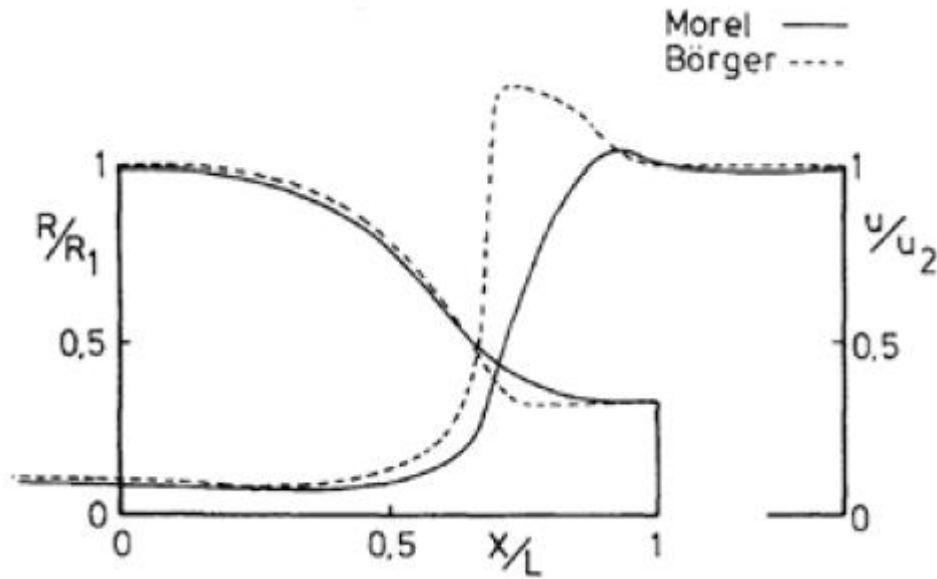
Fonte: WALLIS, 1993.

O perigo da separação da camada limite é resultado da presença de regiões de gradiente de pressão adverso nas paredes de cada extremidade da contração, dessa forma, a pressão estática próximo às paredes é maior que no centro do escoamento, aumentando as flutuações de velocidade.

Para alguns projetos de túneis de água, opta-se por trabalhar sem uma contração superior, afim de eliminar os efeitos de geração de onda e perturbações adversas, uma vez que a manipulação da água é muito mais difícil que a do ar (PANAHI e BARAKATI, 2017).

Existem várias metodologias para determinar o perfil da parede no trecho da contração. Börger (1975) e Morel (1975) por exemplo, desenvolveram dois modelos que foram por Kramer e Gehardt (1984), como mostra a figura 7.

Figura 7: Modelos de perfis de contração de Börger e Morel.



Fonte: KRAMER e GEHARDT, 1984.

Nessa imagem, R/R_1 representa a fração da altura pela altura total da entrada da contração, tendo a sua origem a linha de centro do perfil, e X/L representa a fração do comprimento pelo comprimento total. Para manter a uniformidade na saída da contração, Börger tenta encontrar o menor comprimento entre a entrada e saída dessa seção. Nessa tentativa, ele coloca uma curva muito acentuada, que acarreta em uma redução mais rápida das não uniformidades, como pode ser visto pela velocidade normalizada u/u_2 . No entanto, o risco de descolamento da camada limite aumenta. O perfil de Morel possui uma mudança de curvatura mais suave, tendo a sua redução da não uniformidade mais próxima a saída da contração.

Dentro as diversas outras metodologias, uma se destaca entre os projetos de túnel de água/vento da literatura, sendo o polinômio de 5ª ordem desenvolvida por Bell e Mehta (1988), descrito na equação a seguir:

$$Y(X) = H_1 - (H_1 - H_2)[6(X')^5 - 15(X')^4 + 10(X')^3] \quad (9)$$

Sendo:

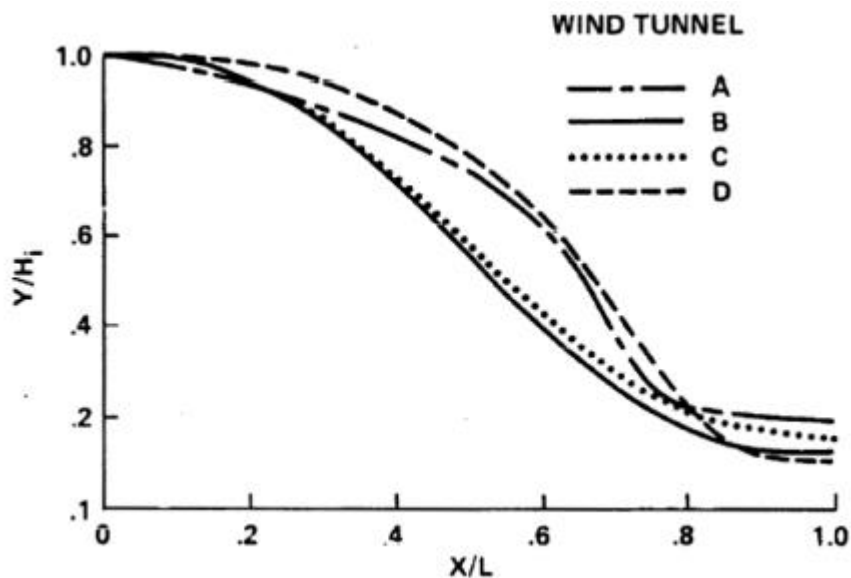
$$X' = \frac{X}{L}$$

H_1 = Altura do perfil da seção de entrada da contração.

H_2 = Altura do perfil da seção na saída da contração.

Segundo Bell e Mehta (1988) dentre os polinômios testados em seu trabalho “Contraction Design for Small Low-Speed Wind Tunnels”, conforme mostrado na figura 8, o polinômio de 5ª ordem (túnel de vento B) foi considerado como ótimo por não apresentar separação do escoamento tanto na linha de centro quanto nos cantos da contração, proporcionando uma excelente uniformidade no escoamento.

Figura 8: Comparação entre os diversos perfis de contração.



Fonte: BELL e MEHTA, 1988.

Bell e Mehta (1988) afirmam que para o perfil criado a partir do polinômio de 5ª ordem, ocorre separação do escoamento quando a relação L/H_i (comprimento/altura da contração) foi menor ou igual a 0,667. Além disso, caso L/H_i seja maior que 1,79, também ocorre um deslocamento da camada limite.

Grande parte dos túneis de água circulantes horizontais que possuem seção de teste com a superfície superior livre encontrados na literatura, não possuem a parte superior da contração, o motivo comum entre eles é a geração excessiva de onda na seção de teste, o que compromete com a qualidade do escoamento.

O cálculo do coeficiente de perda de carga de uma contração com geometria sinuosa é considerado apenas devido ao atrito com a parede, sendo essa equivalente a aproximadamente 3% da perda de carga total do sistema. Wattendorf (1938) propôs uma equação que estima o coeficiente de perda de carga em uma contração (K_c). Por motivo da perda de carga não ser tão significativa na contração, a diferença entre perda de carga pela equação proposta por Wattendorf (1938) pelo que seria realmente a perda de carga de uma contração com superfície sinuosa é insignificante.

$$K_c = 0,32f_m \left(\frac{L_c}{D_{entrada}} \right) \quad (10)$$

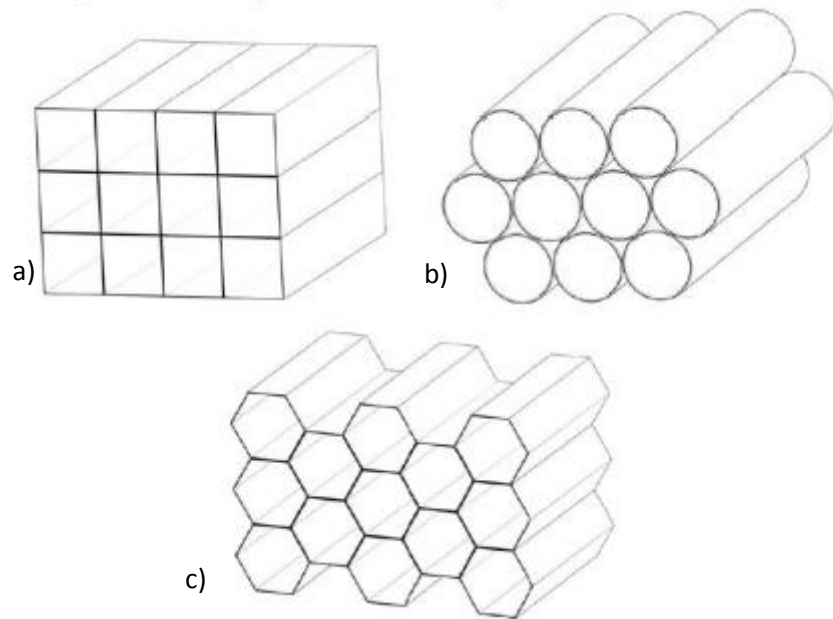
Sendo L_c o comprimento da contração, $D_{entrada}$ o diâmetro hidráulico da entrada da contração e f_m o fator de atrito médio entre a entrada e a saída da seção da contração, usando o número de Reynolds igual o valor médio entre o Reynolds da entrada e da saída (WATTENDORF, 1938).

2.2.2.3. Colmeia

Para que o escoamento que entra na contração seja o mais uniforme possível, deve-se eliminar as flutuações laterais de velocidade, reduzindo o máximo o possível os níveis de turbulência. Em projetos de túnel de vento, é comum observar o acréscimo de uma tela antes da colmeia, para fazer as primeiras correções no fluxo, diminuindo o comprimento da camada limite, porém, na literatura consultada sobre túneis de água, nenhum deles apresentavam uma tela, apenas a colmeia.

As colmeias são acrescentadas ao túnel de água para eliminar os componentes transversais de velocidade, que são gerados na entrada da seção de estabilização do túnel. O formato dessas colmeias podem ser hexagonais quadrados (HCH), circulares (HCC) ou retangulares (HCS) (Mehta, 1977), como mostra na figura 9.

Figura 9: Esquemas das seções transversais das colmeias: a) HCS; b) HCC; c) HCH.



Fonte: Adaptado de KULKARNI et al., 2011.

Alguns pesquisadores realizaram estudos para investigar a influência da forma e das dimensões da colmeia no escoamento da seção de teste. Para que a colmeia atinja seu objetivo de melhorar o escoamento, foi encontrado que os comprimentos das células não deveriam ser maiores que 10 vezes seu diâmetro hidráulico, uma vez que células com comprimentos maiores que esse aumentaria o crescimento de camada limite e por consequência, aumentando os níveis de turbulência (LOEHRKE e NAGIB, 1976).

Segundo Mehta (1977), a relação entre o comprimento e o diâmetro deve estar na faixa entre 7 e 10. Com relação a forma da seção transversal da colmeia, a mudança da forma não influencia tanto, podendo ser escolhidas de acordo com a disponibilidade. Para suprimir a turbulência, é recomendável utilizar células pequenas, sendo menor que o comprimento de onda lateral da variação da velocidade.

Outro fator importante que deve ser levado em consideração no projeto de uma colmeia, é a sua porosidade (β_h). Como foi descrito anteriormente, quanto menor for as células em uma colmeia, mais eficiente é a eliminação das variações de velocidade de onda lateral. Mehta (1979) estabelece um critério em que a porosidade tenha um valor mínimo de 0.8, sendo esse valor a razão da área em que o fluido vai passar (A_{flow}) pela área total que a colmeia ocupa (A_{total}).

$$\beta_h = \frac{A_{flow}}{A_{total}} \quad (11)$$

Eckert et al. (1976) desenvolveu uma equação que é bastante utilizada para estimar o coeficiente de perda de carga da colmeia (K_h). Basicamente, ele relaciona o comprimento da colmeia (L_h), o diâmetro hidráulico da célula (D_{hh}), a porosidade da colmeia (β_h) e o número de Reynolds (Re_Δ), baseado no diâmetro hidráulico e na rugosidade da célula. Assim, temos que o coeficiente de perda de pressão pode ser escrito como:

$$K_h = \lambda_h \left(\frac{L_h}{D_{hh}} + 3 \right) \left(\frac{1}{\beta_h} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta_h} - 1 \right)^2 \quad (83)$$

Sendo:

$$Re_\Delta = \frac{\rho U D_{hh}}{\mu}$$

$$\lambda_h = \begin{cases} 0,375 \left(\frac{\Delta}{D_{hh}} \right)^{0,4} Re_\Delta^{-0,1}, & Re_\Delta \leq 275 \\ 0,214 \left(\frac{\Delta}{D_{hh}} \right)^{0,4}, & Re_\Delta > 275 \end{cases}$$

2.2.2.4. Difusor.

É conveniente em projetos de túnel de água e túnel de vento que se tenha uma contração no montante da seção de testes, essa contração está ligada a uma seção de estabilização com área maior que o da seção de testes e muitas das vezes, maior que a seção onde se encontram os propulsores, nesses casos, essas mudanças de área são feitas com difusores.

Semelhante a contração, a qualidade do escoamento em difusores depende da sua geometria, como a razão de área e o ângulo de expansão do difusor. As condições na entrada e saída do difusor, bem como elementos de controle de camada limite também exercem influência sobre o comportamento do fluido.

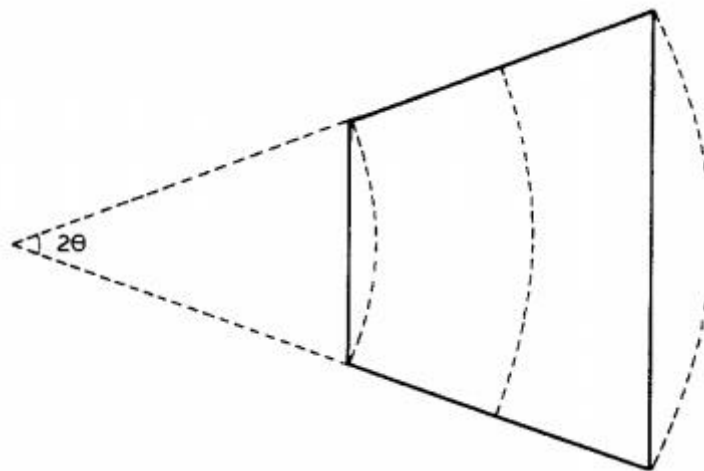
Difusores podem ser classificados em dois tipos: Difusores de ângulo fechado e difusores de ângulo aberto.

Difusores de ângulo fechado possuem ângulo de expansão suave, variando entre 5° (escoamento uniforme) e 10° (melhor recuperação de pressão). É importante ter uma boa uniformidade no escoamento nesse tipo de difusor para que a recuperação de pressão não varie com o tempo, prejudicando na uniformidade da velocidade do túnel.

Difusores de ângulo aberto possui valores de ângulo de difusor e razão de área maiores que os de ângulo fechado, isso faz com que esses tipos de difusores apresentem uma certa separação da camada limite caso não se tenha um método de controle adequado. A adição de telas pode ser uma solução, mas em nenhuma das literaturas consultadas foi apresentado um método confiável para o projeto de uma combinação de múltiplas telas.

O ângulo do difusor é definido como o ângulo entre duas linhas retas que ligam a entrada e a saída do difusor, como mostra a figura a seguir:

Figura 9: Medida do ângulo do difusor (2θ)



Fonte: Adaptado de MEHTA, 1977.

Para difusores com seção transversal retangular, considere o ângulo do difusor (2θ) como o maior dos ângulos.

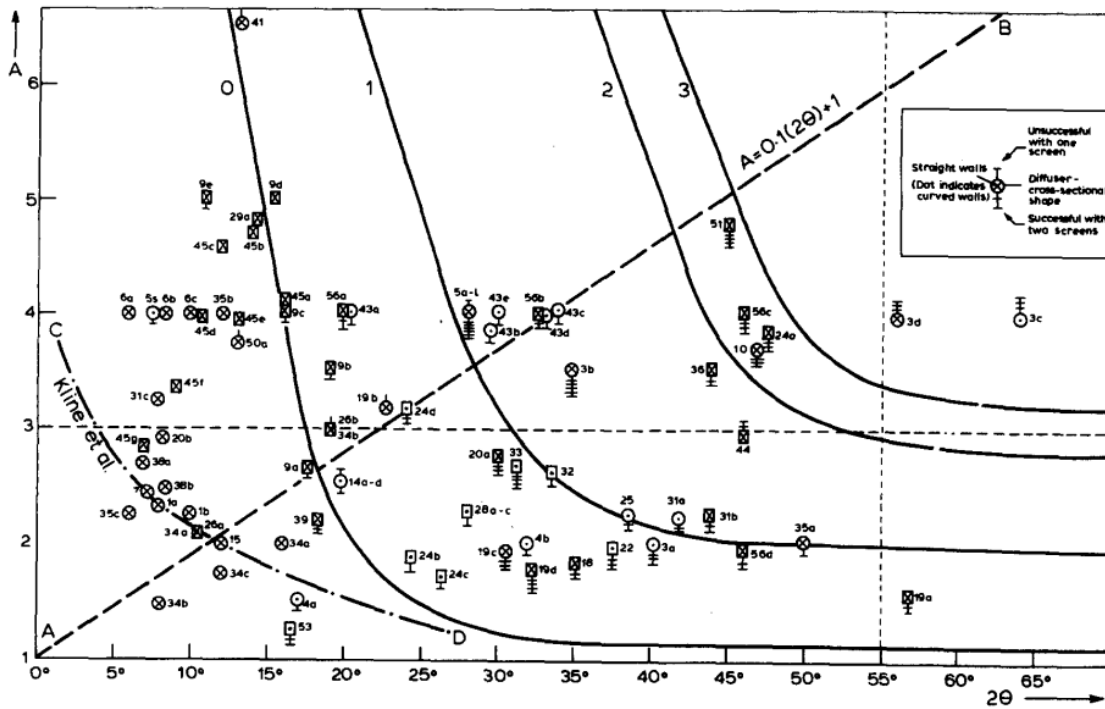
Balow et al. (1999) equaciona o comprimento do difusor, relacionando o raio hidráulico da entrada do difusor (R_i), a razão de área (A_r) e o ângulo do difusor (θ_d). Essa equação é derivada da expansão do ângulo do cone equivalente, e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$L_D = (R_i) \left[\frac{\sqrt{A_r} - 1}{\tan(\theta_d)} \right] \quad (12)$$

Schubauer e Spangenberg (1948) inferiram regras de projeto baseadas em seus próprios resultados experimentais. Schubauer e Spangenberg usaram telas para obter condições "totalmente preenchidas" (regiões desprezíveis de separação) em difusores de seção reta de secção circular.

Na Figura 20, a relação de área chamada pelo autor de (A), é plotada em relação ao ângulo do difusor (2θ). O número de telas para cada configuração é especificado e curvas suaves foram desenhadas para incluir os pontos de configuração bem-sucedidos para a combinação de telas 0, 1, 2 e 3. A seção transversal do difusor e a forma da parede para cada configuração também são mostradas nesta figura. A linha $\overline{AB}$ é um limite aproximado entre difusores com paredes retas e paredes curvas e a curva CD é o limite de fluxo sugerido por Kline et al. (1957).

Figura 10: Razão de área x ângulo do difusor.



Fonte: SCHUBAUER e SPANGENBERG, 1948.

A adição de telas em um túnel de água se torna inviável, uma vez que a pressão que a água exerce sobre ela causaria uma deformação muito grande.

O coeficiente de perda de carga no difusor (K_D) proposta por Barlow et al. (1999) é decomposta em duas partes, o coeficiente de perda de carga por atrito (K_f) e o coeficiente de perda de carga por expansão (K_{ex}), assim, temos que K_D pode ser escrito como:

$$K_D = K_f + K_{ex} \quad (13)$$

$$K_f = \left(1 - \frac{1}{A_R^2}\right) \left(\frac{f}{8 \sin(\theta_D)}\right) \quad (14)$$

$$K_{ex} = K_e(\theta_D) \left(\frac{A_r - 1}{A_r^2}\right)^2 \quad (15)$$

Sendo: O fator de atrito f é calculado como no caso de uma seção de área constante usando o número de Reynolds da entrada do difusor e o coeficiente $K_e(\theta_D)$ pode ser estimado em função do ângulo de expansão do difusor, usando a equação (13).

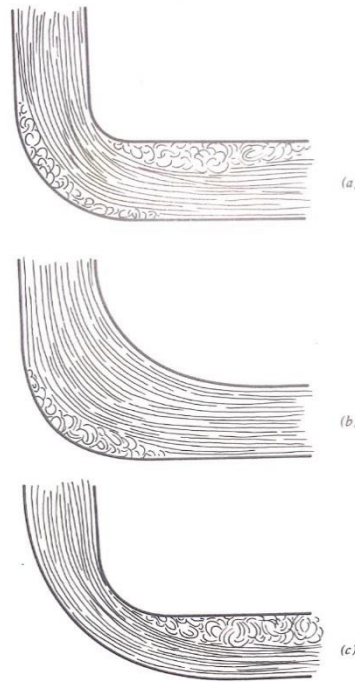
$$\begin{aligned}
& K_e(\theta_D) \\
& = \begin{cases} 0,09623 - 0,004152\theta_D, & 0 < \theta_D < 1,5^\circ \\ 0,1222 - 0,04590\theta_D + 0,000028\theta_D^2 + 0,003269\theta_D^3 & \\ -0,0006145\theta_D^2 - 0,000028\theta_D^5 + 0,00002337\theta_D^6, & 1,5^\circ < \theta_D < 5^\circ \\ -0,01322 + 0,05866\theta_D, & \theta_D > 5^\circ \end{cases} \quad (13)
\end{aligned}$$

2.2.2.5. Aletas direcionadoras.

Em túneis de água e túneis de vento circulantes, o elemento curva a parecer no sistema. Essas curvas costumam ter ângulos de 90° , onde o fluxo deve ser defletido na mesma proporção para que se tenha o mínimo de turbulência nessas regiões. Por esse motivo, os cantos são equipados com aletas com planas ou curvas (BRUSCA et al.,2011).

Sem essas aletas, há a presença do desprendimento do escoamento, gerando zonas com gradiente de pressão e por consequência, zonas turbulentas, como é mostrado na figura 11.

Figura 11: Efeito do escoamento em diferentes tipos de curva. (a) curva normal (b) curva expandida (c) curvas contraídas



Fonte: WALLIS, 1993

Para determinar a forma das aletas, primeiro, deve-se determinar o número de aletas (N_{al}) que o túnel terá. Eckert (1979) recomenda que tenha um total de 25, sendo que quanto mais aletas, maior será a perda de carga no sistema. Tendo o número de aletas e sabendo o comprimento da seção da curva (l_c), podemos calcular a distância entre uma aleta e outra (h_{al}) pela equação (14):

$$h_{al} = \frac{l_c}{N_{al}} \quad (14)$$

A razão entre a distância entre uma aleta e outra e a corda da aleta deve ser menor que 0.25 (BRUSCA et al., 2011), logo, o valor mínimo da corda (C_{al}) pode ser expresso como:

$$C_{al} = \frac{h_{al}}{0.25} \quad (15)$$

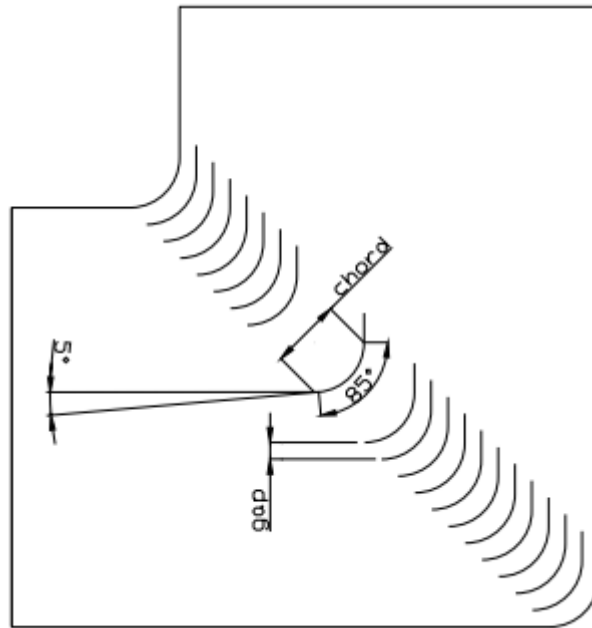
Com o valor do comprimento da corda, para calcular o raio da curva que forma a aleta (R_{al}), usa-se a equação (16).

$$R_{al} = \frac{C_{al}}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (16)$$

Sendo γ o ângulo formado pela seção circular da aleta.

A figura 12 mostra as aletas do túnel de vento desenvolvido por Brusca et al. (2011), nela, fica mais fácil de entender o que é cada componente.

Figura 12: Aletas direcionadores dentro de uma curva.



Fonte: BRUSCA et al.,2011.

Pullinger & Sargison (2007) através de estudos sobre aletas direcionadoras em um túnel de água circulante, constatou que o escoamento fica mais uniforme quanto mais próximo de 90° o ângulo da seção da aleta se aproxima. Além disso, a qualidade do fluxo na saída da curva aumenta quando essas aletas possuem uma extensão tangente ao arco formado pela aleta na região da saída. Ao variar o comprimento dessa extensão, não foi notado uma mudança muito brusca nos resultados.

Para calcular a perda de carga em curvas retangulares, Wattendorf (1938) através de experimentos criou uma expressão que leva em conta o número de Reynolds local Re_{al} baseado na corda das aletas direcionadoras.

$$K_c = 0,1 + \frac{4,55}{(\log_{10} Re_{al})^{2,58}} \quad (16)$$

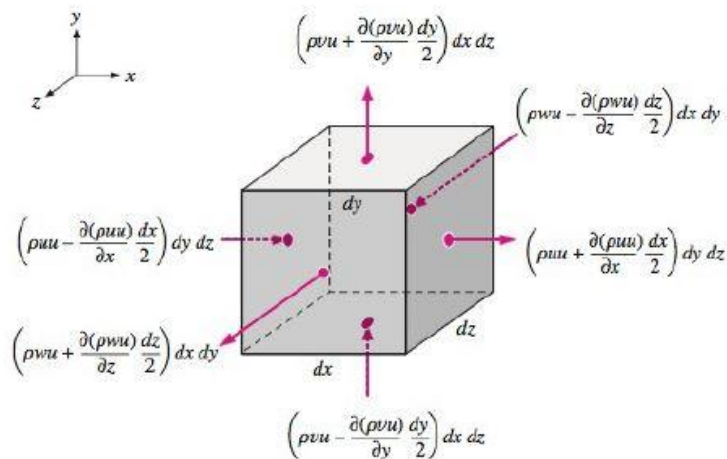
2.3. ANÁLISE DIFERENCIAL DE ESCOAMENTO DE FLUIDO

Ao analisarmos o nosso problema da análise do escoamento do túnel de água, concluímos que as mudanças de temperatura e densidade podem ser desconsideradas, logo, é suficiente resolver duas equações diferenciais do movimento – Conservação da massa e do momento (segunda lei de Newton). Para um fluido tridimensional, há quatro equações (uma da conservação da massa e três da conservação do momento) e quatro incógnitas (componentes da velocidade $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e uma pressão P). Essas equações são acopladas e resolvidas simultaneamente, o que significa que algumas das variáveis aparecem nas quatro equações. Além disso, as condições de contorno para as variáveis devem ser especificadas em todas as fronteiras do domínio do escoamento, incluindo entradas, saídas e paredes (em grande parte dos softwares de simulações numérica, usa-se a terminologia da língua inglesa, sendo entrada, saída e parede, inlet, outlet e wall respectivamente).

2.3.1. Conservação da massa

Em coordenadas retangulares, podemos representar um volume de controle infinitesimal, tendo lados com comprimentos dx , dy e dz , conforme mostra a figura 12 a seguir.

Figura 3: Volume de controle em coordenadas retangulares.



Fonte: Çengel, 2007

Considerando que esse volume tenha uma massa específica ρ constante e a velocidade do ponto O no centro sendo $\vec{v} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$.

Partindo disso, podemos obter uma forma diferencial da lei da conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

A equação (17) frequentemente é chamada na literatura de *equação da continuidade*.

Dessa equação (17) notamos que uma parcela pode descrita em notação vetorial, assim, a mesma equação de conservação da massa agora pode ser escrita com o operador vetorial nabla:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

Assumimos que o nosso fluido de trabalho é incompressível, ou seja, $\rho = \text{constante}$. Podemos fazer essa simplificação posto que não trabalharemos com altas variações de pressão ou temperatura, sendo assim, a massa específica não é uma função nem das coordenadas espaciais e nem do tempo. Para um fluido incompressível, a equação da continuidade é simplificada para :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (19)$$

2.3.2. A EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A segunda lei de Newton pode ser escrita em sua forma diferencial como:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (20)$$

Colocando a velocidade em termos vetoriais, podemos escrever a equação (20) da seguinte maneira:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \quad (21)$$

As forças que atuam sobre o elemento fluido podem ser classificadas como força de corpo e força de superfície, onde a força de superfície pode ser tanto a tangencial (cisalhamento) quanto a normal, e a força de corpo a gravidade, as forças eletromagnéticas etc.

Considerando o nosso volume de controle com dimensões infinitesimais (dx , dy e dz), e massa infinitesimal dm , toda a força atuando sobre esse volume na direção x será provocada por tensões normais e cisalhantes nessa mesma direção. Adotaremos a força normal para a direção x por exemplo como σ_{xx} e as forças cisalhantes dessa mesma componente como τ_{yx} e τ_{zx} , assim, utilizando da expansão de Taylor, podemos escrever a força que atua na direção x como o somatório de todas as forças que estão atuando ali, entrando e saindo da superfície. Assim, procedendo:

$$\begin{aligned} dF_{S_x} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \end{aligned} \quad (22)$$

Simplificando a equação (22), obtemos:

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (23)$$

F_{S_x} é a força de superfície na direção x , para termos a força resultante na direção x , devemos somar a força de superfície com as forças de corpo. Para o caso estudado nesse trabalho, a única força de corpo (F_B) atuante por unidade de massa é a gravidade ($\vec{g}$). Assim, a força resultante na direção x , dF_x , é dada por:

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (24.1)$$

Por conseguinte, a força resultante nas direções y e z podem ser escritas como:

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (24.2)$$

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (24.3)$$

Se substituirmos as equações (24.1), (24.2) e (24.3) nas componentes vetoriais da força, variando ela com o tempo, obteremos as equações diferenciais do movimento:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (25.1)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (25.2)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (25.3)$$

As equações (25.1), (25.2) e (25.3) são equações diferenciais do movimento de qualquer partícula fluida satisfazendo a hipótese do fluido contínuo, ou seja, o fluido não contém espaços vazios em seu meio. Porém, para se utilizar essas equações na solução do movimento do fluido para u , v e w , as expressões adequadas para as tensões devem ser obtidas em termos dos campos de velocidade e pressão. Pensando nisso, o engenheiro Francês Claude Louis Marie Henri Navier (1785) e o físico irlandês George Gabriel Stokes (1819) desenvolveram as equações que resolvem esse problema.

2.3.3. As equações de navier-stokes

Estas equações estabelecem que mudanças no momento e aceleração de uma partícula fluída são simplesmente o produto das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas (similar a fricção) atuando no fluido. Esta força viscosa se origina na interação molecular. Os fluidos que utilizaremos nesse trabalho são newtonianos, ou seja, a tensão viscosa é diretamente proporcional à taxa de deformação por cisalhamento. Partindo desses pontos, as tensões podem ser expressas em termos de gradiente de velocidade e de propriedade dos fluidos (como a viscosidade μ), em coordenadas cartesianas seguem como:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (26.1)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (26.2)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (26.3)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (26.4)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (26.5)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (26.6)$$

Os termos p e μ são pressão termodinâmica local e viscosidade respectivamente. A pressão termodinâmica está relacionada com a massa específica e com a temperatura por meio das equações de estado.

Introduzindo as equações das tensões (equações 26) nas equações diferenciais da quantidade de movimento (Equações 38), obtemos as famosas equações de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (27.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (27.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \end{aligned} \quad (27.3)$$

Como dito em seções anteriores nesse trabalho, o nosso fluido de trabalho é incompressível ($\rho = \text{constante}$), além disso, outra simplificação feita é a de que a viscosidade também é constante ($\mu = \text{constante}$). Sob essas condições, as equações se reduzem a:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (28.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (28.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (28.3)$$

Essas 3 equações, mais a equação (19) da continuidade, formam um conjunto de quatro equações diferenciais parciais não lineares acopladas para u, v, w e p .

Em termos de notação vetorial, temos que as equações (28) podem ser escritas como:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (28.4)$$

O vetor de força gravitacional $\mathbf{g}$ em alguns casos é substituído por um vetor força $\mathbf{F}_B$, representando todas as forças de corpo presentes no modelo. De uma maneira resumida, o lado esquerdo da equação (28.4) tem-se a produção da aceleração da partícula fluida e do lado direito as forças de corpo e de superfície que atuam sobre ela.

A aceleração nessa equação é representada por dois termos, $\partial \mathbf{u} / \partial t$ e $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. O primeiro termo representa a variação de velocidade no tempo e o segundo, a alteração do vetor velocidade no espaço. Para o nosso caso, ela não pode ser resolvida analiticamente, pois estamos trabalhando com um domínio tridimensional bastante complexo.

Já no lado direito da equação, como mencionado anteriormente, temos a força de corpo por unidade de volume ($\rho \mathbf{g}$), o gradiente de pressão no fluido ($-\nabla p$) e um termo de segunda ordem que representa a difusão molecular de momento linear pela ação da viscosidade do fluido ($\mu \nabla^2 \mathbf{u}$).

Em alguns momentos desse trabalho, precisei trabalhar com o fluido invíscido ($\mu = 0$), para tal, trabalhamos com outro tipo de equação que descreve o movimento, a equação de Euler.

2.3.4. A equação de euler para fluido sem viscosidade

Como mencionado anteriormente, a equação de Euler desconsidera os termos viscosos da equação de Navier-Stokes, assim, como $\mu = 0$, podemos desconsiderar tudo o que está sendo multiplicado pela viscosidade.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (29.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (29.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (29.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (29.4)$$

Essa equação estabelece que, para um fluido invíscido, a variação na quantidade de movimento de uma partícula fluída é causada pela força de corpo (considerando como sendo somente a gravidade) e pela força líquida de pressão.

2.4. MODELAGEM DA TURBULÊNCIA

Até aqui, modelamos as equações que descrevem o movimento de um fluido, porém, tem um fenômeno encontrado largamente na natureza e que ainda não foi citado, a turbulência. Essa por sua vez, é o fenômeno da desordem onde as partículas em um escoamento vão se misturando de forma não linear. Matematicamente falando, é a flutuação de velocidade ($\mathbf{u}$) em todas as direções, com infinitos graus de liberdade. Por conseguinte, resolver as equações de Navier-Stokes em um escoamento turbulento é uma tarefa extremamente complexa. O escoamento turbulento é bastante irregular, randômico e caótico. Devido a flutuação de velocidade, o escoamento turbulento aumenta a difusividade do meio, ou seja, incrementa a troca de energia entre as partículas de fluido. Consequentemente, tem-se a geração de altos gradientes de potenciais associados, acelerando a difusão molecular.

Um indicativo para o nível de turbulência é o número de Reynolds (Re), um número adimensional onde quanto maior o seu valor, maior será a turbulência do sistema estudado. Essa diferença entre os diferentes níveis de turbulência é objeto de estudo da comunidade científica até hoje.

A turbulência consiste de um amplo espectro contínuo de escalas, variando de grandes escalas as muito pequenas. A energia cinética produzida pela ação da turbulência em escalas maiores é transferida para as de escalas menores com menor energia, até serem dissipadas em calor devido a ação da viscosidade molecular. Essa “cascata” de energia que é transferida da maior escala para a menor é chamada de “cascata de energia de Kolmogorov” (FRISCH, 1995), em homenagem ao matemático Soviético Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903), que deu contribuições significativas para o estudo da turbulência.

Devido a sua natureza caótica e totalmente randômica, até os dias atuais, a comunidade científica não conseguiu desenvolver um modelo que resolvesse a questão da turbulência para todos os tipos de fluxo, sendo assim, temos vários modelos que são acoplados as equações de

Navier-Stokes, e cabe a nós compreender os principais modelos e então definir qual é o ideal para o problema a ser simulado.

Uma das formas de entender a turbulência está na simulação numérica direta (DNS – Direct Numerical Simulation). Para esse tipo de simulação, o domínio deve estar tão bem discretizado e o passo de tempo deve ser tão pequeno de forma que todas as escalas de turbulência sejam calculadas. Consequentemente, esse refino de malha e esse passo de tempo pequeno entregam uma excelente qualidade dos resultados, porém, exige um imenso poder computacional.

Uma forma de simplificar o problema de turbulência é aplicar algumas metodologias para fazer com que as equações de Navier-Stokes possam considerar os efeitos de turbulência.

2.4.1. Equação média de Reynolds Navier-Stokes (RANS)

Uma dessas abordagens é considerar por exemplo que a velocidade é um componente médio, $\bar{u}$, e em um componente que varie com o tempo, u_i .

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{u}}{dt} \quad (30)$$

O componente médio é dado por:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt \quad (31)$$

Onde Δt é uma escala de tempo que é grande em relação às flutuações turbulentas, mas pequena em relação à escala de tempo na qual as equações são resolvidas.

Para fluxos que variam com o tempo, as equações são agrupadas em médias. Isso permite que as equações médias sejam resolvidas também para simulações com vários passos de tempo. As equações resultantes são às vezes chamadas de URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

Toda essa abordagem parte do procedimento introduzido por Reynolds, chamado de decomposição de Reynolds. Aplicando essa decomposição de Reynolds na equação (28.4), e lembrando que a escala de tempo é muito grande em relação as flutuações turbulenta, $\frac{u}{dt} = 0$, temos então que a equação de Navier-Stokes pode ser escrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (32)$$

Para poder explicar melhor sobre o assunto, temos que transformar a difusão molecular em termos de tensor, além disso, acrescentamos alguns termos de fluxo turbulento que será explicado logo a seguir. Assim, a equação anterior passa a ser:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-2(\tau_{ij})) \quad (33)$$

A equação anterior é a mesma equação da quantidade de movimento, porém, com uma abordagem do método (RANS). Nessa abordagem, aparece o termo τ_{ij} que como mencionado anteriormente, é um tensor com um acréscimo de alguns termos de fluxo turbulento, conhecido na literatura também como tensor de Reynold. Esse tensor representa a influência das flutuações turbulentas no escoamento e será explicado melhor a seguir.

2.4.2. Hipótese de boussinesq

A abordagem mais comum para modelagem da tensão de Reynolds é conhecida como hipótese de Boussinesq, em homenagem ao matemático Francês Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929). Essa hipótese baseia-se em uma analogia entre as tensões turbulentas e as tensões viscosas do escoamento laminar, onde assumem-se que as tensões turbulentas são proporcionais ao gradiente de velocidade média do escoamento, e o coeficiente de proporcionalidade é chamado de viscosidade turbulenta μ_t .

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k \quad (34)$$

Onde δ_{ij} é o delta de kronocker e k é a energia cinética turbulenta específica ($k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$).

Porém, essa analogia apresenta algumas deficiências conceituais. Uma delas, é a adoção de uma viscosidade turbulenta, grandeza que varia de acordo com o tipo de escoamento, e não de acordo com as propriedades termodinâmicas do fluido como é o caso da viscosidade dinâmica (μ). Além disso, a viscosidade turbulenta é considerada escalar, enquanto fisicamente, ela é vetorial. Isso pode gerar resultados errôneos dependendo do escoamento.

Visto todos esses problemas apresentados anteriormente, relacionados a viscosidade turbulenta, conclui-se que não dá para resolver a equação de transporte de fluido sem antes modelar essa viscosidade. A forma como essa viscosidade turbulenta é modelada, define o modelo de turbulência do fluido na metodologia RANS.

Aplicando esse conceito de média temporal nas equações de Navier-Stokes e combinando com a hipótese de Boussinesq com a análise dimensional das escalas de Kolmogorov (FRISCH, 1995), temos então:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (35)$$

Onde σ_t é um coeficiente de fechamento e ε é a dissipação de turbulência por unidade de massa.

Ao aplicar uma análise de microescala de Taylor (1935), encontramos uma igualdade entre a dissipação e a produção de turbulência, assim, podemos modelar essa igualdade como:

$$\varepsilon = \mu_v \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_j}}{\partial x_k \partial u'_i} \sim \frac{u^3}{l} \sim \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (36)$$

Onde μ_v é a viscosidade cinemática e l a escala de turbulência. O que precisamos agora pra fechar esse sistema de equações é uma prescrição da escala de turbulência.

Já Kolmogorov (1942) em seu estudo embrionário, definiu uma frequência de dissipação de turbulência (ω) como:

$$\omega \sim \frac{1}{l} k^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Focaremos nessas duas abordagens para esse trabalho, relacionando a energia cinética de turbulência com a função da dissipação de energia turbulenta (ε) e com a frequência de dissipação de turbulência (ω), afim de conseguir uma modelagem satisfatória para a viscosidade turbulenta.

2.4.3. Modelo de turbulência de duas equações.

O modelo de duas equações é amplamente usado tanto no meio acadêmico quanto na indústria por causa da relação qualidade dos resultados por custo computacional. Nesse modelo, a velocidade e a escala de turbulência são resolvidas em equações de transporte separadas, por isso o termo “duas equações”.

Os modelos de duas equações k - ε e k - ω usam a hipótese de difusão de gradiente para relacionar as tensões de Reynolds com os gradientes médios de velocidade e a viscosidade turbulenta. A viscosidade turbulenta é modelada como o produto de uma velocidade turbulenta e escala de turbulência (l).

2.4.3.1. Modelo k - ε .

Como mencionado anteriormente, a velocidade e a escala de turbulência são resolvidas em duas equações separadas. A energia cinética k , é dado como a razão de uma unidade de comprimento ao quadrado por uma unidade de tempo ao quadrado, como por exemplo m^2/s^2 . Nesse nosso modelo, consideramos essa energia cinética como turbulenta, então, temos todos aqueles termos de velocidades médias e flutuantes já descritos. Já ε , é a taxa com que essas flutuações de velocidade se dissipam, e é dimensionado como energia cinética por unidade de tempo, como por exemplo m^2/s^3 . Essas duas variáveis, apesar de serem resolvidas em equações de transporte separadas, podem se relacionar para resolver a viscosidade turbulenta μ_t da seguinte maneira:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (38)$$

As duas equações diferenciais do transporte para a energia cinética (k) e para a taxa de dissipação de turbulência (ε) são resolvidas respectivamente por essas duas equações a seguir.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (39.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (39.2)$$

Onde os coeficientes de fechamento (C_μ ; $C_{\varepsilon 1}$; $C_{\varepsilon 2}$; σ_k ; σ_ε) foram definidas empiricamente por Launder e Spalding (1974).

2.4.3.2. Modelo $k-\omega$

O desenvolvimento desse modelo foi proposto por Wilcox (1988) com base na energia cinética (k) e na frequência de dissipação de turbulência (ω), definida por Kolmogorov. Essa frequência de dissipação de turbulência possui dimensão de $[1/s]$, sendo definido como o inverso da escala de tempo onde a dissipação de turbulência ocorre. Sendo assim, o modelo $k-\omega$ resolve a viscosidade turbulenta modelando a energia cinética de turbulência (k) e a frequência de turbulência (ω):

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (40)$$

Onde k e ω são respectivamente:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \psi^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \vartheta^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (41.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \xi \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \psi \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \vartheta \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (41.2)$$

Onde os valores do coeficiente de fechamento (ξ , ψ , ψ^* , ϑ , ϑ^*) são definidos por Wilcox (1988). Na literatura, essas constantes são escritas em termos de alfa (α), beta (β), sigma (σ) e gama (γ), porém, para não confundir o leitor, guardei essas letras gregas para serem usadas mais à frente nesse trabalho.

Ao contrário do modelo $k-\varepsilon$, o modelo $k-\omega$ possui desvantagens em regiões de corrente livre e em grandes escalas de turbulência, pois os coeficientes de fechamento produzem uma dissipação extra de turbulência, fazendo com que a energia cinética (k) tenda a zero, prejudicando a predição do tensor de Reynolds. No mais, próximo de parede e em regiões com baixo número de Reynolds, esse modelo possui um excelente resultado.

Para esse modelo, é interessante que a malha numérica esteja com uma resolução maior perto das paredes, já que é a região em que ele representa melhor o escoamento.

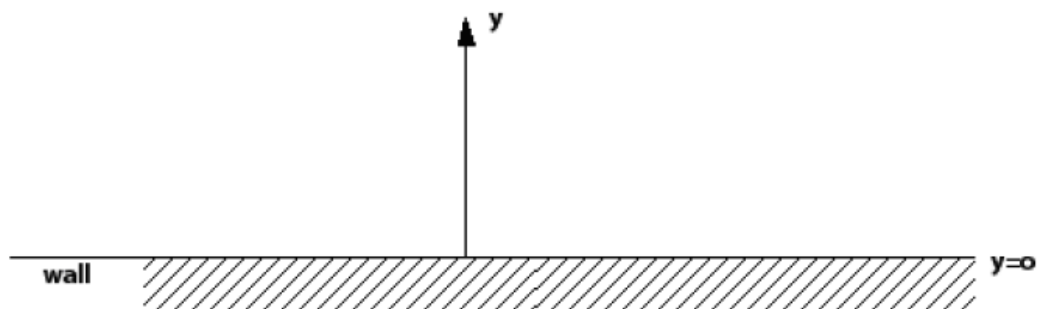
2.4.4. Modelo $k-\omega$ Baseline (BSL)

A ideia principal desse modelo de turbulência é reter a robustez da formulação de Wilcox ($k-\omega$) para a frequência de dissipação de turbulência que possui uma precisão alta próximo a regiões de parede, e unir a precisão do modelo $k-\varepsilon$ para as demais regiões (MENTEL, 1994).

Para que isso ocorra, o modelo $k-\omega$ é multiplicado por uma “Função de mistura” F_1 , e o modelo é transformado em $k-\varepsilon$ quando a função $1 - F_1 = 1$ for satisfeita. F_1 é uma função que diz a distância da parede, sendo $F_1 = 0$ quando estiver calculando fora da região da camada limite. Em termos mais simples, o modelo $k-\omega$ é utilizado dentro da região da camada limite ($1 - F_1 < 1$) e fora dela, a equação transita para o modelo $k-\varepsilon$.

Para calcular a distância da superfície da parede até um ponto qualquer do fluido, admitimos uma variável Y .

Figura 13: Distância Y normal a face da parede.



Fonte: ANSYS, 2015.

Podemos resolver o problema dessa distância através da equação de Poisson para uma variável ϕ qualquer:

$$\frac{d\phi^2}{d^2Y} = -1 \quad (42)$$

Após integrar duas vezes a equação (42) e encontrar as respectivas constantes, chegamos a seguinte equação que define a distância de um ponto até o ponto mais próximo da parede:

$$Y = -\frac{d\phi}{dy} + \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2 + 2\phi} \quad (43)$$

Em seu artigo, Mentel (1994) modela as equações dos modelos k - ε transformado e k - ω deixando-as em função de $1 - F_1$, obtendo assim o modelo BSL. Incluindo os efeitos de flutuação, o modelo BSL fica como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ & \quad - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \left(3\mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho k \right) - \beta^* \rho k \omega + \frac{\mu_t}{\rho \sigma_p} g_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + (1 + F_1) 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\sigma k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} \\ & \quad + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \left(3\mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho k \right) - \beta_3 \rho \omega^2 \\ & \quad + P_{\omega b} \end{aligned} \quad (44)$$

Onde $P_{\omega b}$ é um termo adicional de flutuação, e os termos $(\beta^*, \alpha_1, \beta_3, \sigma_{\omega 2}, \sigma_{\omega 3}, \sigma_p, \alpha_3)$ são coeficientes de fechamento.

2.4.5. Modelo shear stress transport (SST)

Como mencionado anteriormente, o modelo BSL combina as vantagens dos modelos de turbulência k - ε e k - ω , porém, ele falha na previsão do tamanho da camada limite no início e ao longo de uma superfície suave. Essa deficiência é discutida com mais detalhes por Mentel(2004), mas, dentre outros fatores, o principal é que o modelo BSL não leva em consideração na equação do transporte, uma tensão de cisalhamento turbulenta, superestimando a viscosidade turbulenta. Assim, para se obter um comportamento do transporte do fluido adequado, coloca-se um limitador para a formulação da viscosidade:

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_1 \text{ ou } SF_2)} \quad (47)$$

Onde a_1 é uma constante empírica, S é o módulo do tensor de deformação médio e F_1 , F_2 são as funções que determinam qual modelo de turbulência será aplicado para aquela distância da parede. Sendo F_1 :

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (48)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega Y}, \frac{500 v_{nw}}{Y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho k}{C D_{kw} \sigma_\varepsilon Y^2} \right] \quad (49)$$

$$C D_{kw} = \max \left(\frac{2}{\rho} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \nabla k \nabla \omega, 1 e^{-10} \right) \quad (50)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (51)$$

$$\arg_2 = \max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega Y}, \frac{500 v_{nw}}{Y^2 \omega} \right) \quad (52)$$

2.5. ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS.

Até aqui, vimos as equações de transporte para fluidos contínuos com uma única fase, porém, na natureza temos casos de escoamentos com interação de diferentes tipos de materiais e fases, sendo eles misturados ou não. Em geral, podemos agrupar essas interações em 4 categorias: Escoamento com Líquido-Gás ou Líquido-Líquido; Escoamento Sólido-Gás; Escoamento Sólido-Líquido; e escoamento com 3 fases.

Essas Interações multifásicas puderam ser melhor representadas de acordo com o avanço da dinâmica dos fluidos computacional, tendo duas abordagens principais para a mesma: a Lagrangiana-Euleriana e a Euleriana-Euleriana.

Na primeira abordagem, você pode ter frações volumétricas com uma das fases ou com nenhuma ocupando um certo volume de controle. As trajetórias das partículas ou gotículas são calculadas individualmente em intervalos especificados, isso faz com que o modelo seja apropriado para casos de fluxos de materiais sólidos e granulares por exemplo. Já para aplicações onde temos que considerar frações volumétricas de uma fase para outra, ele se torna inadequado. Por esse motivo, essa abordagem é utilizada quando trabalhamos com o método de elementos discretos.

Já para a segunda abordagem, como o volume de uma fase não pode ser ocupado pelas outras fases, o conceito de fração de volume fásico é introduzido. Essas frações de volume são assumidas como funções contínuas de espaço e tempo e sua soma é igual a um. Equações de conservação para cada fase são derivadas para obter um conjunto de equações, que possuem estrutura semelhante para todas as fases. De uma maneira geral, podemos dizer que abordagem Euleriana-Euleriana possui três modelos principais: O modelo Euleriano, o modelo de mistura e o Método de Volume de Fluido (VOF – Volume Of Fluid).

A escolha do modelo a ser trabalhado depende muito do tipo de escoamento e das interações entre as fases. Para o caso a ser estudado, que é o escoamento com superfície livre, o ANSYS(2005) recomenda a utilização do método VOF.

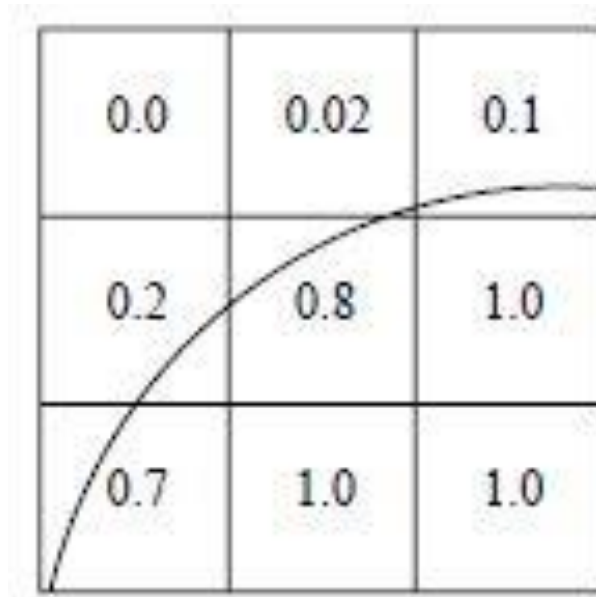
2.5.1. Método do volume de fluido (VOF – VOLUME OF FLUID)

O modelo VOF pode modelar dois ou mais fluidos imiscíveis resolvendo um único conjunto de equações de momento e identificando a fração de volume de cada um dos fluidos em todo o domínio.

Quando trabalhamos com dois fluidos ou até mesmo com duas fases, temos a preocupação de discretizar no nosso domínio qual a propriedade devemos inserir para cada volume de controle. Para uma discretização completa, um número excessivo de nós deveria ser inclusos, assim, todo o domínio poderia ser devidamente discretizado, indicando qual o fluido ou fase do fluido se encontra em cada parte do domínio. Isso pode até ser possível em uma simulação numérica direta, mas é muitas vezes inviável.

Para resolver esse problema, assumimos que cada pequena célula no domínio é determinada com uma fração de volume de fluido (χ), sendo $\chi = 1$ para uma célula preenchida 100% com uma fase e $\chi = 0$ para uma célula preenchida com outra fase e com a condição de $0 < \chi < 1$ para indicar a fração de cada fase dentro de uma célula.

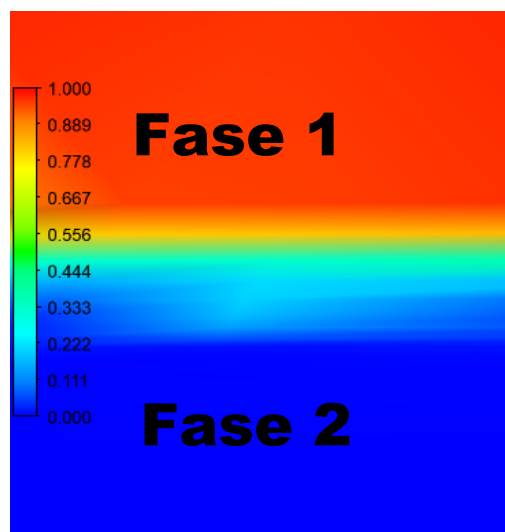
Figura 14: Linha que indica interface entre duas fases distintas e a fração de cada fase para cada célula.



Fonte: TRYGGVASON et. Al,2011

Conforme a figura 14 mostra, os resultados são exibidos em formato de um mapa de cores. Trabalhando com os compiladores da ANSYS, o CFX e o Fluent, esse mapa pode ser visto com um gradiente de cores que vai do azul (que representa o valor mínimo) ao vermelho (que representa o valor máximo).

Figura 15: Fração de volume mostrado por gradiente de cor ($0 \leq \chi \leq 1$).



Fonte: Autoria própria.

Há várias maneiras de descrever a interface S entre dois fluidos. Uma das mais simples que encontramos na literatura principalmente quando se trata de problemas com superfície livre, é a adoção de uma função de altura h . Como nem sempre a nossa célula a ser analisada terá o mesmo valor de fase χ , a altura estará em função do tempo e do espaço ($h(x, y, z, t)$). A fase vai mudar de acordo com a velocidade normal a interface, que representaremos ainda com a letra n . Assim:

$$\partial_t \chi + \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot \nabla \chi = 0 \quad (53)$$

Lembrando que $\nabla \chi = \vec{n} \delta_S$.

Essa fração da fase influencia diretamente nas propriedades do fluido, mais especificamente massa específica (ρ) e viscosidade (μ).

$$\rho = \chi \rho_1 + (1 - \chi) \rho_2 \quad (54)$$

$$\mu = \chi \mu_1 + (1 - \chi) \mu_2 \quad (55)$$

Anteriormente comentamos que o fluido a ser trabalhado seria incompressível e teria a sua viscosidade constante, por isso, simplificamos as equações da continuidade e da conservação da massa, porém, como principalmente nas regiões de superfície livre, temos uma variação dessas variáveis com o tempo, devemos utilizar a forma expandida das duas equações, sendo a equação (18) para a conservação da massa e a equação (27) para a quantidade de movimento.

A maior vantagem do método VOF é poder utilizar a mesma equação do transporte para os dois fluidos ou duas fases, apenas com essa ressalva de adicionar a fração de volume de fluido em cada célula do nosso domínio. Tryggvason et al. (2011) e Bilger et al. (2017) escrevem sobre as diferentes abordagens para determinação da fração de volume (χ), e Crowe (2005) em seu manual, apresenta o método VOF de forma mais expandida, assim como outros tipos de abordagens para resolver o problema dos escoamentos multifásicos.

2.6. GERAÇÃO DO DOMÍNIO DISCRETO E APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

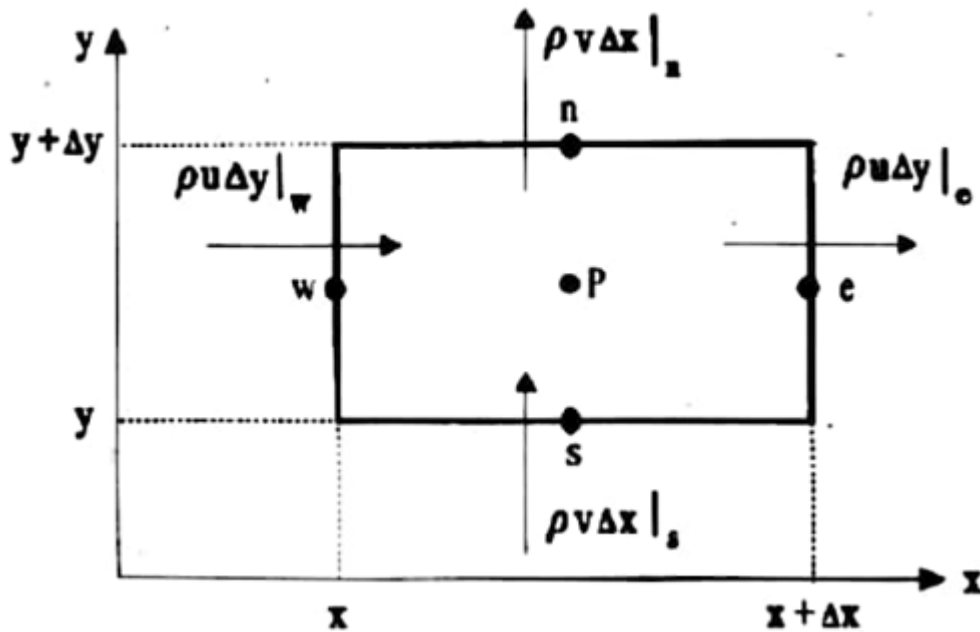
Um dos métodos mais comuns utilizado pela comunidade científica para resolver as equações da quantidade de movimento, da conservação da massa e até mesmo da conservação

da energia, é o método dos volumes finitos, isso acontece porquê, dentre outros motivos, é o método que a maior parte dos compiladores utilizam.

2.6.1. Método dos volumes finitos

Para entender melhor como funciona esse método, vamos fazer o balanço de massa que passa por um volume P qualquer.

Figura 16: Balanço de massa em um volume finito.



Fonte: Maliska, 2013

As letras [n, e, s, w] representam as iniciais dos quatro pontos cardeais da rosa dos ventos [North, east, south, west], usado para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica. Podemos escrever o balanço de massa nesse volume finito como:

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (57)$$

Dividindo a equação (57) por $\Delta x \Delta y$, obtemos:

$$\frac{\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w}{\Delta x} + \frac{\rho u \Delta x|_n - \rho u \Delta x|_s}{\Delta y} = 0 \quad (58)$$

Aplicando o conceito de limite na equação (58), obtemos a forma diferencial da equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (59)$$

A equação (59) está na forma conservativa, no método dos volumes finitos, obtemos a aproximação numérica dessa equação através da integração da equação, usando como intervalos de integração o valor das variáveis em cada fronteira do volume finito. Assim, utilizando o volume mostrado na figura 16, obtemos a seguinte integral:

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dx dy = 0 \quad (60)$$

Ao repetirmos o procedimento para todos os volumes elementares, obtemos um sistema de equações algébricas.

Para os curiosos que se proporem a resolver a equação (60), adianto que o resultado da mesma é a equação (58), apesar desse fato, o método dos volumes finitos é resolvido por equações diferenciais pelo fato de que ao analisarmos uma equação da quantidade de movimento por exemplo em um volume um pouco mais irregular que o da figura 7, o trabalho fica um pouco mais complicado.

O conjunto de células forma o que chamamos de domínio computacional ou domínio numérico, que possui geometria aproximada do domínio a ser estudado. Os softwares compiladores de códigos de CFD mais modernos possuem um pacote de geração de domínio computacional que atendem muito bem a maioria dos casos. Trabalhando com o ANSYS, usa-se geralmente o ANSYS Meshing para malhas não-estruturadas e o ICEM CFD para malhas estruturadas.

2.6.2. Malhas estruturadas e não-estruturadas

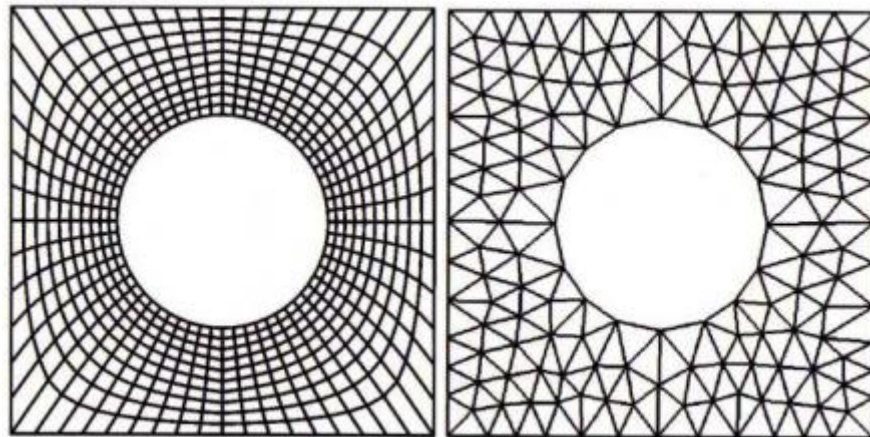
Uma malha estruturada consiste em células planas com quatro arestas (2D) ou volumétricas com seis faces (3D). Essas células possuem nós que são acompanhadas com

numerações (i, j, k) que representam um sistema de coordenadas espaciais (retangulares, cilíndricas etc).

Já uma malha não-estruturada consiste em células planas com formatos triangulares ou quadriláteros (2D) e tetraedros ou hexaedros (3D). Ao contrário da malha estruturada que utiliza um sistema de numeração, a malha não-estruturada identifica a posição de cada célula com um código interno.

Apesar da malha estruturada apresentar células mais organizadas e com códigos bem mais simples que a não-estruturada, para domínios com geometrias muito complexas, acaba-se tendo bem menos trabalho fazer o domínio computacional em uma malha não-estruturada.

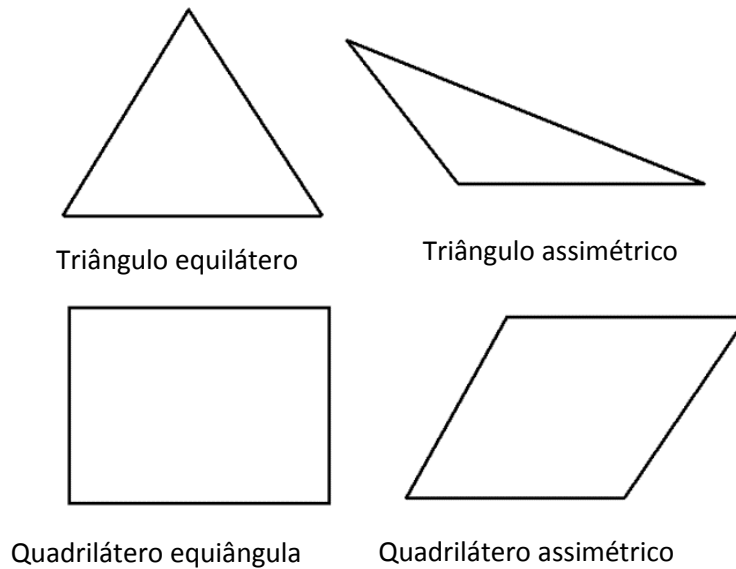
Figura 17: Diferença entre malha estruturada (esquerda) e malha não-estruturada (direita).



Fonte: MALISKA, 2013.

Com os softwares atuais, o tipo da malha deixou de ser o fator mais relevante para se obter um bom resultado, sendo substituído pela qualidade da malha. Como mencionado anteriormente, resolver as equações do movimento e da conservação da massa pode se tornar um trabalho complicado quando temos células muito deformadas, podendo induzir ao erro ou até mesmo nem conseguir resolver essas equações em células muito deformadas, assim, uma das formas mais utilizadas para determinar a qualidade da malha é o grau de deformação ou assimetria (*Skewness*) de cada célula, onde quanto mais equilátero e/ou equiângulo for a célula, menor será o grau de assimetria.

Figura 18: Quadrados e triângulos equiláteros e assimétricos.



Fonte: Adaptado de ANSYS, 2017

Para medir a assimetria pela equilateralidade de cada célula, comparamos o que seria um tamanho ideal da célula com o tamanho atual dela, esse tamanho inclui comparar as medidas de todas as arestas de todas as faces, em uma pirâmide por exemplo, todos os quatro triângulos precisam ter mesmo tamanho de aresta e a base precisa ser um quadrado. Assim, temos que a assimetria é dada como:

$$Assimetria = \frac{\text{tamanho de célula ideal} - \text{tamanho de célula}}{\text{tamanho de célula ideal}} \quad (61)$$

Já para medir a assimetria pela equiangularidade, analisamos os ângulos formados por cada par de arestas em uma face da célula. Assim, a assimetria passa a ser calculada como:

$$Assimetria = \max\left(\frac{\theta_{max} - \theta_{ideal}}{180 - \theta_{ideal}}, \frac{\theta_{ideal} - \theta_{min}}{\theta_{ideal}}\right) \quad (62)$$

Onde θ_{max} e θ_{min} são os ângulos máximos e mínimos da face e θ_{ideal} é o ângulo para que a face seja equiangular, sendo 60° para uma face triangular e 90° para uma face quadrilátera.

O cálculo da assimetria pode retornar valores entre 0 e 1, sendo 0 uma célula ótima e 1 uma célula defeituosa. Uma malha com valores de assimetria de até 0,5 é aceitável, e esse fator deve ser melhor observado em regiões que exigem uma maior precisão dos cálculos.

2.6.3. Condições de contorno

As condições de contorno definem como será o comportamento de um escoamento. Em um domínio, elas são definidas nas faces exteriores do domínio, e em alguns casos, nas faces internas.

Dentre as condições de contorno, temos a de parede (*wall*) como a mais simples. Para essa, dizemos que velocidade normal é igual a zero ($\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$) na face nomeada como parede, assim, nenhum fluido pode atravessá-la. Além disso, a parede deverá ser definida com condição de escorregamento ou não-escorregamento, onde no segundo caso, a velocidade tangencial a face da parede é igual a 0.

Outras condições estabelecidas nas fronteiras são as de entrada (*inlet*) e saída (*outlet*) de fluido. Ao contrário das condições de parede, nessa você permite que o fluido transite para dentro do domínio no caso da entrada e para fora no caso da saída.

Na condição de entrada, deverá ser definido uma pressão ou uma velocidade, nunca os dois juntos, pois essas duas variáveis estão acopladas nas equações de movimento, sendo a pressão calculada com a velocidade fornecida e vice-versa.

Na saída, uma pressão ou uma velocidade também são definidas, possibilitando que o escoamento saia do domínio. Além disso, quando estiver analisando os efeitos de turbulência, deverá ser definido o grau de turbulência que está entrando e saindo do domínio, para que possa ser calculada a produção e dissipação da mesma.

Uma quarta condição também bastante utilizada é a de fronteira aberta. Nessa, o fluido pode tanto transitar para dentro e para fora do domínio.

3. VALIDAÇÃO DO MÉTODO VOF

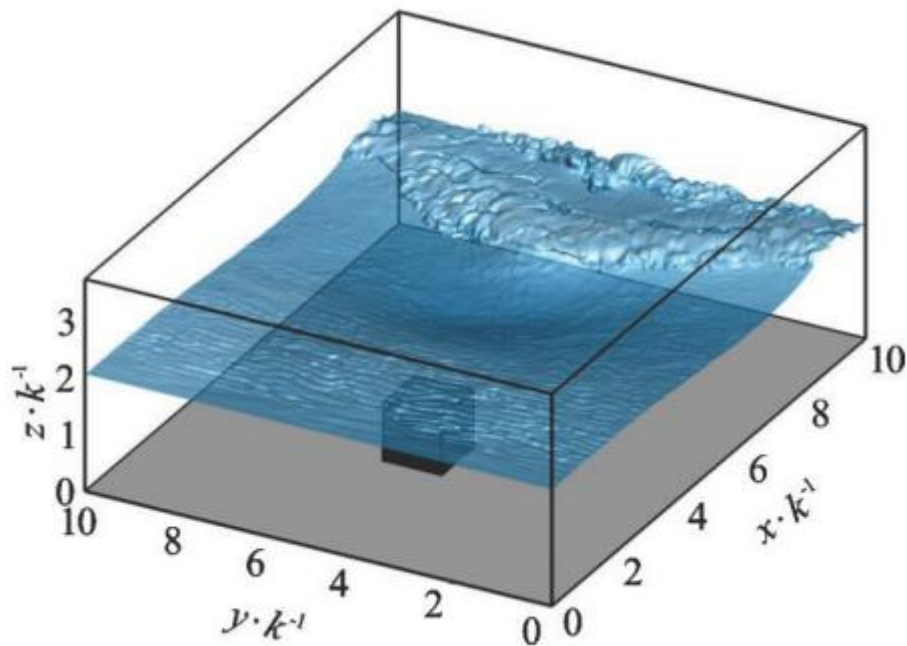
Esse trabalho contém simulações utilizando o método VOF para solucionar o problema da conservação da quantidade de movimento para um escoamento com superfície livre, porém, ao contrário do que a grande maioria dos autores apresentam, para o nosso caso, somente uma fração do túnel apresentará a superfície livre.

Pensando nisso, descartou-se a possibilidade de trabalhar com o compilador comercial de CFD, o *Fluent* da ANSYS, uma vez que apesar possuir uma interface para trabalhar com esse método, no *Fluent* deve-se considerar toda a superfície definida por um nível estipulado pelo usuário como sendo superfície livre.

A solução encontrada, foi trabalhar com o outro compilador comercial de CFD, que pudesse solucionar o nosso problema de ter apenas uma parte da superfície livre. Felizmente, encontrou-se uma saída com o CFX, também da ANSYS. O problema, é que o CFX não possui uma interface explícita com o método VOF como você teria ao utilizar o *Fluent*, basicamente, o CFX foi programado para que o usuário apenas definisse a física do problema, sem precisar se preocupar com a parte matemática (qual equação usar, quais valores para as constantes de fechamento etc), assim, para utilizarmos o método VOF no CFX, você deve mandar o programa resolver as equações de continuidade de forma homogênea, assim, o programa vai resolver o problema do volume de fluido em cada célula pelo método do volume de fluido (ANSYS, 2005).

Para poder validar o método no CFX, foi escolhido um artigo no qual é feito um estudo de caso de um escoamento com superfície livre usando o método VOF, o artigo “*Large eddy simulation of free-surface flows*”. Nele foi escolhido dentre os casos estudados o de um fluxo de água com superfície livre passando por um cubo.

Figura 19: Caso estudado por McSherry et al. (2017)



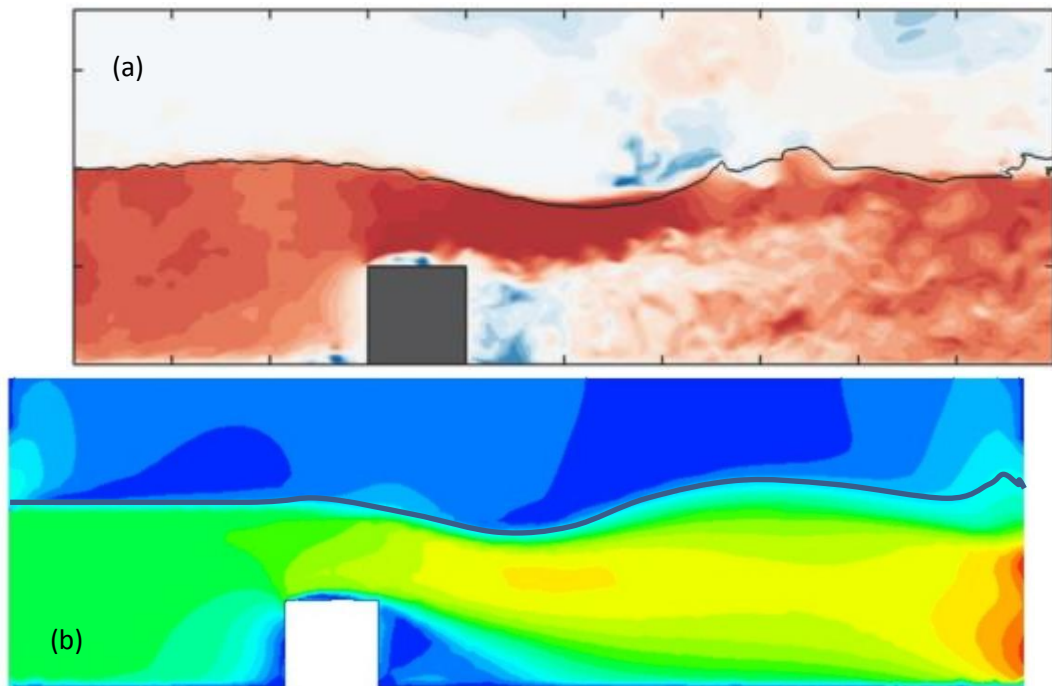
Fonte: MCSHERRY et al., 2017

Em seu estudo de caso, McSherry et al. (2017) Considerou que o objeto sólido no interior do domínio fluido fosse um cubo que tivesse uma altura ao qual ele chamou de k , a altura da superfície livre partindo da superfície inferior do domínio fosse $2k$, o cubo estivesse a uma distância de $3k$ da região de entrada e $7k$ da região de saída, que se posicionasse a $3.5k$ de distância de cada lateral e acima do domínio líquido, tivesse uma camada de ar equivalente a uma altura de $1.5k$. Os únicos dados fornecidos como condição de contorno foram um número de Reynolds de 40000 e um número de Froude de 0.6.

Após estimar um valor para k que satisfizesse os valores para o número de Reynolds e o número de Froude, gerou-se um domínio com o auxílio do programa de CAD Solidworks. Em seguida, esse domínio foi exportado para o ANSYS para ser transformado em um domínio discreto.

As condições de contorno disponibilizadas por McSherry et al. (2017) foram inseridas no programa, com exceção do modelo de turbulência, que foi utilizado um menos robusto afim de economizar poder computacional. O resultado pode ser conferido na figura 20.

**Figura 20: contorno da velocidade do fluxo para: (a) Simulação de McSherry et al. (2017);
(b) Simulação do autor**



Fonte: Adaptado de MCSHERRY et al. (2017)

Nota-se que para o primeiro caso, a turbulência é mais visível, uma vez que o modelo de turbulência utilizado foi mais robusto, contudo, o comportamento do fluido é muito similar a simulação realizada pelo autor, isso fica ainda mais evidente ao compararmos a linha preta que delimita a fronteira de superfície livre.

A maior diferença ao se utilizar o CFX para trabalhar com o método VOF se comparado ao *Fluent*, é a facilidade em definir o material de cada domínio, assim, levando para o caso do túnel de água, podemos criar um domínio acima da seção de teste e dizer que esse domínio é o ar, estabelecendo a condição de superfície livre. Ao optarmos por uma solução homogênea das equações da quantidade de movimento, o CFX utiliza a metodologia de fração de fluido dentro de cada volume de controle, e assim, pode solucionar apenas uma equação da conservação da massa e uma equação para quantidade de movimento.

4. DIMENSIONAMENTO DE UM TÚNEL DE ÁGUA CIRCULANTE HORIZONTAL

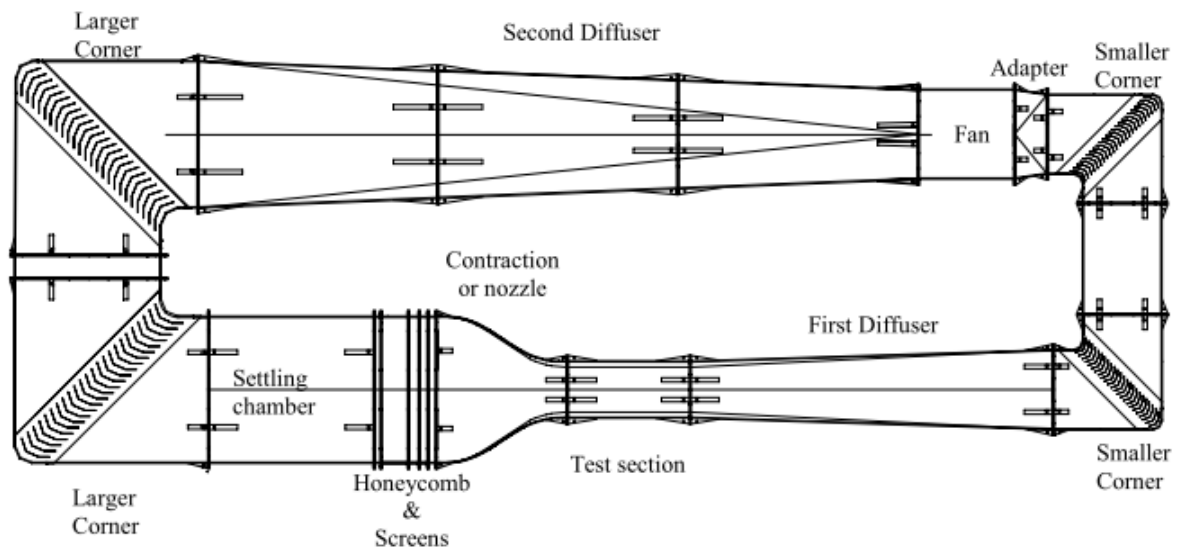
Partindo do critério de projeto apresentado na introdução, onde a velocidade máxima do fluxo precisa ser de 3 m/s , largura da seção de testes de 3 m e comprimento de 12 m , e do espaço físico disponível, optou-se por um túnel de água do tipo circulante (com circuito fechado) e horizontal, uma vez que o galpão onde ficará instalado possui apenas 1 piso.

Como descrito na equação 8, para que o escoamento sofra uma menor resistência, o valor da altura do canal aberto deve ser a metade do comprimento da base, assim, temos que a dimensão ótima para a seção de testes, para que o escoamento sofra menos resistência, seja de $3 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$.

Com esses valores em mãos, e sob a condição do espaço físico que temos, partiremos para o dimensionamento de todos os componentes do túnel.

O modelo de Túnel usado como modelo base, foi o desenvolvido por Brusca et al. (2011).

Figura 21: Túnel de vento de Brusca et al. (2011).



Fonte: BRUSCA et al. (2011).

Os calculos a seguir foram feitos com um auxílio de uma planilha do excel.

4.2.SEÇÃO DE TESTES

Tendo o valor da seção transversal já definido, o próximo passo seria calcular o comprimento da seção de testes, uma vez que, segundo Mehta (1977), se o seu comprimento ultrapassar o valor de 3 vezes o seu diâmetro hidráulico, fica inviável realizar algum experimento, assim, um valor aceitável para o comprimento da seção de teste (L_{st}) seria de:

$$L_{st} = 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{A_c}{P_m} \right) \quad (63)$$

A equação 63 nos retorna um valor para o comprimento da seção de testes de 9 metros, algo abaixo do estipulado pelo critério de projeto, isso significa que uma parte da seção de testes estaria comprometida pelo tamanho da sua camada limite, no entanto, como o túnel inicialmente foi projetado para experimentos com cascos de embarcações, que por sua vez utilizam apenas a superfície livre da seção de teste, não há um problema em manter os 12 metros, todavia, caso o túnel seja utilizado para outros fins, deve-se atentar a usar apenas os 9 metros iniciais do mesmo.

4.3.CONTRAÇÃO

Para o projeto da contração, foram testados dois modelos, sendo um o modelo comum, onde tem-se 4 paredes com formato de uma curva sinuosa e o outro modelo sem a parte superior da contração, tendo em vista que em alguns túneis horizontais construídos, a parte superior da contração servia como um agente gerador de onda.

Uma tabela foi feita com o objetivo de facilitar a comparação entre os dados da contração, nela, é apresentado os valores da área menor, os valores da área maior, a razão de contração e a relação entre o comprimento da contração pela altura da entrada ($L/2H_i$). Por ser um túnel com seção de teste retangular, a relação do comprimento com a altura varia.

Para respeitar as restrições estabelecidas por Mehta (1977), o qual sugere que a relação entre o comprimento e a altura da entrada da seção tenha um valor entre 0.67 e 1.79, optou-se por um comprimento de contração de 3.5 m, uma altura da entrada da seção de testes de 3.5 m e uma largura de 5 m, assim, respeitamos as restrições de Mehta (1977) e ficamos na faixa onde o escoamento não possui separação, como mostra a figura 6.

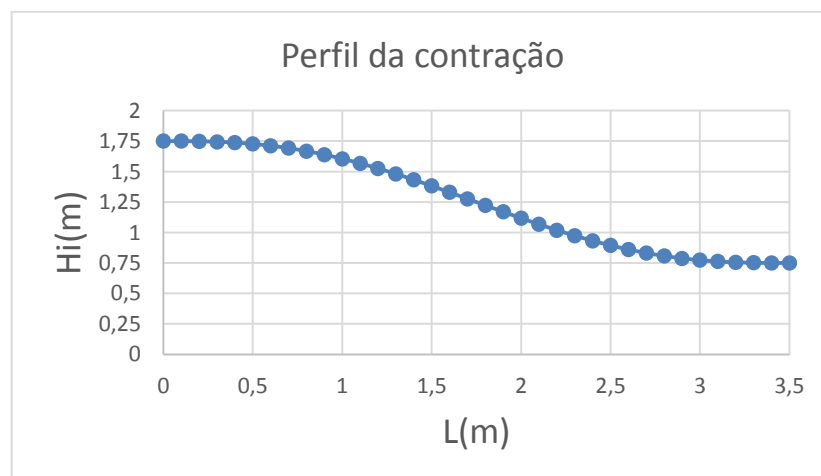
Tabela 1: Diferença entre as razões de contração.

DIFERENÇA ENTRE AS CONTRAÇÕES					
Completa			S\ Parte Superior		
Descrição	valor	unidade	Descrição	valor	unidade
Área menor	4,5	m ²	Área menor	4,5	m ²
Área maior	17,5	m ²	Área maior	12,5	m ²
Razão de c.	3,89	-	Razão de c.	2,78	-
$L/2H_{iv}$	1	-	$L/2H_i$	1,4	-
$L/2H_{ih}$	0,7	-	$L/2H_i$	0,7	-

Fonte: Autoria Própria.

Sendo: H_{iv} a altura vertical da entrada da contração e H_{ih} a altura horizontal da entrada da contração.

Outro fator importante para a contração é o seu contorno. Como mencionado na revisão sobre contrações, o polinômio de quinta ordem desenvolvido por Mehta (1988) foi o que obteve um melhor resultado, minimizando os gradientes de pressão na contração, logo, esse foi utilizado para desenvolver os perfis da contração. A figura 22 mostra um exemplo do perfil da contração vertical, gerado no excel.

Figura 22: Perfil de contração

Fonte: Autoria própria.

4.4.COLMEIA

Para o dimensionamento das colmeias, levei em consideração que a mesma seria do tipo hexagonal quadrado, uma vez que esse tipo não apresenta os cantos como em uma colmeia retangular e possui um encaixe perfeito uma célula com a outra, em outras palavras, esse tipo de colmeia reúne as vantagens das outras duas.

Sabemos que a porosidade da colmeia deve ser superior a 0.8, logo, a soma de todas as áreas internas de cada célula, deve ser igual ou superior a 80% da área total.

Para encontrarmos um número de células (N_{cel}) que preencha totalmente a colmeia, usou-se a relação entre a área total e a área de uma célula, no caso de um hexágono:

$$N_{cel} = \frac{2A_{total}}{3l_{hex}^2\sqrt{3}} \quad (64)$$

A área da célula da colmeia dependerá do tamanho disponível para a compra. Para fins de cálculo futuro, considerarei o valor da porosidade da colmeia sendo de 0.8.

4.5. ALETAS DIRECIONADORAS.

Para não haver o estrangulamento do fluido e para diminuir a perda de carga no local da curva, optou-se por utilizar curvas do tipo expandida (ver figura 11), afim de aumentar a área da seção transversal da mesma

Na curva mais larga, foi conveniente a escolha de um número de pás de 13 , um pouco mais da metade do número recomendado para túnel de vento. Essa escolha foi motivada pela possível perda de carga que as aletas gerariam, uma vez que estariam muito próximas umas das outras, assim temos que a distância entre uma aleta e outra será de:

$$h_{al} = \frac{6}{15} = 0.4m$$

Somando o número de pás com as paredes da curva interna e curva externa, temos um total de 15, que nos retorna um valor de 0.4 m.

A corda e o raio foram calculados na sequência. O ângulo formado pela seção circular foi de 90°, como recomendado por Pullinger & Sargison (2007).

Para a curva menor, foi escolhido uma distância entre as pás de 0.4 m, com o mesmo objetivo de reduzir a perda de carga, mantendo a qualidade do escoamento na seção de testes.

4.6.DIFUSOR

O Seguindo o modelo de Brusca et al. (2011), teríamos 2 difusores, um primeiro na saída da seção de testes e um segundo na saída da região da bomba, porém, para não ocupar um espaço físico ainda maior, foi conveniente acrescentar apenas o segundo difusor. Assim, mantendo a área da seção da bomba sendo o mesmo da seção de teste (3 m x 1.5 m), temos uma razão de área igual a razão encontrada na contração.

Somando o comprimento da contração, seção de teste, e da região de estabilização onde fica a colmeia, temos um comprimento considerável, assim, optou-se por instalar um difusor de ângulo fechado, com $2\theta = 7^\circ$ e por conseguinte, com comprimento do difusor de 16.5 m.

A parte superior do difusor é diferente para os dois modelos de túnel, uma vez que a razão de área muda, a

4.7.PERDA DE CARGA

Para estimar os valores de perda de carga total dos elementos do túnel de água, foi utilizado a equação 65:

$$\Delta p_i = \frac{1}{2} k_i \rho V_i^2 \quad (65)$$

Sendo Δp_i a perda de carga, k_i o fator de perda de carga calculado para cada componente, ρ a densidade do fluido e V_i a velocidade em cada componente.

O coeficiente de atrito (f) utilizado para estimar o coeficiente de perda de carga em cada componente, pode ser obtido pela equação 66.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\frac{\varepsilon_{wall}}{D_h}}{3.7} + \frac{2.51}{Re_{D_h} \sqrt{f}} \right) \quad (66)$$

Onde ε_{wall} é a rugosidade superficial do material, D_h o diâmetro hidráulico de um componente e Re_{D_h} o número de Reynolds de cada componente específico.

Apesar de não ter sido mencionado ao longo do texto, uma tela será instalado antes da seção da bomba, afim de impedir que qualquer objeto muito grande passe e danifique a mesma.

Para calcular a perda de pressão na tela de segurança, o coeficiente de perda de carga da tela k_m pode ser utilizado, segundo Barlow et al., (1999), a equação 67

$$k_m = K_{mesh} K_{Rn} \sigma_s + \left(\frac{\sigma_s}{\beta_s} \right)^2 \quad (67)$$

Onde β_s é a porosidade da tela, σ_s a solidez da malha, K_{mesh} representa a rugosidade do material da tela.

De acordo com Idel'chik (1966) o fator de malha para metal é 1,3 e foi o valor utilizado no projeto. K_{Rn} só tem influência para malhas muito finas, que não é o caso, sendo assim o valor dele foi considerado 1.

A perda de carga foi calculada com o auxílio do excel, e seus resultados são mostrados na tabela 2.

Tabela 2: Perda de carga do túnel de água.

Componente	Coeficiente de Perda	Perda de Carga (m)
Curva 1	0.1044	0.048
Curva 2	0.1044	0.048
Difusor	0.0334	0.015
Curva 3	0.1051	0.003
Curva 4	0.1051	0.003
Contração	0.004	0.0006
Trechos Retos	0.0164	0.008
Colmeia	0.403	0.012
Tela de Proteção	0.1605	0.074
PERDA DE CARGA TOTAL (m)		0.212

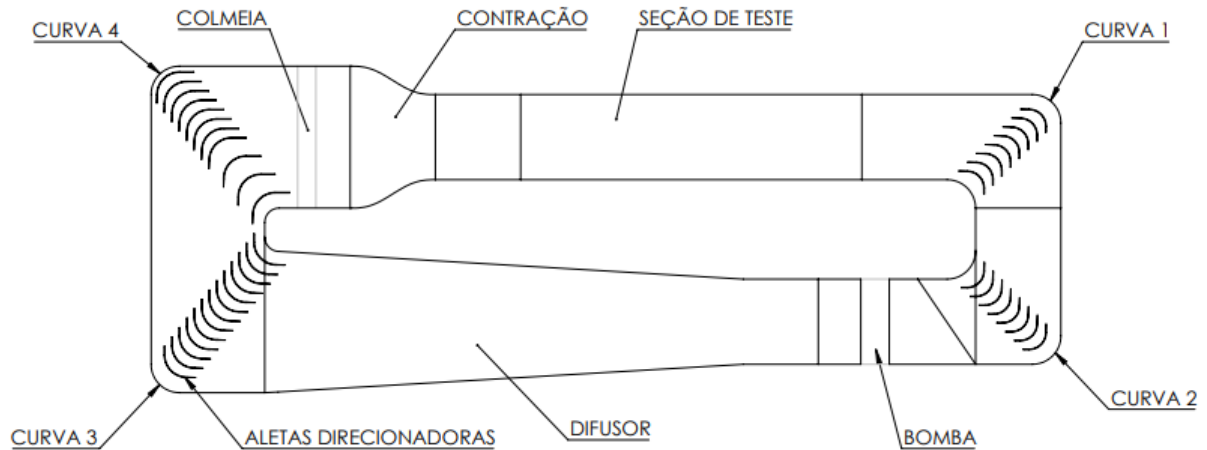
Fonte: Autoria própria.

5. ANÁLISE DO FLUXO

5.1. GERAÇÃO DO DOMÍNIO

Após todas as considerações feitas no capítulo anterior, foi desenhado o túnel de água com o auxílio do software de CAD Solidwoks. O resultado final pode ser visto na figura 23.

Figura 23: Desenho esquemático do túnel de água circulante.



Fonte: Autoria própria

Um domínio foi acrescentado acima da seção de testes para poder simular uma coluna de ar e assim, definir a condição de superfície livre para essa seção.

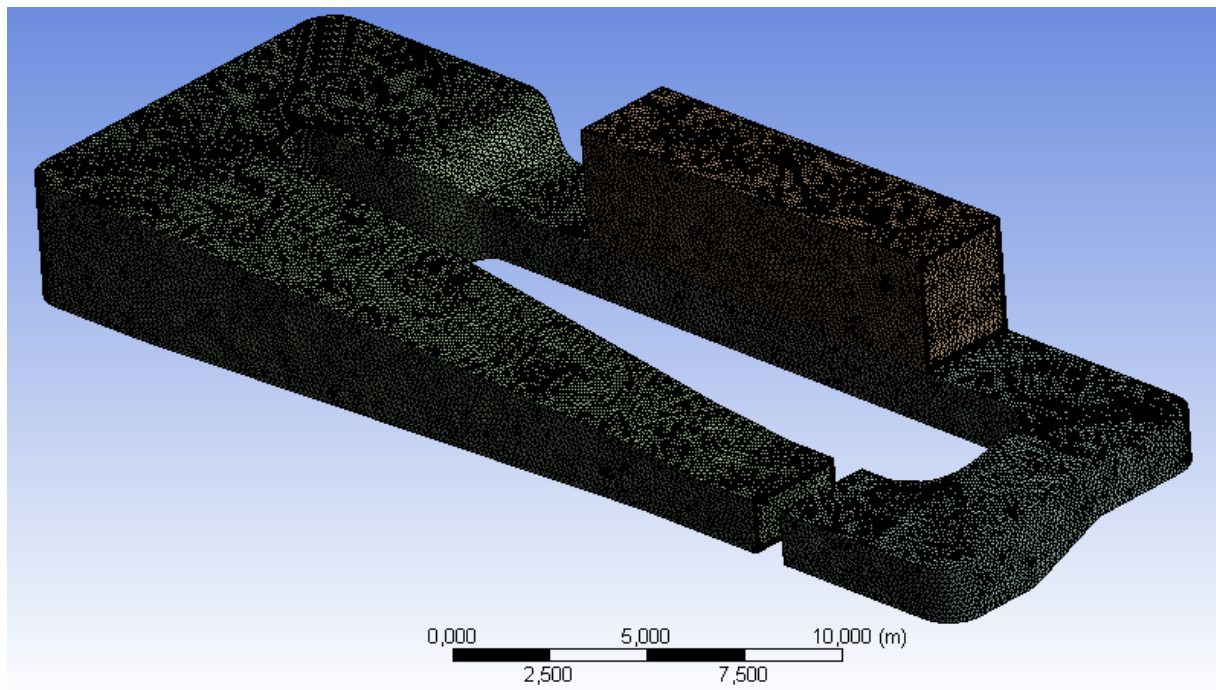
Esse domínio foi exportado para o software de simulação numérica ANSYS, para ser ter seu escoamento analisado no CFX.

O próximo passo, foi a geração do domínio discreto utilizando o método dos elementos discretos.

5.2. GERAÇÃO DO DOMÍNIO DISCRETO

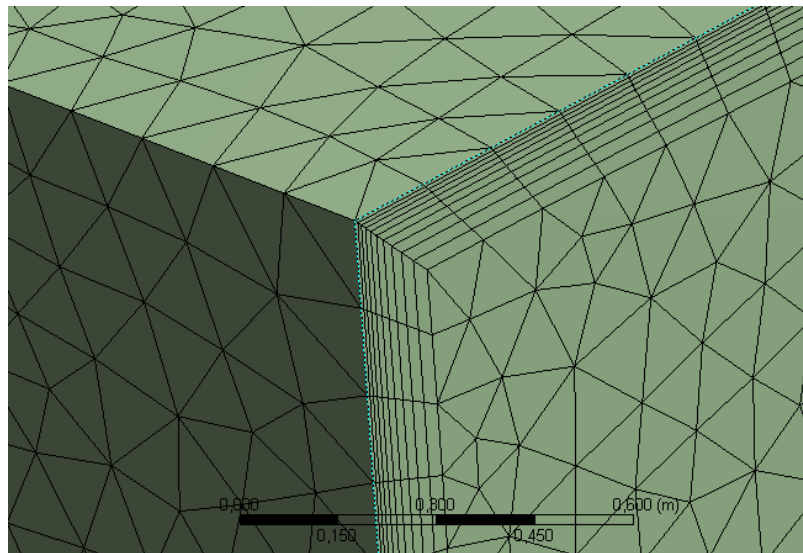
Para a geração do domínio discreto, foi utilizando o pacote de geração de malha da ANSYS, o ANSYS meshing. Nesse pacote, o domínio é transformado em um domínio discreto utilizando o método de elementos finitos com uma malha não estruturada. Algumas ferramentas de refinamento de malha foram utilizadas para aumentar o número de volumes e diminuir o tamanho de cada célula próximo a paredes, além disso, foi avaliado a média do grau de assimetria das células do domínio, esse valor servirá como um indicativo para a qualidade da malha.

Figura 24: Domínio discreto pelo método dos volumes finitos.



Fonte: Autoria própria

Figura 25: Condição de refinamento próximo a paredes.

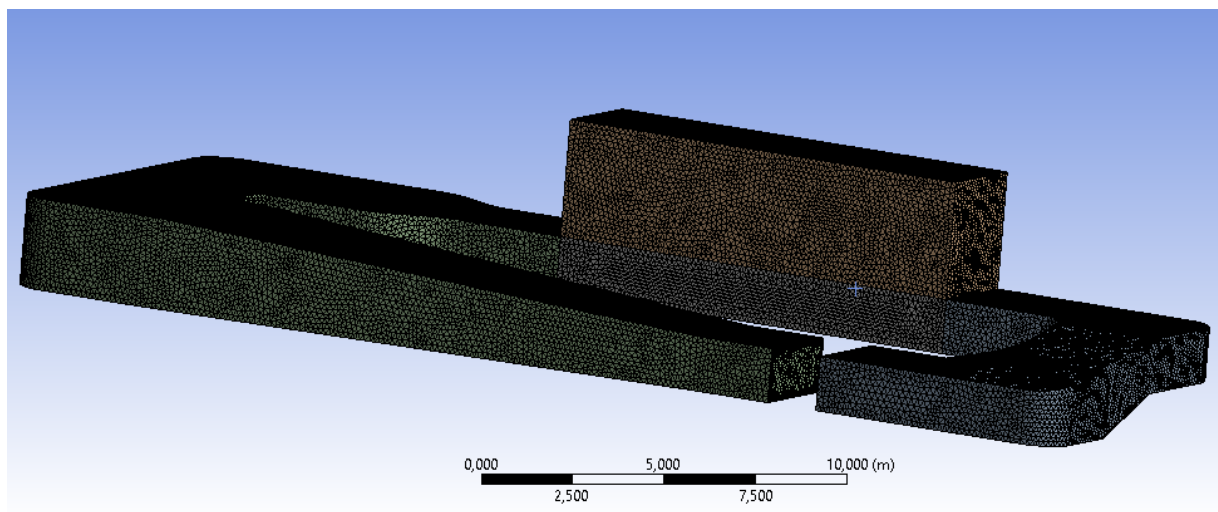


Fonte: Autoria própria.

O domínio possui algo próximo de 4 milhões de elementos e 1.5 milhões de nós, com grau de assimetria média de 0.23, um valor ótimo se utilizarmos o critério descrito na seção de malhas desse trabalho.

Além desse domínio, outro domínio foi gerado, sem a parte superior da contração, afim de poder comparar o escoamento nos dois modelos de túnel de água.

Figura 26: Domínio discreto pelo método de elementos finitos para outro modelo de túnel de água



Fonte: Autoria própria.

5.3. CONDIÇÃO DE CONTORNO

Como mencionado anteriormente, uma das condições de projeto é que o túnel de água possua uma velocidade na seção de testes de 3 m/s , para isso, tendo em vista que a seção da bomba possui a mesma área da seção de testes, foi inserido uma velocidade de 3 m/s como condição de entrada na saída da bomba.

Para a condição de saída, foi considerado uma pressão hidrostática onde seria a entrada de fluido para a seção da bomba, afim de simular a pressão de coluna de água que está sendo exercida naquele local.

As paredes possuem uma condição de não escorregamento, com uma rugosidade igual a do concreto para as paredes do túnel e do aço laminado para as aletas direcionadoras.

A condição de superfície livre é definida pela interface entre a água e o ar na região da seção de testes. O domínio definido como ar possui todas as paredes com trânsito livre de fluido.

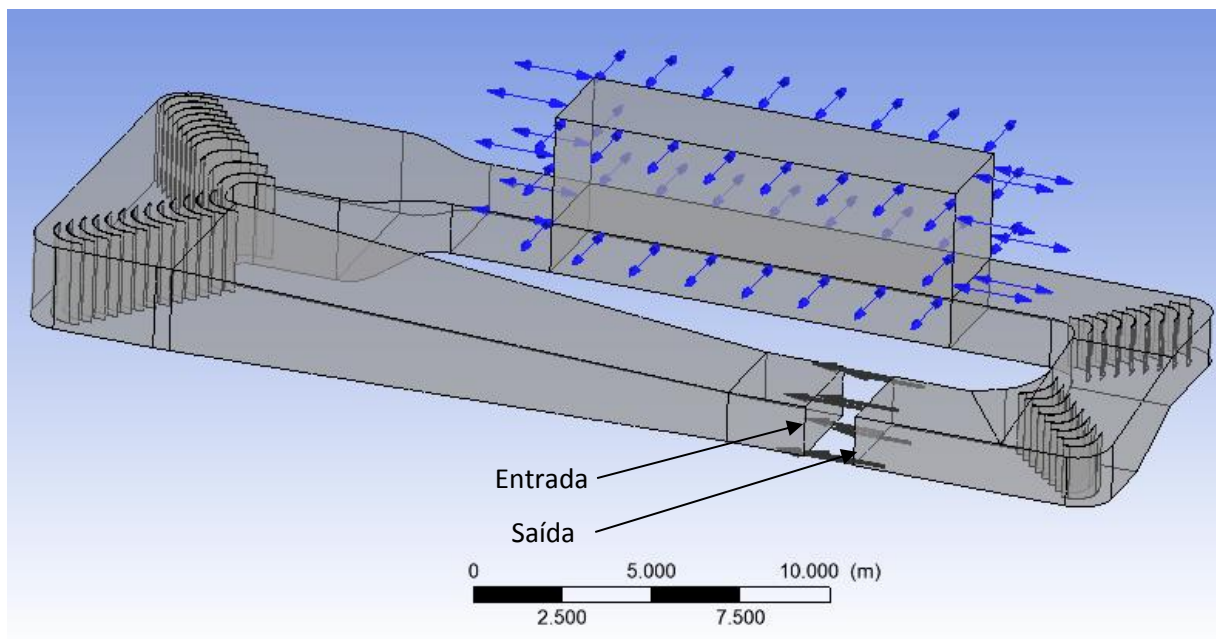
O valor da aceleração da gravidade adotado foi o valor da mesma estando no mesmo nível do mar.

Por ter uma transição entre áreas de fluxo livre, superfícies sinuosas e aletas direcionadoras, optou-se por utilizar o método de turbulência SST, visando resolver o problema de turbulência com a equação adequada para cada momento.

As equações de quantidade de movimento e conservação da massa são resolvidas em 4 equações, tendo os valores de massa específica e viscosidade sendo alterados conforme descrito na seção do método VOF.

O critério de convergência adotado foi o valor quadrado médio do erro, sendo considerada um valor aceitável $1 \cdot 10^{-4}$.

Figura 27: Condições de contorno para a simulação

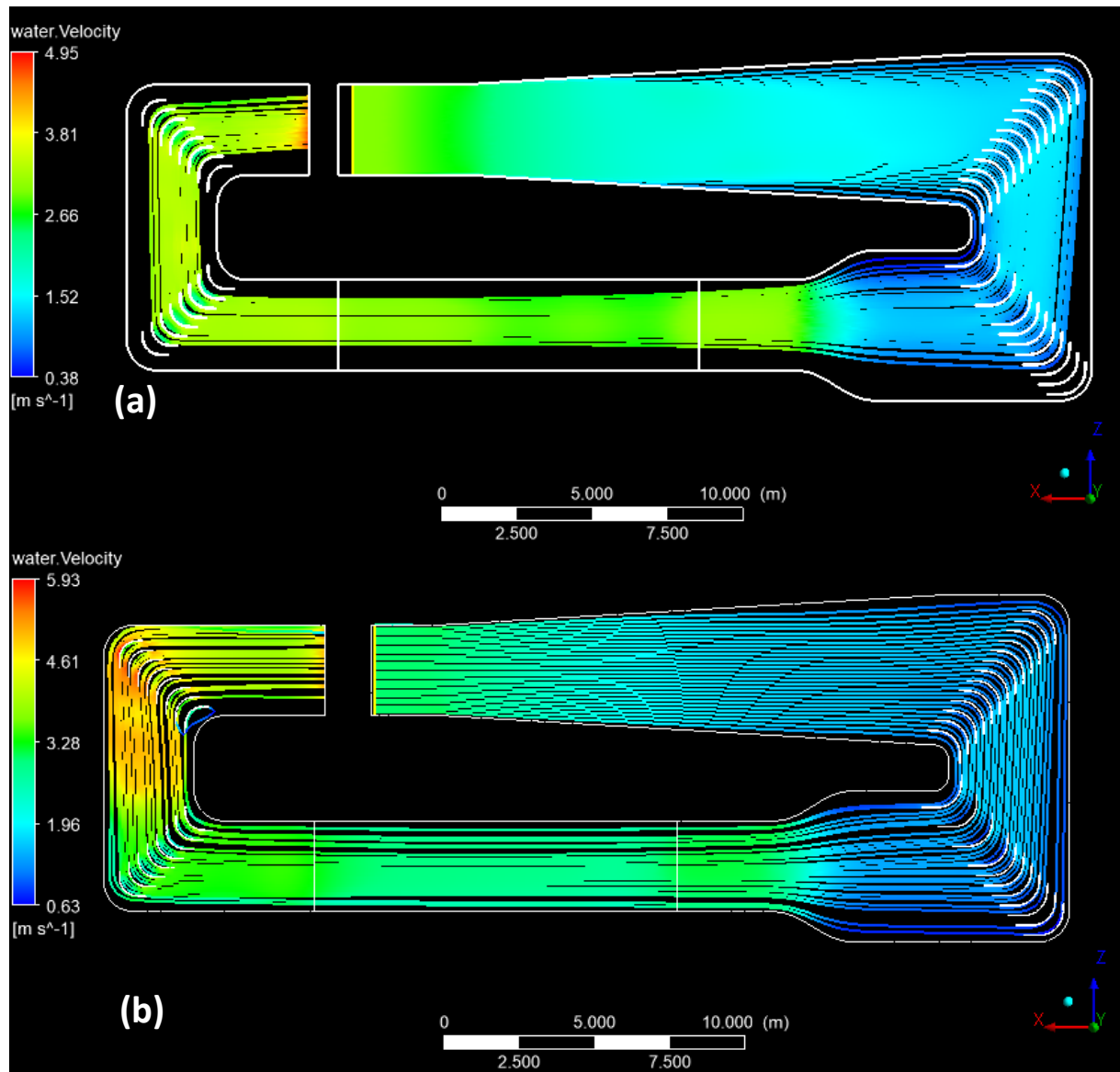


Fonte: Autoria própria

5.4. RESULTADO DAS SIMULAÇÕES.

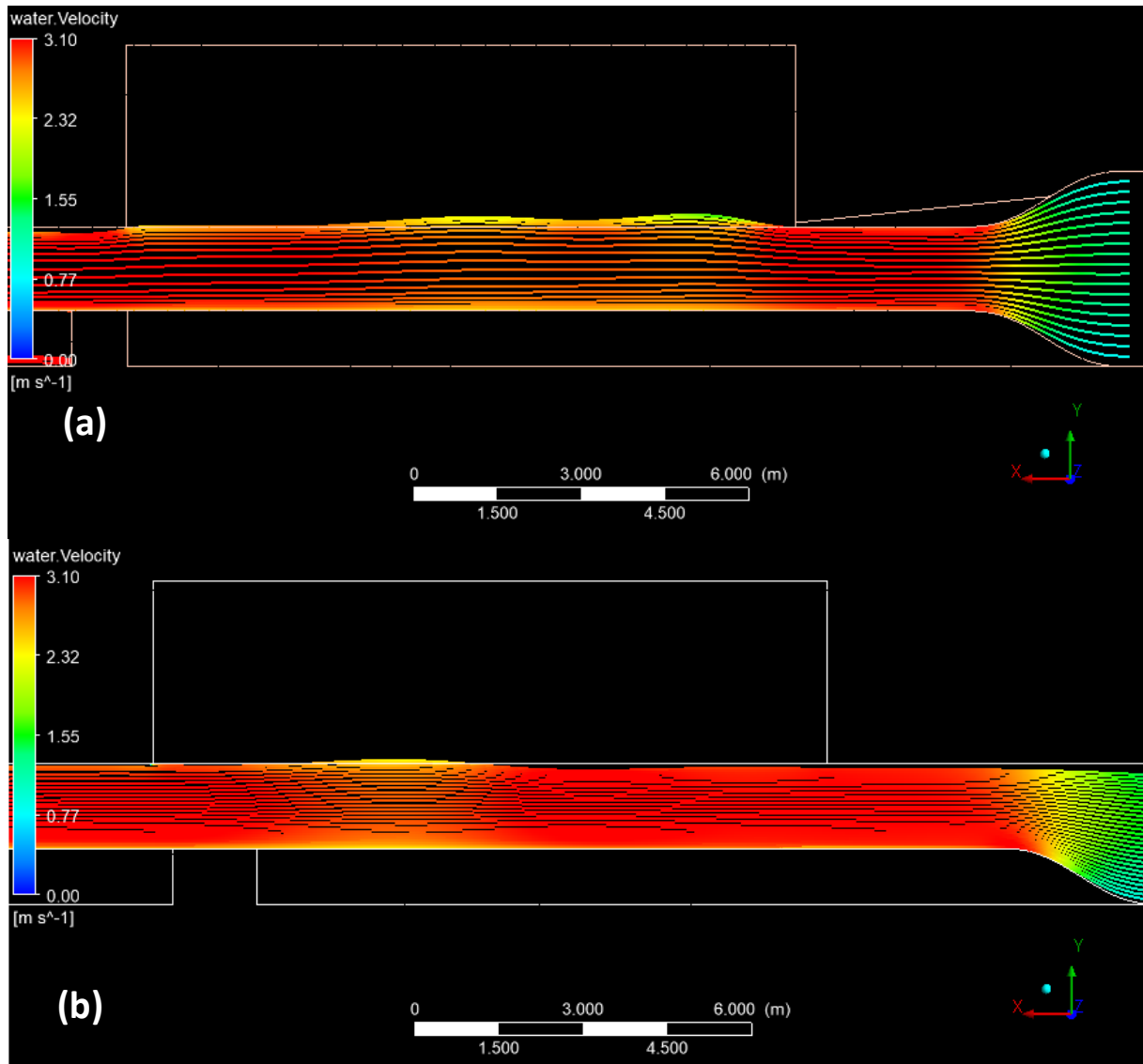
Após concluído a simulação, foi gerado os resultados com o auxílio da ferramenta de pós processamento do ANSYS, o CDF-post, que podem ser conferidos a seguir.

Figura 28: Velocidade do escoamento do túnel de água em coordenadas de linha de corrente: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior



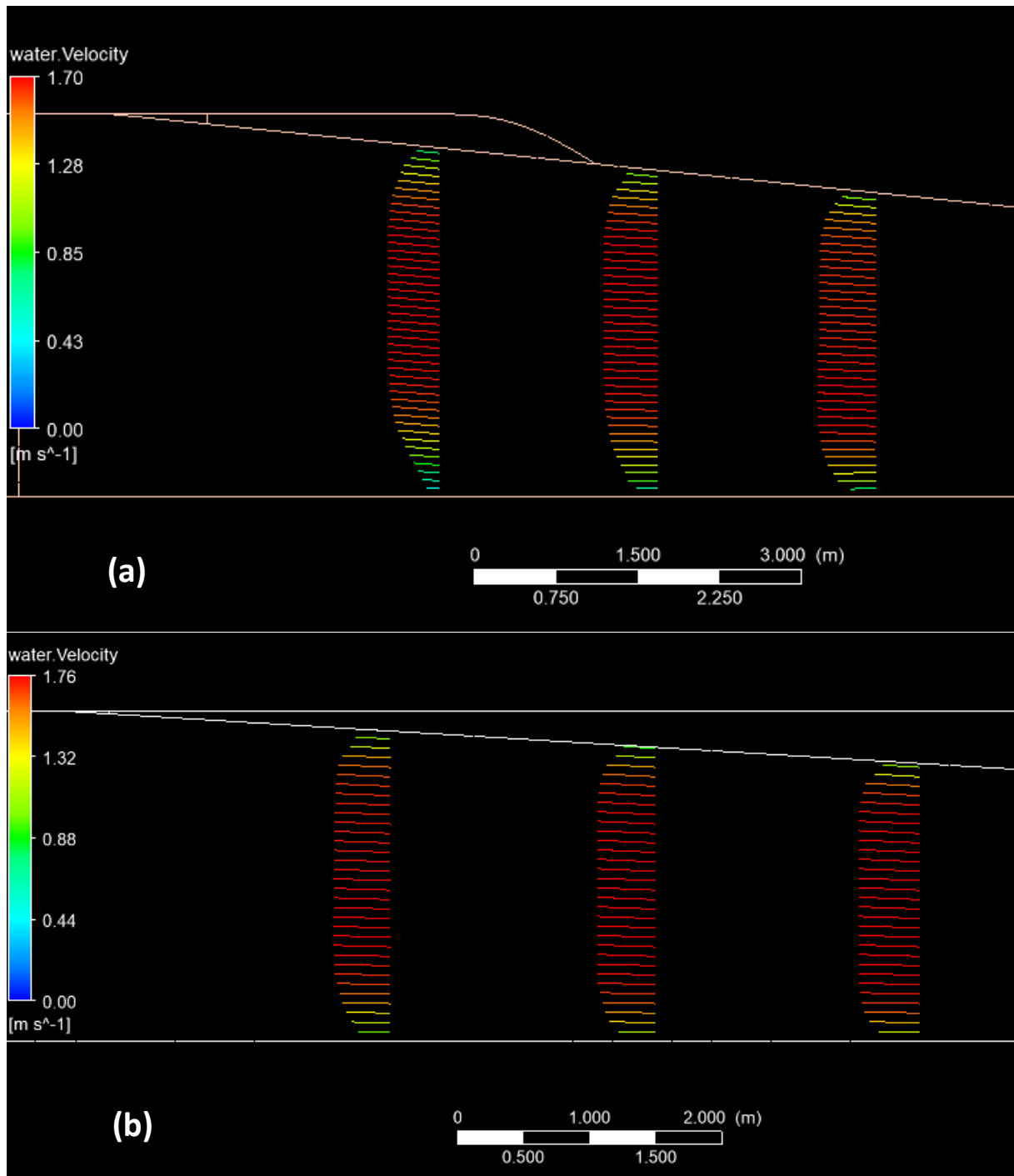
Fonte: Autoria própria

Figura 29: Comparação da velocidade do escoamento na seção de testes em coordenadas de linha de corrente: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior



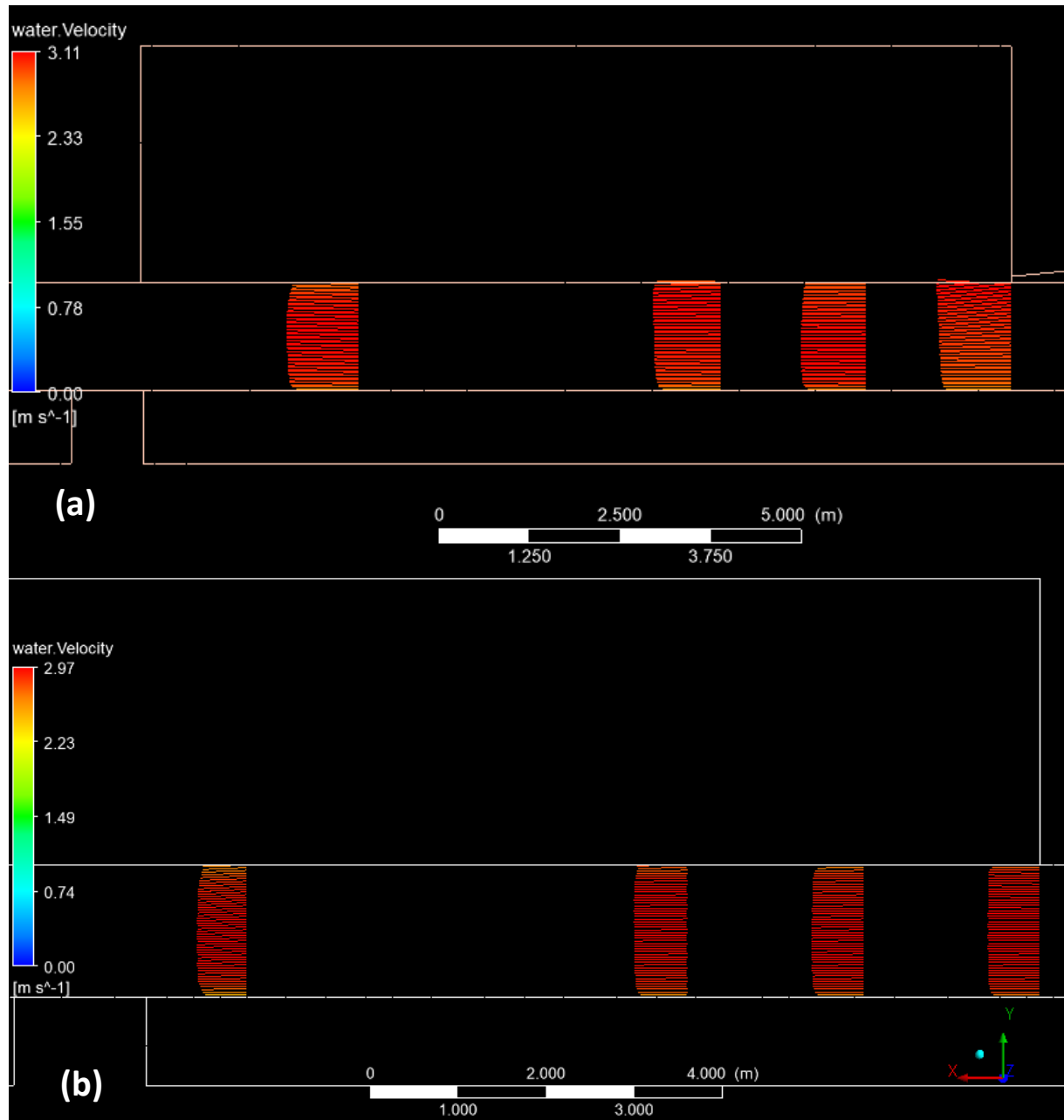
Fonte: Autoria própria

**Figura 30: Comparação do perfil de velocidade do escoamento no difusor: (a) contração completa ;
(b) sem a contração superior.**



Fonte: Autoria própria

Figura 31: Comparação do perfil de velocidade na seção de testes para as distâncias de 0 m, 2 m, 4m e 9 m: (a) contração completa ; (b) sem a contração superior



Fonte: Autoria própria

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao simular os modelos propostos de túneis de água, notou-se que o modelo com contração superior gera um certo nível de onda, o que geraria uma perturbação na superfície livre da seção de testes e transbordamento, além disso, o difusor apresentou um melhor desempenho para o modelo sem a contração superior, isso ocorre principalmente pela expansão mais suave se comparado com o outro modelo.

O número de aletas foi suficiente para manter a qualidade do escoamento nas curvas, apresentando um melhor desempenho no túnel sem a contração superior.

Em ambos os modelos de túnel desenvolvidos, o escoamento no interior da seção de teste ficou relativamente estável, com poucas zonas de não uniformidade do escoamento.

O túnel de água completo possui comprimento total do circuito hidráulico de 32.5 m e largura de 11.5 m, ultrapassando um pouco o espaço físico estabelecido no projeto, porém uma solução é fazer a instalação com uma parte da estrutura para fora do galpão, sendo suportada por um piso que seria construído exclusivamente para ele.

A literatura voltada para projeto e construção de túneis de vento foi o bastante para que o túnel de água fosse construído. Alguns fatores pontuais que diferem os dois tipos de construção foram identificados ao longo do projeto, como mencionado em seções anteriores.

6.1. SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

A colmeia, componente essencial para o túnel de vento, não foi levado em consideração na simulação numérica. Com o acréscimo da mesma, a qualidade do escoamento na seção de teste poderia ser melhor que a apresentada nesse trabalho. Até o momento da defesa desse trabalho, metodologias para simular uma colmeia foram pesquisadas, mas sem sucesso.

Tendo a vazão e a perda de carga do túnel de água, a possibilidade de um projeto de bomba que se encaixaria especificamente para o túnel pode ser estudado.

A criação de um modelo em escala do túnel de água para se analisar o escoamento também foi uma ideia que surgiu ao longo do tempo de pesquisa, porém, sem sucesso de execução.

7. CONCLUSÃO.

Estudos envolvendo um aparato que possa realizar ensaios hidrodinâmicos vem sendo feito ao longo do século. Diversos modelos foram produzidos e estão em constante aprimoramento em diversos centros de pesquisas no mundo inteiro.

As ferramentas de dinâmica dos fluidos computacional são poderosas para que se possa prever o comportamento do escoamento em diversas situações. Para o caso do túnel de água, foi possível ter um indicativo de qual modelo seria o mais viável a ser construído.

Toda a parte de projeto, apesar de espelhar em projetos de túnel de vento, carece de estudos específicos para alguns componentes, uma vez que toda a ótica da construção do túnel de vento é voltada para aquele fluido em específico.

REFERÊNCIAS

ANSYS, **CFX Solver theory guide**, 2005.

BARLOW, B. & WILLIAN, H., **Low-Speed Wind tunnel testing**, New York, 2ª edição, 1984.

BELL, J. H., METHA, R. D. **Contraction Design for Small Low-Speed Wind Tunnels**. NASACR-182747, April 1988.

BILGER, C., et al., **Evaluation of two-phase flow solvers using Level Set and volume of Fluid methods**, J.Comput. Phys. (2017)

BÖRGER, G. G., **Optimierung von Windkanaldusen für den Enterschallbereich**. Z. Flufwissenschaft, pp 45-50, 1975.

BOUSSINESQ, M., J., "Essai sur la théorie des eaux courantes", Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris 1877

BOUSSINESQ, M., J., **Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section**, Paris, 1897

BRUSCA, S., LANZAFAME, R., MESSINA, M. **Low-Speedwind Tunnel: Design And Build**. Wind Tunnels: Aerodynamics, Models and Experiments, Nova Science Publishers, inc., 2011.

ÇENGEL, Y. A., CIMBALA, J. M., **Mecânica dos Fluidos – fundamentos e Aplicações**. Editora McGraw-Hill, 2007

CLÓVIS, R. Maliska. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

COSTA, L. G. S., **Resistência dos Fluidos**, 1º edição, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1926.

CROWE, C. T.. **Multiphase flow handbook**. CRC Press. 1ª edição. 2005.

CROWE, C. T.; SCHWARZKOPF, J. D.; SOMMERFELD, M.; TSUJI, Y.. **Multiphase flows with droplets and particles**. CRC Press. 2ª edição. 2012.

DAILY, J. W., HARLEMAN, D. R. F., **Fluid Dynamics**, 1966

FIGUEIREDO, F. P., **Simulação numérica e computacional de correntes de turbidez de baixa densidade para sedimentação de bacias**, tese de doutorado, 2010

FOX, R.W., MCDONALD, A.T. e Pritchard, P.J., **“Introdução à Mecânica dos Fluidos”**, Sexta Edição, LTC Editora, 2006.

FRISCH, G. D., **The legacy of a. n. Kolmogorov**. University of Cambridge, 1995.

GUGGENHEIM, D. "Tests on the Free Motion of an Airship Model Under the Influence of an Artificial Gust in a Water Tank" **Airship Institute**, Akron, O., Report on Item 5a of Bureau of Aeronautics Contract NOs-47286, 1937.

HIRT, C. W., NICHOLS, B. D., **Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries**, New Mexico, 1979.

KRAMER, C. GEHARDT, H. J. **Wind Tunnels for Industrial Aerodynamics**. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, pp 225-264, 1984.

LAUDERS B. E. and SPALDING D. B., **The numerical computation of turbulent flows**, UK: Academic Press Inc., 1974.

MEHTA, R. D. **Aspects of the Design and performance of Blower Wind Tunnel Componets**. Ph.D Thesis, Department of Aeronautics, Iperial College, University of London, 1978.

MEHTA, R., BRADSHAW, P. **Technical notes: design rules for small low speed wind tunnels**. Aeronaut. J. R. Aeronaut. Soc., 443–449, 1979.

MEHTA, R. D. **The Aerodynamic Design of Blower Tunnels with Wide-Angle Diffusers**. Prog. Aerospace Sci., Vol 18, No. 1, pp. 59-120, 1977..

MENTER, F. R. et al. **A correlation based transition model using local variables part 1. Jornal of turbomachinery**, 2004.

MENTER, F. R., “**Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications**,” AIAA J., 1994.

MOREL, T. **Comprehensive Design of Axisymmetric Windtunnel Constrictions**. J. Fluids Engineering, pp. 225-233, 1975

PRANDTL, L. **The attainment of a steady air stream in wind tunnels**. NACAC-CTM-726, 1938.

PRANDTL, L., "**The Generation of Vortices in Fluids of Small Viscosity**", Journal of the Royal Aeronautical Society, Volume XXXI, 1927, Páginas 720-741.

SAEED, M., UDDIN, E., MUBASHAR, A., ZAHIR, S. U., **Design and Development of Low-Speed Water Tunnel**. Islamabad, Pakistan. 2018.

SAUNDERS, Capt. H. E., U.S.N., and HUBBARD, Lt. Comdr. C. W., U.S.N.R., “ **The Circulating Water Channel of the David W. Taylor Model Basin,**” Trans, of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol. 52, pp. 325-364, 1940.

SCHLICHTING, H., **Bondary-Layer Theory**, 7° edição. Nova York, 1979

SIMÕES, A., BRITO, R., SCHULZ, H., PORTO, R., **Fenômenos de transporte e hidráulica: exemplos de métodos numéricos e computacionais para a resolução de problemas.** Bahia, 2011

STANTON, T. E., “**On the Resistance" of Thin Plates and Models in a Current of Water**” Transactions of the Institution of Naval Architects, Volume LI, 1909, Páginas 164-169.

TANAKA, N., HIMENO, Y., NAGAI, J., OKUNO, T., **On Circulating Water Channel Newly Built at University of Osaka Prefecture**, Journal of the Kansai Society of Naval Architects, Japan, No. 151, p. 43, 1973.

TRYGGVASON, G., SCARDOVELLI, R., and ZALESKI, S., **Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows**, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2011.

VERSTEEG, H. K; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method.** Pearson Education, 2007.

WATTENDORF F. L. **Factors Influencing the Energy Ratio of Return Flow Wind Tunnels.** Fifth International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, September 12-16, 1938.

WHITE, F. M., **Viscous Fluid Flow**, 3° edição. Nova York, 2000

ZAHARI, M., DOL, S. S., **Design and Development of Low-Cost Water Tunnel for Educational Purpose**. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Islamabad, Pakistan. 2015.

Panama Canal. Disponível em: <https://www.tropicalrealtypanama.com/en/about-panama/panama-canal/> > acessado em: 15/01/2019.