



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

MARCOS PAULO PINHEIRO GOMES

**FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E HAMILTONIANA PARA
SISTEMAS DISSIPATIVOS: APLICADA NO LANÇAMENTO
OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR**

Abaetetuba-PA

2021

MARCOS PAULO PINHEIRO GOMES

**FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E HAMILTONIANA PARA
SISTEMAS DISSIPATIVOS: APLICADA NO LANÇAMENTO
OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Universidade Federal do Pará como parte
dos requisitos necessários para obtenção do
título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Ro-
drigues

Abaetetuba-PA

2021

MARCOS PAULO PINHEIRO GOMES

**FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E HAMILTONIANA PARA
SISTEMAS DISSIPATIVOS: APLICADA NO LANÇAMENTO
OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Universidade Federal do Pará como parte
dos requisitos necessários para obtenção do
título de Licenciado em Física.

Data de aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues
Orientador - UFPA

Prof. Dr. Messias de Souza Costa
Examinador interno - UFPA

**Prof. Dr. Gabriel Adolfo Cabrera
Pasca**
Examinador interno - UFPA

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças para conseguir concluir essa etapa da minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais Plácido e Maria Alice e a minha irmã Maria por todo apoio que me deram nos estudos e na vida.

Aos meus amigos que conheci ao longo do curso de Física, em especial ao Cleber, Josiel, Anderson, Marinelson, Bruno, Valter e Leonardo.

Ao Professor Doutor Manuel Eleutério Rodrigues pela excelente orientação e pelos ensinamentos repassados durante a minha trajetória no curso de Física.

Aos meus professores, que me deram grandes ensinamentos ao longo da minha jornada como aluno do curso de Física.

Resumo

No presente trabalho, buscamos obter as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera sem sofrer rotação sujeita a força de resistência do ar através dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas dissipativos. Para esse fim, fizemos uma revisão dos formalismos newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano da mecânica clássica para sistemas conservativos, já que estes servem como base para a formulação lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos. Além disso, fizemos uma sucinta discussão sobre o cálculo fracionário, onde fizemos uma breve abordagem histórica sobre esse ramo da matemática, em seguida, destacamos o cálculo fracionário promovido por Riemann-Liouville e Caputo, tendo em vista que estes cálculos foram utilizados no método da lagrangiana dependente de derivadas fracionárias, que é um dos métodos utilizados na obtenção das equações de movimento. Por último, encontramos as equações de movimento que estávamos buscando através dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas dissipativos utilizando a função de dissipação de Rayleigh, a função lagrangiana equivalente e o método da lagrangiana dependente de derivadas fracionárias.

Palavras-chave: Lançamento oblíquo, sistemas dissipativos, cálculo fracionário.

Abstract

In the present work, we seek to obtain the equations of motion for the oblique launch of a small sphere without undergoing rotation subject to air resistance through the lagrangian and hamiltonian formalisms for dissipative systems. To this end, we reviewed the Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian formalisms of classical mechanics for conservative systems, as these serve as the basis for the Lagrangian and Hamiltonian formulations for dissipative systems. In addition, we made a brief discussion about fractional calculus, where we made a brief historical approach to this branch of mathematics, then highlighted the fractional calculus promoted by Riemann-Liouville and Caputo, considering that these calculations were used in the method of lagrangian dependent on fractional derivatives, which is one of the methods used to obtain the equations of motion. Finally, we found the equations of motion we were looking for through the lagrangian and hamiltonian formalisms for dissipative systems using the Rayleigh dissipation function, the equivalent lagrangian function and the fractional derivative dependent lagrangian method.

Keywords: Oblique casting, dissipative systems, fractional calculus.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação das forças que atuam no bloco.	21
Figura 2 – Representação do Princípio de Hamilton, onde C_1 é a trajetória em que o valor da integral de ação é mínimo	30
Figura 3 – Variação do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds .	51

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	MECÂNICA CLÁSSICA	13
2.1	Mecânica Newtoniana	13
2.1.1	Leis de Newton	13
2.1.2	Teoremas de Conservação	14
2.2	Mecânica Lagrangiana	23
2.2.1	Vínculos	23
2.2.2	Coordenadas Generalizadas	24
2.2.3	Princípio de d'Alembert	24
2.2.4	Equações de Lagrange a partir do Princípio de d'Alembert	26
2.2.5	Princípio de Hamilton	29
2.3	Mecânica Hamiltoniana	33
2.3.1	Equações de Hamilton	33
2.3.2	Hamiltoniana e Energia Total	35
3	CÁLCULO FRACIONÁRIO	40
3.1	Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville	41
3.1.1	Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville	41
3.1.2	Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville	42
3.2	Cálculo Fracionário de Caputo	43
3.2.1	Derivadas Fracionárias de Caputo	43
4	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O LANÇAMENTO OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR	45
4.1	Força de Resistência do Ar	45
4.1.1	Forças de Arrasto e Número de Reynolds	45
4.1.2	Coeficiente de Arrasto	51
4.2	Função de Dissipação de Rayleigh	52
4.3	Lagrangiana Equivalente	58
4.4	Cálculo Fracionário Aplicado no Lançamento Oblíquo Sujeito a Força de Resistência do Ar	68
5	CONCLUSÃO	75

REFERÊNCIAS 76

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, os seres humanos tentam entender e explicar o funcionamento da natureza, para isso, foi criada uma área de conhecimento imprescindível para a humanidade, que no mundo contemporâneo a chamamos de física, ela é responsável por investigar e explicar os fenômenos naturais que ocorrem no universo tanto de forma conceitual quanto de forma matemática. Com ajuda dessa ciência, houveram muitos avanços em diversas áreas do conhecimento como a química, a biologia, a medicina entre outras [1]. Um dos problemas que a física investiga desde a antiguidade é o do lançamento oblíquo, o qual consiste em um objeto ou um corpo lançado obliquamente, este tipo de sistema possui inúmeras aplicações práticas desde tiro de canhões até um simples arremesso de uma bola de basquete em direção a uma cesta. Neste tipo de sistema mecânico, há influência da força de resistência do ar, configurando assim um sistema dissipativo, no qual há dissipação de energia.

Nessa perspectiva, neste trabalho, se dará ênfase na obtenção das equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera lisa sem sofrer rotação sujeita a força de resistência do ar proporcional a velocidade, ao quadrado da velocidade e ao módulo quadrático da velocidade. A obtenção dessas equações para o lançamento oblíquo da esfera se fará com base na formulação lagrangiana e na formulação hamiltoniana da mecânica clássica para sistemas dissipativos através da função de dissipação de Rayleigh, da lagrangiana equivalente e do uso do cálculo fracionário.

A formulação lagrangiana da mecânica clássica, criada por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) utiliza-se de uma formulação matemática mais completa que a formulação de Sir Isaac Newton (1642-1727), pois esta consegue lidar com melhor êxito com sistemas de muitos corpos e sujeitos a vínculos, ademais, essa abordagem se baseia na utilização de escalares diferentemente do que acontece com a formulação newtoniana, que utiliza-se muito de vetores para descrever o comportamento de determinado sistema mecânico. A partir da mecânica lagrangiana foi criada a mecânica hamiltoniana criada por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que utilizou-se das transformações de Legendre para obter as suas equações que levaram o nome de equações canônicas de Hamilton, ele reduziu a ordem das equações de Lagrange que eram um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de 2^{a} ordem para $2n$ equações diferenciais ordinárias de 1^{a} ordem e, assim como a formulação lagrangiana, a dinâmica de Hamilton utiliza-se de escalares para descrever o comportamento dos sistemas mecânicos. Apesar de ser parecida com a mecânica de Lagrange, a abordagem de Hamilton da mecânica clássica é mais relevante, pois possui uma grande importância para outras áreas da física como a mecânica quântica e mecânica estatística [2].

O presente trabalho está dividido em capítulo 2, 3, 4 e 5 (Conclusão). No capítulo 2, realizamos uma revisão sobre a mecânica clássica para sistemas conservativos, onde destacamos os principais fundamentos da formulação newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana. No capítulo 3, fizemos uma breve discussão sobre o cálculo fracionário, em que destacamos os principais pontos do cálculo fracionário de Riemann-Liouville e Caputo. No capítulo 4, cometemos uma discussão sucinta sobre a força de resistência do ar, ademais, obtivemos as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma esfera sujeita a força de resistência do ar através da função de dissipação de Rayleigh, função lagrangiana equivalente e a partir de uma lagrangiana dependente de derivadas fracionárias. Por fim, no capítulo 5 (conclusão), fizemos uma conclusão deste trabalho, destacando sobre o uso da formulação lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos na obtenção das equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma esfera sujeita a força de resistência do ar e, também, destacamos os feitos inéditos que conseguimos neste trabalho.

2 MECÂNICA CLÁSSICA

Neste capítulo, será feita uma revisão da mecânica clássica para sistemas conservativos. A mecânica clássica é a área da física responsável por descrever o movimento dos corpos, desde que, não tratemos de velocidades próximas a da luz no vácuo, massas e distâncias muito elevadas e dimensões atômicas. Primeiramente, vamos fazer uma breve revisão do formalismo newtoniano. Em seguida, revisaremos os formalismos lagrangiano e hamiltoniano da mecânica clássica, pois essas descrições serão tomadas como base para o desenvolvimento dos formalismos de Lagrange e Hamilton para sistemas dissipativos (sistemas nos quais a energia não se conserva). Para o desenvolvimento deste capítulo, utilizamos as referências [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

2.1 Mecânica Newtoniana

A mecânica formulada por Sir Isaac Newton (1642-1727) foi publicada através do livro "Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", em 1687, com essa obra, Newton descreve o comportamento dos corpos no espaço como resultado das interações entre eles com o ambiente externo, a descrição feita por ele foi através de três leis que ele próprio postulou, as quais levaram o seu nome, as mesmas, então, ficaram conhecidas como leis de Newton. Ele usou como base os trabalhos de Galileu e da geometria euclidiana para formular as suas leis, com isso, para Newton, o tempo e o espaço eram absolutos e isso fica evidenciado nas leis da mecânica que ele formulou.

2.1.1 Leis de Newton

1ª Lei de Newton: A Primeira Lei de Newton, também conhecida como princípio da inércia enuncia que, uma partícula em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (movimento ao longo de uma trajetória reta com velocidade constante) continua no seu estado a não ser que uma força externa atue sobre ela. Ou seja, uma partícula no estado de repouso ou em movimento retilíneo só mudará o seu estado atual, se um agente externo aplicar uma força sobre ela. Esta lei, assim como as outras leis de Newton, só é válida para referenciais ditos inerciais, esses tipos de referenciais são considerados especiais e, nos mesmos, as propriedades de espaço, do tempo e as leis da mecânica não variam [2].

2ª Lei de Newton: A Segunda Lei de Newton, também conhecida como princípio fundamental da dinâmica enuncia que, uma partícula submetida a uma ou mais forças movimenta-se de modo que a taxa de variação do seu momento linear com relação ao tempo é igual a força total aplicada sobre ela, essa lei é expressa matematicamente como:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}), \quad (2.1)$$

onde $\vec{F}$ é a força total ou força resultante aplicada sobre a partícula e $\dot{\vec{p}}$ é a taxa de variação do momento linear com relação ao tempo que é representada por um ponto sobre o mesmo, sendo que o momento linear é dado por $\vec{p} = m\vec{r}$, onde m é a massa da partícula e $\dot{\vec{r}}$ é a sua velocidade e, para m constante, a equação (2.1) torna-se $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$, onde $\vec{a}$ é a aceleração da partícula. Esta lei associa a força a variação do momento linear, essa força que atua na partícula é dada por leis de forças que atuam na mesma. Como exemplo de lei de forças, podemos citar a lei da gravitação universal, a lei de Hooke entre outras. A segunda lei de Newton associada a essas forças torna essa lei uma ferramenta muito eficaz para descrever e prever o movimento de uma partícula submetida a uma força total. Vale ressaltar que, essa lei assim como a primeira, só é válida em um referencial inercial.

3ª Lei de Newton: A terceira lei de Newton, também conhecida como lei da ação e reação enuncia que, a cada ação existe uma reação de mesmo módulo e direção, porém de sentido oposto, ou seja, se uma partícula 1 exercer uma força sobre uma partícula 2, a partícula 2 exercerá uma outra força de mesma intensidade e mesma direção, mas no sentido contrário. A expressão matemática dessa lei é expressa como:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (2.2)$$

onde $\vec{F}_{12}$ é a força exercida da partícula 2 sobre a partícula 1, e, $\vec{F}_{21}$ é a força exercida da partícula 1 sobre a partícula 2. Vale ressaltar que, esta lei só é válida para forças que não dependem da velocidade das partículas como as forças gravitacionais e eletrostáticas. Estas forças atuam ao longo da linha que une as partículas, portanto, a 3ª lei de Newton é válida para forças centrais. Um exemplo de forças na qual essa lei falha são as forças eletromagnéticas.

As leis de Newton expostas acima são fundamentais para o entendimento do comportamento de muitos sistemas dinâmicos, porém elas se tornam muito complicadas de serem utilizadas quando queremos lidar com sistemas de muitas partículas e possuem algumas falhas como, quando queremos lidar com o mundo microscópico, com sistemas de massas e velocidades muito elevadas. Com isso, a teoria da mecânica clássica elaborada por Newton dá lugar a mecânica estatística, mecânica quântica e relatividade geral.

2.1.2 Teoremas de Conservação

Vamos verificar neste tópico alguns teoremas importantes para a física a partir de algumas quantidades conservadas, estes teoremas são implicações das leis de Newton vistas anteriormente.

Teorema da Conservação do Momento Linear: Primeiramente, partiremos da equação (2.1), na qual se a partícula não sofre ação de nenhuma força, logo, essa equação torna-se $\dot{\vec{p}} = 0$ o que implica que $\vec{p} = \text{constante}$, ou seja, $\vec{p}$ é um vetor constante no tempo. Este é o teorema de conservação do momento linear.

Para expressarmos o resultado obtido anteriormente em termos das componentes, consideremos um vetor constante $\vec{S}$, de maneira que $\vec{F} \cdot \vec{S} = 0$, logo, $\dot{\vec{p}} \cdot \vec{S} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{S} = 0$, integrando-se com relação ao tempo, obtemos

$$\vec{p} \cdot \vec{S} = cte, \quad (2.3)$$

isso expressa que se a componente da força que atua sobre a partícula em uma certa direção $\vec{S}$ for nula, então, a componente do momento linear nesta direção é conservada, ou seja, a componente do momento linear é constante no tempo na direção que a componente da força é nula.

Outra forma de demonstrar a conservação do momento linear é através da aplicação da terceira lei de Newton para a colisão de duas partículas isoladas, as quais chamaremos de partícula a e partícula b , portanto

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}, \quad (2.4)$$

em que $\vec{F}_{ab}$ é a força que atua da partícula b sobre a partícula a e $\vec{F}_{ba}$ é a força que atua da partícula a sobre a partícula b . Agora, vamos utilizar a segunda lei de Newton para esse sistema mecânico, no qual vamos substituir às forças pelas derivadas temporais dos momentos lineares, logo

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = -\frac{d\vec{p}_b}{dt}, \quad (2.5)$$

ou

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} + \frac{d\vec{p}_b}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

arrumando os termos, temos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_a + \vec{p}_b) = 0. \quad (2.7)$$

Chamando $\vec{p}_a + \vec{p}_b$ de $\vec{P}$, onde $\vec{P}$ é o momento linear total das duas partículas, substituindo esse resultado na equação acima, temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \quad (2.8)$$

portanto, $\vec{P} = \text{constante}$, esse resultado significa que o momento linear total de duas partículas se conserva na interação isolada das mesmas.

Teorema da Conservação do Momento Angular: Com relação ao momento angular $\vec{L}$ para uma partícula, o mesmo é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.9)$$

O torque $\vec{N}$ para uma partícula é definido como

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.10)$$

Partiremos dessa expressão para a demonstração do teorema de conservação do momento angular, como $\vec{F} = m\vec{a}$ que pode ser escrito como $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$, substituindo essa expressão em (2.10), logo:

$$\vec{N} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}. \quad (2.11)$$

Agora, vamos derivar em relação ao tempo a expressão (2.9), logo temos

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}), \quad (2.12)$$

mas $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} = m(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = 0$. Substituindo esse resultado em (2.12), temos

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{N}. \quad (2.13)$$

Se nenhum torque atua sobre a partícula, ou seja, se $\vec{N} = 0$, então a derivada do momento angular com relação ao tempo é nula $\dot{\vec{L}} = 0$ e $\vec{L}$ é um vetor constante no tempo. Este é o teorema de conservação do momento angular para uma partícula.

Teorema da Conservação da Energia: Se uma força $\vec{F}$ realiza trabalho sobre uma partícula de uma configuração 1 até uma configuração 2, então esse trabalho é definido como

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.14)$$

onde esse tipo de integral é chamada de integral de linha feita ao longo da trajetória que a partícula percorre. Como $d\vec{r} = \vec{v}dt$ e $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, substituindo essas expressões em (2.14), temos

$$W_{12} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \int_1^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})dt, \quad (2.15)$$

como $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, logo

$$W_{12} = \int_1^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2)dt = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (2.16)$$

como $T = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ é a energia cinética, logo temos

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (2.17)$$

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ de uma configuração 1 até uma configuração 2 é igual a variação da energia cinética.

Se $\vec{F}$ for uma força conservativa, então podemos associar essa força a uma função escalar chamada de energia potencial $U(\vec{r})$ que depende apenas da posição, a expressão é dada como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}), \quad (2.18)$$

onde $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

Agora vamos substituir a equação (2.18) em (2.14), logo obtemos

$$W_{12} = - \int_1^2 (\vec{\nabla} U) \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \left(\hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (2.19)$$

Por fim, combinando os resultados obtidos em (2.17) e (2.19), temos

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2, \quad (2.20)$$

sabendo que a energia total de uma partícula é $E = T + U$, logo, $E_1 = E_2$, ou seja, a energia total do sistema na configuração 1 e 2 são iguais, portanto a energia total E de uma partícula sujeita a uma força conservativa se conserva. Este é o teorema da conservação da energia para uma partícula.

Estes teoremas mostrados anteriormente, possuem grande importância para a física, por esse fato eles assumiram caráter de leis, e, além da mecânica clássica, esses teoremas são utilizados em outras áreas da física como a mecânica quântica e relatividade geral.

Com respeito a energia, essa propriedade das partículas possui grande relevância para a física, pois os teoremas de conservação de energia têm uma grande importância para outras áreas da física além da mecânica newtoniana e, há também, uma facilidade maior em trabalhar com a energia, pelo fato da mesma ser uma quantidade escalar e isso facilita os cálculos em oposição à força e aos momentos linear e angular que são quantidades vetoriais.

Antes de iniciarmos a próxima seção, vamos resolver alguns exemplos através da mecânica newtoniana e, posteriormente, resolveremos também através da mecânica lagrangiana e hamiltoniana, com o intuito de mostrar como cada formalismo é utilizado quando aplicado na resolução de um problema.

Exemplo 1: Um bloco de massa m se desloca na horizontal sob efeito de uma mola de constante elástica k , sabendo-se que o movimento se dá sem atrito, e que a posição inicial do bloco é x_0 e que a velocidade inicial do bloco é v_0 para $t = 0$. Determine a posição final do bloco após deslocar-se uma distância x da posição de equilíbrio e a velocidade final v do bloco.

Para resolver este problema, vamos aplicar a 2ª lei de Newton (2.1), logo,

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}),$$

como a massa do bloco é constante, logo

$$\vec{F} = m \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}},$$

agora vamos decompor a força $\vec{F}$ nas suas componentes relativas aos eixos x e y , respectivamente, portanto

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}.$$

Na direção y , as forças atuantes no bloco são as forças peso e normal, porém não há aceleração nessa direção. Portanto a componente da força $\vec{F}$ na direção y em módulo é dada por:

$$F_y = F_N - F_P = 0,$$

onde F_N é a força normal atuando no bloco e F_P é a força peso. Manipulando a equação anterior, logo temos,

$$F_N = F_P.$$

Esse resultado significa que as forças que atuam na direção y se anulam, fazendo com que não haja movimento do bloco nessa direção. Na direção x , a única força atuante é a força elástica que é dada em módulo por

$$F_x = F_e = -kx.$$

Como F_x é a única componente da força $\vec{F}$ não nula atuando no bloco, logo a 2ª lei de Newton em módulo para esse sistema é

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{2.21}$$

a qual dividindo-se por m e passando o membro do lado direito da equação para o lado esquerdo, logo temos

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

chamando $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, onde ω_0 é a frequência natural do oscilador harmônico, fazendo a substituição na equação acima, temos

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Esta equação diferencial ordinária (EDO) é do tipo equação diferencial linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes, agora vamos encontrar a solução da mesma

$$x(t) = e^{rt}.$$

Tomando a primeira derivada com relação ao tempo, temos

$$\dot{x} = re^{rt},$$

tomando a segunda derivada, obtemos

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}.$$

Agora, substituindo x e $\ddot{x}$ na EDO para esse sistema, obtemos

$$r^2 e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0,$$

colocando e^{rt} em evidência, temos

$$e^{rt}(r^2 + \omega_0^2) = 0,$$

como $e^{rt} \neq 0$, temos que

$$r^2 + \omega_0^2 = 0,$$

logo

$$r = \pm i\omega_0,$$

portanto

$$r_1 = i\omega_0 \text{ e } r_2 = -i\omega_0.$$

Com isso, solução da equação é:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Porém, queremos obter a solução real da equação acima, para isso, vamos utilizar a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ e $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$, agora utilizando a fórmula de Euler, temos,

$$x(t) = C_1(\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) + C_2(\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)),$$

agrupando os termos semelhantes, têm-se

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega_0 t) + (C_1 - C_2)i \sin(\omega_0 t),$$

agora chamando $C_1 + C_2 = A$ e $(C_1 - C_2)i = B$, temos

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

que é a solução real da equação que queríamos encontrar, mas, precisamos determinar as constantes A e B para obter a solução geral da equação, para isso, vamos utilizar as condições de contorno do problema. Primeiramente, vamos utilizar a condição de contorno x_0 , logo

$$x(0) = x_0 = A \cos(\omega_0 0) + B \sin(\omega_0 0),$$

portanto, $A = x_0$. Para encontrarmos o valor da outra constante, vamos derivar a solução real em relação ao tempo, logo

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t),$$

agora, utilizando a condição de contorno v_0 , temos

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega_0 \sin(\omega_0 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 0),$$

portanto $B = \frac{v_0}{\omega_0}$. Substituindo os valores de A e B na solução real da equação diferencial, temos

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

que é solução geral da equação diferencial do problema e a posição final do bloco. Agora, para encontrarmos a velocidade final do bloco, basta realizar a derivada da solução real em relação ao tempo, com isso, temos

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t),$$

que é a velocidade final do bloco.

Exemplo 2: Um bloco de massa m desliza sem atrito sobre a superfície de um plano inclinado com ângulo θ , sabendo-se que o bloco parte do repouso na posição $x_0 = 0$ e que sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Determine a aceleração, a velocidade e posição final do bloco após deslizar sobre o plano inclinado.

Primeiramente, por questão de simplicidade, vamos adotar o eixo x paralelo ao plano inclinado e com direção positiva no mesmo sentido que o bloco desliza, e, vamos adotar o eixo y perpendicular ao plano inclinado com valores positivos no sentido de baixo para cima do eixo.

Com isso, agora vamos resolver a questão, para isso utilizaremos a 2ª lei de Newton (2.1) que é dada por

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}),$$

como a massa do bloco é constante, logo temos

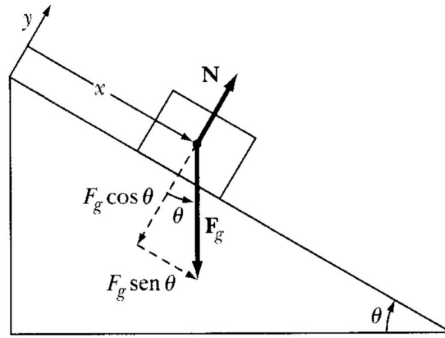
$$\vec{F} = m \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}},$$

agora vamos decompor o vetor força $\vec{F}$ nas suas componentes relativas aos eixos x e y , respectivamente, com isso, temos

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}.$$

Na direção y , as forças atuantes no bloco são a força normal e a componente da força peso na direção y como podemos verificar na figura 1 abaixo

Figura 1 – Representação das forças que atuam no bloco.



Fonte: Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas [4].

Logo, na direção y as forças atuantes são

$$F_y = F_N - F_P \cos \theta,$$

como não há aceleração nessa direção, portanto

$$F_N - F_P \cos \theta = 0.$$

Logo,

$$F_N = F_P \cos \theta.$$

Esse resultado significa que as forças que atuam ao longo da direção y se cancelam, consequentemente fazendo com que não haja movimento do bloco nessa determinada direção. Na direção x , a única força que atua sobre o bloco é a componente da força peso na direção x como ilustra a figura 1, logo

$$F_x = F_P \sin \theta = m\ddot{x}.$$

Como F_x é a única componente não nula do vetor força $\vec{F}$ que atua no bloco, portanto a equação de movimento em módulo para esse sistema é

$$F_P \sin \theta = m\ddot{x},$$

como $F_P = mg$, logo têm-se

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta, \quad (2.22)$$

cancelado a massa em ambos os lados da equação, portanto

$$\ddot{x} = g \sin \theta,$$

essa é a aceleração do bloco que queríamos encontrar. Agora para encontrarmos a velocidade, temos que integrar com relação ao tempo a aceleração do bloco, logo

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int g \sin \theta dt,$$

o que resulta em

$$\int_0^v d\bar{v} = g \sin \theta \int_0^t d\bar{t},$$

fazendo a integração, têm-se

$$v = gt \sin \theta,$$

que é a velocidade final do bloco. Por fim, para encontrarmos a posição, temos que integrar com relação ao tempo a velocidade final do bloco assim como foi feito com a aceleração, logo

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int gt \sin \theta dt,$$

o que resulta na em

$$\int_0^x d\bar{x} = g \sin \theta \int_0^t \bar{t} d\bar{t},$$

realizando a integração, obtemos

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta,$$

esta é a posição final do bloco.

2.2 Mecânica Lagrangiana

A mecânica formulada por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi publicada através do livro "Mecânica Analítica", em 1788. Nessa obra Lagrange mostra uma nova formulação da mecânica clássica diferente da formulação newtoniana, que até então era o único formalismo da mecânica clássica. Lagrange utilizou como base para a sua formulação o cálculo das variações criado por Euler, o princípio de d'Alembert e o conceito de energia. Com isso, Lagrange criou uma formulação da mecânica mais completa que a de Newton e ao invés de trabalhar com vetores essa formulação utiliza-se de escalares, o que facilita os cálculos. Essa formulação da mecânica consegue lidar de maneira melhor com sistemas sujeitos a vínculos e de muitas partículas, algo que a dinâmica newtoniana têm muita dificuldade em lidar.

2.2.1 Vínculos

Uma das ferramentas importantes para o estudo da dinâmica lagrangiana é o estudo dos vínculos, que são restrições de natureza cinemática que uma partícula de um sistema mecânico está sujeita, ou seja, o vínculo delimita o movimento e a velocidade da partícula. Na mecânica newtoniana, estamos mais interessados nos efeitos que os vínculos impõe a dinâmica da partícula, algo que chamamos de forças de vínculo. Um exemplo disso, é quando resolvemos o exemplo 2, no qual levamos em consideração a força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco para podermos solucionar o problema. No entanto, com a formulação lagrangiana vamos considerar os vínculos em si, isto é, vamos considerar as limitações diretas que estes impõe ao movimento da partícula e, além disso, vamos levar em consideração os vínculos nas equações de movimento. Voltando ao exemplo do bloco, em vez de se analisar a força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco, vamos analisar o movimento do bloco que fica delimitado à superfície do plano inclinado até chegar ao chão. No estudo dos vínculos devemos levar em consideração os tipos de vínculos, pois existem dois tipos diferentes de vínculos os holônomos e os não-holônomos.

Vínculos holônomos: São aqueles que podem ser representados por equações do tipo:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (2.23)$$

Um exemplo de vínculos holônomos é o corpo rígido, nele a distância entre dois pontos P e Q tem que ser a mesma e a equação de vínculo pode ser representada por $|\vec{r}_P - \vec{r}_Q| - cte = 0$.

Vínculos não-holônomos: São aqueles que não podem ser representados pela equação (2.23). Os vínculos não-holônomos são representados por desigualdades, equações diferenciais, entre outras formas. Um exemplo de um sistema sujeito a vínculos não-holônomos é um recipiente cúbico de lado a com gás em seu interior, o vínculo é representado como $0 < x_i < a, 0 < y_i < a, 0 < z_i < a$, onde $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ é o vetor posição da i -ésima molécula do gás.

2.2.2 Coordenadas Generalizadas

Dado um sistema mecânico sujeito a s vínculos holônomos, é viável introduzir um conjunto de variáveis para a descrição desse sistema, as quais são denominadas de coordenadas generalizadas, e, são representadas por $q_1, q_2, \dots, q_n$, onde $n = 3N - s$ é o número de graus de liberdade do sistema. Essas coordenadas formam um espaço n -dimensional no chamado de espaço de configurações, no qual cada ponto descreve a configuração de um sistema. As coordenadas generalizadas são independentes entre si e são suficientes para descrever a configuração de um sistema mecânico, ou seja, a inclusão dessas coordenadas facilita a descrição de um sistema mecânico sujeito a vínculos holônomos, pois estas equivalem ao número de graus de liberdade do sistema e, ademais, as mesmas além de poderem representar as coordenadas cartesianas usuais, elas podem representar ângulos e outras quantidades necessárias para a descrição da configuração de um sistema. Podemos, também, escrever as coordenadas usuais em termos das novas coordenadas por meio da expressão

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

As derivadas das coordenadas generalizadas com relação ao tempo $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ são chamadas de velocidades generalizadas.

2.2.3 Princípio de d'Alembert

O princípio de d'Alembert usa os conceitos de coordenadas generalizadas e deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo da descrição de um sistema mecânico.

Deslocamentos Virtuais: Os deslocamentos virtuais são pequenos deslocamentos infinitesimais instantâneos $\delta\vec{r}_i$ na posição das partículas do sistema mecânico em um instante t fixo, além disso, esses deslocamentos são compatíveis com os vínculos, isto é, eles não violam os vínculos. Esse deslocamento é chamado de virtual, pelo fato de ele ser diferente de um deslocamento real $d\vec{r}_i$ do sistema, o qual ocorre em um intervalo de tempo variável e as forças de vínculos podem variar. O deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ são conectados com os deslocamentos virtuais independentes δq_k pela seguinte equação:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (2.25)$$

Trabalho Virtual: O trabalho virtual no caso estático é um princípio utilizado para a análise de sistemas que há equilíbrio dos corpos. Com isso, a força resultante de cada partícula do sistema $\vec{F}_i$ é nula. Então o trabalho virtual δW_i da força resultante $\vec{F}_i$ através do deslocamento virtual $\delta\vec{r}_i$ é nulo também, $\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$. Para explicar isso, tomemos como exemplo uma superfície lisa, na qual a partícula tem o seu movimento restrito, nesse sistema, não há a componente tangencial da força, mas somente a normal [2]. Portanto, o trabalho realizado pela força de vínculo é igual a zero. Logo, podemos afirmar

que a soma dos trabalhos virtuais ou trabalho total de cada partícula é nula também

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.26)$$

No formalismo lagrangiano, é imprescindível a distinção entre as forças de vínculo $\vec{f}_i$ e as forças que vamos chamar de forças aplicadas, que estão relacionadas com as forças externas $\vec{F}_i^{(a)}$. Agora, vamos decompor a força resultante $\vec{F}_i$ em termos das forças citadas anteriormente

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i. \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.26), temos

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.28)$$

Aqui nos restringimos a tratar de sistemas que possuem trabalho virtual total das forças de vínculo nulo

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.29)$$

Logo a expressão (2.28) torna-se

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.30)$$

Essa expressão matemática é conhecida como o princípio dos trabalhos virtuais.

Princípio de d'Alembert: O princípio de d'Alembert é uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais para o caso de sistemas dinâmicos, e, assim como acontece com o princípio dos trabalhos virtuais, as forças de vínculo não aparecem explicitamente. Para demonstração matemática deste princípio, partiremos da segunda lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i, \quad (2.31)$$

agora passando a derivada temporal do vetor momento para o primeiro membro da equação, logo

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0, \quad (2.32)$$

substituindo esse resultado em (2.30), temos

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.33)$$

Agora vamos fazer o mesmo procedimento que foi realizado para encontrarmos a expressão matemática para o princípio dos trabalhos virtuais, que é a substituição da força $\vec{F}_i$ pelas forças de vínculo $\vec{f}_i$ e forças aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$, logo

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.34)$$

Como $\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, logo temos

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.35)$$

Essa expressão representa o princípio de d'Alembert, que é uma extensão para o caso dinâmico do princípio dos trabalhos virtuais e, assim como no caso estático do princípio dos trabalhos virtuais, as forças de vínculo não aparecem explicitamente. Daqui a diante, vamos escrever a força $\vec{F}_i^{(a)}$ como $\vec{F}_i$.

2.2.4 Equações de Lagrange a partir do Princípio de d'Alembert

Lagrange obteve as equações que levam o seu nome a partir do princípio de d'Alembert. Essas equações são as peças centrais para a mecânica lagrangiana. Nesta subseção vamos obter essas equações partindo do princípio de d'Alembert, porém a equação (2.35) precisa ser modificada, pois precisamos escrevê-la em termos dos deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas, em que todos os coeficientes dos deslocamentos virtuais generalizados δq_k são independentes. Primeiramente vamos derivar com relação ao tempo a expressão (2.24), logo

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.36)$$

Em seguida, vamos utilizar o princípio de d'Alembert, ressaltando que no lugar da força $\vec{F}_i^{(a)}$ vamos abreviar para a força $\vec{F}_i$ e vamos utilizar a equação (2.25), portanto

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (2.37)$$

em que

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (2.38)$$

essa é a força generalizada associada a coordenada generalizada q_k . Nota-se que $Q_k \delta q_k$ têm dimensão de trabalho.

Agora, vamos trabalhar com a outra parte da equação que compõe o princípio de d'Alembert que é

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (2.39)$$

pois $\dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$ e $\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$. Agora vamos trabalhar com a quantidade

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \right], \quad (2.40)$$

obtemos esse resultado a partir da regra da derivada de um produto de duas funções

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.41)$$

Dando continuidade na obtenção das equações de Lagrange, vamos manipular o último termo do segundo membro da equação (2.40), logo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}, \quad (2.42)$$

para a obtenção desse resultado, utilizamos a equação (2.36), e, utilizamos a mesma equação para deduzir a expressão

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (2.43)$$

Agora, substituindo as equações (2.42) e (2.43) em (2.40), temos

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right]. \quad (2.44)$$

Vamos manipular o produto escalar do vetor velocidade pela derivada do vetor velocidade em relação à velocidade generalizada, logo

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.45)$$

fazendo o mesmo processo para o produto escalar do vetor velocidade pela derivada do vetor velocidade em relação à coordenada generalizada

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k}. \quad (2.46)$$

Substituindo os resultados obtidos em (2.45) e (2.46) na equação (2.44), obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right], \quad (2.47)$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \right\}, \quad (2.48)$$

como $T = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ é a energia cinética do sistema, logo

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (2.49)$$

onde a energia cinética é expressa em termos das coordenadas generalizadas e das velocidades generalizadas. De posse dos resultados obtidos em (2.37) e (2.49), vamos substituí-los na expressão matemática do princípio de d'Alembert, portanto:

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0, \quad (2.50)$$

arrumando os termos de modo que possamos descartar δq_k , pois o deslocamento virtual δq_k é arbitrário, logo

$$\sum_{k=1}^n \left\{ Q_k - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \right\} \delta q_k = 0, \quad (2.51)$$

descartando δq_k , logo temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.52)$$

essas equações são chamadas de primeiras equações de Lagrange, elas se aplicam a quaisquer forças aplicadas envolvidas no sistema.

Para o caso em que as forças são conservativas, ou seja, as forças $\vec{F}_i$ derivam de um potencial escalar $U(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N, t)$, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ as equações (2.52) se tornam mais elegantes

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad (2.53)$$

agora vamos substituir esse resultado em (2.52), portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad (2.54)$$

passando o termo do 2º membro da equação para o 1º membro, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad (2.55)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0, \quad (2.56)$$

como estamos trabalhando com potencial dependente apenas das coordenadas generalizadas, isso implica que

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (2.57)$$

Com esse resultado, podemos escrever a equação (2.56) como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0. \quad (2.58)$$

Agora definindo a função de Lagrange ou Lagrangiana como

$$L = T - U, \quad (2.59)$$

onde $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$.

Com isso, podemos escrever a equação (2.58) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.60)$$

essas são as equações de Lagrange, as mesmas correspondem a um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Essas equações são em termos de importância para a mecânica lagrangiana, o mesmo que a 2ª lei de Newton tem para a mecânica newtoniana. Porém, essas equações possuem

algumas vantagens em relação a segunda lei de Newton, pois precisamos apenas do número mínimo de coordenadas, além disso, as forças de vínculo não aparecem explicitamente nas equações e são menos importantes para as resoluções dos problemas mecânicos, outra vantagem é a de trabalharmos apenas com quantidades escalares, visto que as energias cinética e potencial são quantidades escalares. Vale ressaltar que, as energias cinética e potencial devem ser expressas no mesmo referencial inercial, pelo fato de que as equações de Lagrange advêm do princípio de d'Alembert, e, o mesmo parte da segunda lei de Newton, que só é válida em referenciais inerciais. Além disso, vale destacar que, as equações de Lagrange são para sistemas conservativos.

2.2.5 Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton ou princípio de mínima ação é um princípio variacional proposto por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), nesse postulado Hamilton conseguiu unificar vários fenômenos físicos em um único princípio. Para construir esse postulado, Hamilton utilizou o trabalho de Euler sobre o cálculo das variações, que é um ramo da matemática responsável por determinar extremos (máximos ou mínimos) de funcionais, esses que são uma generalização do conceito de função. O princípio de Hamilton enuncia que, num dado sistema mecânico holônomo (consistente com os vínculos) descrito pela lagrangiana $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, de todas as trajetórias possíveis nas quais o sistema pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo inicial t_1 a um intervalo de tempo final t_2 , o caminho real seguido pelo sistema é aquele que o valor da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (2.61)$$

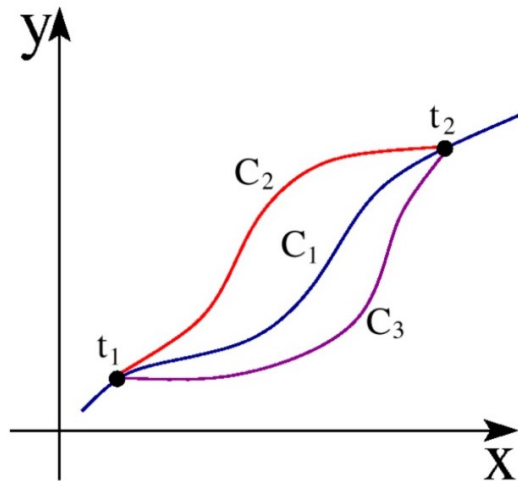
é mínimo como ilustra a figura 2.

A solução desse problema consiste em encontrar a solução para as equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (2.62)$$

que é a mesma equação obtida a partir do princípio de d'Alembert. Euler obteve essas equações no contexto do cálculo das variações, por isso, essas equações são chamadas, também, de equações de Euler-Lagrange, mas neste trabalho só as chamamos de equações de Lagrange, onde obtivemos a mesma equação a partir do princípio de d'Alembert. O princípio de Hamilton condensou as leis da mecânica clássica em um único postulado ao enunciar que, de todos os movimentos possíveis que um sistema mecânico pode se deslocar, o movimento real do sistema é o que torna estacionária a integral de ação (2.56) entre dois instantes de tempo no espaço de configurações. Com esse princípio, Hamilton unificou vários princípios estudados desde a antiguidade. Vale destacar que, a importância desse princípio é tão grande para a física que podemos considerá-lo mais fundamental que as leis de Newton.

Figura 2 – Representação do Princípio de Hamilton, onde C_1 é a trajetória em que o valor da integral de ação é mínimo



Fonte: Mecânica Clássica [6].

Agora, vamos resolver pelo formalismo de Lagrange os mesmos exemplos resolvidos pela mecânica newtoniana na seção 1.

Primeiramente vamos resolver o exemplo 1, o qual enuncia que, um bloco de massa m se desloca na horizontal sob efeito de uma mola de constante elástica k , sabendo-se que o movimento se dá sem atrito, e que a posição inicial do bloco é x_0 e que a velocidade inicial do bloco é v_0 para $t = 0$. Determine a posição final do bloco após deslocar-se uma distância x da posição de equilíbrio e a velocidade final v do bloco.

Como estamos tratando de um sistema simples, para resolução desse problema, precisamos apenas achar a função lagrangiana $L = T - U$, isto é, precisamos encontrar as energias cinética e potencial do sistema.

A coordenada generalizada $q_1 = x$ e a velocidade generalizada $\dot{q}_1 = \dot{x}$, com isso a energia cinética pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

enquanto que a energia potencial é

$$U = \frac{1}{2}kx^2,$$

com isso a função lagrangiana pode ser escrita como

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Agora vamos substituir esse resultado na equação de Lagrange para esse sistema, portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = 0,$$

resolvendo a primeira parte da equação do 1º membro da equação, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x},$$

agora, resolvendo o restante do 1º membro da equação de Lagrange, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Juntando os resultados obtidos a partir da equação de Lagrange para esse sistema, temos que

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

passando kx para o 2º membro da equação, logo

$$m\ddot{x} = -kx,$$

este que é o mesmo resultado obtido na seção 1 a partir do formalismo newtoniano, onde a solução da equação diferencial do problema foi feita na mesma seção.

Dando continuação na resolução dos exemplos, vamos resolver o exemplo 2 da seção 1, o qual enuncia que, um bloco de massa m desliza sem atrito sobre a superfície de um plano inclinado com ângulo θ , sabendo-se que o bloco parte do repouso na posição $x_0 = 0$ e que sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Determine a aceleração, a velocidade e posição final do bloco após deslizar sobre o plano inclinado.

Assim como foi feito na seção 1, vamos adotar o eixo x na mesma direção que o bloco desliza e com sentido positivo na direção que o bloco desliza, e, vamos adotar o eixo y na direção perpendicular ao plano inclinado, com valores positivos no sentido de baixo para cima.

Com isso, vamos resolver o problema, a equação de vínculo que faz com que o bloco sempre esteja em contato com o plano inclinado é

$$y = 0,$$

as coordenadas generalizadas são $q_1 = x$ e $q_2 = y$ e, as velocidades generalizadas são $\dot{q}_1 = \dot{x}$ e $\dot{q}_2 = \dot{y}$, logo a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

e a energia potencial é

$$U = -mgh_B,$$

onde h_B é a altura do bloco em relação ao solo, podemos deixar essa altura em termos de x e y , logo

$$U = -mgx\sin\theta.$$

Com isso a lagrangiana do sistema é

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta,$$

e, agora vamos utilizar as equações de Lagrange para a coordenada x para obter a solução do problema, portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right)\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta\right] = 0,$$

calculando as derivadas, temos

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta.$$

Agora vamos utilizar as equações de Lagrange para a coordenada y , logo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\right)\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(x\sin\theta + y\cos\theta)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(x\sin\theta + y\cos\theta)\right] = 0,$$

calculando as derivadas, obtemos

$$m\ddot{y} = 0,$$

isso significa que não há movimento do bloco na direção y , portanto, para a resolução do problema, basta resolver a equação obtida para a coordenada x

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta,$$

nota-se que este é o mesmo resultado obtido na seção 1 com o uso do formalismo newtoniano e os resultados restantes foram calculados na mesma seção.

A resolução desses problemas a partir do formalismo lagrangiano da mecânica clássica, nos faz entender, em parte, as diferenças entre as abordagens de Newton e Lagrange. Enquanto que, na mecânica newtoniana nos preocupamos em achar as forças que estão envolvidas no problema e utilizamos quantidades vetoriais, na mecânica lagrangiana é diferente, pois utilizamos as energias (cinética e potencial) envolvidas no sistema para a solução do problema e trabalhamos com quantidades escalares.

2.3 Mecânica Hamiltoniana

A mecânica formulada por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), em 1835, é uma formulação da mecânica diferente dos formalismos newtoniano e lagrangiano, porém este último, serviu de base para Hamilton formular o seu formalismo, por isso há algumas similaridades entre as duas formulações. Vale ressaltar que, os formalismos newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano são equivalentes. A mecânica hamiltoniana é a teoria mais fundamental da mecânica clássica, pois esta além de ser aplicada ao contexto da mecânica clássica, ela serve como ponto inicial para a mecânica estatística e mecânica quântica.

2.3.1 Equações de Hamilton

As equações de Hamilton, também chamadas de equações canônicas de Hamilton, são um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo, que se combinadas, levam as mesmas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo obtidas por Lagrange. Na mecânica hamiltoniana o movimento é representado por uma curva traçada no espaço de fase, no qual as coordenadas são as variáveis independentes. Para obtermos as equações de Hamilton, primeiramente vamos definir o momento canônico conjugado como:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (2.63)$$

Na descrição hamiltoniana da mecânica, ao invés de utilizarmos a função lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, vamos utilizar a função hamiltoniana $H(q, p, t)$, ou seja, as variáveis $(q, \dot{q})$ dão lugar as variáveis (q, p) . Para realizar essa mudança, é preciso fazer uma Transformação de Legendre.

A Transformada de Legendre consiste em substituir as variáveis de uma função por outra função com variáveis diferentes, para ilustrar na prática esse procedimento, vamos tomar como exemplo a energia interna $U(S, V)$ de um sistema termodinâmico em equilíbrio em função da entropia S e do volume V , com equações de estado $T = \frac{\partial U}{\partial S}$ e $P = -\frac{\partial U}{\partial V}$. Queremos eliminar a entropia S em favor da temperatura T . Agora, definimos a energia livre de Helmholtz F como:

$$F = U - TS,$$

tomando a diferencial dessa função temos que

$$dF = dU - SdT - TdS,$$

como $dU = TdS - PdV$, logo temos

$$dF = TdS - PdV - SdT - TdS,$$

portanto,

$$dF = -SdT - PdV,$$

logo $F(T, V)$. Ou seja, com a função U tínhamos uma dependência com relação a entropia S e ao volume V , e com o uso da transformação de Legendre, obtivemos a função F com dependências em relação a temperatura T e ao volume V .

Agora, vamos obter as equações de Hamilton, definimos a hamiltoniana $H(q, p, t)$ como

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t), \quad (2.64)$$

tomando a diferencial da expressão acima, temos

$$dH = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.65)$$

como o momento canônico é $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, vamos substituir na expressão acima, portanto

$$dH = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k + \sum_{k=1}^n p_k d\dot{q}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_{k=1}^n p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.66)$$

logo,

$$dH = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.67)$$

como $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$, onde esse resultado é obtido a partir das equações de Lagrange, como mostraremos a seguir

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k, \quad (2.68)$$

substituindo esse resultado em (2.67), temos que

$$dH = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.69)$$

isso indica que a hamiltoniana só depende de q e p , podemos escrever dH como

$$dH = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (2.70)$$

comparando as equações (2.69) e (2.70), temos

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.71)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.72)$$

As equações (2.71) são conhecidas como equações de Hamilton ou equações canônicas de Hamilton, as mesmas formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais ordinárias de 1ª

ordem, onde q e p são chamadas de variáveis canônicas. O sistema mecânico é representado pelo movimento de um ponto no espaço de fase de $2n$ dimensões. Com relação a equação (2.72), a mesma não representa uma equação de movimento, mas sim uma relação entre as dependências explícitas com o tempo da lagrangiana e hamiltoniana. Vale ressaltar que, podemos obter as equações de Hamilton a partir do princípio de Hamilton, assim como acontece com as equações de Lagrange, no entanto, neste trabalho, não vamos fazer isso.

2.3.2 Hamiltoniana e Energia Total

Se a energia cinética for função apenas das velocidades e a energia potencial for função apenas das posições, e a função lagrangiana L não depende explicitamente do tempo, como consequência, a função hamiltoniana H também não dependerá, isso significa que H será uma constante de movimento, como podemos verificar a partir das equações (2.69) e (2.70):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

logo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

como H não depende de forma explícita do tempo, portanto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

logo, $H = \text{constante}$, ou seja, H é uma constante de movimento. Em virtude de a energia cinética ser função apenas das velocidades e a energia potencial ser função apenas das posições, pelo teorema de Euler das funções homogêneas temos que

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T, \quad (2.73)$$

substituindo esse resultado e L em (2.69), obtemos

$$H = 2T - T + U, \quad (2.74)$$

logo

$$H = T + U, \quad (2.75)$$

ou seja, a hamiltoniana é igual a energia total do sistema $H = E$, que é algo de extrema importância para a física e é o que acontece na maioria dos casos. Mas, vale ressaltar que, há casos em que mesmo H sendo uma constante de movimento, ocorre que $H \neq E$, e há casos que, mesmo H não sendo uma constante, ela pode ser a energia total do sistema.

Agora, vamos resolver os exemplos da seção 1, mas, desta vez, vamos solucioná-los pelo formalismo hamiltoniano. O primeiro exemplo enuncia que, um bloco de massa m se desloca na horizontal sob efeito de uma mola de constante elástica k , sabendo-se que o movimento se dá sem atrito, e que a posição inicial do bloco é x_0 e que a velocidade inicial do bloco é v_0 para $t = 0$. Determine a posição final do bloco após deslocar-se uma distância x da posição de equilíbrio e a velocidade final v do bloco.

A coordenada generalizada é $q_1 = x$ e a velocidade generalizada é $\dot{q}_1 = \dot{x}$, portanto a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

agora, precisamos encontrar $\dot{x}$, vamos utilizar a equação (2.63) para isso, logo

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m},$$

agora, vamos definir a energia cinética em termos do momento canônico, logo

$$T = \frac{p^2}{2m},$$

e vamos definir a energia potencial como

$$U = \frac{1}{2}kx^2,$$

com isso, podemos obter a função de Lagrange, portanto

$$L = T - U = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2.$$

Com esses resultados obtidos, vamos construir a função hamiltoniana a partir da equação (2.68), portanto

$$H = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2\right),$$

logo obtemos

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2,$$

agora, vamos substituir esse resultado nas equações de Hamilton (2.71), logo

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \right) = \frac{p}{m},$$

isolando p , obtemos

$$p = m\dot{x},$$

dando sequência a resolução, vamos utilizar a outra equação de Hamilton, portanto

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right) = -kx,$$

agora, vamos substituir o momento canônico na equação acima, portanto

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -kx,$$

fazendo a derivada, temos

$$m\ddot{x} = -kx,$$

esse resultado é o mesmo encontrado a partir da mecânica newtoniana na seção 1 e da mecânica lagrangiana na seção 2, a solução dessa EDO já foi realizada na seção 1.

Agora vamos resolver o segundo exemplo, o qual enuncia que, um bloco de massa m desliza sem atrito sobre a superfície de um plano inclinado com ângulo θ , sabendo-se que o bloco parte do repouso na posição $x_0 = 0$ e que sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Determine a aceleração, a velocidade e posição final do bloco após deslizar sobre o plano inclinado.

Primeiramente, vamos adotar novamente o eixo x na mesma direção que o bloco desliza e com sentido positivo na direção que o bloco desliza, e, vamos adotar o eixo y na direção perpendicular ao plano inclinado, com valores positivos no sentido de baixo para cima.

A equação de vínculo desse sistema é dada por:

$$y = 0.$$

As coordenadas generalizadas são $q_1 = x$ e $q_2 = y$ e as velocidades generalizadas são $\dot{q}_1 = \dot{x}$ e $\dot{q}_2 = \dot{y}$, logo a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

enquanto que a energia potencial é

$$U = -mgx\sin\theta.$$

Portanto, a lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta,$$

agora vamos obter as velocidades a partir da equação (2.63), portanto

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m},$$

para p_y , temos que

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m},$$

substituindo a lagrangiana e as velocidades em (2.64), temos que

$$H = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - [\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta],$$

deixando a hamiltoniana em termos dos momentos e das coordenadas, temos

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx\sin\theta,$$

agora vamos utilizar as equações de Hamilton (2.71) para solucionar o problema, portanto

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} [\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx\sin\theta] = \frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \quad p_x = m\dot{x},$$

para a derivada da hamiltoniana em relação a p_y , temos

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p_y} [\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx\sin\theta] = \frac{p_y}{m} \quad \Rightarrow \quad p_y = m\dot{y},$$

vamos agora utilizar as outras equações de Hamilton para calcular a derivada da hamiltoniana em relação a x e y , portanto

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx\sin\theta] = mgsin\theta \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = mgsin\theta,$$

para y , temos que

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} [\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx\sin\theta] = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = 0,$$

isso demonstra que não há movimento na direção y , portanto só resta a equação

$$m\ddot{x} = mgsin\theta,$$

que é o mesmo resultado obtido através dos formalismos newtoniano e lagrangiano, nas seções 1 e 2 deste capítulo, respectivamente, as demais soluções desse problema já foram feitas na seção 1.

As soluções desses problemas pela dinâmica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana evidenciam as diferenças desses formalismos da mecânica clássica, apesar de sempre

chegarmos aos mesmos resultados, sejam quaisquer as escolhas desses três formalismos utilizados para a solução dos problemas, o que demonstra a equivalência dessas formulações. Com relação as diferenças, as mesmas se dão por como resolvemos o problema, na seção 1, por exemplo, nós utilizamos os conceitos de forças e álgebra vetorial para a solução dos problemas, que são maneiras eficientes para achar a solução de sistemas simples como esses que resolvemos, mas que tornam-se mais complicados a partir do momento em que há geometrias mais complexas, forças de vínculos mais complexas e sistemas com muitos corpos. Já a mecânica lagrangiana funciona bem para sistemas simples, como ficou evidenciado nos exemplos resolvidos, bastando apenas identificar os vínculos, definir as coordenadas generalizadas, as velocidades e, com isso, obter as energias cinética e potencial para construir a função lagrangiana, sendo que todas as operações são realizadas com grandezas escalares, o que facilita na resolução dos problemas. Por fim, a mecânica hamiltoniana para sistemas simples se mostrou eficiente, pois precisamos apenas definir os vínculos, coordenadas generalizadas, momentos canônicos e a lagrangiana, onde todas as operações são feitas de maneira escalar e não houve a necessidade de se trabalhar com as forças, mas sim com as energias cinética e potencial. Apesar de não ficar evidenciado nos problemas, a mecânica hamiltoniana é a formulação mais importante da mecânica clássica, tanto que esta é utilizada em ramos da física fora da mecânica clássica como a mecânica estatística e mecânica quântica.

3 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo, vamos fazer uma abordagem sobre os fundamentos do cálculo fracionário ou cálculo de ordem não-inteira, que é uma generalização do cálculo diferencial e integral usual para derivadas e integrais de ordem arbitrária, onde vamos destacar alguns aspectos históricos dessa teoria e os principais pontos do cálculo fracionário de Riemann-Liouville e Caputo, pois essas abordagens do cálculo fracionário serão utilizadas na obtenção das equações de movimento do lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeita a força de resistência do ar, no próximo capítulo. O cálculo fracionário, apesar de ser tão antigo quanto o cálculo diferencial e integral usual, começou a ser mais utilizado mais recentemente, por causa das suas aplicações em física, mais especificamente, nos estudos de ondas eletromagnéticas, mecânica clássica e outras áreas da física, ademais, esse cálculo possui aplicações em outras áreas da ciência e engenharia. Para o desenvolvimento deste capítulo, utilizamos as referências [8, 9, 10, 11, 12].

Como dito anteriormente, o cálculo fracionário é um ramo da matemática que se propõe a estudar a generalização do cálculo diferencial e integral usual para derivadas e integrais de ordem arbitrária. A nomenclatura utilizada, denominada de cálculo fracionário é equivocada para esse ramo da matemática, pois este cálculo se aplica não só a derivadas de ordens fracionárias, mas também a derivadas de valores arbitrários, reais e complexos. O surgimento desse cálculo se deu por volta do ano de 1695 a partir de questionamentos feitos por l'Hôpital e Leibniz, onde os mesmos trocavam correspondências a cerca de uma possível generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária, foi então que surgiu por parte de l'Hôpital o questionamento sobre o valor de uma derivada de ordem meia $d^{\frac{1}{2}}x$, a resposta de Leibniz foi que o valor para essa derivação é $x\sqrt{dx} : x$.

Posteriormente, outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria, dentre eles podemos citar Euler, Laplace, Grunwald, Letnikov, Liouville, Riemann, Lacroix, Caputo, entre outros. Das várias definições antigas do cálculo fracionário, podemos destacar a definição de Lacroix, na qual ele partiu da função $y = x^\beta$ para chegar na sua definição. A fórmula de derivação generalizada de uma função potência desenvolvida por Lacroix é:

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}, \quad (3.1)$$

onde $\beta \geq \alpha$ e $\beta \in \mathbb{N}$. Agora, escrevendo essa expressão em termos da função Gamma, temos que

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}. \quad (3.2)$$

A definição de Lacroix para derivadas não inteiras é dada pela continuação analítica da expressão acima, em que α e β agora são números reais positivos. Apesar de grandes

matemáticos terem contribuído para o desenvolvimento do cálculo fracionário, apenas no ano de 1823 essa teoria teve uma aplicação na resolução de um problema específico. O autor desse feito foi o matemático Abel, que conseguiu solucionar o problema da tautócrona com o auxílio do cálculo fracionário, este problema consiste em determinar a equação da trajetória de uma partícula que, pela influência da gravidade, desce de um ponto a outro ponto. Diante dessa perspectiva de aplicação dessa teoria, posteriormente alguns autores começaram a desenvolver as suas definições para derivadas e integrais fracionárias. Dentre essas definições, vamos abordar, nas próximas seções, o cálculo fracionário de Riemann-Liouville e de Caputo, pois essas definições serão utilizadas na obtenção do princípio da mínima ação generalizado.

3.1 Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Nesta seção, vamos fazer uma abordagem sobre o cálculo fracionário de Riemann-Liouville, onde vamos destacar os principais aspectos das integrais e derivadas de Riemann-Liouville e algumas propriedades.

3.1.1 Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville

A integral fracionária de Riemann-Liouville à direita e à esquerda de ordem α de uma função $f(x)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}_+$, respectivamente, são definidas por

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (3.3)$$

e

$${}_x J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (3.4)$$

Essas definições foram obtidas a partir da continuação analítica da fórmula de Cauchy [11]. Vale destacar que, essa continuação analítica foi feita apenas de x até a e de x até b , pelo fato de que ação que vamos descrever mais adiante tem os limites de integração de a até b .

Agora, vamos ver algumas propriedades das integrais fracionárias de Riemann-Liouville. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \geq 0$ é válida a seguinte propriedade para as integrais à esquerda e à direita, respectivamente:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x), \quad (3.5)$$

e

$${}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^{\alpha+\beta} f(x). \quad (3.6)$$

Que é a lei dos expoentes, que é a mesma propriedade das integrais usuais. Outra propriedade importante para as integrais fracionárias à esquerda e à direita, respectivamente, é:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^\beta {}_a J_x^\alpha f(x), \quad (3.7)$$

e

$${}_b J_x^\alpha {}_b J_x^\beta f(x) = {}_b J_x^\beta {}_b J_x^\alpha f(x). \quad (3.8)$$

Ou seja, os operadores integrais comutam.

3.1.2 Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville

Com as integrais fracionárias de Riemann-Liouville definidas, podemos então definir as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, já que para definirmos as derivadas, precisamos das integrais. Para definirmos as derivadas fracionárias, faremos uso da propriedade do cálculo diferencial integral usual:

$$D_x^m f(x) = D_x^n J_x^{n-m} f(x), \quad (3.9)$$

em que para inteiros positivos $n > m$ e D_x^n é uma derivada de ordem inteira n . Para $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e n um inteiro positivo, que satisfaz $n - 1 \leq \alpha \leq n$. A partir dessa propriedade, podemos definir as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente, como:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D_x^n {}_a J_x^{n-\alpha} f(x) \quad (3.10)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n D_x^n {}_x J_b^{n-\alpha} f(x). \quad (3.11)$$

Agora, substituindo as definições de integrais fracionárias à direita (3.3) e à esquerda (3.4) em (3.10) e (3.11), respectivamente, temos

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (3.12)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (3.13)$$

em que $\frac{d^n}{dx^n} = D_x^n$ é uma derivada de ordem inteira n . Nota-se que, para α inteiro, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville se reduzem a derivadas de ordem inteira usuais.

Agora, vamos ver uma propriedade das integrais e derivadas fracionárias de Riemann-Liouville. A derivada da integral fracionária de uma função é a própria função, isso é válido para derivadas e integrais à direita e à esquerda, logo:

$${}_a D_x^\alpha {}_a J_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (3.14)$$

e

$${}_x D_b^\alpha {}_x J_b^\alpha f(x) = f(x). \quad (3.15)$$

No entanto, se invertermos a ordem das operações o resultado será diferente.

Vale destacar uma falha das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, a derivada de uma constante nem sempre é nula. Em virtude disso, ao se resolver equações diferenciais

contendo derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, as condições iniciais usuais não podem ser utilizadas e, em consequência disso, essas derivadas não são utilizadas em aplicações.

3.2 Cálculo Fracionário de Caputo

Nesta seção, vamos abordar o cálculo fracionário de Caputo, que é o cálculo utilizado para aplicações na física e é o que será utilizado na obtenção do princípio de mínima ação generalizado no próximo capítulo.

3.2.1 Derivadas Fracionárias de Caputo

As derivadas fracionárias de Caputo são muito parecidas com as de Riemann-Liouville. No entanto, as ordens de operações são invertidas, isto é, nas derivadas fracionárias de Riemann-Liouville faz-se primeiramente a integração de ordem fracionária e depois a derivação de ordem inteira, enquanto que nas derivadas fracionárias de Caputo faz-se primeiramente a derivação de ordem inteira e posteriormente a integração de ordem fracionária. Esse processo pode parecer simples, entretanto, o mesmo possui uma grande relevância, pois com a formulação de Caputo, alguns problemas encontrados na formulação de Riemann-Liouville são solucionados nessa nova teoria. As derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha > 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, à esquerda e à direita, respectivamente, são definidas como:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x), \quad (3.16)$$

e

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = (-1)^n {}_x J_b^{n-\alpha} D_x^n f(x), \quad (3.17)$$

ou ainda

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (3.18)$$

e

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (3.19)$$

em que $f^{(n)} = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, com n inteiro e $n-1 < \alpha \leq n$. Nota-se que a derivada de Caputo de uma constante é zero, o que implica que equações diferenciais envolvendo derivadas fracionárias de Caputo, podem ser utilizadas condições iniciais usuais.

Agora vamos ver a relação entre as derivadas fracionárias de Caputo com as de Riemann-Liouville:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(a) {}_a D_x^\alpha \frac{(x-a)^k}{k!}. \quad (3.20)$$

Para o caso em que $\alpha \geq 0$ e $D^k f(a) = 0$, onde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, portanto a expressão (3.20) fica como:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x), \quad (3.21)$$

de forma similar para a derivada à direita

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x). \quad (3.22)$$

Esta é uma importante relação entre as derivadas fracionárias de Caputo e de Riemann-Liouville.

Estas definições do cálculo fracionário expostas neste capítulo são importantes, pois elas foram utilizadas na obtenção do princípio de mínima ação generalizado e, conseqüentemente, a equação de Lagrange generalizada para sistemas dissipativos. E, também, na obtenção da função lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos, com intuito de obtermos as equações de movimento para o lançamento oblíquo sujeito a força de resistência do ar proporcional à velocidade, ao quadrado da velocidade e ao módulo quadrático da velocidade.

4 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O LANÇAMENTO OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR

Neste capítulo, vamos fazer uma abordagem sobre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas dissipativos, onde vamos aplicar os mesmos no lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeita a força de resistência do ar proporcional a velocidade, ao quadrado da velocidade e ao módulo quadrático da velocidade, para obtermos as equações de movimento para esses sistemas, que são os objetivos desse trabalho. Essa aplicação será feita a partir de três métodos diferentes: o primeiro será fazendo uso da função de dissipação de Rayleigh, o segundo é o método da lagrangiana equivalente e o terceiro consiste na utilização do cálculo fracionário. Mas, antes de fazermos essa aplicação, vamos fazer uma breve discussão sobre a força de resistência do ar. Para o desenvolvimento deste capítulo, utilizamos as referências [2, 5, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

4.1 Força de Resistência do Ar

Nesta seção, vamos fazer uma abordagem de forma breve sobre a força de resistência do ar, com intuito de entendermos como funciona essa quantidade e a sua influência no movimento de um objeto no ar, além disso, vamos estudar brevemente o efeito do coeficiente de arrasto sobre um objeto em movimento no ar. No entanto, particularmente, vamos enfatizar o movimento de uma esfera para ambos os casos, pois esse é o objeto que utilizamos para o estudo do lançamento oblíquo sujeito à força de resistência do ar.

4.1.1 Forças de Arrasto e Número de Reynolds

Comumente no ciclo básico de ensino e nas disciplinas iniciais do curso de física, em sua maioria, as forças de resistência nos fluidos (líquidos e gases) são ignoradas, em alguns casos essa aproximação se mostra satisfatória, no entanto, em outros, precisamos considerá-las na resolução do problema. Por isso, há a necessidade de se estudá-las. Mais especificamente, vamos estudar a força de resistência do ar.

A força de resistência do ar ou força de arrasto do ar é um tipo de força de resistência dependente da velocidade que surge no movimento de objetos no ar, a mesma ocorre devido a colisão do objeto com as moléculas do ar e tem sentido oposto ao da velocidade do corpo, o que acaba ocasionando com que o objeto desacelere. Essa força possui uma dependência complexa com a velocidade, pelo fato de que a mesma depende das características do objeto e do ar, mas para o caso que vamos abordar, utilizaremos

uma expressão aproximada menos complicada. Podemos definir essa força como:

$$\vec{F}_{Ar} = -f(v)\hat{v}, \quad (4.1)$$

onde $f(v)$ é o módulo da força $\vec{F}_{Ar}$ e $\hat{v}$ é o versor que está na mesma direção da velocidade do objeto $\vec{v}$, e o sinal negativo é devido a força estar atuando no sentido oposto da velocidade do corpo. Vale ressaltar que, a última afirmação é verdadeira para muitos objetos, inclusive para o estudo do movimento de uma esfera sem sofrer rotação, e para vários corpos essa é uma aproximação boa, contudo, há casos em que isso não acontece como é o caso da asa de um avião [13]. Essa função $f(v)$ possui uma dependência com v de maneira complicada, porém, podemos fazer uma boa aproximação para baixas velocidades comparadas a velocidade do som no ar e em casos que as velocidades não tenham muita variação, nesses casos podemos expressar $f(v)$ como uma lei de potência para a velocidade do objeto

$$f(v) = bv + cv^2, \quad (4.2)$$

em que o termo bv corresponde ao arrasto linear f_{lin} e cv^2 corresponde ao arrasto quadrático f_{quad} , ou seja,

$$f_{lin} = bv, \quad (4.3)$$

e

$$f_{quad} = cv^2. \quad (4.4)$$

A força de resistência do ar possui duas origens físicas, que correspondem ao arrasto linear e arrasto quadrático, respectivamente.

Arrasto Linear: O arrasto linear f_{lin} ou força de atrito viscoso surge através do arrasto viscoso do ar e atua na lateral da esfera que é paralela a direção do movimento da mesma no ar, essa força normalmente é proporcional à viscosidade do meio e do comprimento linear do objeto. A viscosidade, que corresponde aos atritos internos do fluido, desempenha um papel importante nessa força, isso ocorre devido ao fato de que as camadas do ar colam-se ao objeto durante o seu movimento, fazendo assim com que haja atrito com as camadas mais afastadas do ar, isto é, a viscosidade impõe que o corpo sofra uma resistência no seu movimento.

Arrasto Quadrático: O arrasto quadrático f_{quad} ou força de pressão surge através da diferença de pressão entre a parte dianteira e traseira da esfera quando esta se move no ar e, essa força atua na direção perpendicular ao movimento do objeto. Essa diferença de pressão ocorre devido ao contorno que as linhas de fluxo do fluido forçadamente fazem ao redor da parte da frente do objeto, contudo, o ar não consegue preencher a parte de trás do objeto, fazendo assim com que haja uma diferença de pressão entre a região traseira e dianteira da esfera, pois a pressão na parte da frente é maior que na parte traseira. Além disso, vale salientar que, essa força de arrasto é proporcional à densidade do ar e à área do corpo que está em contato com o ar [13].

Em relação aos coeficientes b e c das equações (4.3) e (4.4), os mesmos podem ser expressos para um objeto esférico como sendo:

$$b = \beta D, \quad (4.5)$$

e

$$c = \gamma D^2, \quad (4.6)$$

onde β e γ são coeficientes que estão relacionados com o meio, que no caso abordado aqui é o ar, e D é o diâmetro do objeto esférico. Para um objeto no formato esférico movendo-se no ar submetido as condições normais de temperatura e pressão (CNTP), os coeficientes β e γ são, respectivamente, iguais a

$$\beta = 1,6 \times 10^{-4} \text{ N.s/m}^2, \quad (4.7)$$

e

$$\gamma = 0,25 \text{ N.s}^2/\text{m}^4. \quad (4.8)$$

Vamos utilizar esses valores para o cálculo da razão entre o arrasto quadrático e linear, para que possamos saber qual das duas podemos desprezar no movimento do objeto e isso facilita a resolução do problema através da segunda lei de Newton. Com os valores de β e γ na CNTP, a razão entre os dois arrastos é

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}} = \frac{cv^2}{bv} = \frac{\gamma D}{\beta} v = \frac{0,25 \text{ N.s}^2/\text{m}^4}{1,6 \times 10^{-4} \text{ N.s/m}^2} D v = \left(1,6 \times 10^3 \frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right) D v, \quad (4.9)$$

com isso, para o cálculo da razão entre as forças, precisamos apenas do valor do diâmetro e da velocidade do objeto.

Agora, vamos calcular alguns valores da razão entre o arrasto quadrático e o linear para três corpos, que foram extraídos de [13].

Primeiramente, vamos calcular a razão entre o arrasto quadrático e o linear para uma bola de Beisebol de diâmetro $D = 7 \text{ cm}$ e se movendo com velocidade $v = 5 \text{ m/s}$. Antes de fazermos esse cálculo, precisamos transformar a unidade do diâmetro de cm para m, logo

$$D = 7 \text{ cm} = 7 \times 10^{-2} \text{ m},$$

desse modo, podemos calcular diretamente a importância relativa dos arrastos a partir da equação (4.9), portanto

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}} = 1,6 \times 10^3 \cdot 7.5 \frac{\text{s.m.m}}{\text{m}^2.\text{s}} \Rightarrow \frac{f_{quad}}{f_{lin}} \approx 600, \quad (4.10)$$

esse resultado significa que o termo quadrático é dominante e o linear é desprezível. Portanto para resolução do problema, precisamos considerar apenas a força $\vec{F}_{Ar} = cv^2 \hat{v}$.

Vamos calcular a razão das forças para o caso de uma gota de chuva de diâmetro $D = 1 \text{ mm}$ e velocidade $v = 0,6 \text{ m/s}$. Como fizemos no caso anterior, vamos transformar a unidade do diâmetro, mas dessa vez vai ser de mm para m,

$$D = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m},$$

a partir desse resultado, podemos calcular a razão substituindo os valores de D e v em (4.9), logo temos

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}} = 1,6 \times 10^3 \times 10^{-3} \cdot 0,6 \frac{\text{s.m.m}}{\text{m}^2.\text{s}} \Rightarrow \frac{f_{quad}}{f_{lin}} \approx 1, \quad (4.11)$$

podemos concluir com esse resultado que, não podemos desprezar nenhuma das forças. Logo precisamos considerar as duas na segunda lei de Newton, que torna a solução do problema ainda mais complicada.

Agora vamos repetir o cálculo para uma gota de óleo do experimento de Millikan, que tem diâmetro $D = 1,5 \text{ } \mu\text{m}$ e velocidade $v = 5 \times 10^{-5} \text{ m/s}$. Primeiro vamos transformar a unidade do diâmetro de μm para m, logo

$$D = 1,5 \text{ } \mu\text{m} = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m},$$

com isso, podemos a importância relativa das forças apenas substituindo os valores de D e v em (4.9), logo temos que

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}} = 1,6 \times 10^3 \cdot 1,5 \times 10^{-6} \cdot 5 \times 10^{-5} \frac{\text{s.m.m}}{\text{m}^2.\text{s}} \Rightarrow \frac{f_{quad}}{f_{lin}} \approx 10^{-7}, \quad (4.12)$$

portanto, podemos concluir a partir desse resultado que, o arrasto linear é predominante e o termo quadrático é desprezível nesse caso.

Esses cálculos feitos anteriormente foram para tentarmos exemplificar em qual problema podemos considerar uma ou outra força de arrasto e até ambas na equação de movimento. Porém, há um importante parâmetro que nos permite saber qual das forças é mais relevante ou se ambas são relevantes no movimento de um objeto, esse parâmetro se chama número de Reynolds, que recebeu esse nome em homenagem ao Engenheiro Osborne Reynolds [14].

Número de Reynolds: O número de Reynolds é um parâmetro que nos permite uma discussão mais avançada no tratamento do movimento dos fluidos, o mesmo é definido como a razão entre a força inercial e a força de atrito viscoso, que correspondem, respectivamente, ao arrasto quadrático f_{quad} e ao arrasto linear f_{lin} . Como o arrasto quadrático está relacionado a inércia do fluido e o linear a viscosidade, podemos relacionar a razão entre os arrastos quadrático e linear com os parâmetros η , que está relacionado com viscosidade do fluido e ρ , que está relacionado com a densidade do fluido [13]. Com

isso, podemos afirmar que, a razão entre as forças é aproximadamente da mesma ordem de magnitude do número de Reynolds, que pode ser definido como:

$$R_e = \frac{Dv\rho}{\eta}, \quad (4.13)$$

em que D é o diâmetro do objeto, v é a velocidade do objeto, ρ é a densidade do fluido e η é a viscosidade dinâmica do fluido. O número de Reynolds é adimensional, e, não nos interessa o valor correto dele, mas sim a sua ordem de grandeza [15]. Assim como o valor da razão entre as forças de arrasto, o número de Reynolds nos permite definir qual força pode ser descartada no movimento do objeto ou se ambas podem ser consideradas, além disso, esse número nos permite saber qual tipo de escoamento o fluido está sujeito, se é laminar ou turbulento.

Dedução das Equações das Forças de Arrasto: Vamos agora fazer uma breve discussão sobre a obtenção das forças de arrasto linear e quadrático expressas neste trabalho a partir da descrição de um escoamento viscoso em torno de uma pequena esfera parada. Vale ressaltar que, as equações de arrasto obtidas para o sistema físico mencionado anteriormente, são válidas também para o processo inverso, que é o caso da esfera movimentando-se imersa em um fluido viscoso parado.

Na aplicação da segunda lei de Newton para um elemento de fluido newtoniano, obtemos a equação de Navier-Stokes (NS) na forma vetorial completa. Essa equação nos permite calcular os campos de pressão e de velocidade do escoamento, mas essa forma dessa equação não possui solução analítica. Para o cálculo das forças de arrasto, é preciso fazer uma aproximação. Supondo o caso do escoamento permanente laminar incompressível de um fluido newtoniano, a equação de NS na forma vetorial assume a forma

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P + \eta\nabla^2\vec{u},$$

em que ρ é a densidade do fluido, $\vec{u}$ é o seu vetor velocidade, P é sua pressão e η é sua viscosidade dinâmica [16].

Uma elevada variedade de problemas físicos podem ser analisados quando um parâmetro é muito grande ou muito pequeno [17]. Para escoamentos a baixos números de Reynolds, as forças de inércia são desprezíveis e o balanço se dá pelas forças de pressão e viscosas. Mas para isso acontecer, deve-se ter um pequeno parâmetro multiplicando as forças de inércia, que é obtido ao se adimensionalizar adequadamente a equação que rege o problema, tendo como base os baixos valores do número de Reynolds. Nesse sentido, faz-se o limite de $R_e \rightarrow 0$, então obtemos que a equação de movimento se reduz a uma equação linear:

$$\vec{\nabla}P = \eta\nabla^2\vec{u},$$

onde as variáveis estão novamente na forma dimensional. Essa equação é utilizada para descrever sistemas sujeitos a escoamentos lentos, que podem ser causados por baixa velocidade, alta viscosidade ou tamanho reduzido do objeto [17].

Agora, vamos considerar o escoamento lento ($R_e \ll 1$) de velocidade uniforme v em torno de uma pequena esfera de raio R regido pela equação de NS para escoamentos lentos em coordenadas esféricas. Daqui a diante, vamos omitir a discussão sobre o cálculo dos campos de velocidade, de pressão e tensões viscosas ou de cisalhamento, para mais detalhes sobre o cálculo dessas quantidades, consultar [16, 17, 18, 19]. Vamos nos ater diretamente a discussão do cálculo da força de arrasto atuando na esfera. Com os campos de velocidade, de pressão e das tensões de cisalhamento devidamente calculados, pode-se encontrar a força de arrasto na esfera através da integral de superfície da pressão e das tensões de cisalhamento em coordenadas polares esféricas, que resultam em

$$f = 6\pi\eta Rv, \quad (4.14)$$

onde π é uma constante, η é a viscosidade dinâmica do fluido, R é o raio da esfera e v é a velocidade do fluido. Essa é a força de arrasto linear com a velocidade obtida por Stokes em 1851 e é conhecida como lei de Stokes ou fórmula de Stokes [18, 19]. É importante destacar que, um terço dessa força é devido ao arrasto de pressão e os outros dois terços são devidos ao arrasto viscoso. Comparando essa equação com (4.3), verifica-se que $b = 6\pi\eta R$.

Além da solução apresentada anteriormente para o escoamento em torno da esfera a baixos números de Reynolds, há outra obtida por Oseen em 1910. Mas, antes de apresentarmos essa solução, vamos fazer algumas considerações sobre a solução apresentada por Stokes. A solução obtida por Stokes tem algumas inconsistências, dentre elas podemos citar, a não validade da solução para distâncias elevadas a partir do objeto, pois a essas distâncias, as forças de inércia não são desprezíveis como são em regiões próximas ao corpo, em virtude disso, a solução obtida por Stokes não é uniforme. [17].

Nesse contexto, Oseen sugeriu um aperfeiçoamento da solução encontrada por Stokes ao considerar parcialmente os termos inerciais a altas distâncias. Desse modo, ele modificou a equação de movimento adicionando a velocidade no infinito $\vec{v}$ em lugar de $\vec{u}$ no termo não linear $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$, já que a grandes distâncias $\vec{v}$ é aproximadamente igual a $\vec{u}$, com essa mudança, ele fez com que esse termo fosse linearizado por $\vec{v} \cdot \nabla \vec{u}$, sendo que este termo não linear foi desprezado por Stokes na sua aproximação [18]. Assim, Oseen obteve a equação linear

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u}.$$

Novamente não será discutida a obtenção dos campos de velocidade, de pressão e tensões de cisalhamento. A obtenção dessas quantidades podem ser encontradas em [17, 19]. A

partir dessas quantidades calculadas, encontra-se a força de arrasto como sendo:

$$f = 6\pi\eta Rv \left(1 + \frac{3Rv}{8\nu} \right), \quad (4.15)$$

em que ν é a viscosidade cinemática do fluido. Essa é a força de arrasto obtida por Oseen em 1910. Nota-se que o primeiro termo linear é igual ao obtido por Stokes, mas há um termo a mais que é quadrático com a velocidade, resultado de uma aproximação de segunda ordem e, com esse termo a mais, Oseen chegou na equação de força de arrasto com termos linear e quadrático com a velocidade. Comparando essa equação com (4.4), verifica-se que $c = \frac{18}{8}\rho\pi R^2$, pois $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

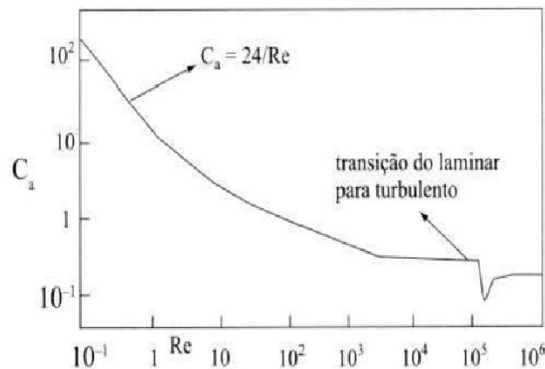
4.1.2 Coeficiente de Arrasto

O coeficiente de arrasto é uma quantidade adimensional que nos permite quantificar o arrasto sofrido por um determinado corpo. O mesmo é diretamente proporcional a força de arrasto, ou seja, quanto maior for o coeficiente de arrasto, maior será a força de arrasto e vice versa. Esse coeficiente é definido como:

$$C_{Ar} = \frac{F_{Ar}}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}, \quad (4.16)$$

onde F_{Ar} é a força de arrasto atuando no objeto, ρ é a densidade do fluido, v é sua velocidade e A é a área do objeto em contato com o ar. Nessa expressão, estão contidas as contribuições do arrasto devido ao atrito viscoso e devido a pressão. Além da equação (4.16), podemos expressar o coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds e, desse modo, podemos avaliar melhor o comportamento desse coeficiente como mostraremos no gráfico da Figura 3 que expressa a variação do coeficiente de arrasto C_{Ar} para uma esfera lisa em função do número de Reynolds R_e .

Figura 3 – Variação do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds



Fonte: Mecânica dos Fluidos [20].

Nota-se no gráfico que, para valores do número de Reynolds menores que 1 ($R_e < 1$), o coeficiente de arrasto varia linearmente com o número de Reynolds. Além disso, verifica-se

que para essa região, há o predomínio da força de arrasto linear ou força de Stokes pelo fato de que nessa região os valores do número de Reynolds são baixos. Logo, podemos definir o coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds para essa região como sendo:

$$C_{Ar} = \frac{F_{Ar}}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} = \frac{6\pi\eta Rv}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} = \frac{12\pi\eta R}{\rho v\pi R^2} = \frac{12\eta}{\rho v R} = \frac{24\eta}{\rho v D} = \frac{24}{Re}, \quad (4.17)$$

essa fórmula é válida para o escoamento lento, em que predomina a força devido ao atrito viscoso.

Na região com valores de $Re > 1$, a camada limite começa a se soltar da parte de trás da esfera, o que acaba ocasionando com que o arrasto quadrático comece a ter um papel considerável nesse sistema e, na medida que cresce o número de Reynolds, a camada limite da parte frontal da esfera também começa a se soltar.

Na região que o número de Reynolds varia entre 10^3 e $3,5 \times 10^5$, o coeficiente de arrasto é constante, com valor aproximado de 0,45.

Por fim, na região que $Re \cong 3,5 \times 10^5$, verifica-se uma queda abrupta do coeficiente de arrasto, que se dá devido a transição que ocorre entre a camada limite, a qual vai de laminar para turbulenta.

4.2 Função de Dissipação de Rayleigh

Antes de falarmos da função de dissipação de Rayleigh, vamos fazer um breve comentário sobre sistemas dissipativos, pois são para esses sistemas que vamos utilizar o formalismo lagrangiano e hamiltoniano com o objetivo de obter as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeita a força de resistência do ar. Os sistemas dissipativos ou não conservativos são sistemas nos quais a energia não se conserva, ou seja, parte da energia do sistema se dissipa em outra forma de energia, diferentemente do que acontece com sistemas conservativos, nos quais a energia se conserva.

A mecânica analítica, exposta no capítulo 1, foi feita para sistemas conservativos, em virtude disso, a mesma não é aplicada diretamente para movimentos em que a energia é dissipada. Para a aplicação nesses sistemas utilizando o formalismo lagrangiano, é mais conveniente fazer uso dos potenciais generalizados e da função de dissipação de Rayleigh, em que vamos utilizar essa última ferramenta neste trabalho.

A função de dissipação de Rayleigh permite que as equações de Lagrange sejam utilizadas para resolver sistemas que tenham forças aplicadas dependentes da velocidade [2]. Neste trabalho, vamos utilizar essa função para resolvermos o problema do lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeita a força de resistência do ar proporcional a velocidade, ao quadrado da velocidade e ao módulo quadrático da velocidade. Mas para isso, precisamos generalizar essa função com o intuito que ela também abranja problemas em que a força é proporcional ao quadrado da velocidade e proporcional ao módulo quadrático da velocidade,

haja vista que ela abrange somente a sistemas sujeitos a força proporcional a velocidade. Primeiramente, vamos fazer uma breve discussão sobre os potenciais generalizados.

Potenciais Generalizados: Os potenciais generalizados são utilizados para descrever sistemas nos quais as forças aplicadas dependem das velocidades e, nos casos em que as forças generalizadas são provenientes de um potencial escalar $V(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ de tal modo que

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.18)$$

com essa expressão para as forças generalizadas, ainda é possível escrever as equações de Lagrange da mesma forma de (2.60) com a função de Lagrange sendo

$$L = T - V, \quad (4.19)$$

onde V representa o potencial generalizado ou potencial dependente da velocidade. Caso existam forças que derivam de um potencial $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$, a função U pode ser incluída em V , pois as equações (4.18) se reduzem a (2.60) para termos nos quais as velocidades não estão contidas. Vale destacar que, a função potencial generalizado V pode depender de forma explícita do tempo t . Caso isso não ocorra, a função de Lagrange L não dependerá de forma explícita do tempo, que implica com que a energia mecânica se conserve. Desse modo, afirma-se que as forças aplicadas no sistema são conservativas, ainda que elas dependam da velocidade. Em virtude disso, não é viável escrever as forças dissipativas que dependem linearmente da velocidade, haja vista que a energia mecânica não se conserva quando há forças dissipativas e nem pode-se incluir energia térmica, porque ela não pode ser descrita em termos das coordenadas e velocidades [5]. Nesse contexto, é que se encaixa a função de dissipação de Rayleigh, pois ela é utilizada justamente para descrever o movimento de corpos sujeitos a forças de atrito proporcional a velocidade.

Antes de definirmos a função de dissipação de Rayleigh, precisamos usar uma definição diferente das forças generalizadas, as quais podem ser expressas como sendo

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.20)$$

em que Q'_k representa as forças generalizadas não conservativas, ou seja, as forças que não provém de potencial generalizado. Com isso, podemos escrever as equações de Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.21)$$

Vamos tratar um caso bem relevante que é quando a força generalizada Q'_k representa as forças de atrito viscoso que dependem linearmente da velocidade, que em coordenadas cartesianas podem ser expressos como:

$$F'_{ix} = -k_{ix}v_{ix}, \quad F'_{iy} = -k_{iy}v_{iy}, \quad F'_{iz} = -k_{iz}v_{iz}, \quad (4.22)$$

em que $\vec{F}'_i$ é a força de atrito atuando na i -ésima partícula, k_{ix} , k_{iy} e k_{iz} são constantes e v_{ix} , v_{iy} e v_{iz} são as componentes do vetor velocidade [2]. Nesse sentido, Rayleigh introduziu a função

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2]. \quad (4.23)$$

A relação entre essa função e as forças aplicadas no sistema se dá da seguinte forma:

$$F'_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}}, \quad F'_{iy} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}}, \quad F'_{iz} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}}, \quad (4.24)$$

ou

$$\vec{F}'_i = -\vec{\nabla}_{v_i} \mathcal{F}. \quad (4.25)$$

O sentido físico da função de dissipação de Rayleigh surge a partir do trabalho realizado pelas forças de atrito ou dissipativas:

$$dW' = - \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \vec{v}_i dt, \quad (4.26)$$

agora, vamos calcular $\frac{dW'}{dt}$ a partir da expressão acima, mas para isso, temos que substituir o valor de $\vec{F}'_i$ e $\vec{v}_i$, logo temos que

$$\frac{dW'}{dt} = - \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \vec{v}_i = - \sum_{i=1}^N (k_{ix}v_{ix}\hat{i} + k_{iy}v_{iy}\hat{j} + k_{iz}v_{iz}\hat{k}) \cdot (v_{ix}\hat{i} + v_{iy}\hat{j} + v_{iz}\hat{k}), \quad (4.27)$$

portanto

$$\frac{dW'}{dt} = - \sum_{i=1}^N [k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2] \Rightarrow \frac{dW'}{dt} = -2\mathcal{F}, \quad (4.28)$$

logo, $2\mathcal{F}$ é a taxa de dissipação da energia devido ao atrito sofrido pelo sistema [2, 6]. A relação entre essa função e a parte dissipativa das forças generalizadas aplicadas no sistema se dá pela seguinte expressão:

$$Q'_k = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.29)$$

onde $\mathcal{F}$ é a função de dissipação de Rayleigh. Substituindo essa equação em (4.21), temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.30)$$

A função de dissipação introduzida por Rayleigh em 1873, foi criada com o objetivo de facilitar o tratamento de sistemas sujeitos a força de atrito proporcional a velocidade [28]. A grande vantagem de se utilizar essa função $\mathcal{F}$ é que podemos utilizar as equações de movimento para um certo sistema da mesma maneira, seja qual for o sistema de coordenadas generalizadas utilizado [2].

Agora, vamos resolver o problema central deste trabalho, que é o lançamento oblíquo de uma pequena esfera lisa de massa m e raio R sem sofrer rotação sujeita a força de resistência do ar, com a densidade do ar ρ e viscosidade dinâmica do ar η .

Função de Dissipação de Rayleigh para o Arrasto Linear: Primeiramente vamos considerar o caso em que a força de arrasto é linear com a velocidade. Desse modo, vamos encontrar a função lagrangiana $L = T - U$ adequada ao problema, nota-se que neste movimento não existe vínculo e vamos adotar o sentido positivo do eixo x para a direita e o sentido positivo do eixo y para cima. Além disso, vamos adotar o ponto de referência da energia potencial em que $U = 0$ na origem do sistemas de coordenadas para esse sistema mecânico. As coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas são, respectivamente, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $\dot{q}_1 = \dot{x}$, $\dot{q}_2 = \dot{y}$, logo a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (4.31)$$

e a energia potencial desse problema é

$$U = mgy, \quad (4.32)$$

portanto, a lagrangiana pode ser escrita como sendo

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (4.33)$$

Agora, vamos definir a função de dissipação de Rayleigh para esse problema utilizando a expressão (4.23), logo

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(bv_x^2 + bv_y^2) = \frac{1}{2}b(v_x^2 + v_y^2), \quad (4.34)$$

onde $b = 6\pi\eta R$ e v_x é a componente da velocidade na direção x e v_y é a componente da velocidade na direção y . Vamos substituir (4.33) e (4.34) na equação de Lagrange com função de dissipação de Rayleigh (4.30) para a coordenada x , logo temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{1}{2}b(v_x^2 + v_y^2) \right] = 0, \quad (4.35)$$

efetuando as derivadas, temos

$$m\ddot{x} + bv_x = 0, \quad (4.36)$$

ou

$$m\dot{v}_x = -bv_x, \quad (4.37)$$

pois $\ddot{x} = \dot{v}_x$. Essa é a equação de movimento para a coordenada x . Agora vamos calcular a equação para a coordenada y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_y} \left[\frac{1}{2}b(v_x^2 + v_y^2) \right] = 0, \quad (4.38)$$

calculando-se as derivadas, obtemos como resultado

$$m\ddot{y} + mg + bv_y = 0, \quad (4.39)$$

ou

$$m\dot{v}_y = -mg - bv_y, \quad (4.40)$$

porque $\ddot{y} = \dot{v}_y$. Essa é a equação para coordenada y para esse sistema mecânico.

Generalização da Função de Dissipação de Rayleigh para o caso do Arrasto Quadrático: Agora, vamos considerar a situação em que a força de arrasto é quadrática com a velocidade. Porém, precisamos generalizar a função de dissipação de Rayleigh, pois ela abrange apenas os casos em que as forças de atrito são lineares com a velocidade. Vamos definir a função de dissipação para esses casos como

$$\mathcal{F} = \frac{1}{3}c(v_x^3 + v_y^3), \quad (4.41)$$

onde $c = \frac{18}{8}\rho\pi R^2$. Essa função foi deduzida a partir das equações de movimento para o arrasto quadrático com a velocidade. Nota-se que, a função de dissipação de Rayleigh generalizada é proporcional ao cubo da velocidade, diferente do que acontece para o caso do arrasto linear, no qual a função é proporcional ao quadrado da velocidade. Com essa função generalizada, vamos obter as equações de movimento para a força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.

A lagrangiana para esse sistema é a mesma do arrasto linear (4.33), $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. De posse da lagrangiana e da função de dissipação, vamos substituir essas quantidades na equação de Lagrange com a função de dissipação de Rayleigh para a coordenada x , portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right)\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right] + \frac{\partial}{\partial v_x}\left[\frac{1}{3}c(v_x^3 + v_y^3)\right] = 0, \quad (4.42)$$

realizando as derivadas, temos que

$$m\ddot{x} + cv_x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_x = -cv_x^2. \quad (4.43)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada x . Agora vamos obter a equação de movimento para a coordenada y , logo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\right)\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right] + \frac{\partial}{\partial v_y}\left[\frac{1}{3}c(v_x^3 + v_y^3)\right] = 0, \quad (4.44)$$

fazendo as respectivas derivadas, obtemos

$$m\ddot{y} + mg + cv_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_y = mg - cv_y^2. \quad (4.45)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada y .

Generalização da Função de Dissipação de Rayleigh para o caso do Arrasto Quadrático Completo: Por fim, vamos considerar o caso do arrasto quadrático completo com a velocidade. No entanto, novamente precisamos generalizar a função de dissipação de Rayleigh para que seja utilizada na descrição desse sistema mecânico. Vamos definir a função de dissipação para esse caso como sendo

$$\mathcal{F} = \frac{1}{3}c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.46)$$

Ressalta-se que, essa função generalizada foi obtida a partir das equações de movimento para o caso do arrasto quadrático completo com a velocidade. Verifica-se que, essa função de dissipação de Rayleigh generalizada para esse caso é diferente dos casos do arrasto linear e do arrasto quadrático com a velocidade, que é evidente, haja vista que as equações de movimento são diferentes para cada caso. Agora, vamos obter a equação de movimento para o caso do arrasto quadrático completo. A função lagrangiana é a mesma dos casos anteriores $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. Desse modo, podemos obter a equação de movimento para coordenada x substituindo os valores de L e $\mathcal{F}$ na equação de Lagrange com função de dissipação, logo temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{1}{3}c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}} \right] = 0, \quad (4.47)$$

calculando as derivadas, obtemos

$$m\ddot{x} + c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_x = -c\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_x. \quad (4.48)$$

Essa é a equação de movimento para coordena x . Vamos obter a equação para a coordenada y , fazendo-se o mesmo processo, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_y} \left[\frac{1}{3}c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}} \right] = 0, \quad (4.49)$$

efetuando as derivações, temos a seguinte equação

$$m\ddot{y} + mg + c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_y = -mg - c\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_y. \quad (4.50)$$

Por fim, essa é a equação de movimento para a coordenada y .

Vale destacar que, não foi possível obter as equações de movimento para o arrasto linear, quadrático e quadrático completo pelo formalismo hamiltoniano, pelo fato de que não há uma teoria que abranja a função de dissipação de Rayleigh como acontece com o formalismo lagrangiano.

Função de Dissipação de Lur'e: Há, também, uma fórmula geral introduzida por Lur'e para se trabalhar com a função de dissipação de Rayleigh. Antes definirmos essa fórmula, vamos definir a força de amortecimento considerada por Lur'e para definir a fórmula geral da função de dissipação, essa força é definida como sendo:

$$f_j = -k_j(x_1, x_2, \dots, x_N)g_j(\dot{x}_j). \quad (4.51)$$

em que k_j é uma constante positiva e $g_j(\dot{x}_i)$ é uma função a ser determinada. Agora, vamos definir a fórmula geral para a função de dissipação como:

$$\mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^N k_j(x_1, x_2, \dots, x_N) \int_0^{\dot{x}_j} g_j(y)dy, \quad (4.52)$$

onde $\mathcal{F}^L$ é conhecida como função de dissipação de Lur'e [24, 25]. Essa fórmula generaliza a função de dissipação de Rayleigh, fazendo com que a mesma seja válida para outras forças dissipativas além da linear com a velocidade. Para verificar a validade dessa função, vamos considerar o caso em que k_j é constante e $g_j(\dot{x}_j) = \dot{x}_j^2$. Substituindo essas quantidades em (4.52), obtemos

$$\mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^N k_j \int_0^{\dot{x}_j} \dot{x}_j^2 dy \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^N \frac{1}{3} k_j \dot{x}_j^3. \quad (4.53)$$

Agora, considerando o movimento no plano xy de um objeto sujeito a força de resistência do ar quadrática com a velocidade e com lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. Substituindo a função de dissipação $\mathcal{F}^L = \frac{1}{3}k(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)$ para o caso bidimensional e a lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ na equação de Lagrange com função de dissipação para a coordenada x , obtemos como resultado

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2, \quad (4.54)$$

fazendo os mesmos cálculos utilizando a equação de Lagrange para a coordenada y , temos como resultado

$$m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}^2. \quad (4.55)$$

Esses resultados nos mostram que a fórmula de Lur'e generaliza a função de dissipação de Rayleigh para o caso de um sistema mecânico sujeito a uma força proporcional ao quadrado da velocidade.

4.3 Lagrangiana Equivalente

Além da função de dissipação de Rayleigh, há outro método para se trabalhar com sistemas não conservativos através do formalismo lagrangiano, esse método consiste no uso de uma função chamada de lagrangiana equivalente. Funções desse tipo são produzidas desde o século passado como podemos verificar nos trabalhos de [21, 22, 23]. Essa função tem o propósito de fornecer as mesmas equações de movimento obtidas através da segunda lei de Newton, ou seja, fornecer um mecanismo equivalente ao concebido por Newton para encontrar as equações de movimento fazendo uso da mecânica lagrangiana. Nesta seção, vamos fazer uso dessa função para obtermos as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeita a força de resistência do ar, que é o mesmo problema mostrado na seção anterior.

Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Linear: Para o caso do arrasto linear com a velocidade, podemos utilizar a seguinte função lagrangiana equivalente obtida por [22, 23], respectivamente:

$$L = \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.56)$$

onde $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ corresponde a energia cinética do corpo e mgy corresponde a sua energia potencial. Substituindo essa equação na equação de Lagrange para a coordenada x , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} = 0, \quad (4.57)$$

calculando-se as derivadas, temos que

$$m\ddot{x}e^{\frac{b}{m}t} + b\dot{x}e^{\frac{b}{m}t} = (m\ddot{x} + b\dot{x})e^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.58)$$

como $e^{\frac{b}{m}t} \neq 0$, logo temos

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0, \quad (4.59)$$

ou

$$m\dot{v}_x = -bv_x. \quad (4.60)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada x . Vamos agora obter a equação para a coordenada y . Substituindo a lagrangiana equivalente (4.56) na equação de Lagrange para a coordenada y , temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} = 0, \quad (4.61)$$

realizando as derivações, obtemos

$$m\ddot{y}e^{\frac{b}{m}t} + b\dot{y}e^{\frac{b}{m}t} + mge^{\frac{b}{m}t} = 0, \quad (4.62)$$

como $e^{\frac{b}{m}t} \neq 0$, ficamos com a expressão

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + mg = 0, \quad (4.63)$$

ou ainda

$$m\dot{v}_y = -mg - bv_y. \quad (4.64)$$

Assim, obtemos a equação de movimento para a coordenada y .

Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Quadrático: Agora, vamos utilizar uma lagrangiana equivalente para obtermos as equações de movimento para o arrasto quadrático com a velocidade. A função para esse caso pode ser expressa como:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt. \quad (4.65)$$

Vale salientar que, essa função foi obtida a partir das equações de movimento para o arrasto quadrático com a velocidade. Agora, vamos substituir (4.65) na equação de Lagrange para a coordenada x , logo obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.66)$$

que resulta em

$$m\ddot{x} + c\dot{x}^2 = 0, \quad (4.67)$$

de outra maneira

$$m\dot{v}_x = -cv_x^2. \quad (4.68)$$

Portanto, essa é a equação de movimento para a coordenada x . Para a coordenada y , vamos usar a mesma função (4.65), substituindo essa função na equação de Lagrange para a coordenada y , temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt \right] \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.69)$$

calculando-se as derivadas e a integral, obtemos

$$m\ddot{y} + mg + c\dot{y}^2 = 0, \quad (4.70)$$

ou ainda

$$m\dot{v}_y = -mg - cv_y^2. \quad (4.71)$$

Essa é a equação de movimento do arrasto quadrático com a velocidade para a coordenada y .

Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Quadrático Completo: Por último, vamos utilizar uma lagrangiana equivalente que não é encontrada na literatura com o intuito de encontrar as equações para o arrasto quadrático completo com a velocidade. Primeiramente, vamos demonstrar como obtivemos essa função. Vamos propor a seguinte lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + F(\dot{x}, \dot{y}). \quad (4.72)$$

Agora, substituindo esse resultado no segundo e primeiro termo da equação de Lagrange para coordenada y , respectivamente, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + F(\dot{x}, \dot{y}) \right] = -mg, \quad (4.73)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + F(\dot{x}, \dot{y}) \right] = m\ddot{y} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(\dot{x}, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right), \quad (4.74)$$

juntando os termos da equação de Lagrange, temos que

$$m\ddot{y} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(\dot{x}, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) + mg = 0, \quad (4.75)$$

A equação de movimento que queremos encontrar é $m\ddot{y} + mg + c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0$, comparando essa equação com a equação (4.75), temos como resultado

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(\dot{x}, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) = c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.76)$$

resolvendo essa equação, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{dF}{dt} \right) = c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{c}{3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (4.77)$$

portanto

$$F(\dot{x}, \dot{y}) = \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt. \quad (4.78)$$

Fazendo os mesmos cálculos para a coordenada x , obtemos o mesmo resultado. Logo, vamos substituir (4.78) em (4.72), portanto a lagrangiana equivalente para o arrasto quadrático completo com a velocidade é:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt. \quad (4.79)$$

Agora, vamos obter as equações de movimento para o arrasto quadrático completo. Trocando essa função na equação de Lagrange para a coordenada x , temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.80)$$

efetuando os cálculos, obtemos

$$m\ddot{x} + c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_x = -c\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_x. \quad (4.81)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada x para o arrasto quadrático completo. Por fim, vamos obter as equações para a coordenada y fazendo o mesmo processo feito anteriormente. Substituindo a função (4.68) na equação de Lagrange para a coordenada y , temos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.82)$$

efetuando as derivações e integração, temos como resultado

$$m\ddot{y} + mg + c(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{v}_y = -mg - c\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}v_y. \quad (4.83)$$

Enfim, obtemos a equação de movimento desse sistema mecânico para a coordenada y .

Essas equações obtidas para o arrasto linear, quadrático e quadrático completo são as mesmas que obtivemos através da função de dissipação de Rayleigh. Vale salientar novamente que, a lagrangiana equivalente para o arrasto quadrático completo expressa neste trabalho, não é encontrada em livros.

Agora, vamos obter as mesmas equações de movimento obtidas anteriormente a partir do formalismo hamiltoniano, utilizando as mesmas lagrangianas equivalentes mostradas neste trabalho.

Formulação Hamiltoniana para o Arrasto Linear a partir de uma Lagrangiana Equivalente: Lembrando que, na formulação hamiltoniana, a função hamiltoniana depende dos momentos, diferente do que acontece no formalismo lagrangiano, em virtude disso, vamos fazer uma mudança na lagrangiana para deixá-la em termos dos momentos e, assim, utilizá-la na obtenção da função de Hamilton. Para isso, vamos utilizar a equação (2.63). Substituindo a lagrangiana equivalente para o atrito linear com a velocidade na equação (2.63) para a coordenada x , temos que

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} = m\dot{x}e^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.84)$$

isolando $\dot{x}$ e elevando ao quadrado, temos como resultado

$$\dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{m^2} e^{-\frac{2b}{m}t}. \quad (4.85)$$

Agora, vamos calcular o p_y substituindo a lagrangiana equivalente para o atrito linear na equação (2.63) para a coordenada y

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] e^{\frac{b}{m}t} = m\dot{y}e^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.86)$$

feito isso, vamos isolar $\dot{y}$ e elevar ao quadrado, portanto

$$\dot{y}^2 = \frac{p_y^2}{m^2} e^{-\frac{2b}{m}t}. \quad (4.87)$$

De posse de $\dot{x}^2$ e $\dot{y}^2$, vamos inserir os valores dessas quantidades em (4.56), obtemos a seguinte função

$$L = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) e^{-\frac{b}{m}t} - mgye^{\frac{b}{m}t}. \quad (4.88)$$

Substituindo esse resultado na hamiltoniana desse sistema, obtemos

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) e^{-\frac{b}{m}t} + mgye^{\frac{b}{m}t}. \quad (4.89)$$

Com essa função obtida, vamos utilizar as equações canônicas de Hamilton (2.71) para obter as equações de movimento. Primeiramente, vamos substituir a hamiltoniana obtida na primeira equação canônica para a coordenada x , logo temos que

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} e^{-\frac{b}{m}t} + \dot{x} - \frac{p_x}{m} e^{-\frac{b}{m}t} = \dot{x}, \quad (4.90)$$

substituindo H na segunda equação canônica de Hamilton para a coordenada x , obtemos

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dp_x}{dt} = 0, \quad (4.91)$$

substituindo p_x e calculando a derivada temporal, ficamos com

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}e^{\frac{b}{m}t}) = m\ddot{x}e^{\frac{b}{m}t} + b\dot{x}e^{\frac{b}{m}t} = (m\ddot{x} + b\dot{x})e^{\frac{b}{m}t} = 0, \quad (4.92)$$

como $e^{\frac{b}{m}t}$ é diferente de zero, logo

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0, \quad (4.93)$$

ou

$$m\dot{v}_x = -bv_x. \quad (4.94)$$

Finalmente obtemos a equação para a coordenada x . Agora, vamos obter para a coordenada y . Substituindo a função de Hamilton na primeira equação de Hamilton para a coordenada y , temos

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} e^{-\frac{b}{m}t} + \dot{y} - \frac{p_y}{m} e^{-\frac{b}{m}t} = \dot{y}, \quad (4.95)$$

fazendo a substituição da hamiltoniana na segunda equação canônica de Hamilton para a coordenada y , ficamos com

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mge^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.96)$$

substituindo p_y efetuando a derivação temporal, temos

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}e^{\frac{b}{m}t}) = m\ddot{y}e^{\frac{b}{m}t} + b\dot{y}e^{\frac{b}{m}t} = (m\ddot{y} + b\dot{y})e^{\frac{b}{m}t} = -mge^{\frac{b}{m}t}, \quad (4.97)$$

pelo fato de que $e^{\frac{b}{m}t}$ nunca se anula, ficamos com a expressão

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = -mg, \quad (4.98)$$

de outra maneira

$$m\dot{v}_y = -mg - bv_y. \quad (4.99)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada y .

Formulação Hamiltoniana para o Arrasto Quadrático a partir de uma Lagrangiana Equivalente: Dando prosseguimento na obtenção das equações de movimento para força de arrasto através da dinâmica hamiltoniana, vamos obter o arrasto quadrático com a velocidade. Novamente, precisamos deixar a função de Lagrange em termos dos momentos, para esse fim, vamos utilizar a equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Substituindo a lagrangiana quadrática (4.65) nessa equação para a coordenada x , obtemos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3}c(\dot{x}^3 + \dot{y}^3)dt \right] = m\dot{x} + \int c\dot{x}^2 dt, \quad (4.100)$$

agora, vamos isolar $\dot{x}$ e elevar ao quadrado e ao cubo, logo temos que

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m}\dot{x}^2 dt, \quad (4.101)$$

elevando ao quadrado e ao cubo, obtemos

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m}\dot{x}^2 dt \right)^2, \quad (4.102)$$

e

$$\dot{x}^3 = \left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt \right)^3. \quad (4.103)$$

Agora vamos obter $\frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x}$, portanto, temos como resultado

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} = \frac{1}{m} - \int \frac{2c}{m} \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} dt. \quad (4.104)$$

De maneira análoga que obtivemos $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$ e $\frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x}$, vamos obter $\dot{y}^2$, $\dot{y}^3$ e $\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}$. Substituindo a lagrangiana para esse sistema na equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ para a coordenada y , temos como resultado a equação

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3} c (\dot{x}^3 + \dot{y}^3) dt \right] = m\dot{y} + \int c \dot{x}^2 dt, \quad (4.105)$$

logo, $\dot{y}^2$ e $\dot{y}^3$ são, respectivamente,

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^2, \quad (4.106)$$

e

$$\dot{y}^3 = \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^3. \quad (4.107)$$

A partir da equação (4.105), podemos obter $\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}$, logo

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} = \frac{1}{m} - \int \frac{2c}{m} \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} dt. \quad (4.108)$$

De posse dos valores de $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$, $\dot{y}^2$ e $\dot{y}^3$, vamos substituir na equação (4.65), logo obtemos

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^2 \right] - mgy \\ + \int \frac{1}{3} c \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt \right)^3 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^3 \right] dt. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Com a lagrangiana obtida, podemos finalmente obter a hamiltoniana, portanto

$$\begin{aligned} H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^2 \right] \\ + mgy - \int \frac{1}{3} c \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x}^2 dt \right)^3 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y}^2 dt \right)^3 \right] dt. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Substituindo a hamiltoniana na primeira equação de Hamilton (2.71) para a coordenada x , obtemos

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} p_x + \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial p_x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} p_x + \dot{x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} p_x + \dot{x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_x} p_x, \quad (4.111)$$

logo temos como resultado a seguinte equação

$$\dot{x} = \dot{x}, \quad (4.112)$$

desta vez, substituindo H na segunda equação de Hamilton para a coordenada x , temos que

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = 0, \quad (4.113)$$

substituindo p_x na equação anterior e efetuando o cálculo da derivada temporal, temos a seguinte expressão

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} + \int c\dot{x}^2 dt \right) \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x}^2 = 0, \quad (4.114)$$

ou ainda

$$m\dot{v}_x = -cv_x^2. \quad (4.115)$$

Essa é a equação para a coordenada x . Resta apenas obter a equação para a coordenada y . Primeiramente, substituindo a hamiltoniana na primeira equação canônica de Hamilton para a coordenada y , ficamos com a seguinte equação

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y + \dot{y} - \frac{\partial L}{\partial p_y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y + \dot{y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y + \dot{y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y, \quad (4.116)$$

logo, temos que

$$\dot{y} = \dot{y}, \quad (4.117)$$

por último, substituindo a função de Hamilton na segunda equação canônica de Hamilton, temos a seguinte expressão

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = -mg, \quad (4.118)$$

para obter a equação de movimento, vamos substituir p_y e calcular a derivada, logo obtemos

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y} + \int c\dot{y}^2 dt \right) \Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y}^2 = -mg, \quad (4.119)$$

ou de outra maneira

$$m\dot{v}_y = -mg - cv_y^2. \quad (4.120)$$

Finalmente, obtemos a equação de movimento para a coordenada y .

Formulação Hamiltoniana para o Arrasto Quadrático Completo a partir de uma Lagrangiana Equivalente: Por fim, vamos obter as equações de movimento para o arrasto quadrático completo com a velocidade a partir da formulação hamiltoniana da mecânica. Como nos outros casos, vamos obter a lagrangiana em termos dos momentos. Utilizando a equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, vamos obter $\dot{x}^2$ e $\dot{y}^2$. Inserindo os valores da lagrangiana

equivalente para este caso na equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ para a coordenada x e efetuando a derivação, temos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3} c (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] = m\dot{x} + \int c\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad (4.121)$$

isolando e elevando ao quadrado $\dot{x}$, obtemos

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2. \quad (4.122)$$

Agora, vamos inserir o valor da função lagrangiana equivalente para o caso do arrasto quadrático completo na equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ e calcular a derivada, portanto

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \int \frac{1}{3} c (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} dt \right] = m\dot{y} + \int c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad (4.123)$$

isolando $\dot{y}$ e elevando ao quadrado, temos

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2. \quad (4.124)$$

De posse de $\dot{x}^2$ e $\dot{y}^2$, vamos substituir os valores dessas grandezas na lagrangiana (4.79), logo temos que

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 \right] - mgy \\ + \int \frac{1}{3} c \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} dt, \end{aligned} \quad (4.125)$$

e a hamiltoniana é

$$\begin{aligned} H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 \right] \\ + mgy - \int \frac{1}{3} c \left[\left(\frac{p_x}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} - \int \frac{c}{m} \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} dt. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Substituindo essa função na equação de Hamilton para a coordenada x , obtemos

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = 0, \quad (4.127)$$

inserindo o valor de p_x e derivando essa quantidade com relação tempo, temos o seguinte resultado

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} + \int c\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right) = m\ddot{x} + c\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -c\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.128)$$

ou

$$m\dot{v}_x = -cv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4.129)$$

Agora, substituindo a hamiltoniana para esse sistema na equação canônica de Hamilton para a coordenada y , chegamos ao seguinte resultado

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.130)$$

ou ainda

$$m\dot{v}_y = -mg - cv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4.131)$$

Enfim, obtemos a equação de movimento para a coordenada y para esse sistema.

Nota-se que, obtivemos as mesmas equações de movimento pelo formalismo lagrangiano e hamiltoniano. Isso mostra que há mais uma alternativa para a obtenção das equações de movimento para o arrasto linear, quadrático e quadrático completo com a velocidade. No caso quadrático completo, apesar de não termos explicitado o cálculo da primeira equação de Hamilton, a hamiltoniana obtida é consistente assim como a do caso linear e do caso quadrático.

Fórmula Geral da Lagrangiana Equivalente: Há um método geral para a obtenção de uma função lagrangiana equivalente para sistemas dissipativos sujeitos a forças dependentes da velocidade. Esse método consiste no uso de uma equação geral para obtenção de uma lagrangiana equivalente, bastando, apenas, determinar uma função que, ao substituir na lagrangiana geral e, na equação de Lagrange, nos dará a equação de movimento para um sistema dissipativo sujeito a uma força dependente da velocidade. Antes de apresentarmos a fórmula geral, primeiramente, vamos mostrar a equação de movimento unidimensional [25], portanto:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (4.132)$$

A lagrangiana equivalente geral é

$$L(x, \dot{x}) = \dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{v^2} G(v, x) dv, \quad (4.133)$$

em que $G(v, x)$ é uma função a ser encontrada depois [25]. Como a lagrangiana (4.133) deve satisfazer a equação de Lagrange, vamos substituir essa expressão na equação de Lagrange para a coordenada x , logo temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{v^2} G(v, x) dv \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{v^2} G(v, x) dv \right] = 0, \quad (4.134)$$

que resulta em

$$\ddot{x} \frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial x} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial x}, \quad (4.135)$$

da equação (4.132), temos que $\ddot{x} = \frac{f(x, \dot{x})}{m}$, substituindo esse resultado na equação acima e passando o segundo termo do lado esquerdo para o lado direito da equação, obtemos

$$\frac{1}{m\dot{x}} f(x, \dot{x}) \frac{\partial G(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G(x, \dot{x})}{\partial x}. \quad (4.136)$$

Essa equação diferencial nos dará a função $G(x, \dot{x})$ que precisamos para achar a lagrangiana equivalente. Mas, para isso, precisamos definir qual força $f(x, \dot{x})$ o sistema está sendo submetido.

4.4 Cálculo Fracionário Aplicado no Lançamento Oblíquo Sujeito a Força de Resistência do Ar

Por fim, nesta seção, vamos obter novamente as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera sujeito a força de resistência do ar, mas desta vez, via cálculo fracionário. O primeiro a propor a utilização do cálculo fracionário na mecânica lagrangiana e hamiltoniana para descrever sistemas dissipativos foi Riewe, como podemos verificar no artigo publicado por ele [26]. Riewe utilizou o cálculo fracionário para generalizar o princípio da mínima ação ao incluir derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ (um meio) nas lagrangianas [11]. Com isso, ele conseguiu obter lagrangianas físicas para movimentos sujeitos a forças dissipativas. Entretanto, na formulação dele, há alguns problemas como o limite ser inconsistente matematicamente falando e essa formulação só abrange forças dissipativas lineares com a velocidade [11, 27]. Para resolver essas inconsistências, [11] e [27] utilizaram as derivadas de Caputo e generalizaram o princípio da mínima ação ao incluir derivadas de ordem superior ($n = 3, 4, 5, \dots$) nas lagrangianas. Portanto a ação fica como sendo:

$$S = \int_a^b L \left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, {}^C D_t^{\alpha_0} x, {}^C D_t^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}^C D_t^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n}, {}^C D_b^{\alpha_0} x, {}^C D_b^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}^C D_b^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n}, t \right) dt. \quad (4.137)$$

A partir dessa expressão, [11] e [27] obtiveram a equação de Lagrange generalizada para a coordenada x :

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d^i x}{dt^i} \right)} \right] + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \left[{}^C D_b^{\alpha_i} \frac{\partial L}{\partial \left({}^C D_t^{\alpha_i} \frac{d^i x}{dt^i} \right)} + {}^C D_t^{\alpha_i} \frac{\partial L}{\partial \left({}^C D_b^{\alpha_i} \frac{d^i x}{dt^i} \right)} \right] = 0. \quad (4.138)$$

Essa equação será utilizada para obtermos as equações de movimento para os arrastos linear, quadrático e quadrático completo.

Formulação Lagrangiana para o Arrasto Linear a partir de uma Lagrangiana Dependente de Derivadas Fracionárias: Primeiramente, vamos obter as equações de movimento para o arrasto linear com a velocidade a partir de uma função lagrangiana dependente de derivadas fracionárias. A lagrangiana para esse caso pode ser definida como [11, 27]:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x, {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \frac{b}{2} \left[\left({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x \right)^2 + \left({}^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2 \right]. \quad (4.139)$$

Da equação acima, conseguimos identificar os valores de i e α na equação de Lagrange para a coordenada x , os valores são $i = 1$ no primeiro somatório, $i = 0$ no segundo somatório e,

por último, $\alpha_0 = \frac{1}{2}$. Portanto, a equação de Lagrange generalizada para a coordenada x para esse sistema fica como sendo

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + {}_t D_b^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x)} + {}_a D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x)} = 0. \quad (4.140)$$

Como só temos derivadas à direita na lagrangiana (4.139), logo temos que a equação acima torna-se

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + {}_a D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x)} = 0. \quad (4.141)$$

Agora, substituindo (4.139) em (4.141), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \frac{b}{2} \left[\left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x \right)^2 + \left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2 \right] \right\} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right. \\ \left. + \frac{b}{2} \left[\left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x \right)^2 + \left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2 \right] \right\} + {}_a D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x)} \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right. \\ \left. + \frac{b}{2} \left[\left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x \right)^2 + \left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2 \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.142)$$

calculando as derivadas, obtemos como resultado

$$m\ddot{x} - b({}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x) = 0, \quad (4.143)$$

para calcularmos o termo ${}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x$, precisamos de uma importante propriedade das derivadas de Caputo. Essa propriedade surge quando toma-se o limite de $\lim_{a \rightarrow b}$ com t sendo o ponto médio do intervalo $[a, b]$ [11, 27]. Portanto o resultado desse limite é

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) \approx -{}_t^C D_b^\alpha f(t). \quad (4.144)$$

Aplicando essa propriedade em (4.143), temos que

$$m\ddot{x} + b({}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} x) = 0, \quad (4.145)$$

agora, precisamos mexer no segundo termo do lado esquerdo dessa equação, para que possamos obter a equação de movimento. Portanto,

$${}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} (x) = \frac{d}{dt} ({}_a J_t^{\frac{1}{2}} {}_a J_t^{\frac{1}{2}}) \frac{d}{dt} (x), \quad (4.146)$$

pela lei dos expoentes para integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda (3.5), temos que ${}_a J_t^{\frac{1}{2}} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} = {}_a J_t$. Substituindo esse resultado na equação (4.146), obtemos

$${}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} (x) = \frac{d}{dt} ({}_a J_t) \frac{d}{dt} (x), \quad (4.147)$$

como a integral da derivada de uma função é a própria função, temos que ${}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} (x) = \frac{dx}{dt}$. Substituindo esse resultado em (4.145), temos

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}, \quad (4.148)$$

ou

$$m\dot{v}_x = -bv_x. \quad (4.149)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada x para o arrasto linear com a velocidade. Agora, vamos obter para a coordenada y . Para a coordenada y , a equação de Lagrange generalizada é:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + {}_a D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y)} = 0. \quad (4.150)$$

Substituindo (4.139) em (4.150), temos que

$$m\ddot{y} + mg - b({}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y) = 0, \quad (4.151)$$

fazendo $\lim_{a \rightarrow b}$ e fazendo os mesmos passos feitos para a obtenção da equação de movimento para a coordenada x , temos como resultado

$$m\ddot{y} = -mg - by, \quad (4.152)$$

ou ainda

$$m\dot{v}_y = -mg - bv_y. \quad (4.153)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada y .

Formulação Lagrangiana para o Arrasto Quadrático a partir de uma Lagrangiana Dependente de Derivadas Fracionárias: Agora, vamos obter as equações de movimento para o arrasto quadrático com a velocidade. Para isso, vamos obter uma lagrangiana dependente de derivadas fracionárias que não existe na literatura. Primeiramente, vamos propor a lagrangiana como sendo:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - L_1, \quad (4.154)$$

com $L_1 = k[({}_a^C D_t^\alpha h(x))({}_a^C D_t^\alpha f(\dot{x})) + ({}_a^C D_t^\alpha h(y))({}_a^C D_t^\alpha f(\dot{y}))]$. A equação de Lagrange generalizada para a coordenada x para essa lagrangiana é

$$\frac{\partial L}{\partial x} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\partial L}{\partial (\frac{d^n x}{dt^n})} \right] + \frac{dh}{dx} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha h)} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{df}{d(\frac{d^n x}{dt^n})} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha f)} \right] = 0. \quad (4.155)$$

Daqui a diante, vamos representar $h^n = \frac{d^n h}{dx^n}$ e $f^n = \frac{d^n f}{dx^n}$, além disso, vamos fazer as operações sem o coeficiente k da função L_1 . Agora, substituindo L_1 na equação (4.155) para $n = 1$, temos como resultado

$$h'({}_t^C D_b^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f) - \frac{d}{dt} (f' {}_t^C D_b^\alpha {}_a^C D_t^\alpha h) = 0, \quad (4.156)$$

chamando $\alpha = \frac{1}{2}$ e fazendo o limite de $\lim_{a \rightarrow b}$, temos como resultado

$$h' \frac{df}{dt} - \frac{d}{dt} \left(f' \frac{dh}{dt} \right) = 0, \quad (4.157)$$

agora, utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$h' \frac{df}{d\dot{x}} \ddot{x} - \frac{d}{dt} \left(f' \frac{dh}{dx} \dot{x} \right) = h' f' \ddot{x} - \frac{d}{dt} (f' h' \dot{x}), \quad (4.158)$$

calculando as derivadas temporais, obtemos

$$h' f' \ddot{x} - (f'' h' \dot{x} \ddot{x} + f' h'' \dot{x}^2 + f' h' \ddot{x}) = -f'' h' \dot{x} \ddot{x} - f' h'' \dot{x}^2 = 0. \quad (4.159)$$

Como precisamos de um termo que nos dê a velocidade ao quadrado, logo vamos impor que, $f'' h' = 0$ e $f' h'' = \text{constante}$. Portanto, $f(\dot{x}) = \dot{x}$ e $h(x) = x^2$. Fazendo os mesmos passos para a coordenada y , obtêm-se um resultado análogo $f(\dot{y}) = \dot{y}$ e $h(y) = y^2$. Substituindo os valores dessas quantidades obtidas e o valor de $k = \frac{c}{2}$ na função L_1 , temos que

$$L_1 = \frac{c}{2} [({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} x^2) ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x}) + ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} y^2) ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{y})]. \quad (4.160)$$

Substituindo esse resultado em (4.154), obtemos

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{c}{2} [({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} x^2) ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x}) + ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} y^2) ({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{y})]. \quad (4.161)$$

Agora, substituindo (4.161) em (4.155) para a coordenada x , em que $f = x^2$, $h = \dot{x}$, $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, obtemos como resultado

$$-m\ddot{x} - cx \left({}_t D_b^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} {}_t D_b^{\frac{1}{2}} {}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} x^2 \right) = 0. \quad (4.162)$$

Tomando o limite de $\lim_{a \rightarrow b}$, temos que

$$-m\ddot{x} + cx \left({}_t D_b^{\frac{1}{2}} {}_t D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} {}_t D_b^{\frac{1}{2}} {}_t D_b^{\frac{1}{2}} x^2 \right) = 0, \quad (4.163)$$

que resulta em

$$-m\ddot{x} + cx \frac{d}{dt} (\dot{x}) - \frac{c}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) = -m\ddot{x} + cx\ddot{x} - cx\ddot{x} - c\dot{x}^2, \quad (4.164)$$

fazendo algumas manipulações, temos que

$$m\ddot{x} = -c\dot{x}^2, \quad (4.165)$$

de outra maneira

$$m\dot{v}_x = -cv_x^2. \quad (4.166)$$

Essa é a equação de movimento para a coordenada x para o arrasto quadrático com a velocidade. Por último, vamos obter a equação de movimento para a coordenada y . A equação de Lagrange para a coordenada y é:

$$\frac{\partial L}{\partial y} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)} \right] + \frac{dh}{dy} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha h)} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{df}{d \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha f)} \right] = 0. \quad (4.167)$$

Substituindo (4.161) em (4.167) e notando que $f = y^2$, $h = \dot{y}$, $n = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos como resultado a seguinte expressão

$$-m\ddot{y} - mg - cy \left({}_tD_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{y} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} {}_tD_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_t^{\frac{1}{2}} y^2 \right) = 0. \quad (4.168)$$

Fazendo o limite $\lim_{a \rightarrow b}$ e fazendo as mesmas manipulações feitas para a coordenada x , temos como resultado

$$-m\ddot{y} - mg + cy \frac{d}{dt}(\dot{y}) - \frac{c}{2} \frac{d^2}{dt^2}(y^2) = 0, \quad (4.169)$$

calculando as derivadas e realizando algumas manipulações, obtemos

$$m\ddot{y} = -mg - cy^2, \quad (4.170)$$

ou

$$m\dot{v}_y = -mg - cv_y^2. \quad (4.171)$$

Por fim, obtemos a equação de movimento para a coordenada y para o arrasto quadrático.

As equações que obtivemos para o arrasto linear e quadrático com a velocidade são iguais as que encontramos pela função de dissipação de Rayleigh e pela função lagrangiana equivalente. Vale ressaltar que, a lagrangiana dependente de derivadas fracionárias para o caso quadrático não é encontrada na literatura e encontramos essa função com o auxílio do Professor Matheus J. Lazo, da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Por fim, vamos obter as mesmas equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma esfera sujeita a força de resistência do ar via formalismo hamiltoniano através do uso de lagrangianas dependentes de derivadas fracionárias.

Formulação Hamiltoniana para o Arrasto Linear a partir de uma Lagrangiana Dependente de Derivadas Fracionárias: Agora, vamos obter as equações de movimento para o arrasto linear com a velocidade. Mas, para isso, assim como foi feito na seção anterior, vamos fazer uma mudança na lagrangiana para que a mesma fique em função dos momentos, pois a hamiltoniana depende dos momentos canônicos. Nesse sentido, vamos utilizar a equação $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ para obtermos $\dot{x}^2$ e $\dot{y}^2$, além disso, vamos utilizar essa equação para obtermos $p_{x^{\frac{1}{2}}}$ e $p_{y^{\frac{1}{2}}}$, onde esses momentos são utilizados devido ao uso de derivadas fracionárias de ordem um meio. Substituindo (4.139) em (2.63) para a coordenada x , obtemos

$$p_x = m\dot{x}, \quad (4.172)$$

isolando $\dot{x}$ e elevando ao quadrado, obtemos

$$\dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{m^2}, \quad (4.173)$$

a partir do mesmo processo de obtenção de $\dot{x}^2$, obtemos que $\dot{y}^2$ é

$$\dot{y}^2 = \frac{p_y^2}{m^2}. \quad (4.174)$$

Para obtermos $p_{x_{\frac{1}{2}}}$ e $p_{y_{\frac{1}{2}}}$, vamos definir que a derivada de ordem um meio de x será representada por $x_{\frac{1}{2}} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x$ e de y por $y_{\frac{1}{2}} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y$. Agora, substituindo (4.139) em (2.63) para $x_{\frac{1}{2}}$, temos como resultado

$$p_{x_{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial L}{\partial {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x} = b({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x), \quad (4.175)$$

de maneira análoga para $y_{\frac{1}{2}}$, obtemos que $p_{y_{\frac{1}{2}}}$ é igual a

$$p_{y_{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial L}{\partial {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y} = b({}^C D_b^{\frac{1}{2}} y). \quad (4.176)$$

Agora, substituindo $\dot{x}^2$, $\dot{y}^2$, ${}^C D_b^{\frac{1}{2}} x$ e ${}^C D_b^{\frac{1}{2}} y$ em (4.139), ficamos com o seguinte resultado

$$L = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - mgy + \frac{b}{2}[(x_{\frac{1}{2}})^2 + (y_{\frac{1}{2}})^2]. \quad (4.177)$$

A hamiltoniana desse sistema é

$$H = \dot{x}p_x + x_{\frac{1}{2}}p_{x_{\frac{1}{2}}} + \dot{y}p_y + y_{\frac{1}{2}}p_{y_{\frac{1}{2}}} - L, \quad (4.178)$$

substituindo (4.177) em (4.178), obtemos

$$H = \dot{x}p_x + x_{\frac{1}{2}}p_{x_{\frac{1}{2}}} + \dot{y}p_y + y_{\frac{1}{2}}p_{y_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy - \frac{b}{2}[(x_{\frac{1}{2}})^2 + (y_{\frac{1}{2}})^2], \quad (4.179)$$

ou

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy + \frac{1}{2b}[(p_{x_{\frac{1}{2}}})^2 + (p_{y_{\frac{1}{2}}})^2]. \quad (4.180)$$

As equações de Hamilton para a coordenada x para esse sistema são, respectivamente

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (4.181)$$

e a equação canônica de Hamilton para $x_{\frac{1}{2}}$ é

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{\partial H}{\partial p_{x_{\frac{1}{2}}}}. \quad (4.182)$$

e a equação sugerida por [26] para esse caso além das demais equações é

$${}^C D_b^{\frac{1}{2}} p_{x_{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial H}{\partial x_{\frac{1}{2}}}. \quad (4.183)$$

Agora, substituindo (4.180) na primeira equação de Hamilton (4.181), temos como resultado

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}, \quad (4.184)$$

em sequência, substituindo (4.180) na segunda equação de Hamilton (4.181), obtemos

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = 0, \quad (4.185)$$

agora, substituindo H em (4.182), ficamos com a seguinte expressão

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{\partial H}{\partial p_{x_{\frac{1}{2}}}} = \frac{p_{x_{\frac{1}{2}}}}{b} = x_{\frac{1}{2}}, \quad (4.186)$$

por último, vamos substituir a função de Hamilton para esse sistema na equação (4.183), logo temos que

$${}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} p_{x_{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial H}{\partial x_{\frac{1}{2}}} = -bx_{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad {}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} p_{x_{\frac{1}{2}}} = -bx_{\frac{1}{2}}. \quad (4.187)$$

Esses resultados mostram que há inconsistências na formulação hamiltoniana fazendo uso de derivadas fracionárias para o arrasto linear, pois essa teoria não nos fornece as equações de movimento corretas para o lançamento oblíquo sujeito a força de resistência do ar. Vale ressaltar que, não fizemos os cálculos para a coordenada y , pois as equações de Hamilton para essa coordenada fornecem os mesmos resultados obtidos para a coordenada x , exceto quando utilizamos a segunda equação canônica, que nos fornece o resultado $m\ddot{y} = -mg$, no entanto, não é essa equação que estávamos buscando.

A partir desses resultados obtidos para o caso do arrasto linear com a velocidade, acreditamos também que não seja possível obter as equações de movimento para o arrasto quadrático com a velocidade via formalismo hamiltoniano a partir de uma lagrangiana dependente de derivadas fracionárias. Para o caso do arrasto quadrático completo, acreditamos que até seja possível encontrar uma lagrangiana para esse caso, mas não é um tema para um TCC, devido o tempo aplicado ao trabalho.

5 CONCLUSÃO

Conclui-se que, este trabalho se mostrou satisfatório para o que foi proposto, pois conseguimos obter as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma pequena esfera lisa sem sofrer rotação submetida a força de resistência do ar pelos formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas dissipativos. Porém, nem todos os métodos utilizados nos ajudaram a chegar nas equações que queríamos encontrar através dos dois formalismos. Pela mecânica lagrangiana, conseguimos encontrar as equações de movimento através da função de dissipação de Rayleigh, lagrangiana equivalente e lagrangiana dependente de derivadas fracionárias, com exceção do arrasto quadrático completo com a velocidade. Com a mecânica hamiltoniana, conseguimos encontrar as equações de movimento somente utilizando o método da lagrangiana equivalente.

Vale destacar que, conseguimos fazer algo inédito neste trabalho. Primeiramente, conseguimos obter uma função lagrangiana equivalente para o arrasto quadrático completo e, com isso, conseguimos obter as equações de movimento para esse caso utilizando os formalismos lagrangiano e hamiltoniano. E, conseguimos formular uma função lagrangiana dependente de derivadas fracionárias para o arrasto quadrático com a velocidade com ajuda do Professor Matheus J. Lazo, da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e, com essa função, chegamos nas equações de movimento através do formalismo lagrangiano. Nessa perspectiva, estes resultados obtidos nos mostram que, sempre podemos encontrar algo novo na física, mesmo para uma teoria que esteja bem estabelecida há muito tempo como é a mecânica clássica.

Referências

- [1] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica, volume 1**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 4ª edição, 2002.
- [2] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2ª edição, 2007.
- [3] WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica, volume 1**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2ª edição, 2001.
- [4] THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Editora Cengage Learning, 5ª edição, 2012.
- [5] SYMON, Keith R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 3ª edição, 1996.
- [6] LEÃO, Salviano A. **Mecânica Clássica**. Goiás.
- [7] DE AGUIAR, Marcus A. M. **Tópicos de Mecânica Clássica**. Campinas: 2010.
- [8] PRATES, José Humberto de Souza; MOREIRA, Davidson Martins. **Um sentido físico para modelagem fracionária: O caso do amortecimento das ondas eletromagnéticas**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Volume 42, e20200363, 2020.
- [9] DE CARVALHO, Matheus Dias; OTTONI, José Eloy. **Introdução ao Cálculo Fracionário com aplicações**. Revista de Matemática de Ouro Preto. Ouro Preto, MG, volume 1, p. 50-77, 2018.
- [10] SIMONÁRIO, Patrick Dos Santos. **Introdução ao estudo de derivadas fracionárias e equações diferenciais**. 2011. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Física) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, dez. de 2011.
- [11] KRUMREICH, Cesar Eduardo. **Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos Através do Cálculo Fracionário**. 2013. 69 f. Dissertação (Física) - Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.
- [12] SANTOS, Jessica. **Aplicação do Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem**. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2018.
- [13] TAYLOR, John R. **Classical mechanics**. California: University Science Books, 2005.
- [14] ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos Fluidos**. Porto Alegre: Editora McGrawHill, 2012.

- [15] VILLATE, Jaime E. **Dinâmica e Sistemas Dinâmicos**. Porto: Edição do Autor, 2016.
- [16] VASQUES, J. V.; MENEGASSO, P.; DE SOUZA, Mariano. **Explorando a conexão entre a mecânica dos fluidos e a teoria cinética**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Rio Claro, SP, volume 38, n. 1, 1307, 2016.
- [17] KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid Mechanics**. Burlington: Elsevier Academic Press, 2008.
- [18] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Fluid Mechanics**. Moscow: Pergamo Press, 2 edition, 1987.
- [19] DA SILVA, Ricardo Galdino. **Estudo Numérico de Movimentação de Partículas em Escoamentos**. 2006. 257 f. Dissertação (Engenharia) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- [20] BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos Fluidos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2ª edição, 2013.
- [21] BATEMAN, H. **On Dissipative Systems and Related Variational Principles**. Physical Review. California, volume 38, 815, 1931.
- [22] CARDIROLA, P. **Forze Non Conservative Nella Meccanica Quantistica**. Nuovo Cimento. Volume 18, 393, 1941.
- [23] HAVAS, P. **The Range of Application of the Lagrange Formalism**. Nuovo Cimento. Bethlehem, volume 5, 363, 1957.
- [24] ROSENBERG, R. M. **Analytical Dynamics of Discrete Systems**. Berkeley: Plenum Press, 1977.
- [25] RAZAVY, M. **Classical And Quantum Dissipative Systems**. Alberta: Imperial College Press, 2005.
- [26] RIEWE, F. **Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics**. Physical Review E. Volume 53, 1996.
- [27] LAZO, M. J.; KRUMREICH, C. E. **Lagrangian Formulation for open and dissipative systems with higher-order derivate**. Journal of Mathematical physics. Volume 55, 122902, 2014.
- [28] MINGUZZI, E. **Rayleigh's dissipation function at work**. European Journal of Physics. Volume 38, 2015. '