



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
FACULDADE DE GEOFÍSICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANDRÉ LUIZ LOBATO QUARESMA**

**CÁLCULO DO SINAL GRAVIMÉTRICO DE UM PRISMA COM  
VARIÇÃO VERTICAL DE CONTRASTE DE DENSIDADE  
PARA QUALQUER POSIÇÃO NO ESPAÇO 3D**

**Belém - Pará**

**2017**

ANDRÉ LUIZ LOBATO QUARESMA

CÁLCULO DO SINAL GRAVIMÉTRICO DE UM PRISMA COM  
VARIAÇÃO VERTICAL DE CONTRASTE DE DENSIDADE PARA  
QUALQUER POSIÇÃO NO ESPAÇO 3D

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de  
Geofísica do Instituto de Geociências  
da Universidade Federal do Pará -  
UFPA, em cumprimento às exigências  
para obtenção de Bacharel em  
Geofísica.

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Belém - Pará  
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

---

Quaresma, André Luiz Lobato, 1994 -

Cálculo do sinal gravimétrico de um prisma com variação vertical de contraste de densidade para qualquer posição no espaço 3D / André Luiz Lobato Quaresma. – 2017.

33 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Faculdade de Geofísica, Belém, 2017.

1. Gravidade (Física) - Medição. 2. Geofísica. I. Título.

CDD 22. ed.: 526.70287

---

ANDRÉ LUIZ LOBATO QUARESMA

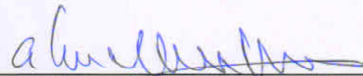
CÁLCULO DO SINAL GRAVIMÉTRICO DE UM PRISMA COM VARIAÇÃO  
VERTICAL DE CONTRASTE DE DENSIDADE PARA QUALQUER POSIÇÃO NO  
ESPAÇO 3D

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de Geofísica do  
Instituto de Geociências da Universidade  
Federal do Pará, como requisito parcial à  
obtenção de grau de Bacharel em  
Geofísica.

Data da defesa: 17 de março de 2017.

Conceito: Bom

Banca Examinadora:



Prof. Cristiano Mendel Martins - Orientador  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará



Profª Darciléa Ferreira Santos - Membro  
Doutora em Geofísica  
Universidade Federal do Pará



Profª Renata de Sena Santos - Membro  
Mestra em Geofísica  
Universidade Federal do Oeste do Pará

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me ajudado, dado forças, consolado e me guiado até o final dessa graduação. Sem Ele nada em minha vida seria possível e apesar de não ser merecedor de nada, Ele me dá alegrias e vitórias que eu jamais poderia imaginar, a aprovação no vestibular e conclusão desse curso são um exemplo.

Agradeço a minha mãe, Solange Oliveira Lobato, por tudo o que ela fez e faz por mim, pelos conselhos, broncas e, principalmente, pelas orações pela minha vida. Mãe, amo muito você! Agradeço ao meu padrasto, Valcir Borges de Lima, por todo apoio no que eu precisei e ele podia ajudar. Agradeço ao meu pai, Manoel da Costa Quaresma, por todo apoio financeiro durante o curso.

Agradeço ao meu tio-avô, João Batista Saraiva Lobato, por ser um exemplo de homem, pai e profissional. Agradeço por tudo o que ele me ensinou e, principalmente, o amor aos números, o que me trouxe até a Geofísica. Agradeço também a minha tia-avó Evangelista Ramos Lobato, a tia Vanja, que cuidou de mim em boa parte dos meus anos de vida. E agradeço também a toda a minha família que de alguma forma contribuiu para a minha formação pessoal e profissional até aqui.

Agradeço a todo o corpo docente, discente e quadro de técnicos da Faculdade de Geofísica. Em especial, ao Prof. Dr. Cristiano Martins que desde 2013 aceitou a árdua missão de ser meu orientador, por ter compartilhado comigo conhecimentos, experiências e tornado esse trabalho possível. A Secretária Maria do Socorro, a Tia Socorro, pelas conversas, por ter aconselhado e resolvido todas as dificuldades e dúvidas burocráticas que surgiram nos anos de curso. Agradeço a todos os meus colegas de curso que me ajudaram com dúvidas, questões, conversas aleatórias e etc, em especial, aos amigos que levarei para vida: Adriano Valente, Adriany Reis, Daniela Melo e Andrey Lima.

## RESUMO

Desenvolvemos uma alternativa eficaz e computacionalmente eficiente para o cálculo, em qualquer posição do espaço, da componente vertical da anomalia gravimétrica produzida por um prisma retangular no qual a densidade aumenta com a profundidade segundo lei parabólica. Encontra-se na literatura solução analítica/algóritmica para este cálculo que não pode ser avaliada se a cota de altura do ponto de observação for mais baixa que a altura do topo do prisma. Para contornar esta limitação, avaliamos esta anomalia como a soma da anomalia produzida por dois prismas verticalmente empilhados, que sobrepostos têm mesma dimensão que o prisma original, e estão posicionados um acima e outro abaixo do ponto de observação. No entanto, esta dupla avaliação é custosa computacionalmente. Para tornar a solução mais eficiente, computacionalmente consideramos válida a aproximação de igualdade entre o sinal gravimétrico produzido pelo prisma à cima do ponto de observação e o sinal de um prisma de compensação localizado abaixo do ponto de observação, com mesma massa que o prisma de cima. Deduzimos a expressão fechada da espessura do prisma de compensação, e esta solução é computacionalmente pouco custosa. Assim, ao final avaliamos apenas a anomalia gravimétrica de um prisma, o prisma que sobra após a compensação. No entanto, esta igualdade entre o sinal gravimétrico do prisma de cima e o de compensação só é numericamente válida para posições das observações a partir de certa distância horizontal do prisma original. Realizamos testes sintéticos para o cálculo da anomalia gravimétrica de um prisma posicionando as observações em diferentes posições do espaço tridimensional ao redor do prisma, avaliando as soluções que propomos e as apresentadas na literatura. Realizamos também a simulação sintética da anomalia gravimétrica de uma bacia sedimentar com observações terrestres que acompanham a topografia do topo da bacia e, assim, muitos pontos têm cotas mais baixas que algumas porções da bacia.

Palavras-chave: Gravimetria. Variação do contraste de densidade. Generalização de modelo. Anomalia gravimétrica. Prisma retangular.

## ABSTRACT

We have developed an effective and computationally efficient alternative to the calculation, at any position of the space, of the vertical component of the gravimetric anomaly produced by a rectangular prism in which the density increases with the depth according to a parabolic law. It is found in literature analytical/algorithmic solution for this calculation that cannot be evaluated if the height of the observation point is lower than the height of the top of the prism. To run through this limitation, we evaluated this anomaly as the sum of the anomaly produced by two prisms vertically stacked, that being overlapped have the same size of the original prism, and they are positioned one above and another below of the observation point. However, this double evaluation is computationally expensive. To make the solution more computationally efficient, we considered valid the equality approach between the gravimetric signal produced by the prism above the observation point and the signal of a compensation prism located below of the observation point, which has the same mass of the prism above. We have deduced the closed expression of the compensation prism size, and this solution is not computationally expensive. So, at the end we evaluated only the gravimetric anomaly of one prism, the prism that rest after the compensation. However, this parity between the gravimetric signal of the top prism and the compensation prism is only numerically valid for observations positions from a certain horizontal distance of the original prism. We performed synthetic tests for the calculation of the gravimetric anomaly of one prism positioning the observations in different positions of the three-dimensional space around the prism, evaluating the solutions we propose and those presented in the literature.

We also performed the synthetic simulation of the gravimetric anomaly of a sedimentary basin with terrestrial observations accompanying the topography of the basin and, thus, many points have lower heights than some portions of the basin.

Keywords: Gravimetry. Density contrast variation. Generalization of model. Gravimetric anomaly. Rectangular prism.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Prisma 3D e a variação do contraste de densidade com a profundidade.....	13
Figura 02 – Divisão do prisma 3D em dois novos prismas.....	15
Figura 03 – Divisão do prisma quanto a cota de compensação $z_c$ .....	18
Figura 04 – Separação das regiões onde aplicamos cada tipo de solução .....	19
Figura 05 – Perfis de $G_z$ para a validação numérica da metodologia proposta .....	22
Figura 06 – Perfis horizontais.....	25
Figura 07 – Perfis verticais.....	27
Figura 08 – Relevo da topografia da bacia.....	29
Figura 09 – Relevo do embasamento da bacia.....	30
Figura 10 – Anomalia gravimétrica gerada pela bacia sintética.....	31

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>2 METODOLOGIA</b> .....	12
<b>2.1 Modelo de chakravarthi</b> .....	12
<b>2.2 Modelo de chakravarthi generalizado</b> .....	14
2.2.1 Solução eficaz.....	14
2.2.2 Solução eficiente.....	16
2.2.3 Metodologia proposta.....	19
<b>3 RESULTADOS</b> .....	20
<b>3.1 Validação numérica do critério de domínio das soluções</b> .....	20
<b>3.2 Teste sintético</b> .....	23
3.2.1 Perfis de anomalia gravimétrica de um prisma.....	23
3.2.1.1 Perfis horizontais.....	23
3.2.1.2 Perfis verticais.....	26
3.2.2 Mapa de contorno de anomalia gravimétrica de uma bacia.....	28
<b>4 CONCLUSÃO</b> .....	32
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	33

## 1 INTRODUÇÃO

Modelagens gravimétricas que consideram variação de densidade nos sedimentos, geralmente aproximam a variação do contraste de densidade com a profundidade por uma lei monotônica, como por exemplo, a lei linear (AGARWAL, 1971; MURTHY; RAO, 1979), a lei quadrática (RAO, 1986), a lei exponencial (GRANSER, 1987), a lei hiperbólica (RAO et al., 1994), a lei parabólica (CHAKRAVARTHI et al., 2002) e a lei polinomial cúbica (GARCÍA-ABDESLEM, 2005). A aproximação de uma lei monotônica da variação do contraste de densidade com a profundidade foi adotada por muitos autores, pois geralmente leva a uma expressão de forma fechada para o cálculo da anomalia gravimétrica. Neste contexto, uma lei monotônica deve ser vista como uma aproximação grosseira, porém razoável, da variação do contraste de densidade com a profundidade. Assim, a decisão de descrever a compactação do sedimento numa bacia por uma lei monotônica normalmente vem da viabilidade de uma solução numérica da modelagem gravitacional, ao invés de se modelar todos os atributos geológicos de um pacote sedimentar.

Chakravarthi et al. (2002) apresentam uma solução para a avaliação da componente vertical do sinal gravimétrico produzida por um prisma retangular de dimensões conhecidas e cujo contraste de densidade em relação ao meio encaixante diminui com a profundidade por uma lei parabólica. Normalmente discretizamos o pacote sedimentar de uma bacia justapondo prismas retangulares verticais ao longo das direções horizontais  $x$  e  $y$ , e posicionando-os na vertical com topo coincidente com a superfície topográfica e base com o embasamento da bacia. Porém, a solução proposta por Chakravarthi et al. (2002) apresenta uma limitação quanto à posição do ponto de observação no eixo  $Z$ : o ponto de observação necessariamente deve estar em cotas mais elevadas que o topo do prisma avaliado. Neste contexto, generalizamos o cálculo para que o ponto de observação possa ser colocado em qualquer posição no espaço 3D.

Em levantamentos gravimétricos terrestre podem haver pontos de observação com altitudes menores que alguns pontos da topografia. Em levantamentos marinhos então, praticamente todos os pontos terão altitudes menores que as da topografia em terra. Para contornar esta limitação Chakravarthi et al. (2002) sugerem que seja realizado o procedimento conhecido como continuação para cima, de modo

que todos os pontos de observação tenham cotas mais altas que o topo máximo da topografia da bacia. No entanto, este procedimento de continuação para cima pode adicionar erro ao sinal observado.

Para contornarmos esta limitação, sem mudarmos a cota vertical da observação, dividimos cada prisma da discretização da bacia em dois outros prismas: um com cota do topo igual à do topo do prisma original de Chakravarti e cota da base igual à do ponto de observação; e outro com cota do topo igual à da observação, e cota da base igual à da base do prisma original de Chakravarti. Para avaliar o sinal gravimétrico devido ao prisma original basta somar a contribuição destes dois novos prismas. No entanto, é necessária ainda a correção do valor do contraste de densidade do topo do prisma inferior para a aplicação deste procedimento.

Esta abordagem é eficaz por permitir o cálculo da anomalia gravimétrica de um prisma retangular com decaimento vertical do contraste de densidade sem restrição quanto à cota vertical da observação, porém, este procedimento é computacionalmente custoso, por avaliar duplamente para cada prisma a solução apresentada por Chakravarthi et al. (2002), que já é individualmente custosa.

Apresentamos ainda uma solução mais eficiente computacionalmente, válida para pontos de observação horizontalmente distantes do prisma, que consiste em virtualmente retirar do prisma original o volume acima do ponto de observação e um volume de compensação abaixo do ponto de observação, que tem mesma massa que o prisma de cima, deixando apenas um volume profundo neste prisma original e que efetivamente é o único que produz sinal gravimétrico. Deduzimos a expressão fechada da espessura do prisma de compensação, e esta solução é computacionalmente pouco custosa. Assim, ao final avaliamos apenas a anomalia gravimétrica de um prisma, o prisma que sobra após a compensação. No entanto, esta igualdade entre o sinal gravimétrico do prisma de cima e o de compensação só é numericamente válida para posições das observações a partir de certa distância horizontal do prisma original. Selecionamos uma lei empírica que determina qual a distância em que esta igualdade entre o sinal do prisma superior a observação e o sinal do prisma de compensação abaixo da observação é válida.

Realizamos testes sintéticos para o cálculo da anomalia gravimétrica de um prisma posicionando as observações em diferentes posições do espaço tridimensional ao redor do prisma, avaliando as soluções propostas e as soluções

apresentadas na literatura adaptadas a este caso específico. Calculamos também a anomalia gravimétrica de uma bacia sedimentar sintética com relevo da topografia complexo com pontos de observação em cotas mais profundas que alguns pontos desta topografia.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Modelo de Chakravarthi

O sinal gravimétrico produzido por um corpo depende da sua distribuição de densidade, forma e volume. Se a densidade do corpo é menor que a densidade homogênea do meio encaixante e aumenta com a profundidade, por compactação por exemplo, então o contraste de densidade entre o corpo e o meio decresce com a profundidade. A função do decréscimo do contraste de densidade  $\Delta\rho$  com a profundidade  $z$  pode ser descrita por lei monotônica segundo Rao et al. (1994)

$$\Delta\rho(z) = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha z)^2}, \quad (01)$$

sendo  $\Delta\rho_0$  o contraste superficial de densidade expresso em  $\text{g/cm}^3$ , e  $\alpha$  um fator que controla o grau de decaimento do contraste de densidade com a profundidade  $z$ , expresso em  $\text{g}/(\text{cm}^3/\text{km})$ . A Figura 1-b mostra um perfil sintético com o decaimento vertical parabólico do contraste de densidade  $\Delta\rho(z)$ .

A componente vertical da gravidade  $g_z$  computada nas coordenadas  $x_o, y_o$  e  $z_o$ , produzida por um prisma retangular 3D (Figura 01) dentro do qual o contraste de densidade diminui verticalmente segundo a equação 01, posicionado com topo em  $z_1$  e base em  $z_2$ , centro sob as coordenadas horizontais  $x_p$  e  $y_p$ , e com dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$ , é calculada por:

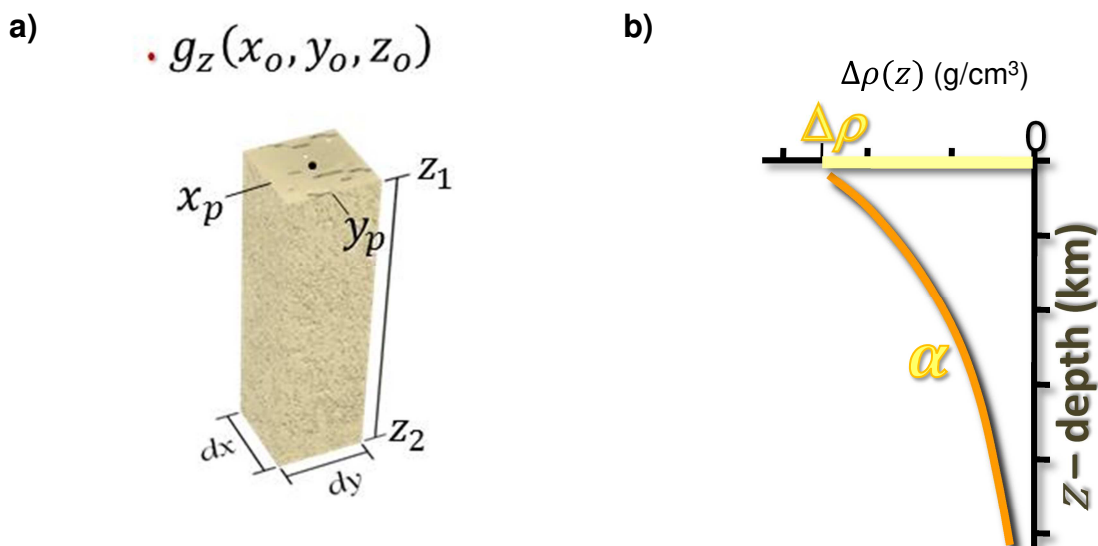
$$g_z(x_o, y_o, z_o) = \gamma \Delta\rho_0^3 \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_p - \frac{dy}{2}}^{y_p + \frac{dy}{2}} \int_{x_p - \frac{dx}{2}}^{x_p + \frac{dx}{2}} \frac{1}{(\Delta\rho_0 - \alpha z')^2} \frac{(z_i - z')}{[(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 + (z_i - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz', \quad (02)$$

sendo  $\gamma$  a constante gravitacional de Newton e  $x', y'$  e  $z'$  as coordenadas de um prisma infinitesimal de volume  $dv'$  ( $dv' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$ ) dentro do prisma.

Chakravarthi et al. (2002) apresentam uma solução fechada para esta integral, e denominam a lei monotônica do decréscimo vertical do contraste de densidade da equação 01 de lei parabólica. No entanto, esta solução apresenta uma

restrição: a cota vertical da observação  $z_o$  deve estar acima da cota topo do prisma  $z_1$  ( $z_o < z_1$ , sendo o eixo  $Z$  crescente para baixo). Assim, estes autores sugerem um pré-processamento em que, caso as posições originais das observações estejam abaixo do topo do prisma, as posições das observações devem ser modificadas e os valores das observações corrigidos com o procedimento conhecido como continuação para cima. Este processamento atenua todas as frequências do espectro do sinal, mas principalmente as altas frequências, e numericamente em geral pode adicionar erro ao sinal.

Figura 01– a) Prisma 3D de dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$ , respectivamente nas direções  $x$  e  $y$ , topo e base posicionados por  $z_1$  e  $z_2$  e centro sob as coordenadas horizontais  $x_p$  e  $y_p$ , e a componente vertical da gravidade  $g_z$  computada nas coordenadas  $x_o$ ,  $y_o$  e  $z_o$ . b) Gráfico da variação de densidade entre a o prisma e o meio encaixante com a profundidade, sendo  $\Delta\rho_0$ , na cota vertical  $z_o$ , e diminuindo com a profundidade segundo lei parabólica.



Fonte: Do Autor

## 2.2 Modelo de Chakravarthi Generalizado

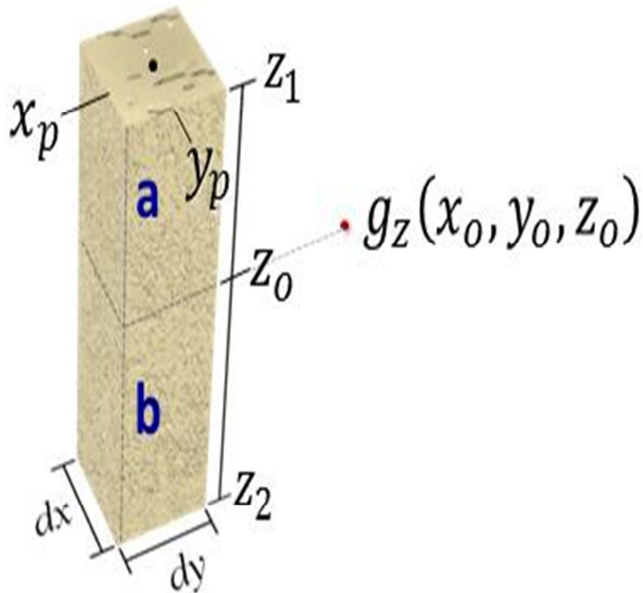
### 2.2.1 Solução Eficaz

Para contornar a restrição da solução de Chakravarthi et al. (2002) quanto à cota das observações e mantê-las nas posições originais, não as contaminando com ainda mais ruídos, avaliamos a componente vertical do sinal gravimétrico em duas parcelas dividindo o prisma em dois, um a cima e outro a baixo da cota da observação. Assim, uma parcela do sinal é produzida pelo prisma posicionado acima da observação (prisma **A** Figura **2a**) e a outra parcela é produzida pelo prisma posicionado abaixo da observação (prisma **B** Figura **2a**), bastando somar estas duas parcelas para se obter o sinal gravimétrico devido ao prisma original. No entanto, exatamente na cota vertical da observação, para a separação dos dois prismas, incluímos uma distância infinitesimal  $dz$  entre os prismas e a cota da observação como ilustra a Figura **2b**. Este procedimento de dividir o prisma original em dois novos por um lado é eficaz tornando possível o cálculo da anomalia, por outro lado, no entanto, diminui a eficiência computacional do procedimento, pois esta nova abordagem será duas vezes mais custosa, uma vez que utilizará a solução de Chakravarthi et al. (2002) para dois prismas, e ressaltamos que cada avaliação desta solução já é computacionalmente custosa.

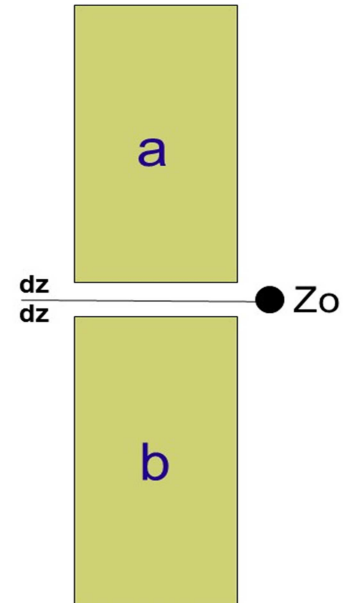
Note que o prisma simulado acima da cota de observação (Figura 02) contribuirá para diminuir em módulo a amplitude da anomalia gravimétrica por representar massa atraindo para cima, em sentido oposto a aceleração da gravidade.

Figura 02 – **a)** Detalhe da divisão do prisma 3D quando a componente vertical da gravidade  $g_z$  é observada em cota  $z_0$  abaixo do topo  $z_1$  do prisma. **b)** Detalhe esquemático da separação infinitesimal ( $dz$ ) em relação a cota vertical do ponto de observação, na base e topo dos prismas superior e inferior, respectivamente.

**a)**



**b)**



Fonte: Do Autor

Para a avaliação do sinal gravimétrico devido ao prisma inferior é necessário redefinirmos a função parabólica de variação em  $Z$  do contraste de densidade  $\Delta\rho(z)$  (equação 01) uma vez que o topo do prisma é mais profundo que a cota aflorante onde o contraste superficial de densidade  $\Delta\rho_0$  foi originalmente definido. Assim, para virtualmente deslocarmos a cota vertical do topo do prisma para a cota zero subtraímos da variável de integração  $z$  a cota de observação  $z_0$ , mas apenas na função de variação de densidade  $\Delta\rho(z)$  da integral definida pela equação 02. Esta nova função de variação do contraste de densidade  $\Delta\rho(z)^*$  com a variável  $z$  deslocada é descrita por:

$$\Delta\rho(z)^* = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha(z - z_0))^2} \quad (03)$$

Note que o denominador da equação 03 pode ser reescrito como  $\Delta\rho_0 - \alpha z + \alpha z_0$ . Note ainda que podemos substituir no integrando da integral da equação 02 o termo da variação vertical de densidade pelo termo:

$$\frac{1}{(\Delta\rho_0^* - \alpha z)^2} \quad (04)$$

sendo:

$$\Delta\rho_0^* = \Delta\rho_0 + \alpha z_0$$

### 2.2.2 Solução Eficiente

A solução proposta anteriormente tem um alto custo computacional ao calcular duas vezes o modelo de Chakravarthi et al. (2002), para o prisma superior e o prisma inferior ao ponto de observação. Para a diminuição deste custo computacional, dada uma lei de decaimento parabólico do contraste de densidade, calculamos a massa do prisma superior ao ponto de observação e qual a espessura de um prisma inferior ao ponto de observação de tal modo que ambos os prismas tenham mesma massa. Adicionalmente, tomamos válida a aproximação de que a componente vertical da anomalia gravimétrica de ambos os prismas é igual em módulo se a distância horizontal do ponto de observação for suficientemente grande. A massa relativa  $m_{r1}$  de um prisma com contraste da densidade variando verticalmente segundo lei parabólica é dada por:

$$m_{r1} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_p - \frac{dy}{2}}^{y_p + \frac{dy}{2}} \int_{x_p - \frac{dx}{2}}^{x_p + \frac{dx}{2}} \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha z)^2} dx dy dz, \quad (05)$$

sendo  $z_1$  a cota do topo do prisma e  $z_0$  a cota da observação, para o caso específico do prisma posicionado a cima do ponto de observação.

O resultado da integral em relação a  $z$ , impondo-se que  $z_0 > z_1$  e que  $\alpha > 0$ , é dado pela equação:

$$m_{r1} = \int_{y_p - \frac{dy}{2}}^{y_p + \frac{dy}{2}} \int_{x_p - \frac{dx}{2}}^{x_p + \frac{dx}{2}} \frac{-z_0 \Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha z_0)} dx dy, \quad (06)$$

Para o cálculo da massa do prisma inferior ao ponto de observação basta substituir  $z_1$  por  $z_o$  e  $z_o$  por  $z_c$ , respectivamente, na equação 05, sendo  $z_c$  a profundidade da base do prisma inferior. Além disso, é preciso adotar um novo contraste superficial de densidade para este prisma inferior  $\Delta\rho_b$  que é dado por:

$$\Delta\rho_b = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha(z_o - z_1))^2} \quad (07)$$

Assim, para o prisma inferior a equação 05 fica reescrita como:

$$m_{r2} = \int_{z_c}^{z_o} \int_{y_p - \frac{dy}{2}}^{y_p + \frac{dy}{2}} \int_{x_p - \frac{dx}{2}}^{x_p + \frac{dx}{2}} \frac{\Delta\rho_b^3}{(\Delta\rho_b - \alpha(z - z_o))^2} dx dy dz, \quad (08)$$

sendo, o resultado da integral em relação a  $z$ , impondo-se que  $z_o > z_1$  e que  $\alpha > 0$ , dado pela equação abaixo:

$$m_{r2} = \int_{y_p - \frac{dy}{2}}^{y_p + \frac{dy}{2}} \int_{x_p - \frac{dx}{2}}^{x_p + \frac{dx}{2}} \frac{-(z_c - z_o) \Delta\rho_b^3}{(\Delta\rho_b - \alpha z_c)(\Delta\rho_b - \alpha z_o)} dx dy. \quad (09)$$

Igualando as integrais 06 e 09, e resolvendo para a profundidade  $z_c$  da base do prisma inferior a expressão fica:

$$z_c = \frac{A\Delta\rho_b + z_o}{1 + A\alpha}, \quad (10)$$

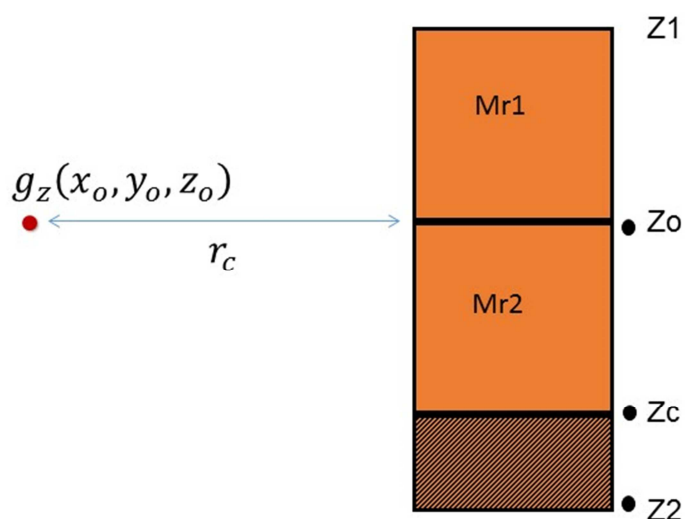
sendo  $A$  dado por:

$$\frac{\Delta\rho_0^2 z_o (\Delta\rho_b - \alpha z_o)}{\Delta\rho_b^3 (\Delta\rho_0 - \alpha z_o)}. \quad (11)$$

Essa cota vertical da profundidade da base do prisma inferior  $z_c$  pode ser encarada como a profundidade da base de um prisma, com topo na cota de observação  $z_o$ , capaz de produzir anomalia gravimétrica de compensação para a anomalia do prisma superior no caso em que a distância horizontal da observação é suficientemente grande, como mostrado na Figura 3. Assim, para avaliar a anomalia gravimétrica do prisma original basta calcular a anomalia gravimétrica apenas do

prisma restante, que é obtido depois de retirado o prisma superior e o de compensação. A anomalia gravimétrica do prisma original resume-se então a anomalia do prisma de dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$ , posicionado nas mesmas coordenadas horizontais do prisma original, mas contido entre as profundidades  $z_c$  e  $z_2$ . Neste caso, se no prisma original sobra um volume mais profundo que a cota  $z_c$  ( $z_2 > z_c$ ), basta avaliar a anomalia gravimétrica deste prisma restante com profundidade de topo  $z_c$  e profundidade da base  $z_2$ . Contudo, no caso em que  $z_c$  seja mais profundo que  $z_2$  ( $z_c > z_2$ ) esta solução não será adotada.

Figura 03 – Detalhe da divisão do prisma quanto a cota de compensação  $z_c$  que delimitará o topo do prisma restante, no qual aplicamos o modelo de Chakravarthi et al (2002) e a distância  $r_c$  a partir da qual essa metodologia poderá ser aplicada.



Fonte: Do Autor

Este procedimento de calcular apenas o sinal gravimétrico do prisma restante demanda avaliar a solução de Chakravarthi et al. (2002) original apenas uma vez, o que diminui o custo computacional se comparada a solução eficaz.

Para a avaliação da anomalia gravimétrica do prisma restantes nesta solução computacionalmente eficiente, o procedimento para obtenção das cotas de topo e base já foi descrito acima, no entanto, o contraste de densidade do topo deste prisma restante também será reavaliado pelo mesmo motivo também já descrito antes. Este contraste de densidade do topo do prisma restante  $\Delta\rho_c$  é dado por:

$$\Delta\rho_c = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha(z_c - z_1))^2} \quad (12)$$

### 2.2.3 Metodologia Proposta

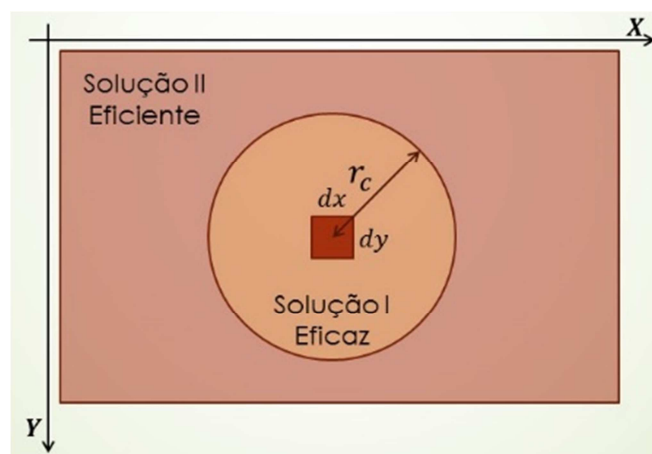
Propomos avaliar a anomalia gravimétrica de um prisma retangular com contraste de densidade que decai com a profundidade segundo lei parabólica nas cotas verticais de observação mais profundas que o topo do prisma com ambas as soluções apresentadas, mas usando-as em dois casos distintos como mostrado na Figura 4. Nas proximidades do prisma a **solução eficiente** não é válida, e é aplicada a **solução eficaz**. Para observações suficientemente distantes, utilizamos a **solução eficiente**. Seleccionamos a distância  $r_c$  que distingue a utilização de ambos os domínios de soluções pela equação empírica:

$$r_c = c \left[ \sqrt{dx^2 + dy^2 + (z_o - z_1)^2} + a \Delta\rho_0 + b \alpha \right], \quad (13)$$

em que seleccionamos  $a = -1$ ,  $b = 1$ , e  $c = 3$ .

A partir da distância  $r_c$  o erro associado a anomalia gravimétrica calculada pela **solução eficiente** é inferior a  $0.01 \text{ mGal}$ .

Figura 04 – Detalhamento da separação das regiões em que aplicamos a Solução eficaz e a região do espaço em que aplicamos a Solução eficiente computacionalmente.



Fonte: Do Autor

## 3 RESULTADOS

### 3.1 Validações Numéricas do Critério de Domínio das Soluções

Realizamos 81 testes sintéticos para validar numericamente a equação empírica utilizada na obtenção da distância crítica que delimita os domínios das soluções para o cálculo de anomalia gravimétrica de um prisma retangular com contraste de densidade que decresce segundo lei parabólica: uma que é apenas eficaz e outra que é eficaz e computacionalmente eficiente. Em todos os testes o erro associado à anomalia gravimétrica calculada produzida por um prisma e avaliada em um ponto de observação mais afastado do prisma que a distância crítica  $r_c$  é inferior a  $0.01 \text{ mGal}$ , ou seja, uma ordem de grandeza menor que o erro observacional presumido

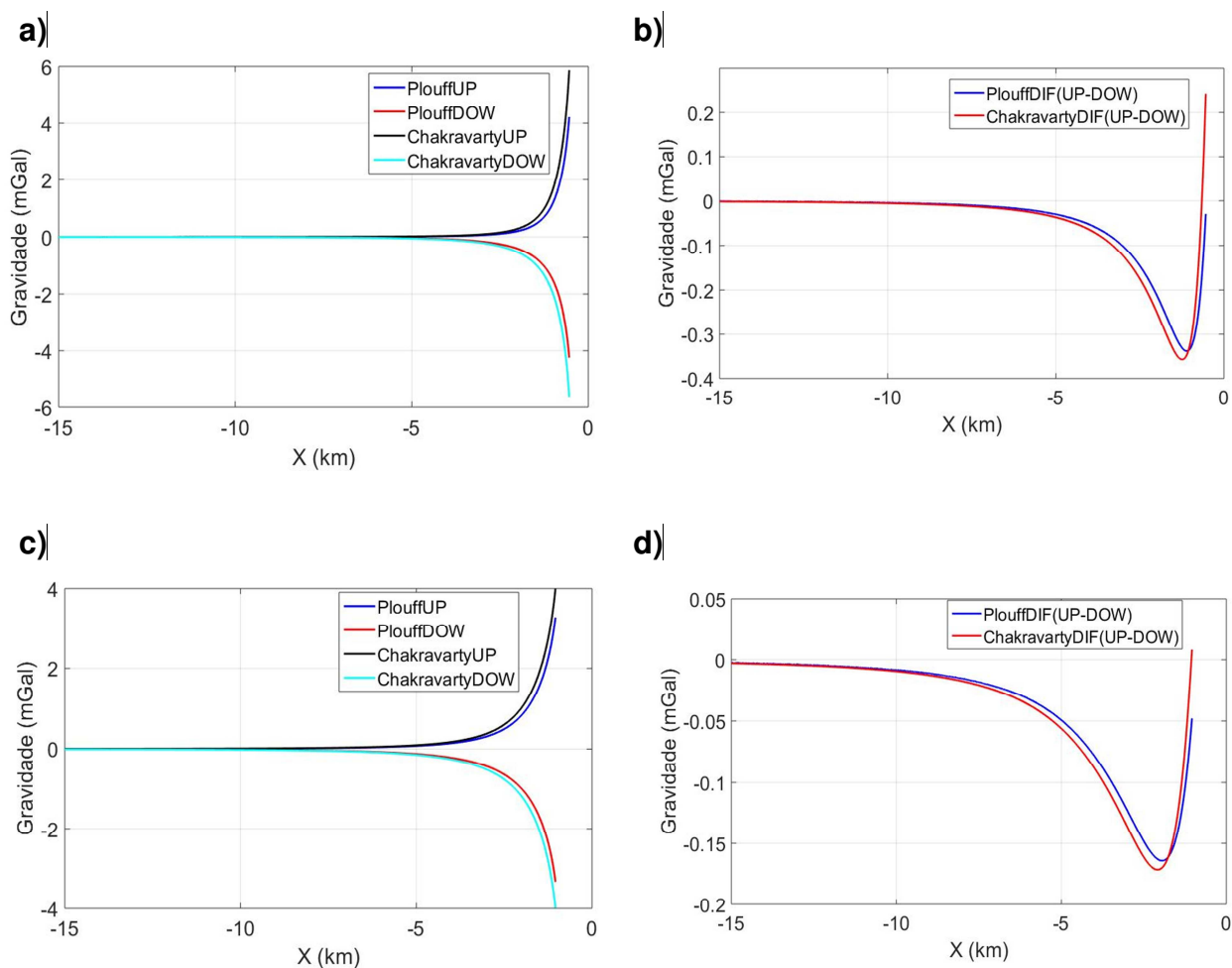
Para ser possível a comparação da solução proposta com uma solução já estabelecida na literatura, discretizamos um prisma em fatias horizontais sobrepostas e infinitesimalmente delgadas, com densidade que é constante em cada fatia, mas que decresce com a profundidade de uma para outra fatia obedecendo à lei parabólica de decréscimo do contraste de densidade com a profundidade. Em seguida avaliamos a anomalia gravimétrica de cada fatia utilizando o a solução algébrica algorítmica proposta por Plouff et al. (1976) para um prisma retangular de densidade constante, e pelo somatório da contribuição de cada prisma infinitesimal computamos à anomalia gravimétrica de todo o prisma. Realizamos este procedimento da solução de Plouff et al. (1976) adaptado e a solução adaptada de Chakravarthi et al. (2002) descrita na seção **solução eficaz** para avaliar o sinal gravimétrico do prisma superior ao ponto de observação e para calcular o sinal gravimétrico do correspondente prisma de compensação. Em seguida avaliamos a diferença entre o módulo de ambos os sinais gravimétricos.

A Figura 05 mostra nos gráficos à esquerda (**a** e **c**) os perfis do sinal gravimétrico do prisma superior à observação e o sinal gravimétrico do correspondente prisma de compensação, ambos os perfis avaliados respectivamente com os dois métodos descritos. Nos perfis da direita da Figura 05 (**b** e **d**) estão mostradas as diferenças entre o módulo das anomalias gravimétricas mostradas a esquerda. No teste mostrado nos perfis da linha de cima da Figura 05 (**a** e **b**) utilizamos  $dx = dy = 1 \text{ km}$ , cota do topo do prisma  $z_1 = 0 \text{ km}$ , cota da

observação  $z_o = 1 \text{ km}$ , e o par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  iguais a  $-0.6 \text{ g/cm}^3$  e  $0.1 \text{ g/(cm}^3/\text{km)}$ , respectivamente. No teste mostrado nos perfis da linha de baixo da Figura 05 (**c** e **d**) utilizamos  $dx = dy = 2 \text{ km}$ , cota do topo do prisma  $z_1 = 0 \text{ km}$ , cota da observação  $z_o = 2 \text{ km}$ , e o par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  iguais a  $-0.2 \text{ g/cm}^3$  e  $0.01 \text{ g/(cm}^3/\text{km)}$ , respectivamente.

Nos perfis da direita da Figura 05 (**b** e **d**) o ponto preto indica a posição da distância crítica  $r_c$  e valem  $7.3 \text{ km}$  e  $11.0 \text{ km}$  respectivamente para o teste da linha de cima (**b**) e o teste da linha de baixo (**d**) da Figura.

Figura 05 – Perfis de  $g_z$ : **a)** sinal gravimétrico do prisma acima e do prisma abaixo do ponto de compensação para os parâmetros de  $\alpha = -0.6$ ; **b)** Diferença entre o sinal acima e o abaixo do ponto de compensação, para os dois métodos usados nos cálculos; **c)** sinal gravimétrico do prisma acima e do prisma abaixo do ponto de compensação para os parâmetros de  $\alpha = -0.2$ ; **d)** Diferença entre o sinal acima e o abaixo do ponto de compensação, para os dois métodos usados nos cálculos. Em todos os gráficos: linha azul anomalia calculada com Plouff et al. (1976) e variação discreta de densidade; linha vermelha anomalia calculada com Chakravarthi et al. (2002).



Fonte: Do Autor

## 3.2 Teste Sintético

### 3.2.1 Perfis de Anomalia Gravimétrica de um Prisma

Para validar numericamente o procedimento proposto para o cálculo do sinal gravimétrico produzido por um prisma retangular com contraste de densidade decrescendo com a profundidade segundo lei parabólica nos pontos de observação em que a cota vertical é mais baixa que o topo deste prisma, discretizamos este prisma em fatias de espessura numericamente infinitesimal. Cada fatia tem contraste de densidade constante, porém, o contraste de densidade diminuirá com a profundidade de uma fatia para a fatia abaixo, obedecendo a lei parabólica. Isto porque a solução para o cálculo da anomalia gravimétrica de um prisma com densidade constante (PLOUFF, 1976) não apresenta limitação quanto à cota vertical da observação.

#### 3.2.1.1 Perfis horizontais

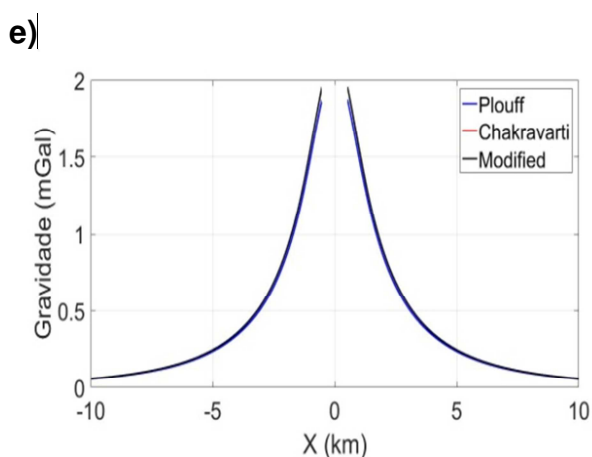
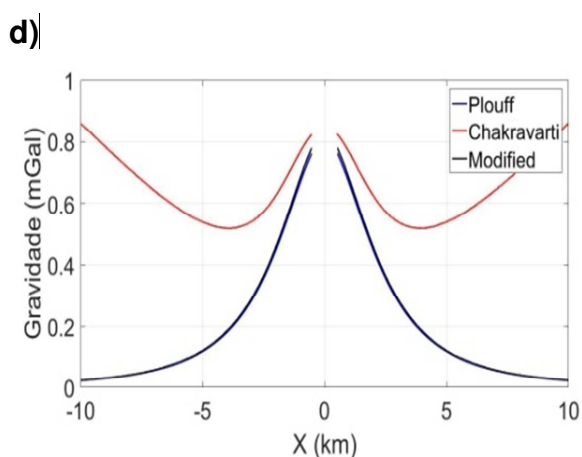
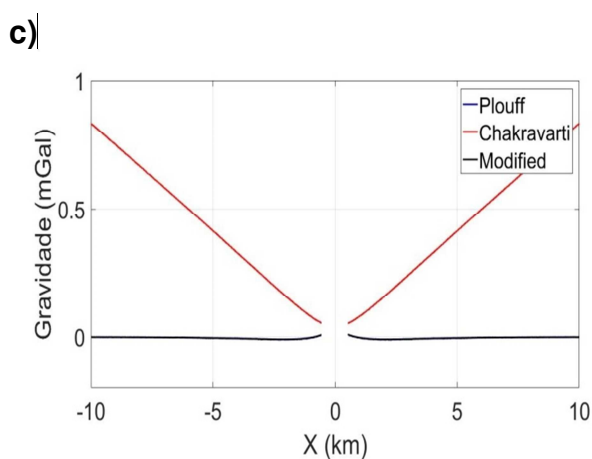
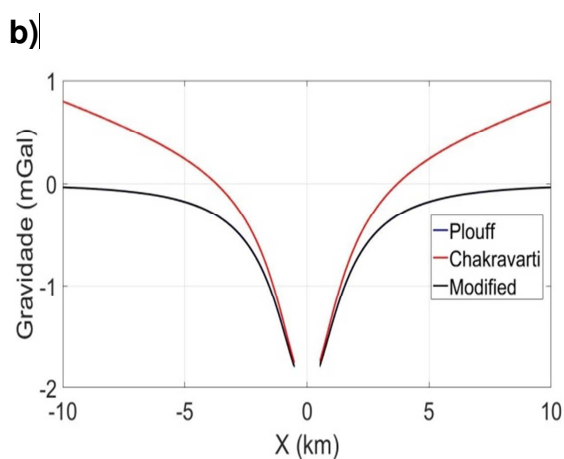
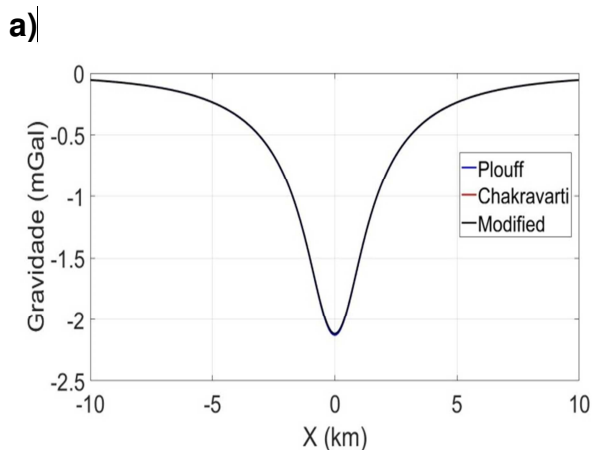
Simulamos cinco perfis sintéticos ao longo do eixo horizontal  $x$  da anomalia gravimétrica produzida por um único prisma posicionado os pontos de observação dos cinco perfis em cinco diferentes cotas verticais. As dimensões deste prisma são  $dx = dy = 1 \text{ km}$ , e o topo coincide com o nível vertical zero e a espessura é de  $7 \text{ km}$ , e o par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  é dado respectivamente por  $-0.4 \text{ g/cm}^3$  e  $0.001 \text{ g/(cm}^3/\text{km)}$ . Este valor muito pequeno para  $\alpha$  implica em pequena variação vertical do contraste de densidade, ou em outras palavras, implica que a densidade dentro do prisma é praticamente constante. O centro horizontal do prisma é posicionado em  $x = y = 0 \text{ km}$ , e os perfis se estendem de  $-10 \text{ km}$  a  $10 \text{ km}$  ao redor do centro horizontal do prisma, ao longo da direção  $x$ . Nos perfis em que a cota vertical das observações é mais profunda que o topo do prisma os perfis são simulados em duas etapas, uma a esquerda e outra a direita do prisma, sempre em um ponto imediatamente fora dos limites do prisma, e deste modo evitamos violar a condição das equações de Laplace por avaliar as observações sempre fora de região de fontes.

A Figura 06 mostra os perfis para as cotas verticais de observação iguais a:  $-1 \text{ km}$ ;  $1 \text{ km}$ ;  $3.42 \text{ km}$ ;  $5 \text{ km}$  e  $8 \text{ km}$ .

Nos perfis em que as cotas verticais de observação estão posicionadas nas cotas  $-1 \text{ km}$  e  $8 \text{ km}$ , o modelo de Chakravarthi et al. (2002) funciona e o resultado

numérico do sinal calculado é o mesmo que o do modelo algoritmicamente adaptado para densidade variável utilizando a formulação apresentada por Plouff et al. (1976). Nos demais, o modelo de Chakravarthi et al. (2002) apresenta valores errados e que aumentam em amplitude com a distância, o que é inaceitável se tratando de sinal gravimétrico. Por outro lado, em todos os perfis, o sinal gravimétrico calculado com o procedimento proposto neste trabalho e o adaptado de Plouff et al. (1976) apresentam valores iguais.

Figura 06 – Perfis de  $g_z$  calculados em: **a)** cota vertical de observação acima do topo do prisma ( $z_o = -1 \text{ km}$ ) **b)** cota vertical de observação um pouco abaixo do topo do prisma ( $z_o = 1 \text{ km}$ ) **c)** cota vertical de observação próxima ao centro de massa do prisma ( $z_o = 3.42 \text{ km}$ ) **d)** cota vertical de observação próxima da base do prisma ( $z_o = 5 \text{ km}$ ) **e)** cota vertical de observação abaixo da base do prisma ( $z_o = 8 \text{ km}$ ). Em todos os gráficos: linha azul anomalia calculada com Plouff et al. (1976) e variação discreta de densidade; linha vermelha anomalia calculada com Chakravarthi et al. (2002); linha preta anomalia calculada com método proposto (Chakravarthi modificado).



Fonte: Do Autor

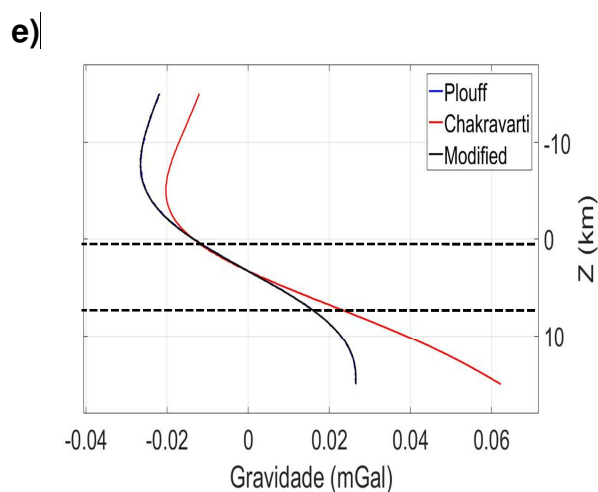
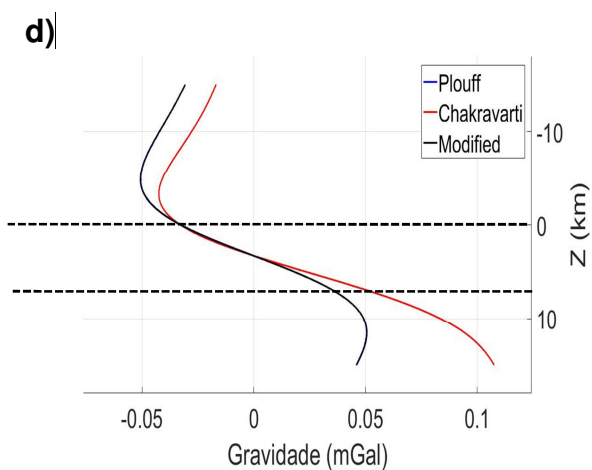
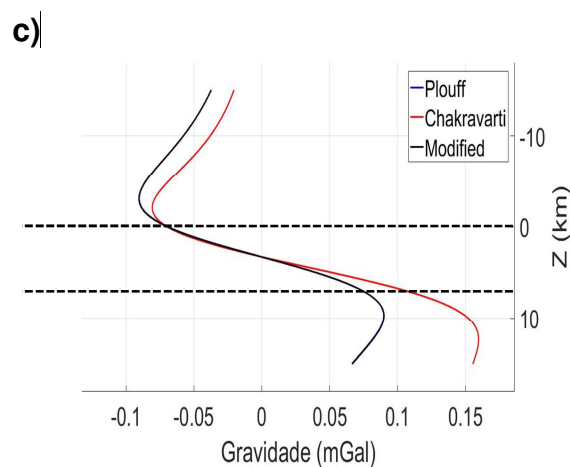
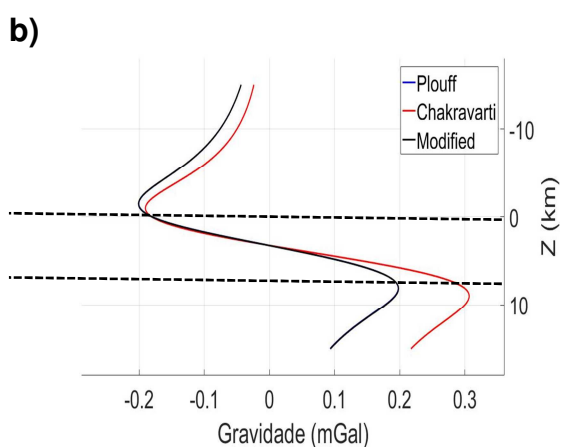
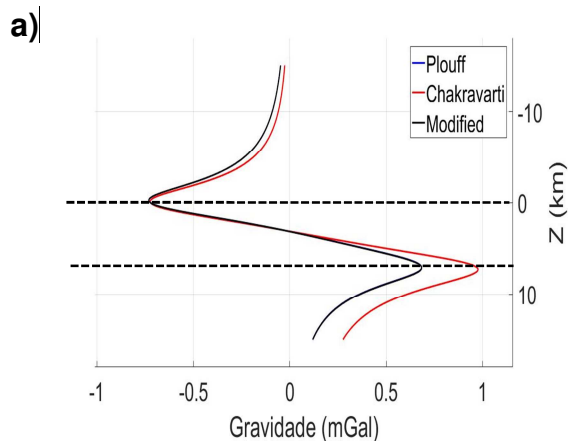
### 3.2.1.2 Perfis Verticais

Simulamos cinco perfis sintéticos ao longo do eixo vertical  $z$  da anomalia gravimétrica produzida por um único prisma posicionado os pontos de observação dos cinco perfis em cinco diferentes posições horizontais. As dimensões deste prisma, assim como as coordenadas do centro continuam sendo as mesmas dos testes sintéticos anteriores para os perfis horizontais, no entanto o valor do parâmetro  $\alpha$  que define a lei vertical do decaimento do contraste de densidade é igual a  $0.01 \text{ g}/(\text{cm}^3/\text{km})$ . As observações foram realizadas no intervalo entre as cotas verticais  $-15 \text{ km}$  a  $15 \text{ km}$ . A Figura 07 mostra os perfis realizados nas distâncias horizontais do centro do prisma de  $1 \text{ km}$ ,  $3 \text{ km}$ ,  $5 \text{ km}$ ,  $7 \text{ km}$  e  $10 \text{ km}$ , respectivamente.

No perfil mais próximo ao prisma, a diferença entre os valores calculados pelo procedimento de Chakravarthi et al. (2002) e pelos outros procedimentos é a menor dos cinco perfis, mas em todos os cinco perfis a anomalia gravimétrica calculados pelo procedimento de Chakravarthi et al. (2002) é diferente das demais. Mas note que em todos os perfis o sinal gravimétrico calculado com o procedimento proposto neste trabalho e aquele utilizando a formulação proposta por Plouff et al. (1976), algoritmicamente adaptado para densidade variável, apresentam valores iguais.

Com o aumento do afastamento dos perfis os sinais calculados pelo procedimento proposto e pelo modelo de Plouff et al. (1976) adaptado apresentam diminuição da amplitude da anomalia e suavização das curvas, comportamento em conformidade com o esperado. Note, no entanto, que o modelo de Chakravarthi et al. (2002) diverge mais dos outros dois modelos quanto mais se aumenta a distância horizontal em que o perfil está do prisma.

Figura 07 – Perfis verticais de  $g_z$  calculados em: **a)**  $x_o = 1 \text{ km}$  **b)**  $x_o = 3 \text{ km}$  **c)**  $x_o = 5 \text{ km}$  **d)**  $x_o = 7 \text{ km}$  **e)**  $x_o = 10 \text{ km}$ . Em todos os gráficos: linha azul anomalia calculada com Plouff et al. (1976) e variação discreta de densidade; linha vermelha anomalia calculada com Chakravarthi et al. (2002); linha preta anomalia calculada com o método proposto (Chakravarthi modificado).



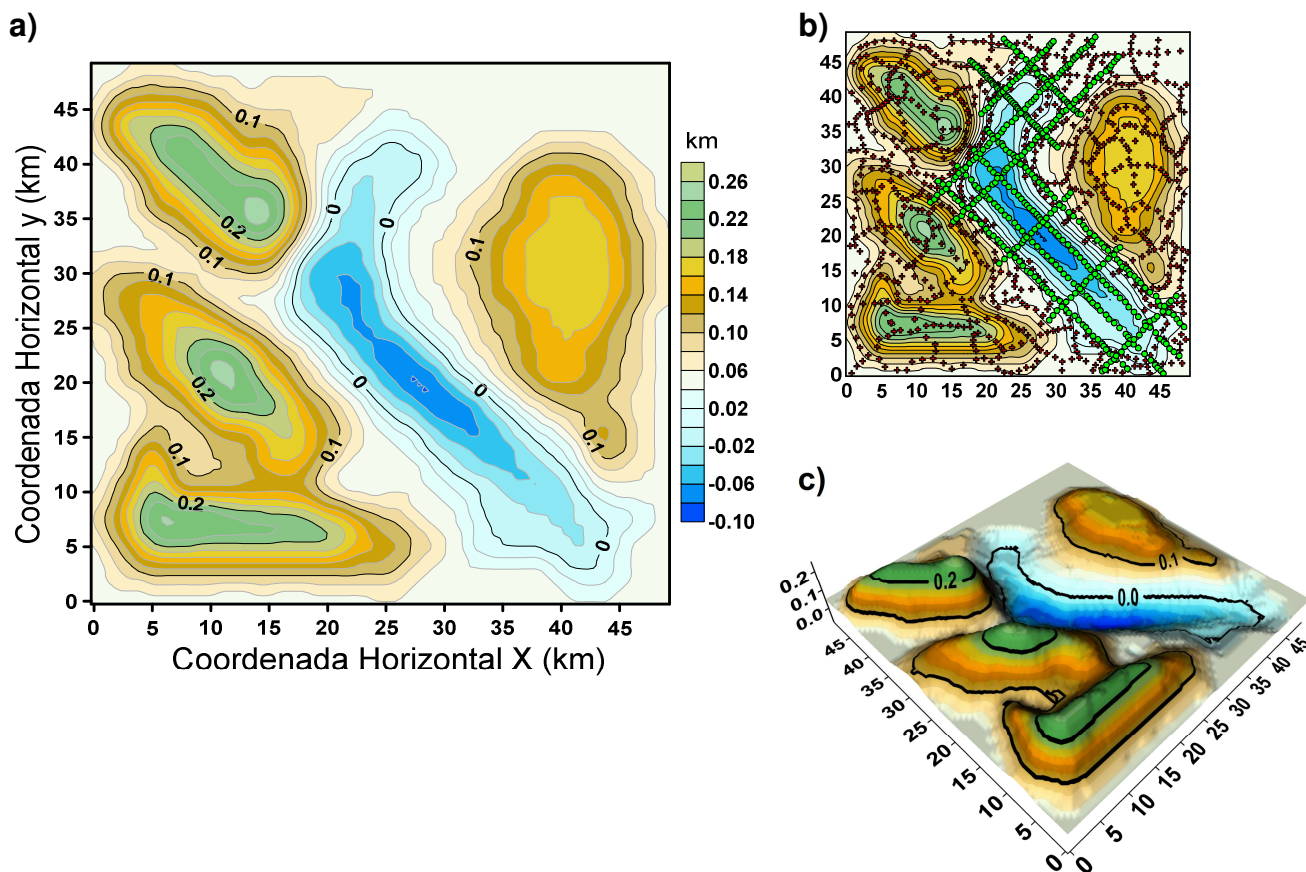
Fonte: Do Autor

### 3.2.2 Mapa de Contorno da Anomalia Gravimétrica de uma Bacia

Simulamos também um ambiente geológico de uma bacia sedimentar formada por embasamento homogêneo e pacote sedimentar heterogêneo limitado a topo e base por superfícies de topografia e do relevo do embasamento com formas complexas. Modelamos esta bacia dispendo 50 por 50 prismas retangulares 3D verticais justapostos em ambas às direções  $x$  e  $y$  (norte-sul e leste-oeste, respectivamente), com dimensões horizontais  $dx = dy = 1 \text{ km}$  e com o topo e base de cada prisma coincidindo com o relevo da topografia e da base do pacote sedimentar simulado respectivamente. Neste pacote sedimentar simulado os valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  que controlam o decréscimo parabólico do contraste de densidade com a profundidade são respectivamente  $-0.4 \text{ g/cm}^3$  e  $0.01 \text{ g/(cm}^3/\text{km)}$ . Calculamos a componente vertical da anomalia gravimétrica para esta bacia sintética em um arranjo com dois conjuntos de dados simulados: um que simule um levantamento terrestre, e que, portanto, tenham cotas verticais que acompanhe a topografia e outro que simula linhas de voo de mesma cota vertical como em um aerolevanteamento.

A Figura 08 mostra o relevo topográfico sobre a bacia simulada, sendo mostrados: na parte **a** o mapa de contorno; na parte **b** adição de detalhe com as posições horizontais das observações; na parte **c** vista em perspectiva desta superfície 3D da topografia.

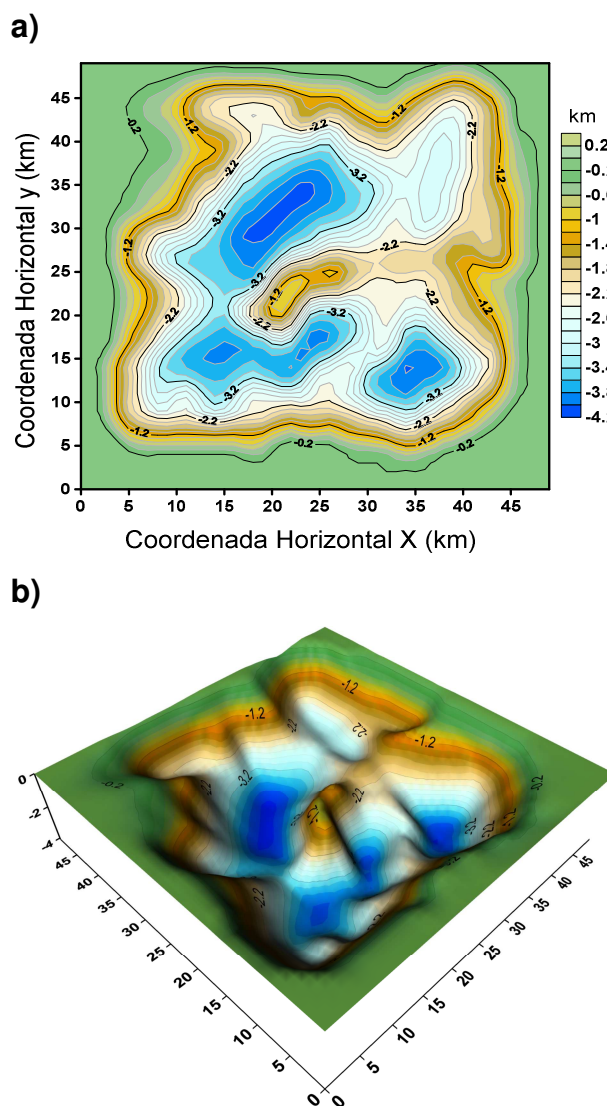
Figura 08 – Mapa do relevo da topografia da bacia: **a)** mapa de contorno; **b)** adição dos pontos de observação; **c)** superfície 3D da topografia da bacia. A escala de cores é a mesma para todas as Figuras.



Fonte: Do Autor

A Figura 09 mostra o relevo do embasamento sob a bacia simulada sendo mostrado na parte **a** o mapa de contorno e na parte **b** vista em perspectiva da superfície 3D do relevo do embasamento.

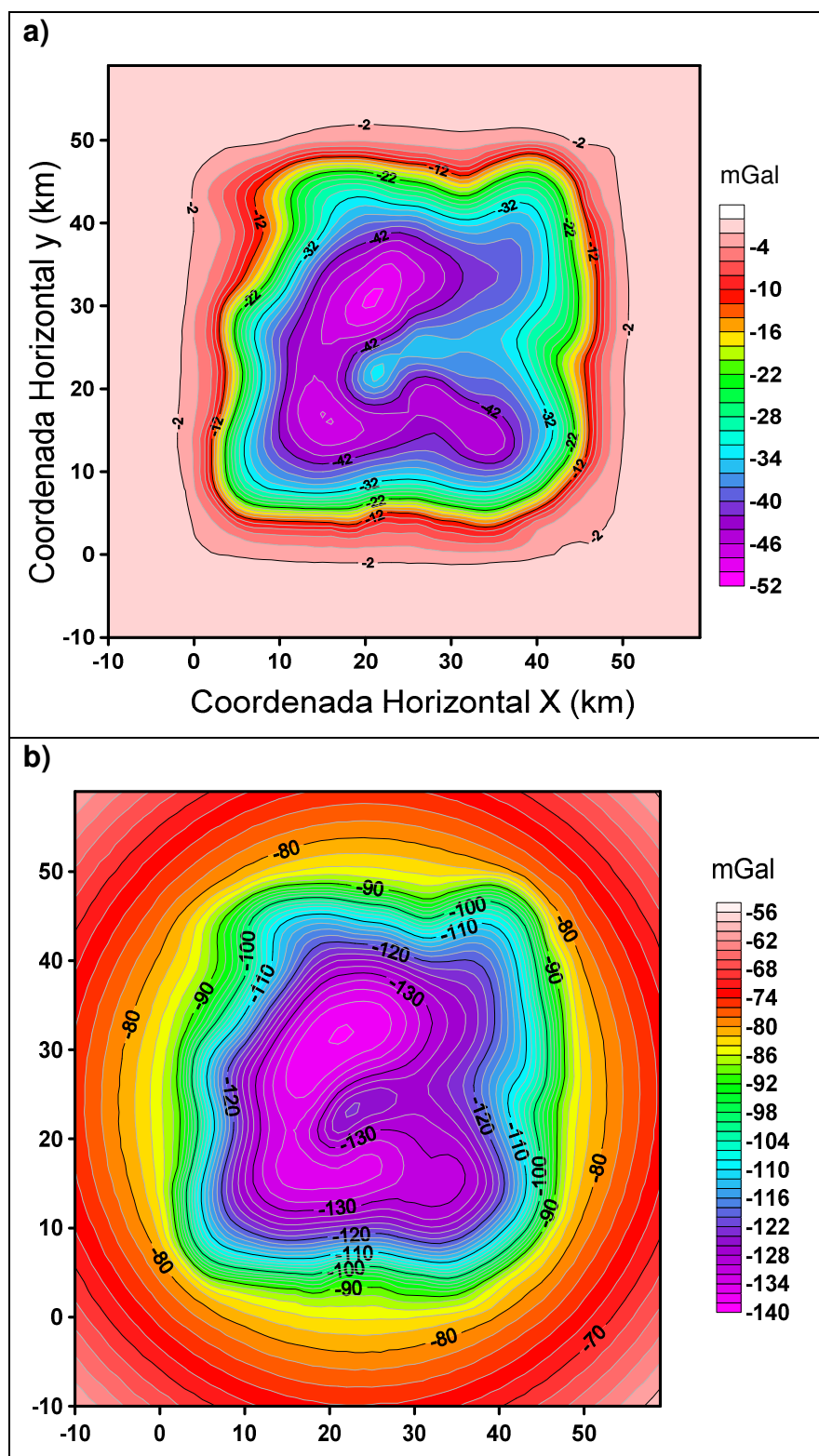
Figura 09 – Mapa do relevo do embasamento da bacia: **a)** mapa de contorno; **b)** Superfície 3D mostrando a variação de profundidade do embasamento da bacia. A escala de cores é a mesma para a parte **a)** e **b)** da Figura.



Fonte: Do Autor

A Figura 10 mostra o mapa em curvas de contorno da anomalia gravimétrica da bacia simulada sendo: na parte **a)** o mapa de contorno da anomalia gravimétrica calculada em uma cota vertical constante e igual à altura de voo; na parte **b)** o mapa de contorno da anomalia gravimétrica calculada pelo procedimento proposto somente nos pontos de observação que simulam um levantamento terrestre, e posteriormente interpolada.

Figura 10 – Mapa da anomalia gravimétrica gerada pela bacia sintética simulada: **a)** mapa da anomalia gerada a uma cota constante; **b)** mapa da anomalia gerada quando a cota de observação acompanha a topografia da bacia.



Fonte: Do Autor

## 4 CONCLUSÃO

Apresentamos um método para modelar o sinal gravimétrico de bacias sedimentares, em que o contraste de densidade diminui com a profundidade segundo lei parabólica, em qualquer posição do espaço tridimensional. Para melhor desempenho computacional, o método proposto utiliza duas diferentes soluções, a menos custosa computacionalmente selecionada para ser aplicada apenas na região de domínio de sua validade. Avaliamos o desempenho do método proposta para um único prisma e para uma bacia sedimentar sintética. Com este método proposto as cotas verticais das observações em casos de levantamentos reais não precisam ser modificadas, podendo ser utilizadas em procedimentos de inversão gravimétricas exatamente nas posições das aquisições. O método proposto depende de uma lei empiricamente selecionada que faz distinção de regiões de aplicação de diferentes soluções para fins de otimização computacional. Como possibilidades de futuros incrementos de qualidade deste trabalho, indicamos a seleção via procedimentos de inversão desta lei.

## REFERÊNCIAS

AGARWAL, B. N. P. Direct gravity interpretation of sedimentary basin using digital computer, *I: Pure Appl. Geophysics.*, v. 86, p. 5–12, 1971.

CHAKRAVARTHI, V.; RAGHURAM, H. M.; SINGH, S. B. 3D forward gravity modeling of density interfaces above which the density contrast varies continuously with depth. *Computers & Geosciences*, v. 28, p. 53–57, 2002.

GARCÍA-ABDESLEM, J. The gravitational attraction of a right rectangular prism with density varying with depth following a cubic polynomial. *Geophysics*, v. 70, p. J39–J42, 2005.

GRANSER, H. Three-dimensional interpretation of gravity data from sedimentary basins using an exponential density-depth function. *Geophysical Prospecting*, v. 35, p.1030–1041, 1987

MURTHY, I. V. R.; RAO, D. B. Gravity anomalies of two dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth. *Geophysics*, v. 44, p. 1525–1530, 1979

PLOUFF, D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 41, p. 727-41, 1976.

RAO, D. B. Modeling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v.84, p. 207–212, 1986.

RAO, V.; CHAKRAVARTHI, C. V.; RAJU, M. L. Forward modeling: Gravity anomalies of two-dimensional bodies of arbitrary shape with hyperbolic and parabolic density functions. *Computers and Geosciences*, v. 20, p. 873–880, 1994.