



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CAMPUS ABAETETUBA  
POLO ACARÁ  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**WENDERSON ARAUJO DE NAZARÉ**

**O NÚMERO DE OURO, A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A  
CONTEXTUALIZAÇÃO DE SUAS APLICAÇÕES À APRENDIZAGEM EM SALA  
DE AULA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

**ACARÁ - PA  
2022**

**WENDERSON ARAUJO DE NAZARÉ**

**O NÚMERO DE OURO, A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A  
CONTEXTUALIZAÇÃO DE SUAS APLICAÇÕES À APRENDIZAGEM EM SALA  
DE AULA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará – UFPA, polo Acará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Manoel Lima Correa.

ACARÁ - PA  
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

N335n Nazaré, Wenderson Araujo de.  
O Número de Ouro, a Sequência de Fibonacci e a contextualização de suas aplicações à aprendizagem em sala de aula para alunos do ensino fundamental II. / Wenderson Araujo de Nazaré. — 2022.  
33 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Manoel Lima Correa  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de  
Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Número de Ouro. 2. Sequência de Fibonacci. 3.  
Sala de Aula. 4. Contextualização do Ensino. 5.  
Geometria. I. Título.

CDD 516.007

---

**WENDERSON ARAUJO DE NAZARÉ**

**O NÚMERO DE OURO, A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A  
CONTEXTUALIZAÇÃO DE SUAS APLICAÇÕES À APRENDIZAGEM EM SALA  
DE AULA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará – UFPA, polo Acará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**APROVADO EM: 20/08/2022**

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Me. Manoel Lima Correa  
Presidente / Orientador



Prof. Dr. Sebastião M. S. Cordeiro  
SIAPE: 1549633

---

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro  
Membro Interno – FACET/CUBT



---

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa  
Membro externo – FADECAM/CUBT



---

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa  
Membro Interno – FACET/C

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudo e também por ter me dado forças em todas as vezes que pensei desistir.

Aos meus Pais, meus avós, meus Irmãos e toda a minha família, que foram o alicerce para realização desse sonho, em especial a minha irmã Evila C. Araújo de Nazaré que me apoiou financeiramente desde o início da minha jornada acadêmica e dedicar ao meu saudoso primo/irmão Tiago Araújo que sempre esteve e sempre estará comigo por toda eternidade.

Aos meus amigos que foram cruciais nessa conquista, podendo destacar em especial: Danylo Oliveira, Welison da Conceição, Wevertton Silva, Arlan Silva, Renato Cardoso e Neilton Vaz. Eles sempre estiveram presentes comigo nessa dura e longa caminhada, sem eles, creio que não se concretizaria a minha formação.

Ao meu orientador Prof. Me Manoel Correa e ao Prof. Dr. Reinaldo Lima pelas orientações, paciência e correções na construção deste artigo, mesmo os conhecendo pouco, eles foram essenciais para a criação desta obra.

Ao Prof. Reginaldo Lima que foi um grande amigo e me acolheu em sua casa, já que não podia alugar uma residência para morar, ele foi a pessoa que estendeu a mão para ajudar quando mais precisei.

A Minha irmã de coração Monique Lima e a sua família que também me acolheram em sua residência em um momento bastante delicado onde eu me encontrava em estado de profunda tristeza e pensava em desistir

A minha Namorada e futura esposa Daiana Macedo que está sempre comigo me apoiando e me dando forças mesmo quando não está bem, se hoje eu concluo é por causa dela e do nosso futuro.

Às pessoas com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto profundo na minha formação acadêmica.

“Insista, persista e nunca desista, pois só os vitoriosos vencem na vida”.

(Juca Pinheiro, 2010)

# O NÚMERO DE OURO, A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A CONTEXTUALIZAÇÃO DE SUAS APLICAÇÕES À APRENDIZAGEM EM SALA DE AULA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Wenderson Araujo de Nazaré<sup>1</sup>

## RESUMO

O Foco deste trabalho foi elaborar uma revisão bibliográfica sobre o número de ouro e a sequência de Fibonacci com objetivo de contribuir como base de estudo para alunos do ensino fundamental II para afins de conhecimento, aprendizagem e na busca de integralizar ainda mais o conceito sobre geometria, álgebra, números irracionais, proporções, aritmética e razão. Analisando o tema sobre o assunto, obteve-se uma pesquisa qualitativa através do google acadêmico com cerca de 15.000 pesquisas relacionadas ao número de ouro e 2.470 sobre a sequência de Fibonacci entre o período de 2011 – 2022 pelo qual foram filtradas vinte e uma obras para a construção deste trabalho, sendo que, dois deles estão diretamente relacionados com o ensino nas escolas, como a BNCC e o PCN. Além disso, a análise foi feita de forma descritiva, permitindo reduzir de forma significativa o material que foram catalogadas como de acervos públicos, livros, Monografias, dissertações, trabalhos de conclusão de curso, revistas eletrônica, repositórios acadêmicos e sites. Para realizá-la, foram abordados temas do cotidiano do aluno para que possa visualizar, identificar e resolver problemas relacionados com o assunto de forma crítica e construtiva, aprimorando sua capacidade de raciocinar e solucionar conteúdos de matemática, partindo de sua origem, seguido com o seu desenvolvimento matemático, geométrico até a constatação de suas aplicações em diversas áreas da natureza, além de sugestões de atividades baseado neste artigo. É importante ressaltar que esse estudo é essencial em sala de aula, pois desperta o interesse do aluno sobre a importância da matemática em nosso dia a dia. Os resultados sugerem que através desta temática, figuras, tabelas e gráficos mostraram que o número de ouro encontra-se em obras de arte como a Mona Lisa, na arquitetura como na pirâmide de Gizé, na Biologia como nas dimensões do corpo humano e até mesmo na religião como no cronograma de Cristo. Com isso, conclui-se que o estudo sobre o número de ouro traz possibilidades para que o aluno aprenda ainda mais sobre conceitos de Matemática, além de ser interessante que faz com o que se torne motivador, tornando o aprendizado bem mais didático e proveitoso.

**Palavras-chave:** Número de ouro. Sequência de Fibonacci. Sala de Aula. Contextualização do Ensino. Geometria

---

<sup>1</sup> E-mail: wenderson.nazare@abaetetuba.ufpa.br

## ABSTRACT

The focus of this work was to elaborate a bibliographic review on the golden number and the Fibonacci sequence with the objective of contributing as a base of study for students of elementary school II for the purpose of knowledge, learning and in the search to further integrate the concept of geometry, algebra, irrational numbers, proportions, arithmetic and ratio. Analyzing the subject on the subject, a qualitative research was obtained through academic google with about 15,000 researches related to the golden number and 2,470 on the Fibonacci sequence between the period 2011 - 2022 through which twenty one works were filtered for the construction of this work, two of which are directly related to teaching in schools, such as BNCC and PCN. In addition, the analysis was done in a descriptive way, allowing to significantly reduce the material that were cataloged as public collections, books, monographs, dissertations, course conclusion works, electronic journals, academic repositories and websites. To accomplish it, topics of the student's daily life were addressed so that they can visualize, identify and solve problems related to the subject in a critical and constructive way, improving their ability to reason and solve mathematics content, starting from their origin, followed by the its mathematical and geometric development to the realization of its applications in several areas of nature, as well as suggestions for activities based on this article. It is important to emphasize that this study is essential in the classroom, as it awakens the student's interest in the importance of mathematics in our daily lives. The results suggest that through this theme, figures, tables and graphs showed that the golden number is found in works of art such as the Mona lisa, in architecture as in the pyramid of Giza, in Biology as in the dimensions of the human body and even in the religion as in Christ's timetable. With this, it is concluded that the study of the golden number brings possibilities for the student to learn even more about Mathematics concepts, in addition to being interesting that makes what becomes motivating, making learning much more didactic and profitable.

**Key-words:** Gold Number. Fibonacci Sequence. Classroom. Contextualization of Teaching. Geometry.

## INTRODUÇÃO

O que torna uma constante irracional tão interessante a ponto que gregos antigos, artistas renascentistas, astrônomos e romancistas do século XXI escrevessem sobre ele? por que ela é tão importante atualmente? Para responder a essas perguntas, é importante conhecer o número de Ouro e estudar suas ramificações para compreender como nasce e como se concretiza. O número de ouro atende por vários outros nomes como Phi, Proporção Áurea, Número Áureo, Média Áurea, Seção Áurea, proporção Divina, Seção Divina e Número de Deus, pela qual serão mencionados diversas vezes nesse artigo. Este número é um número irracional de valor aproximado de 1,61803399..., e representado pela letra grega Phi, que foi batizada pelo Matemático norte americano Mark Barr no ano de 1899, em homenagem ao escultor grego Phideas, pela qual acreditava que tenha usado esse número em várias de suas obras.

A história relata que foi escrito por Euclides na obra "Elementos", por Luca Pacioli, contemporâneo de Leonardo Da Vinci, em "De Divina Proportione" em 1509, por Johannes Kepler por volta de 1600 e por Dan Brown em 2003 em seu romance "O código Da Vinci". Com o lançamento do filme "O Código Da Vinci", a busca por conhecer Phi foi trazida ainda mais para o convencional da cultura Pop, Arte, História, Matemática e Teologia, deixando o leitor curioso sem saber realmente o que era verdade e o que não era. Esta obra estuda o número de Ouro e a Sequência de Fibonacci que também é estudada neste artigo, da quais, ambas têm papéis fundamentais na trama deste mistério de assassinato e romance que distingue entre o mito e a matemática.

A maioria das pessoas aprenderam sobre o número Pi na escola, mas relativamente poucos currículos incluíam Phi, talvez pela mesma razão de que compreender todas as suas manifestações muitas vezes levariam alguém, além do acadêmico, para o reino do espiritual apenas pelo simples fato de que Phi revela uma frequência incomum. Tanto Pi quanto Phi, são números irracionais com infinitos dígitos após a casa decimal. Por exemplo, Pi ou  $\pi$  (3,14...) é a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro, por outro lado, Phi ou  $\Phi$  (1,618...) é a proporção Áurea resultante quando uma linha é dividida de uma maneira muito especial e única.

Este artigo mostrar com clareza sobre a importância do número de Ouro e da sequência de Fibonacci, através de um estudo detalhado sobre suas ramificações e de onde se encontra na natureza e em construções arquitetadas pelo homem. Desta maneira, tendo como objetivo na contribuição como base de estudo para alunos do ensino fundamental II para afins de conhecimento na aprendizagem e na busca de integralizar os conceitos sobre geometria, álgebra, números irracionais, proporções, aritmética e razão. Com isso, colaborar para o trabalho dos pesquisadores, alunos, professores de matemática e de outras disciplinas do Ensino Fundamental - Anos Finais.

### **Objetivo geral**

Expor a importância da Proporção Aurea e sua relação com a Sequência de Fibonacci e contextualizar sobre suas aplicações.

### **Objetivos específicos**

- Integralizar o Número de Ouro e a sequência de Fibonacci no ensino fundamental.
- Elaborar Atividades em sala de aula para promover a criatividade, senso crítico, e desenvolver o raciocínio lógico.
- Fortalecer o aprendizado Sobre Geometria, Álgebra, Números racionais e irracionais, Razão e proporção.
- Colaborar para o trabalho de pesquisadores, Alunos e Professores de diversas áreas.

### **METODOLOGIA**

Considerando os objetivos propostos, os procedimentos metodológicos deste trabalho foram definidos de uma abordagem qualitativa, onde foram feita uma pesquisa bibliográfica sobre o número de Ouro e a Sequência de Fibonacci para as aplicações em sala de aula, além de suas ocorrências na natureza e no dia a dia. Foi escolhido fazer uma revisão bibliográfica porque ela nos permite explorar e integralizar conteúdos de outros autores a um ponto de vista diferente para que o leitor possa ter inúmeras possibilidades de aprendizado.

Ainda como critérios de inclusão foi selecionado uma abordagem qualitativa, pois pode ser pensado como um conjunto de práticas interpretativas que transformam pensamentos em representações na forma de observações, anotações, gravações e documentos. Através do site do google acadêmico, obtive se cerca de 15.000 pesquisas relacionadas ao número de ouro e 2.470 sobre a sequência de Fibonacci entre o período de 2011 – 2022 pelo qual foram filtradas vinte e uma obras para a construção deste trabalho, sendo que, dois deles está diretamente relacionado com o ensino nas escolas, como a BNCC e o PCN. A Escolha pelo site do google acadêmico deu se pelo fato de possuir um acervo científico bastante amplo, confiável e acessível em todo o mundo. Além disso, a análise foi feita de forma descritiva, permitindo reduzir de forma significativa o material que foram catalogadas como de acervos públicos, livros, Monografias, dissertações, trabalhos de conclusão de curso, revistas eletrônica, repositórios acadêmicos e sites. Para realizá-la, foram abordados temas do cotidiano do aluno para que possa visualizar, identificar e resolver problemas relacionado com o assunto de forma crítica e construtiva, aprimorando sua capacidade de raciocinar e solucionar conteúdos de matemática, partindo de sua origem, seguido com o seu desenvolvimento matemático, geométrico até a constatação de suas aplicações em diversas áreas da natureza.

Para meios de exclusão, foram desconsideradas obras fora da linha temporal dos últimos 11 anos, exceto clássicos que versam o tema como LIVIO (2006) e as diretrizes dos parâmetros curriculares nacionais (1998).

## **O NÚMERO DE OURO**

Para compreender onde o Número de Ouro se encontra, é preciso voltar à 300 anos a.C na Grécia antiga e entender a definição de Euclides que diz o seguinte: “Uma linha reta só é cortada na razão extrema e media, quando a linha toda esta para a maior parte e a maior parte está para a menor parte”, ou seja, geometricamente, considerar as extremidades de um segmento de reta qualquer e determinar um ponto A e um ponto B. Depois, anexar um ponto na parte da reta que seja maior que a metade e denominar de C. Com isso, o resultado desta divisão são três pontos distintos em uma reta de segmento AB e segmento AC, por fim, AB está para AC, assim como AC está para CB, isso significa que o maior segmento AC é 1,618... vezes

a medida do menor segmento CB e se resulta em Phi, o Número de Ouro (LANDIM, 2014). Veja a figura 1.

Figura 1- Segmento de Reta Áureo



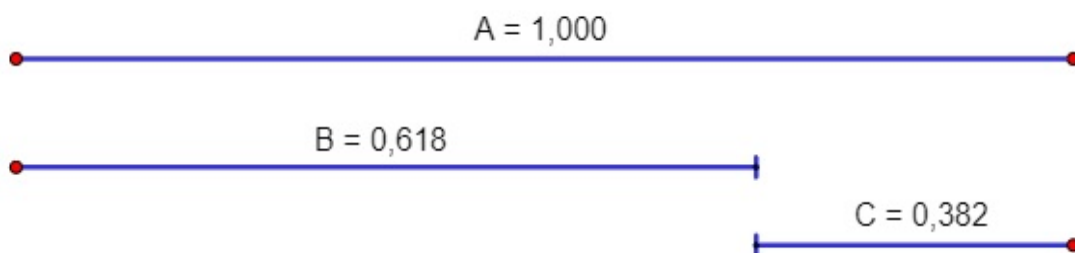
Fonte: elaborado pelo Autor no Geogebra

Esta Proporção Áurea é verdadeiramente e única em suas propriedades matemáticas e penetrante em sua aparência em toda a natureza como aparecerá nos próximos tópicos. Os “desafiados matematicamente” podem estar mais interessados nas aparências de Phi na natureza, sua aplicação à arte, arquitetura, e seu potencial para insights sobre os aspectos mais espirituais da vida. (HORTA *et al.*, 2020).

Na Figura 1, demonstra o quão pode ser simples de encontrar o número de Ouro quando é definida uma reta, mas ela se torna cada vez mais complexa quando definida algebricamente, pensando nisso, a figura 2 mostra medidas de ordem numérica para identificar sua origem.

Figura 2 – Proporção Áurea com valores numéricos.

$$A = B + C$$



Ou seja,

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = 1,618 = \phi$$

Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Observe que quando A está para B ou B está para C o resultado tende para 1,618 que é exatamente o número de Ouro ou Phi. Pode parecer um simples exercício de divisão de matemática, mais é bem mais do que os olhos podem ver.

O que torna isso muito mais interessante é que essa proporção aparece em toda a criação como plantas, animais e extensivamente em todo o corpo humano (Figura 6). Também é encontrado em seres não-vivos como no sistema solar, nos preços, movimentos de tempo de ações e câmbio de moeda estrangeira. Seu apelo, portanto, varia de matemáticos, médicos, naturalistas, artistas, investidores e místicos. (HORTA *et al.*, 2020).

É realmente fantástico observar como uma simples linha e alguns pontos podem nos mostrar o que passa despercebido pelos nossos olhos todos os dias e o quão pode ser importante para descobrirmos enumeras curiosidade. Ainda com Horta (2020) Parte da singularidade do Número de Deus é que ele pode ser mostrado de diversas maneiras, além da segmentação de uma reta como mostra na Figura (1 e 2). Por exemplo:

- Phi é o único número cujo quadrado é maior que ele mesmo por um, expresso matematicamente como:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

- Phi é o único número cujo recíproco é menor que ele por um, expresso como:

$$1/\Phi = \Phi - 1$$

Essas qualidades de Phi podem ser expressas algebricamente como:

$$a + 1 = a^2 \text{ e } a - 1 = 1 / a$$

Isso pode ser reorganizado e expresso como:

$$a^2 - a - 1 = 0$$

Esta é uma equação quadrática, cuja única solução positiva se apresenta na figura 3.

Figura 3 – Imagem da Equação Áurea.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989484820\dots$$

O resultado dessa equação é 1,618 e representado em pela letra Grega maiúsculas como Phi ou  $\Phi$ , e já que não se trata de um dizima periódica, deve se considerar os três primeiros números após a virgula para facilitar, ou seja, Phi é um número irracional e não pode ser expresso como uma razão de dois números inteiros. (HORTA et al., 2020)

## A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, foi um matemático nascido aproximadamente na década de 1170 na cidade de Pisa, localizada na Itália. Sendo um dos maiores matemáticos de sua época, escreveu diversos livros como podemos destacar o *Liber abaci* que tinha um dilema no capítulo 12, conhecido como “a reprodução dos coelhos”. No entanto, Fibonacci não ficou conhecido popularmente pelos seus livros, mas pelo fato de Edouard Lucas, matemático francês, ter dado o nome de Fibonacci a esse problema que diz o seguinte:

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (RAMOS, 2013, p.5)

A Sequência de Fibonacci, também é um elemento da trama em “O Código Da Vinci”, fornece mais de uma maneira para definir o número de ouro matematicamente. A sequência é bem simples, comece com 0 e adicione 1 para obter 1. Em seguida, some 1 com mais 1 para se obter 2, depois pegamos o resultado e somamos com o antecessor repetindo infinitamente. repita o processo de adicionar cada dois números na série para determinar o próximo criando assim, a sequência de Fibonacci. vejamos o modelo a seguir:

**(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)**

Por que a sequência de Fibonacci é considerada primo do Número de ouro? E qual a relação deles? O parentesco surge quando se divide o número com seu antecessor a partir da 5° casa em diante da sequência de Fibonacci, com o resultado, surge a aproximação do Número de Ouro. (GONÇALVES et al., 2018). A tabela 1 mostra a relação da sequência de Fibonacci com o Número de ouro.

Por exemplo:

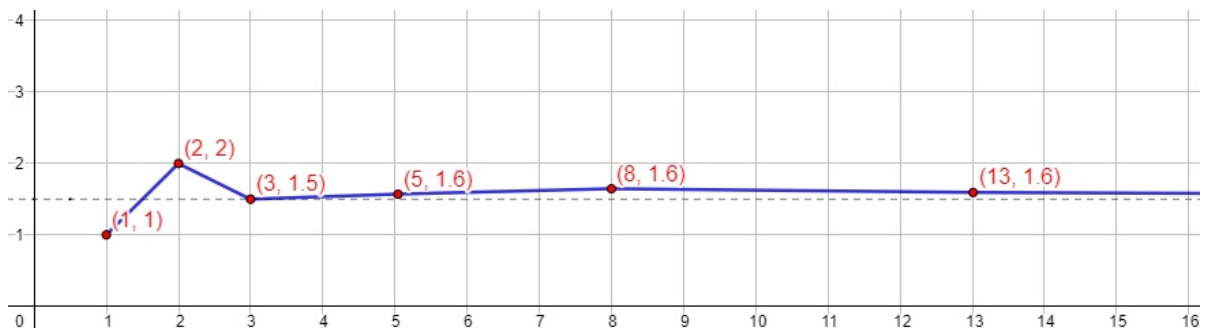
Tabela 1 – Relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro

Sequência de Fibonacci	Razão	Número de Ouro ( $\Phi$ )
$0+1=1$	1/1	1,00
$1+1=2$	2/1	2,00
$1+2=3$	3/2	1,500
$2+3=5$	<b>5/3</b>	<b>1,666</b>
$3+5=8$	<b>8/5</b>	<b>1,600</b>
$5+8=13$	<b>13/8</b>	<b>1,625</b>
$8+13=21$	<b>21/13</b>	<b>1,615</b>

Fonte: elaborada pelo autor

Se avançar na casa de 233/144 o seu resultado será de 1,61805, ou seja, uma aproximação muito próxima de Phi, já que dez casas decimais são equivalentes a 1,6180339887... GONÇALVES *et al.*, 2018). A figura 3 mostra com mais clareza essa relação através do Gráfico.

Figura 3 – A sequência de Fibonacci e a relação com Phi



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Observe que quanto mais a sequência avança, mais próximo de 1,618 ela se aproxima, fazendo com o que se estabeleça cada vez mais a sua aproximação, com isso, ela se torna uma constante irracional tendendo para o mais infinito.

## **O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA NATUREZA**

A matemática não é um bicho de sete cabeças como boa parte da população pensa que é, sabe-se que é uma ciência que vem desde o início dos tempos provando teorias e mostrando resultados através de cálculos por ser uma ferramenta importante para a humanidade, já que não está somente na sala de aula, mas também na natureza. Assim como relata Contador:

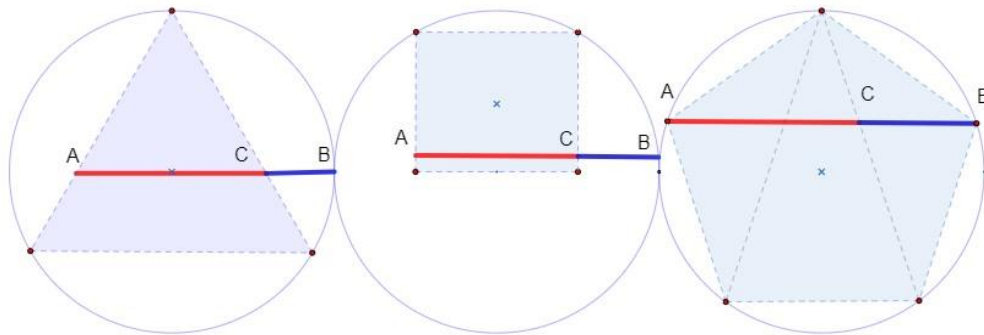
Muitas vezes pensamos que a matemática pertence somente aos livros didáticos, aos cursos e as aplicações técnicas, cujos conceitos muitas vezes fogem do homem comum. Passa despercebido em nosso dia-a-dia, mas ao observarmos o mundo natural ao nosso redor, de imediato verificamos uma grande quantidade de matemática presente em tudo, desde os mais simples detalhes. Não sei ao certo se a natureza sabe contar, mas uma coisa é indiscutível, ela segue padrões matemáticos em tudo o que faz e são esses padrões que permitem ao físico, ao arqueólogo, ao biólogo, ao profissional de pesquisas em geral descobrir seus segredos e muitas vezes, porque não, até imita-la (CONTADOR, 2011, p.203).

A sequência de Fibonacci e a proporção Áurea, estão interligadas através de cálculos e do nosso meio natural. Eles aparecem em situações bastante comuns, por exemplo, em construções arquitetadas pelo homem, nas pirâmides do Egito ou na forma espiral de uma simples Pinha. Veja na Figura 5, 6 e 9 os exemplos de onde encontrar na natureza.

## **GEOMETRIA DA PROPORÇÃO ÁUREA.**

A Proporção Áurea também é encontrada na geometria, aparecendo em construções básicas de um triângulo equilátero, quadrado e pentágono colocados dentro de um círculo, bem como em sólidos tridimensionais mais complexos como dodecaedros, icosaedros e bolas de Bucky, que foram nomeados para o norte americano Buckminster Fuller e são a base para as formas das bolas de carbono 60 e de futebol (CARVALHO *et al.*, 2019). Exemplo na Figura 4.

Figura 4 – Proporção Aurea em figuras Geométricas circunscritas.



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Johannes Kepler (1571-1630), descobridor da verdadeira natureza elíptica das órbitas dos planetas do sistema solar, assim o descreveu: A geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; a outra, a divisão de uma linha em razão extrema e média. A primeira podemos comparar a uma medida de ouro; no segundo podemos nomear uma joia preciosa (CARRARO *et al.*, 2021).

## NATUREZA E VIDA

Existem muitas outras relações matemáticas fascinantes e esquisitices tanto em Phi quanto na série de Fibonacci que podem ser exploradas com mais profundidade, mas por enquanto, é necessário afastar do puramente matemático e aventura se na natureza, onde Phi e a sequência de Fibonacci se manifestam de forma generalizada, porém não universal. Os números de Fibonacci aparecem frequentemente nos números das pétalas de uma flor e nas espirais das plantas. As posições e proporções das dimensões-chave de muitos animais são baseadas em Phi. Exemplos incluem as seções do corpo de formigas e outros insetos, as dimensões das asas e a localização de manchas semelhantes a olhos em mariposas, as espirais de conchas do mar e a posição das barbatanas dorsais em botos. Mesmo as espirais de DNA humano incorporam proporções Phi. (PACHECO *et al.*, 2021).

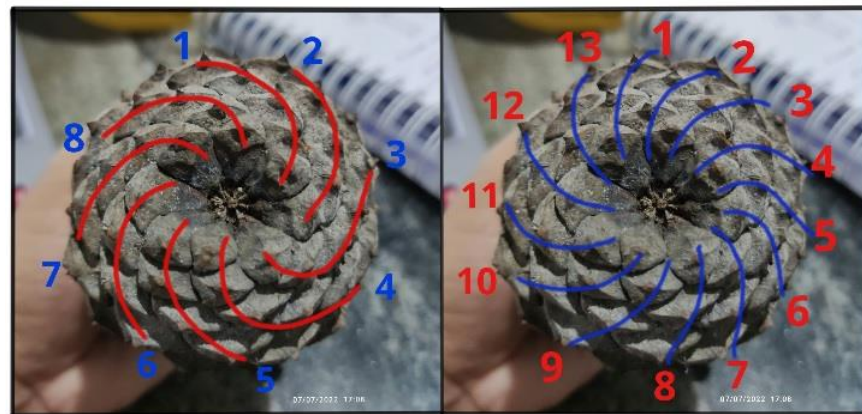
Livio (2006) também retrata em seu livro “A História de Fí, um número surpreendente”, sobre uma questão onde propôs para o leitor a comparação e uma determinada pergunta entre assuntos distintos da natureza, arte e Biologia.

(...) Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O sacramento da última ceia”, de

Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “número Áureo”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina” (LIVIO, 2006, p.13).

Outro exemplo em comum são as pinhas que enumeradas em filamentos, tanto de um lado, quanto do outro exatamente, aparece a sequência de Fibonacci em espiral alternando o padrão de 8 e 13. (ANDRADE, 2020). Exemplo na Figura 5.

Figura 5 – Pinhas de ordem 8 e 13.



Fonte: imagem própria do autor

Portanto, como observado no estudo anterior, a sequência de Fibonacci possui os respectivos números 1,1,2,3,5,8,13,21,34...e a forma espiral da pinha possui exatamente o número 8 e 13 dessa sequência de números nas colunas como mostrado na figura 5 que quando divididas, por exemplo  $13/8$  se aproxima de Phi.

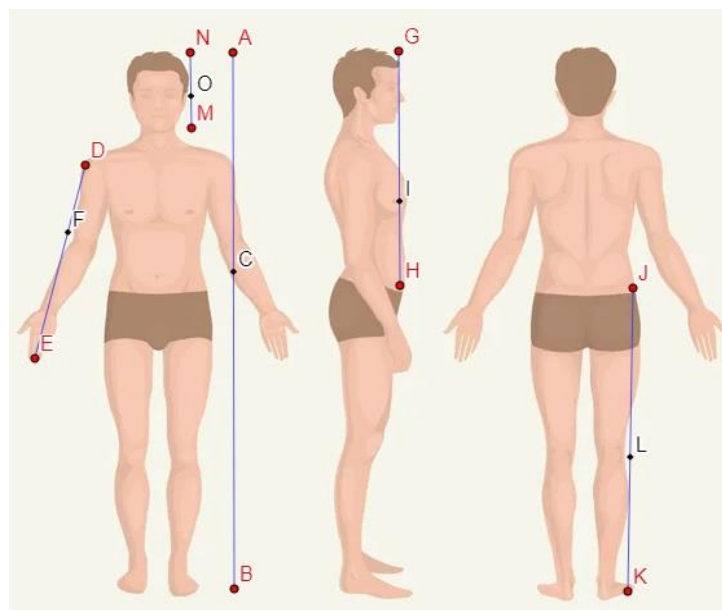
Soma se a isto, Pegorini (2022) fala em sua obra “Razão áurea: o caso da proporção divina na natureza”, que as sementes de girassol também ilustram esse princípio, pois o número de espirais no sentido horário é 55 e no sentido anti-horário é 89, onde podemos ver na sequência 10º e 11º de Fibonacci respectivamente.

O mais fascinante disso tudo é que o número Áureo pode gerar inúmeras variações da natureza que podem ser vistas e sentidas no presente, passado e talvez no futuro. Pode assim dizer que essa constante irracional se localiza em abundância na vida da sociedade, assim como as estrelas em diversidade no universo ou as partículas em perfeito equilíbrio no ar.

## PERCEPÇÕES DE BELEZA NO CORPO HUMANO

Ramos (2013) fala que o número de ouro existe em abundância na natureza, porém ele pode estar bem mais perto do que se possa imaginar, basta olhar para o umbigo e compara com altura total do indivíduo; à medida que vai do ombro até a ponta do terceiro quirodáctilo (dedo médio) dividido pela medida do cotovelo ou pela razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax etc. Por exemplo:

Figura 6 – Proporções Áureo do corpo humano.



Fonte: elaborado pelo Autor no Geogebra

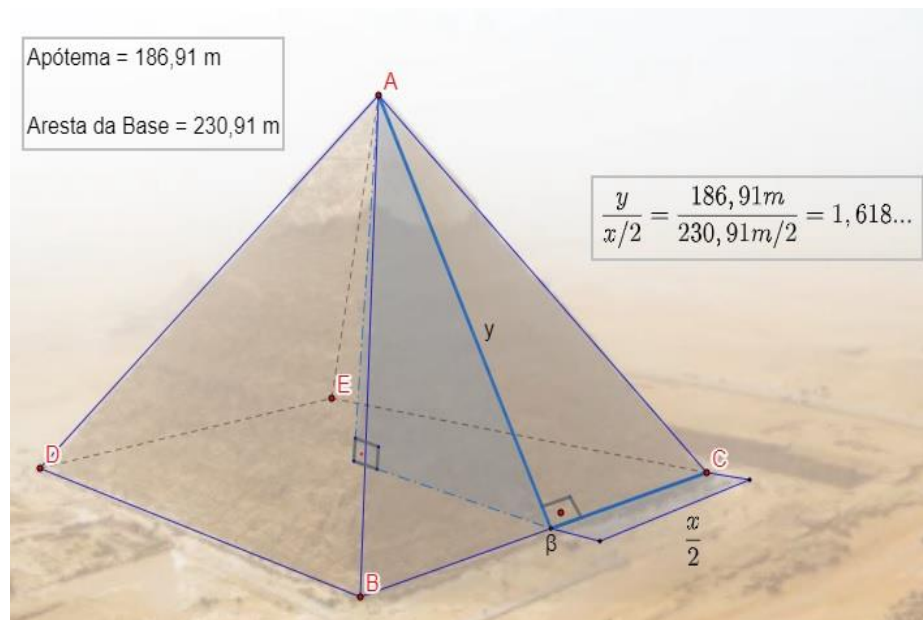
Na Figura 6, Phi aparece em todo corpo humano, desde a ponta dos pés até a cabeça, podendo destacar também, no rosto, no corpo nas pernas, nos braços e até mesmo no DNA.

Alguns argumentariam que a beleza está nos olhos de quem vê, mas há evidências para apoiar que o que percebemos como a beleza em mulheres e homens é baseado em quão próximas as proporções das dimensões faciais e corporais se aproximam do Phi, parece que a razão áurea está conectada à consciência como um guia para a beleza. Por esta razão, o número de ouro é aplicado tanto na cirurgia plástica facial, quanto na odontologia estética como um guia para alcançar os resultados mais naturais e bonitos em características faciais e aparência (SANTOS, 2022).

## ARQUITETURA E ARTE

Com todas as propriedades matemáticas únicas de Phi e sua aparência ao longo da criação, não é de admirar que a humanidade não apenas perceba esse número e a proporção áurea que ele cria, mas também o use para capturar a beleza e a harmonia da natureza em suas próprias criações como na Arquitetura e na Arte. Uma grande obra arquitetônica feita pelo homem são as pirâmides de Gizé no Egito. Por exemplo, se anexar um triângulo retângulo, pode ser observada as dimensões do Número de Ouro em uma de suas extremidades, especificamente como mostra a Figura 7 nos respectivos pontos (A), (C) e (beta).

Figura 7 – O número de Ouro na Pirâmide.



Fonte: elaborado pelo Autor no Geogebra.

A Proporção Áurea aparece como resultado da divisão de tamanho real da pirâmide e nas formas geométricas ocultas de cada bloco, assim como relata o professor Haus, (2021) através do site educacional.

Na construção das grandes pirâmides, os egípcios utilizaram muitos conceitos matemáticos importantes, como o do ângulo reto, o das relações de razão e proporção e o do segmento áureo. A aplicação do conceito do segmento é recorrente nesse tipo de construção. Por exemplo: Cada bloco de pirâmide é 1,618 vezes maior que o bloco do nível superior. As câmaras, no interior, das pirâmides, também seguem essa proporção, de forma que o comprimento das salas é 1,618 vezes maior que sua largura. O segmento - identificado como Phi - também aparece nas medidas das pirâmides de Quéops. (HAUS, 2021).

A grande pirâmide do Egito parece incorporar a proporção áurea nas proporções de sua base, altura e hipotenusa, mas sua casca externa ausente e a ausência da menção do Número de Ouro nos antigos escritos egípcios, com isso, tornando difícil provar conclusivamente que isso ocorreu por design. (LIMA; BIEHL, 2018).

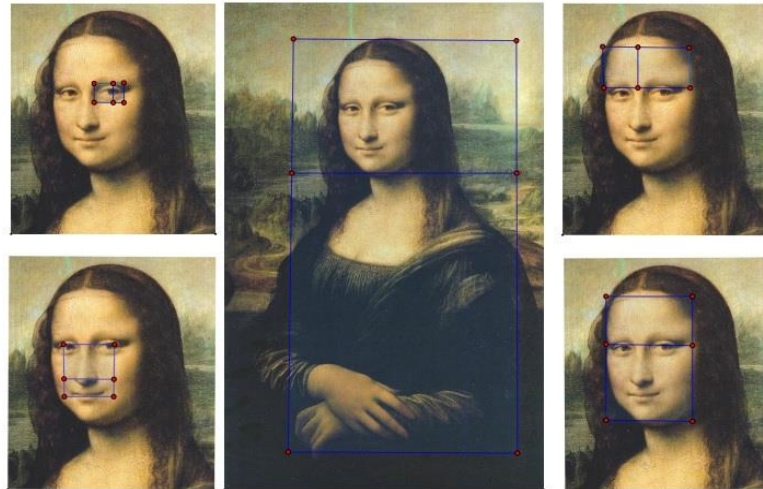
Na Arte, Leonardo da Vinci se destacou pelas suas grandes obras conhecidas mundialmente, dentre elas se destaca a Mona lisa e A última Ceia. Além de ser um grande pintor ele também era cientista, matemático, inventor, escultor etc. Outros artistas como Raphael, Sandro Botticelli, e Georges Serat também fizeram o uso do Número Divino, embora isso seja inegável, algumas pessoas sobrepõem criativamente espirais douradas nas Pinturas, já outros, não acreditam que foram pretendidas pelo artista e isso ainda é objeto de debates até nos dias de hoje.

Foi Leonado da Vinci que chamou a razão áurea de divina proporção, utilizando-a inclusive na famosa Monalisa (ou Gioconda), de 1502: Se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que está na proporção áurea. Poderemos também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e teremos novamente a proporção áurea. Poderemos continuar a explorar esta proporção em várias outras partes do corpo. (MENDIAS, 2005, p. 35-48)

Assim como foi demonstrado na figura 7, a proporção divina está presente em todas as dimensões do corpo humano e as obras de Leonardo da Vinci nos mostram essas medidas com precisão em algumas de suas pinturas, embora não tenha sido cientificamente comprovado, mesmo assim, pode se destacar na figura da Mona lisa. De acordo com estudos, além de ser o quadro mais famoso do mundo é também o que mais agrada aos olhos humanos.

Por Exemplo:

Figura 8 – Divina proporção na Mona Lisa de Leonardo Da Vinci.



Fonte: Elaborada pelo Autor no Geogebra

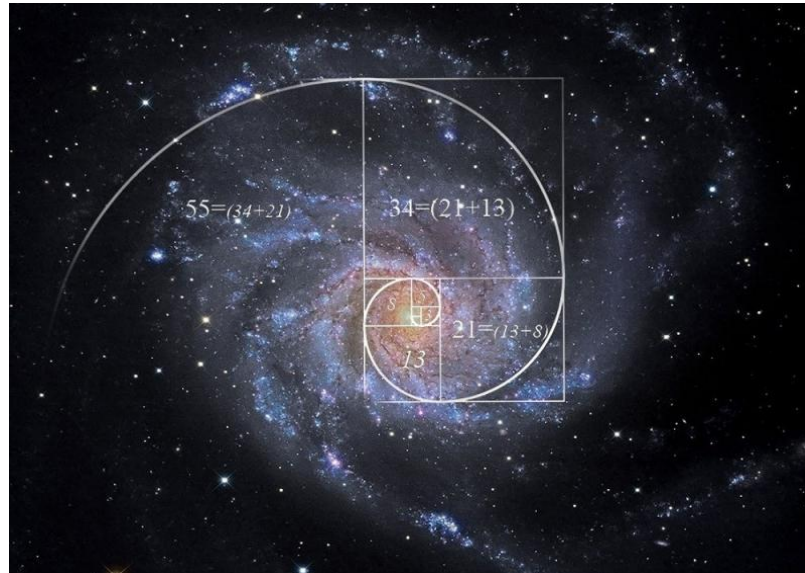
As evidências de vários estudos testaram para ver qual forma geométrica mais se adapta a exuberância da perfeição e o retângulo de Ouro, ou seja, aquele que apresenta a sequência de Fibonacci e que está presente em diversos eletrodomésticos como: televisores, notebook e aparelho celular por exemplo, seria o retângulo mais agradável aos olhos humano. Os resultados dos estudos são mistos, mas geralmente apontam com formas próximas ao retângulo dourado como sendo o mais agradável. (LIMA; BIEHL, 2018).

## SISTEMA SOLAR E O UNIVERSO

O universo ainda é um espaço de proporção inimagináveis para a compreensão do ser humano, pouco se sabe dos mistérios que se escondem entre as estrelas. Recentemente foi lançado um megatelescópio espacial chamado James Webb, ultramoderno para captura e coleta de dados. Os Cientistas Acreditam que ele será capaz de trazer imagens espetaculares de alta definição e será capaz de fornecer as primeiras imagens do universo, ou seja, a imagem das primeiras estrelas que se originaram no início do universo. Enquanto não temos imagens conclusivas, temos foto do telescópio espacial Hubble que pode ser destacados alguns corpos celestes como: estrelas, constelações, planetas, galáxias, nebulosas e até supernova. Uma das imagens capitadas pelo Hubble são de galáxias espirais que trazem consigo

vestígios da proporção Áurea em seu formato. Veja o exemplo na figura 9 a Sequência de Fibonacci sob a gravura.

Figura 9 – A sequência de Fibonacci em uma Galáxia espiral.



Fonte: <https://www.misteriosdouniverso.net/2019/09/problema-de-longa-data-da-proporcao.html>: Acesso em 07/07/2022.

Esta ilustração mostra a sequência de Fibonacci e existem estudos que relacionam o formato de outras galáxias com a nossa através de evidência do cosmo, assim como relata Filho e Saraiva (2004) que ao observar outras galáxias da terra, pode ver rastros de gases cósmicos deixadas por nebulosas ao meio do vácuo em forma de espiral e tendo em vista que a via láctea também tem esse vestígio, tende a crer que o nosso espaço cósmico é também em espiral, embora a distância seja muito grande para comprovar.

Santos (2021) fala também que encontramos até relações de proporção áurea no sistema solar. Os diâmetros da terra e da lua formam um triângulo cujas dimensões são baseadas nas características matemáticas de Phi. As distâncias dos planetas ao sol se correlacionam surpreendentemente com as potências exponenciais de Phi. Os belos anéis de saturno têm uma dimensão muito próxima da proporção áurea do diâmetro do planeta. A NASA divulgou em 2003 descobertas de que a forma do universo é de um dodecaedro baseado em Phi.

## ASPECTOS ESPIRITUAIS

A descrição dessa proporção áurea como a Proporção Divina, talvez seja adequada porque é vista por muitos como uma porta para uma compreensão mais profunda da beleza e da espiritualidade na vida, revelando uma harmonia ou conexão oculta em muito do que observamos. Esse é um papel incrível para um único número, mas novamente, esse número desempenhou um papel incrível na história humana e nos fundamentos da própria vida. A linha entre seus aspectos matemáticos e místicos não é facilmente traçada.

A Proporção Áurea não aparece explicitamente na Bíblia ou em outras escrituras antigas, mas foram descobertas que as dimensões dadas por Deus a Noé para a Arca e a Moisés para a Arca da Aliança, refletem uma proporção de 5 a 3, números de Fibonacci com uma proporção de 1.666, e uma aproximação razoavelmente próxima de Phi. A Caaba, o local mais sagrado do Islã em Meca, está localizada muito perto da proporção áurea da distância entre os polos norte e sul da Terra. Curiosamente, até mesmo o símbolo de Phi, um círculo com uma linha traçada por ele, pode ser pensado para representar um zero ou vazio dividido por um, ou Unidade para criar beleza, análoga a Deus criando o universo do nada. (SANTOS, 2021)

No início desta obra, foi falado sobre o Número Pi, suponha que ele seja o número da criação do universo, conseqüentemente, Phi seria de estruturação descrito através de números. Visando isso, a proporção divina aparece na monografia de Cristo como mostra na figura 8.

Imagem 8 – O Monograma de Cristo



Fonte: <https://www.matematicaparafilosofos.pt/o-monograma-de-cristo-e-o-numero-de-ouro/>

Acesso: 07/07/2022.

As escrituras trazem as letras do Alfabeto Grego (A, X, P, W) que convertidos em valores da época, ficariam na seguinte forma:  $A = 1$ ;  $X = 600$ ;  $P = 100$ ;  $W = 800$ , e coincidentemente são os Números de ouro 1,618 isso, se não for considerado os números zeros, já que não eram lidos na época. (FERNÁNDEZ, 2019).

## **NOVAS DESCOBERTAS ENVOLVENDO A PROPORÇÃO ÁUREA**

A Proporção Áurea continua a abrir novas portas em nossa compreensão da vida e do universo. Ele apareceu na descoberta de Roger Penrose na década de 1970 de “Penrose Tiles”, que permitia que as superfícies fossem ladrilhadas em simetria de cinco vezes, uma tarefa anteriormente considerada impossível. Ele apareceu novamente na década de 1980 no arranjo molecular tridimensional de quase-cristais, uma forma de matéria recém-descoberta. À medida que entramos no século XXI, Phi parece estar renascendo na integração do conhecimento em uma ampla variedade de campos de estudo, incluindo tempo e física quântica. (SIQUEIRA-BATISTA; NETO, 2021).

## **APRENDIZAGEM PARA SALA DE AULA**

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), entre as competências que envolve o ensino da área de matemática na educação básica, está a habilidade de proporcionar argumentos convincentes utilizando o conhecimento matemático, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico no educando, sendo assim, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) as normas nos dizem o seguinte.

EF07MA17: Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (BRASIL, 2018, p.307)

EF08MA11: Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. (BRASIL, 2018, p. 313)

EF09MA08: Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (BRASIL, 2018, p.317)

Diante deste contexto, o Número de Ouro, além de se relacionar com a sequência de Fibonacci está interligado com várias unidades temáticas como

geometria, álgebra, números irracionais, proporções, aritmética etc. Com isso, destaca-se a importância do ensino deste conteúdo a partir dos anos finais com a finalidade de expor a contextualização desta proporção para que se possa estimular a investigação científica, análise e reflexão que consiste em observar e responder perguntas, considerando que a matemática não se restringe somente a cálculos, portanto, por meio deste assunto, é evidente que a matemática é uma disciplina que vai além de um caráter meramente conteudista e memorístico. Sendo assim, o Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (Brasil, 1998) nos dizem que:

(...) Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (PCN, 1998, p. 43).

Deste modo, a melhor maneira de saber por si mesmo onde Phi aparece e onde é imaginado é explorar com a mente aberta, aprender e tirar suas próprias conclusões sobre os fatos e implicações. Diante do assunto abordado, cabe ao professor ser o mediador deste ensino interdisciplinar desenvolvendo as habilidades dos alunos através de atividades de pesquisas e resolução de problemas para que raciocinem por si próprios.

## **PROPOSTAS DE EXERCÍCIOS EM SALA DA AULA**

Neste tópico, será abordado atividades baseadas no conteúdo apresentado do Número de ouro e a sequência de Fibonacci. Essas sugestões, buscam promover discussões e reflexões sobre padrões que englobam este trabalho. Com isso, os exercícios devem ser feitos originalmente pelo aluno ou em grupos para apresentações de seminários e atividades complementares. Neste sentido, o professor deve intermediar desde o momento da criação até a finalização dos exercícios.

O público-alvo, será alunos do 9º ano do ensino fundamental II e a realização das atividades não terá tempo determinado, pois depende da dinâmica que o professor apresentar. Os materiais necessários são: Lápis, Borracha, Régua, transferidor, esquadro, compasso, Treina graduada, papel A4 e exercício impresso. Podemos destacar também, alguns objetivos com os exercícios, como:

- Mostrar que a razão áurea possui uma matemática que pode ser executada até mesmo por quem apresenta dificuldade na matéria.
- Despertar de forma significativa o interesse com a Matemática.
- Trabalhar a interação em grupo através das respostas obtidas pelo aluno e por outras equipes.
- Fazer com que o aluno obtenha o aperfeiçoamento da coordenação motora.

O Docente deve apresentar o conteúdo somente se os alunos mostrarem alguns pré-requisitos como:

- Geometria plana
- Números Racionais e Irracionais.
- Triângulo retângulo
- Matemática básica
- Razão e Proporção.
- Equação do primeiro e segundo Grau.

## **EXECUÇÃO DAS ATIVIDADES**

Primeiramente, o magistrado deverá apresentar um breve histórico do Número Divino, seguido por suas aplicações no cotidiano e na natureza, assim como se encontra nesse artigo, onde pode ser tomado como referência, para que aluno entenda de modo simples, objetivo e obtenha o senso crítico e criativo. Depois disso, deverá organizá-los em grupos para que criem e estabeleçam normas de como devem discutir as atividades.

Na atividade I, o aluno deverá ler e localizar para saber se o ponto é áureo, ele deverá fazer de forma individual e se caso precisar, somente com a ajuda do professor. Na Atividade II, o Professor deverá mostrar a função quadrática com suas raízes irracionais negativa e positiva e considerar a raiz positiva chamando de razão Áurea ou Phi. Na atividade III, o Aluno trabalhará com a Geometria. Na atividade IV, O aluno irá exercitar o que aprendeu no tópico “percepções de beleza no corpo humano, onde mostra as dimensões áureas e medir o que se pede na tabela.

## EXERCÍCIOS

### Atividade I

Através das informações abaixo, encontre o ponto Áureo a partir do seguinte segmento AB.



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Instruções:

- 1 – Marque um ponto A, em seguida com o compasso, faça um semicírculo e usando a mesma medida, marque outro ponto B de lado oposto com um outro semicírculo, feito isso, encontra se o ponto médio M da reta e passe uma linha na vertical. (o professor deve ensinar isso ao aluno).
- 2 – Faça outro segmento perpendicular que ficaria sendo CD e forme um triângulo retângulo a partir dos pontos ABD.
- 3 – Use o compasso e trace um raio em M centralizado em D.
- 4 – Ainda com o centro do compasso em D gire no sentido horário até passar pela reta AB, resultando no ponto P. Feito isso, você encontra aproximadamente o ponto Áureo da reta.

### Atividade II

(RAMOS 2013) - Escreva uma reta qualquer, como na imagem abaixo:



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Como vimos no artigo, AB está para AC, assim como AC está para AB. Vamos considerar que  $AC = x$  e  $CB = 1$ , logo  $AB = x+1$ . Encontre o valor dessa razão:

### Atividade III

(RAMOS 2013) - Agora, vamos construir um pentagrama e um Pentágono.

- Instruções

- 1 – Faça uma circunferência com o compasso

2 – Pegue o transferidor e divida a circunferência em cinco partes semelhantes por isso deve ser feito com  $72^\circ$  de cada lado.

3 – Cada ponto, será denominado distintamente pelas letras do alfabeto (A, B, C, D e E).

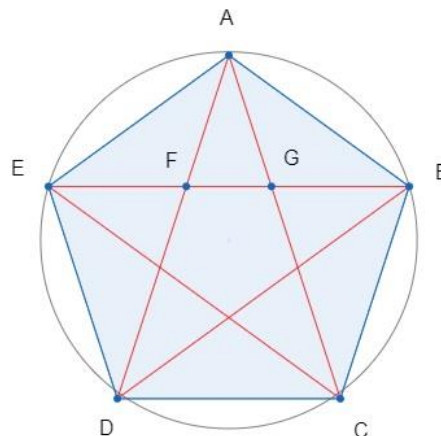
4 – Una cada ponto e veja se obteve um pentágono dentro da circunferência. (O professor deve orientar).

5 – Agora, trace retas a partir do AC, CE, EB, BD e por último DA, criando o pentagrama.

6 – Faça o Ponto F no primeiro encontro do pentagrama de A e E e o ponto G no encontro de A e B. localizada na parte superior.

7 – Com o auxílio de uma régua, faça a medição das diagonais DA, CD e os segmentos FD, FA e FG.

Calcule as razões  $FD/DA$ ,  $FA/DF$ ,  $DC/AD$ , e  $FG/FA$  na tabela abaixo.



Fonte: Elaborado pelo autor no Geogebra

Comprimento (cm)	Valor exato
DA	
CD	
FD	
FA	
FG	
Razão	Cálculo
DA/FD	
FD/FA	
DA/CD	
FA/FG	

Fonte: Ramos 2013

### Atividade IV

(RAMOS 2013) - O professor deverá desenhar a tabela no quadro, criar grupos de alunos para esta dinâmica. Cada grupo, irá eleger um aluno e medir o comprimento que se pede na tabela com o auxílio de uma trena graduada. Feito isso, irão calcular e ver onde se aproxima da razão Aurea.

Comprimento (m)	Grupo					
	A	B	C	D	E	F
Cabeça - Chão						
Umbigo - Chão						
Cintura - Chão						
Joelho - Chão						
Razão	Cálculo					
Cabeça - Chão / Umbigo - Chão						
Cintura - Chão / Joelho-Chão						
Total						

Fonte: Ramos 2013

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frente ao exposto e tomando como o objetivo geral deste artigo, que visou apresentar a contextualização do número de ouro é notório que estudar o Número Divino não é tão fácil, já que ele não é aplicado como deveria ser, por isso, o jeito de mostrar de uma forma mais suave para o leitor que este assunto é fascinante por sua exuberância e abundância no universo e que também pode ser mais fácil se o compreendermos. O estudo de suas ramificações para sala de aula se mostra muito proveitoso, tanto para alunos, quanto professores, pois fazem que desperte o interesse para aprender com mais entusiasmo sobre geometria, proporção, números irracionais e tudo o que engloba a disciplina de matemática.

De acordo com as referências apresentadas neste artigo, pode se comprovar, que o professor pode abranger seu conteúdo para o aluno e incluir o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci na grade curricular já que eles satisfazem as exigências da norma da BNCC conforme as competências estabelecidas.

Deste modo, espero ajudar novos pesquisadores, alunos e professores com a execução deste trabalho fazendo com o que desperte mais o interesse sobre um assunto que deveria ser mais falado nas escolas e não só em universidades. Com isso, conclui-se que o estudo sobre o Número de Ouro traz possibilidades para que o aluno aprenda mais sobre conceitos de Matemática, além de ser interessante que faz com o que se torne motivador, tornando o aprendizado bem mais didático e proveitoso.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Tiego de Moraes. **A proporção divina: estudando a beleza do Número de Ouro na Matemática**. 2020.
- BRASIL. Ministério da educação. **Base nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CARRARO, Jefferson et al. **Razão áurea como facilitador no processo de ensino-aprendizagem**. 2021. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- CARVALHO, William de Carvalho et al. **Designometria-Livros-objeto sobre Geometria Sagrada**. 2019.
- CONTADOR, P. R. M.; **A Matemática na arte e na vida**. 2nd. ed. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2011.
- FERNÁNDEZ, José carlos. **A Monografia de cristo e o Número de Ouro**. Site. Disponível em:<https://www.matematicaparafilosofos.pt/o-monograma-de-cristo-e-o-numero-de-ouro/>. Acesso em: 7 jul. 2022.
- FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e astrofísica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, v. 780, 2004.
- GONÇALVES, Ruth Isabela Barbosa et al. Nunca é Cedo para Aprender sobre a Sequência de Fibonacci. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018.
- HAUS, Tiago. **Piramides do Egito**. [S. l.], 3 nov. 2021. Disponível em: <http://www.educacional.com.br/especiais/Niemeyer/includes/arqCalculos/piramides>. Acesso em: 5 jul. 2022.
- HORTA, Débora Alves et al. O número de ouro e proporção áurea: harmonia e beleza na matemática da vida. **Revista Brasileira de Desenvolvimento**, v. 6, n. 5, pág. 30834-30858, 2020.
- LANDIM, N. P. **Razão Áurea: Expressando a beleza desse número para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, 2014.
- LIVIO, M. **RAZÃO ÁUREA: A HISTÓRIA DE FI, um número surpreendente**. Tradução de Marco Shinobu Matsumura, Rio de Janeiro: editora Record, 2006.
- LIMA, Edilene Medeiros de; BIEHL, Cinthia Fernandes. **A beleza matemática do rosto humano através do visagismo: proposta de aplicações da máscara de Marquardt em sala de aula**. **Matemática-Tubarão**, 2018.
- MENDIAS Lauro, Maira, "**A razão áurea e os padrões prejudicam na natureza, artes e arquitetura**". *Exacta*, Vol., núm.3, pp.35-48 de 2022]. ISSN: 1678-5428.

Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=81000304> Acesso em: 6 de julho

PACHECO, Giliar Ferreira et al. **Sequência de Fibonacci: história, propriedades e aplicações**. 2021.

PCN - Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Introdução. Brasília, 1998.

PEGORINI, Andrea V. **Razão áurea: o caso da proporção divina na natureza**. 2022.

RAMOS, marcos Gertrudes Oliveira. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Dissertação de Mestrado. Universidade estadual de Santa Cruz. 2013.

SANTOS, Lucelia L. **Matemática e Ética: Um convite à reflexão**. Haikai Editora, 2021.

SANTOS, José Levi Melo dos. **Padrão de beleza e proporção áurea: perfeição fundamentada no número phi**. 2022.

SIQUEIRA-BATISTA, Rodrigo; NETO, José A. Helayël. **Buracos negros estelares: a geometria do espaço-tempo de Schwarzschild**. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n.2, pág.123-123, 2021.