UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ARIANY DIAS E DIAS

MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA POLUIÇÃO DO LAGO ÁGUA PRETA

ABAETETUBA-Pará
2022

ARIANY DIAS E DIAS

MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA POLUIÇÃO DO LAGO ÁGUA PRETA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima.

ABAETETUBA-Pará
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dias, Ariany Dias E.
MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIOMAL DA POLUIÇÃO DO LAGO ÁGUA PRETA / Ariany Dias E Dias. —2022.
20 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Côrrea Lima
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - UniversidadeFederal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Poluição. 2. Lago Água Preta. 3. Fósforo. 4. Equação diferencial linear de primeira ordem. 5. Wxmaxima. I. Título.

CDD 511.8

ARIANY DIAS E DIAS

MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA POLUIÇÃO DO LAGO ÁGUA PRETA

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Rômulo Correa Lima, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Aprovado em: 23 / 02 / 2022 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
Orientador– FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Profa. Dr. José Francisco da Silva Costa
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a Deus por ter me ajudado a ultrapassar todos os obstáculos e desafios encontrados no percorrer do curso, e por hoje ter conseguido alcançar mais uma etapa muito importante em minha vida.

À minha mãe, Maria Auxiliadora Dias e ao meu irmão, Arielson Dias, que sempre estão do meu lado me incentivando e dando todo o apoio necessário para que eu possa alcançar os meus objetivos.

Em memória, quero dedicar essa conquista ao senhor, Antônio Ferreira Dias, que além de avô foi o meu pai durante toda a minha vida.

Aos meus amigos e professores da Universidade, que estiveram comigo durante todo esse período, e que ainda vão continuar fazendo parte da minha jornada.

Em especial, quero agradecer ao meu professor e orientador Rômulo Correa Lima, pela sua dedicação e incentivo durante o desenvolvimento do trabalho, colaborando sempre com as organizações das ideias e mostrando sempre que somos capazes de desenvolver um trabalho com amplo conhecimento, que basta apenas a força de vontade.

MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA POLUIÇÃO DO LAGO ÁGUA PRETA

Autora: Ariany Dias e Dias
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
Banca: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

RESUMO

As equações diferenciais constituem uma ferramenta matemática importante para a descrição de fenômenos e processos, naturais ou artificiais, em várias áreas do conhecimento humano. Desta forma, o presente trabalho utiliza uma equação diferencial ordinária linear para modelar a poluição, pelo elemento fósforo, que ocorre no lago Água Preta, localizado em Belém do Pará. Utiliza-se a estratégia de solução analítico-numérica da EDO modelo, com o auxílio do software Wxmaxima, através da utilização da computação simbólica para a resolução da parte analítica e o método de mínimos quadrados não lineares para fazer o ajuste numérico da solução encontrada anteriormente aos dados reais obtidos. Esta estratégia mostrou que a pluviosidade possui grande importância no grau de poluição do lago e que esta possui um comportamento periódico.

Palavras – Chave: Poluição. Lago Água Preta. Fósforo. Equação diferencial linear de primeira ordem. Wxmaxima.

ABSTRACT

Differential equations constitute an important mathematical tool for the description of phenomena and processes, natural or artificial, in several areas of human knowledge. In this way, the present work uses an ordinary linear differential equation to model the pollution, by the element phosphorus, that occurs in the Água Preta lake, located in Belém do Pará. aid of the Wxmaxima software, through the use of symbolic computation to solve the analytical part and the nonlinear least squares method to make the numerical adjustment of the solution found previously to the real data obtained. This strategy showed that rainfall has great importance in the degree of pollution of the lake and that it has a periodic behavior.

Keywords: Pollution. Água Preta Lake. Phosphor. First order linear differential equation. Wxmaxima.

1 – INTRODUÇÃO

A água é um recurso indispensável para a sobrevivência do ser humano, para isso, é preciso que a mesma esteja livre de contaminação, seja ela pela ação química, física e biológica. Para Ana (2011), a qualidade da água é tão importante quanto à quantidade, quando se trata de atender às necessidades básicas dos seres humanos e do meio ambiente. A água tem a sua qualidade modificada quando se tem alterações em relação á nutrientes, sedimentos, temperatura, pH, metais pesados, toxinas não metálicas, componentes orgânicos persistentes e agrotóxicos, fatores biológicos entre outros.

A poluição ocasionada pelo excesso de nutriente está se tornando cada vez mais frequente nos lagos e lagoas, normalmente associada ao nitrogênio e fósforo, tornando esses ambientes ricos em nutrientes e pobres em oxigênio. O lagos difere dos rios e de outros sistemas aquáticos de superfície em vários aspectos, mais notavelmente em termos do tempo de permanência da água e de outras substâncias no sistema. Isto afeta a capacidade dos lagos de remediarem os poluentes e contribui para a complexidade de suas dinâmicas (ANA, 2011).

Devido à poluição em águas superficiais, principalmente envolvendo os lagos do Brasil, em especial, da região Norte, vários autores abordaram este tema em seus trabalhos, como por exemplo, Sodré (2007) analisou os poluentes dos mananciais lago Água Preta e o lago Bolonha na Região Metropolitana de Belém do Pará e observou que os contaminantes, em especial, o fósforo no lago Água Preta teve maior concentração no período de maior precipitação. Além deste, Lima (2012) pesquisou a influência da pluviosidade para a dinâmica do lago Água Preta, através da demanda do volume de água bombeada para o Rio Guamá e a concentração do nutriente oriunda de fontes externas.

O lago Água Preta é um dos principais mananciais de águas superficiais que fazem o abastecimento da Região Metropolitana de Belém, esse ambiente lêntico (caracterizados por águas paradas ou de baixo fluxo), foi formado por meio de construções de barragens na década de 1930, alimentadas por pequenas drenagens e por água bombeada do rio Guamá. Esse manancial está sofrendo com a eutrofização por está situado em um local onde tem o crescimento desordenado da população ao seu redor, e o lançamento de efluentes domésticos e industriais (SODRÉ, 2007).

Diante do exposto, o presente trabalho teve como objetivo avaliar a dispersão do fósforo no lago Água Preta através de simulação computacional. Para alcançar este objetivo o presente trabalho está dividido na seguinte forma: a seção dois trata da poluição de corpos aquíferos pelo elemento fósforo e particularmente o lago Água Preta. Na seção seguinte, apresenta-se a formulação da modelagem matemática através da qual se alcança uma equação diferencial linear de primeira ordem que representa o transporte de massa em ecossistemas lênticos. Posteriormente, na seção

quatro, a EDO é resolvida utilizando-se uma combinação de estratégia analítica e numérica, através da resolução simbólica computacional do programa Wxmáxima, bem como a utilização do método dos mínimos quadrados não lineares para obter o ajuste da solução analítica ao conjunto de dados reportados na literatura. Na seção final são apresentadas as conclusões extraídas a partir do resultado da simulação.

2 – LAGO ÁGUA PRETA E O FÓSFORO

Nesta seção será apresentado o lago Água Preta e as suas características, além da problemática do fósforo no meio ambiente.

2.1 – A Poluição em Lagos

As águas superficiais são águas doces armazenadas em barragens, açudes, lagos, represas em geral e as contidas nos fluxos dos rios. Cerca de 2,5 % da água da Terra, o que corresponde a 35 milhões de km^3, é considerada potável. Estima-se que os lagos do mundo têm um volume de água doce de 91.000 km^3, o que corresponde aproximadamente 1% de toda água existente (ANA, 2011, p. 35-36; FERNANDES et al., 2013, p. 96).

Esses tipos de depressões desempenham valiosas funções ecossistêmicas, ao fornecer alimento e água, mitigar fluxos de enchentes e suportar a extensiva biodiversidade, são também vulneráveis a grande gama de ameaças à qualidade de suas águas, incluindo aumento de salinidade, alterações de temperatura e contaminação por componentes químicos industriais e agrícolas (WLVARC, 2007 apud ANA, 2011, p. 36).

2.2 – Fósforo

O fósforo (P), é um elemento químico essencial do ácido desoxirribonucleico (DNA) que é a sede da herança genética nos vegetais e em outras formas do ácido ribonucleico, o qual é de extrema importância para o crescimento e sobrevivência de todos os seres vivos (BRADY,1989; SODRÉ, 2007).

Chapra (1997 apud BARROS, 2008, p. 10) apresenta uma nomenclatura representativa para as diferentes formas de fósforo encontradas em águas naturais, conforme apresentado a seguir.

- Fósforo Inorgânico dissolvido – chamado de ortofosfato ou fósforo reativo dissolvido. É a principal forma de fosfato assimilado pelos vegetais aquáticos e pode ser constatado sob diferentes espécies iônicas, em função do pH do meio;

- Fósforo orgânico particulado – presente nos seres vivos e nos detritos orgânicos;

- Fósforo orgânico não particulado – dissolvido ou presente em colóides de compostos orgânicos que contenham fósforo. É originado da decomposição do fósforo orgânico particulado;

- Fósforo inorgânico particulado – fosfatos minerais e fosfatos complexados ou adsorvidos a materiais sólidos;

- Fósforo inorgânico não particulado – fosfatos condensados, como os encontrados nos detergentes.

O fósforo possui um ciclo tipicamente sedimentar, no qual passa por processos químicos e biológicos, onde os compostos orgânicos desintegram-se, formando o fosfato (BRADY, 1989; ODUM, 1988; PINTO-COELHO, 2000).

No caso do composto orgânico, o fosfato é absorvido do solo pelas plantas e, animais consomem esses vegetais, depois de ingerir, os microrganismos decompõem os resíduos, onde posteriormente é reposto pela comunidade fitoplanctônica. As rochas reservam a maior parte de fósforo, elas não apenas absorvem fosfato como ocorre a lixiviação, onde o fósforo é levado pelas chuvas ou rios/lagos, até ficar concentrado no meio, onde peixes consomem esse fosfato, voltando novamente o ciclo (ESTEVES, 1998; KLEIN; AGNE 2012).

2.2.1 – Danos causados pelo fósforo ao corpo hídrico

Uma grande quantidade de fosfato dissolvido na água doce, decorrente do volume crescente de efluentes urbano – industriais e agrícolas é, hoje uma grande preocupação, pois, contribui para o estimulo do florescimento excessivo de algas ambientais, ocasionando a *eutrofização* (LIMA, 2012; ODUM, 1988).

A eutrofização artificial ocorre pelo aumento desequilibrado da produção primaria na maioria dos ecossistemas aquáticos e muitas vezes causadas pela contribuição externa do fósforo, causando a diminuição da qualidade da água, através do crescimento de algas e plantas que consomem o oxigênio ocasionando a morte de peixes, concentração de matéria orgânica, deterioração do valor recreativo de um lago, menor número de espécies e animais (BARROS, 2008; PINTO-COELHO, 2000).

Harper (1992 apud VEIGA, 2010, p. 7) aponta que a preocupação com as elevadas concentrações de fósforo nos corpos hídricos, especialmente os lênticos, reside na atuação deste elemento como fator limitante da produção primária. Em qualquer ecossistema, a transformação da energia solar na produção de matéria orgânica raramente ocorrerá no auge da capacidade fisiológica das plantas que vivem nele. Cada uma das espécies terá o seu crescimento limitado pelo recurso ambiental mais escasso naquele momento, mesmo que os demais estejam presentes em excesso.

No Brasil o Conselho Nacional do Meio Ambiente – CONAMA, 2005 estabelece que o valor máximo de concentração do fósforo total seguindo os padrões de qualidade de água é de 0,020 mg/L (ambiente lêntico) – 0,025 mg/L (ambiente intermediário) na Classe 1, 0,030 mg/L (ambiente lêntico) – 0,050 (ambiente intermediário) na Classe 2 e 0,050 mg/L (ambiente lêntico) – 0,075 mg/L

(ambiente intermediário) na Classe 3 (KLEIN; AGNE 2012).

2.3 – O Fósforo no Lago Água Preta

O lago Água Preta (ver Figua 1), faz parte dos mananciais de águas superficiais, é considerado como o principal lago que constituem parte do sistema de abastecimento de água potável para a população de Belém e sua região Metropolitana, no Estado do Pará. O lago é formado pelas bacias dos igarapés Água Preta e Catu, que fica localizado principalmente nas terras do Utinga, tem uma área de superfície de aproximadamente 3.116.868 m^2 de lâmina de água, e um volume estimado em 10.550.000 m^3 com uma profundidade máxima de aproximadamente 8,5 m. Nesse lago tem um sistema de comportas com função de controlar a saída de suas águas para o lago Bolonha através do canal de ligação, esse controle é feito por gravidade, como mostra a Figura 1 com a entrada de água oriunda do rio Guamá e a saída direcionada para o lago Bolonha (LIMA, 2012; SODRÉ, 2007).

Figura 1 – Imagem de satélite do lago Água Preta onde são vistos seus pontos de captação da água do rio Guamá (entrada) e o canal de ligação com o lago Bolonha (saída).



Fonte: Adaptado de Lima, 2012.

No decorrer dos anos o lago Água Preta vem sofrendo grandes danos ambientais, pelo crescimento desordenado da população e industrialização do local, acarretando a poluição por nutrientes e metais pesados, um desses principais poluentes é o fósforo (LIMA, 2012; SODRÉ, 2007).

Sodré (2007), realizou coletas das águas superficiais e de fundo nos lagos Água Preta e Bolonha, a precipitação pluviométrica total registrada nos lagos foi de 3.578,8 mm, os maiores índices observado foi no período mais chuvoso. Analisando o comportamento do fósforo frente às variações da precipitação pluviométrica constatou-se maiores concentrações entre os meses de

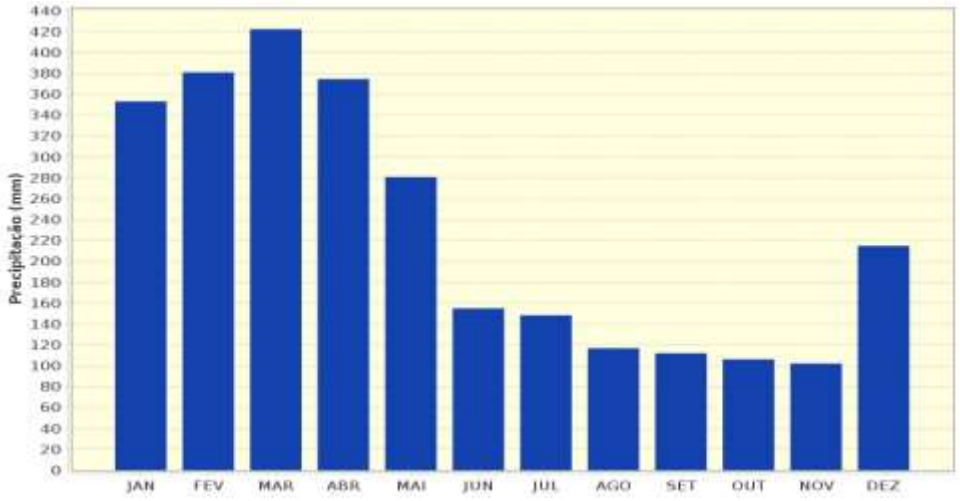
agosto e dezembro, a presença de maiores concentrações possivelmente provém das menores profundidades e a ação dos ventos. Os valores de fosfato encontrados foram de 0,159 mg L^{-1} (valor máximo) e de 0,009 mg L^{-1} (valor mínimo), tendo um tempo de sobrevida para o lago água Preta de 2,76 dias, valor esse calculado através da equação.

Com base nos resultados de simulações computacionais, percebeu-se que a principal origem do fósforo que sai do lago Água Preta em direção ao lago Bolonha são as fontes pontuais localizadas nas proximidades do canal de ligação entre os dois lagos. Confirmando o estudo de Sodré (2007), as simulações mostraram que a maior contribuição do rio ocorre no mês em que há um maior índice de pluviosidade, uma vez que, ocorrem também os máximos valores para a concentração de fósforo transportada pelo rio, bem como para as velocidades dentro deste, ocasionando assim uma concentração maior que a capacidade de consumo pelas reações (LIMA, 2012).

2.3.1 – Pluviosidade

O clima da área metropolitana de Belém do Pará, é o tipo de clima equatorial úmido, caracteriza-se por apresentar precipitações frequentes, com elevado índice pluviométrico, sendo observado no período da tarde e início da noite, principalmente nos meses de dezembro, janeiro até por volta do mês de maio, que são os meses mais chuvosos, sendo março o período com maior índice de 422,3 milímetros (mm), e novembro com menor índice de 102.2 milímetros (mm), como mostra a Figura 2, com médias mensais da pluviosidade no período entre 1970 e 2007. A região não apresenta um período de seca definido, assim como não existe uma distribuição da chuva igual durante o ano (FARIAS; NASCIMENTO; FERREIRA, 1992, p.247 apud SODRÉ, 2007, p.43).

Figura 2 – Médias pluviométricas mensais coletados no intervalo de 1970 a 2007.



Fonte: www.semas.pa.gov.br

Para Lima (2012) a variação pluviométrica é a principal responsável pela dinâmica do lago,

uma vez que ela determina a necessidade do aumento ou diminuição do volume de águas bombeadas do rio Guamá, assim como a variação da concentração de poluentes provenientes de fontes externas. Essa importância será utilizada na fase de modelagem matemática e simulação computacional da dispersão do fósforo dentro do Água Preta, a qual será objeto das próximas seções.

3 – MODELAGEM MATEMÁTICA DA DESPOLUIÇÃO DE LAGOS

Nesta seção será apresentada a formulação matemática para o comportamento dos poluentes em lagos e lagoas.

3.1 – Modelo matemático

Devido ao comportamento do fluxo de água destes ambientes, este problema pode ser considerado como um problema de diluição de substâncias, desconsiderando-se a sedimentação dos poluentes, sua ação biológica, etc. Desta forma, serão feitas algumas hipóteses simplificadoras para o problema estudado (BASSANEZI, 1988):

1. Existe um fluxo de água que entra no lago e uma vazão de saída, as quais são consideradas iguais, mantendo o volume de água dentro do lago constante, valendo r litros por segundo (l/s);
2. Quando a água adentra no reservatório, se mistura de forma rápida e homogênea, havendo, desta forma, uma distribuição uniforme dos poluentes;
3. O volume do lago é constante e igual a V litros (l). A água proveniente da chuva se equilibra com a que evapora;
4. Os poluentes são retirados da lagoa somente através do fluxo de saída;
5. A fonte da poluição está localizada na margem do canal que alimenta o lago.

Seja P_0 a quantidade do poluente existentes no lago no instante $t = 0$ e $P = P(t)$ é a quantidade de poluente dissolvida no momento t. Uma vez que o volume do lago é constante, bem como as vazões do fluxo, supõem-se que a variação da quantidade de poluente por unidade de tempo é proporcional à quantidade total existente no lago em cada instante tal que (BASSANEZI, 1988)

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{rP}{V} \tag{1}$$

Se o poluente continuar entrando então a quantidade total acumulada no lago será $Q = Q(t)$. Então, sua variação é dada por

$$P_i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

e a equação (1) deve ser reescrita como

$$\frac{dP}{dt} = P_i(t) - \frac{r}{V}P, \tag{2}$$

com $r > 0$ e $P(0) = P_0$.

A equação (2) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, a qual será resolvida através de uma estratégia, que é parte analítica e parte numérica, com o auxílio do software Wxmaxima.

4 – SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA POLUIÇÃO NO LAGO ÁGUA PRETA

Após a obtenção da equação que descreve o comportamento de um poluente dentro de um lago, nesta seção esse modelo será aplicado na simulação do comportamento do fósforo no lago Água Preta, com o uso do software Wxmaxima.

4.1 – Solução do modelo usando o Wxmaxima

No que se segue, as linhas de comando do programa aparecem com letras coloridas e a execução deste comando aparece na linha imediatamente seguida.

O primeiro passo na resolução da equação (2) é construir a equação diferencial no software através do comando

```
'diff(P,t) = P_i-r·P/V;
```

$$\frac{d}{dt}P = P_i - \frac{Pr}{V}$$

Posteriormente, a solução desta equação é dada pelo comando *ode2*, conforme mostrado abaixo

```
sol:ode2(%,P,t);method;
```

$$P = \%e^{-\frac{r\,t}{V}}\left(\frac{P_i\ V\ \%e^{\frac{r\,t}{V}}}{r}+\%c\right)$$

linear

onde os símbolos *%e* e *%c* são as representações do programa para a constante de Napier e a constante de integração. Pode-se notar que, através do comando *method*, o Wxmaxima indica o método analítico utilizado para a solução de uma dada EDO. Observe que a variável *sol* recebe este resultado e será utilizada posteriormente.

Em seguida, aplica-se a condição inicial $P(0) = P_0$, feito através do comando

```
ic1(sol,t=0,P=P_0);
```

$$P=\frac{\%e^{-\frac{r\,t}{V}}\left(P_i\ V\ \%e^{\frac{r\,t}{V}}+P_0\,r-P_i\ V\right)}{r}$$

Este resultado pode ser reescrito de forma a isolar o termo fonte P_i

```
expand((%e^(-(r·t)/V)·(P_i·V·%e^((r·t)/V)+P_0·r-P_i·V))/r)$
collectterms(%,P_i);
```

$$P_i\left(\frac{V}{r}-\frac{V\ \%e^{-\frac{r\,t}{V}}}{r}\right)+P_0\ \%e^{-\frac{r\,t}{V}}$$

Neste ponto a solução matemática do modelo está completa, porém, para que ela possa simular um comportamento real, torna-se necessário a inserção dos dados referentes ao problema.

4.2 – Dados do problema

A equação obtida anteriormente passará a ter utilidade prática se forem inseridas as informações referentes ao fenômeno em análise. Para se cumprir este requisito, nesta seção serão apresentadas as informações necessárias para a simulação do comportamento do fósforo dentro do lago Água Preta.

4.2.1 – Dados do Fósforo

Lima (2012) apresenta um conjunto de dados relatando a concentração de fósforo total (em mg/L) em dois pontos do lago, quais sejam: na entrada e na saída do lago. O primeiro local encontra-se na saída da canalização da água bombeada do rio Guamá e o outro está localizado na entrada do canal que transporta a água para o lago Bolonha, conforme mostrado na figura 1. Estes dados são mostrados na tabela 1.

Tabela 1: Concentração de fósforo total, em miligramas por litro, coletados na entrada e na saída do lago Água Preta.

	ENTRADA	SAÍDA
NOV – 2008	0,08	0,04
DEZ – 2008	0,10	0,09
JAN – 2009	0,18	0,24
FEV – 2009	0,29	0,37
MAR – 2009	0,46	0,30
ABR – 2009	0,18	0,15
MAI – 2009	0,14	0,31
JUN – 2009	0,10	0,11
JUL – 2009	0,06	0,02
AGO – 2009	0,12	0,05
SET – 2009	0,13	0,07
OUT – 2009	0,28	0,07

Fonte: Lima, 2012.

Os dados de concentração do fósforo total que foram coletados na saída do Água Preta, serão utilizados para confrontar o resultado da simulação computacional com a modelagem apresentada anteriormente.

4.2.2 – Vazão e volume do Água Preta

Neste ponto algumas informações sobre o lago são informadas, como a vazão (r) de entrada e de saída do lago, as quais são consideradas iguais e constantes e o volume do lago. Com base nos dados de vazão de bombeamento da água do rio Guamá, apresentado em Lima (2012), tem-se uma vazão média de 5 m^3/s, no intervalo de tempo avaliado. Porém, para a simulação computacional apresentada neste trabalho, este dado deve ser transformado para uma vazão mensal. Outro dado necessário é o volume total (V) do lago Água Preta, o qual é de 10.550.000 m^3 (SODRÉ, 2007).

4.2.3 – Pluviosidade

Apesar desta informação não ser utilizada diretamente no modelo matemático, ela é fundamental para a simulação computacional, uma vez que, sabendo-se que as águas do rio Guamá constituem a principal fonte de fósforo que adentra no lago Água Preta e que os efluentes da cidade de Belém são jogados diretamente neste rio, sem tratamento, conclui-se que quando a pluviosidade aumenta nesta região, então as águas do rio Guamá tornam-se mais abundantes de poluentes, incluindo o fósforo. Tendo isto em vista, a tabela 2 mostra a média pluviométrica na região do lago Água Preta no período de novembro de 2008 a outubro de 2009 (LIMA, 2012).

Tabela 2: Pluviosidade média na cidade de Belém, onde está localizado o lago Água Preta, no período de 12 meses.

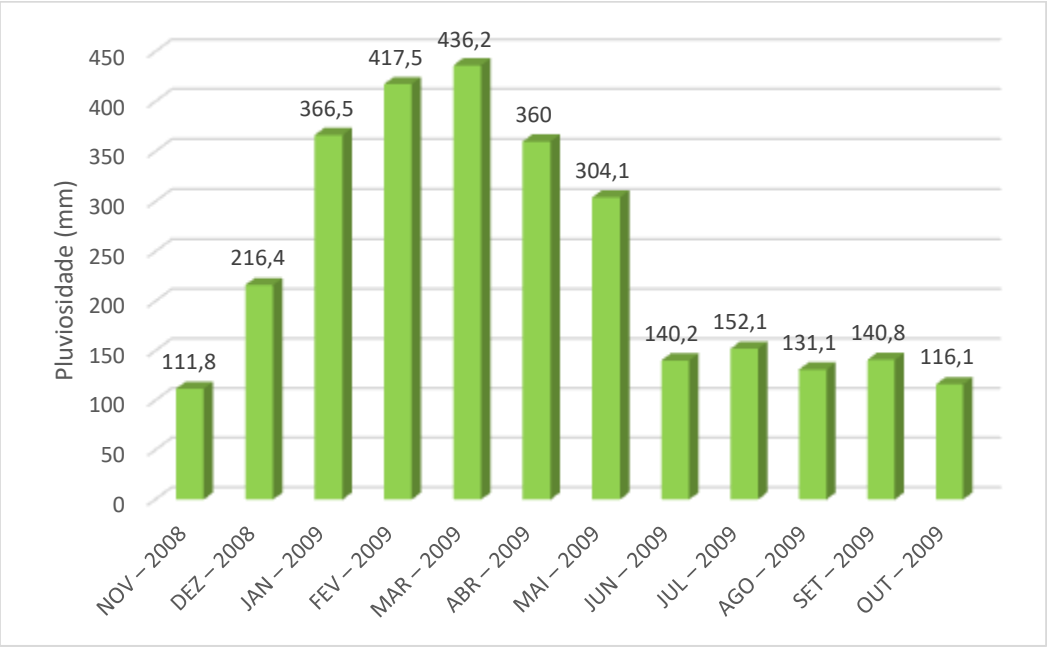
	MÉDIA (mm)
NOV – 2008	111,8
DEZ – 2008	216,4
JAN – 2009	366,5
FEV – 2009	417,5
MAR – 2009	436,2
ABR – 2009	360,0
MAI – 2009	304,1
JUN – 2009	140,2
JUL – 2009	152,1
AGO – 2009	131,1
SET – 2009	140,8
OUT – 2009	116,1

Fonte: Lima, 2012.

Estes dados, quando representados graficamente, conforme mostrado na figura 3, indicam um comportamento periódico da pluviosidade na região. Desta forma, é razoável supor que a fonte de poluição seja representada matematicamente por uma função do tipo:

$$P_i = a[1 + sen(bt - c)] \quad (3)$$

Figura 3: Representação gráfica da pluviosidade média na área do lago Água Preta, no período de novembro de 2008 a outubro de 2009.



Fonte: Autoria própria

4.3 – Simulação computacional

As informações mostradas anteriormente podem ser inseridas na equação que representa a solução de *P* através do comando:

```
eq:ev(%,P_i = a·(1+sin(b·t-c)),V:10550000,r:5·3600·24·30,P_0:0.04);
```

$$a\left(\frac{1055}{1296}-\frac{1055\ \%e^{-\frac{1296\ t}{1055}}}{1296}\right)(\sin(b\,t-c)+1)+0.04\ \ \%e^{-\frac{1296\,t}{1055}}$$

Observe que P_0 = 0,04 é o primeiro valor dos dados na saída do lago, apresentados na tabela 1. Nesta solução, nota-se que os coeficientes *a, b* e *c*, provenientes da função que representa a fonte poluente, são desconhecidos. Para a determinação destas incógnitas torna-se necessário fazer um ajuste numérico de curva através do método de mínimos quadrados. Isto pode ser alcançado utilizando o seguinte comando:

```
lsquares_estimates(data,[t,P],P=eq,[a,b,c],initial=[0.0,0.0,0.0], tol = 10d-5);
```

onde *data* é a matriz contendo o tempo (em dias) e a concentração do fósforo. Após a execução

deste comando obtém-se os seguintes valores para os coeficientes:

$$[[a = 0.1919680699492684, b = -8.22088073556815310^{-4}, c = -3.86313903411571]],$$

que após substituídos na equação anterior obtém-se:

```
p:ev(eq,%);
```

$$0.04\ \%e^{-\frac{1296\,t}{1055}} + 0.1919680699492684\left(1 - \sin\left(8.220880735568153\ 10^{-4}\,t - 3.86313903411571\right)\right)\left(\frac{1055}{1296} - \frac{1055\ \%e^{-\frac{1296\,t}{1055}}}{1296}\right)$$

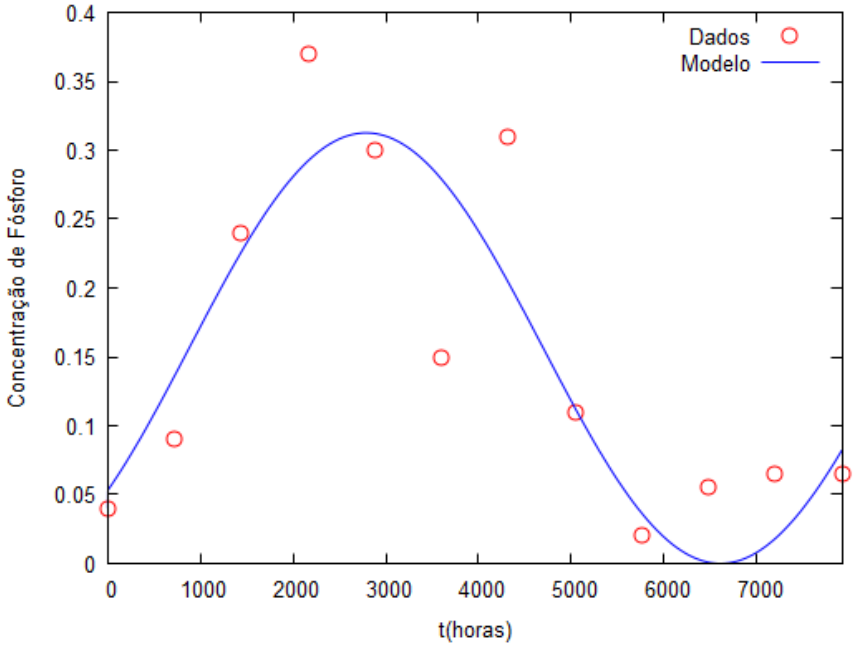
Esta é a solução final para o fenômeno analisado, a qual pode ser representada graficamente e comparada com os dados apresentados na tabela 1, na coluna dos dados na saída do lago. Isto pode ser feito com o comando

```
wxplot2d([[discrete, args(data)],p],[t,0,24·330],
    [style, points, lines], [color, red, blue],[point_type, circle],
    [legend, "Dados", "Modelo"],[xlabel, "t(horas)"],[ylabel, "Concentração de Fósforo"])$
```

que produz o gráfico apresentado na figura 4, onde pode ser comparados o modelo matemático, obtido de forma analítico-numérica, com o auxílio do Wxmaxima, e os dados de concentração de fósforo total na saída do Água Preta.

Pode-se observar que, apesar de ser um modelo bastante limitado, devido suas restrições iniciais, o modelo recupera a tendência do comportamento periódico da poluição, uma vez que, como informado anteriormente, o rio Guamá representa a maior fonte de poluição para o lago Água Preta. Outra conclusão que pode ser extraída do modelo matemático é que o lago possui uma taxa de recuperação elevada, uma vez que quando a concentração de fósforo trazida pelas águas bombeadas do rio diminui, rapidamente o lago diminui a quantidade deste elemento dentro de seu volume.

Figura 4: Comparação entre a concentração de fósforo total, na saída do lago, e o modelo obtido pela estratégia de solução analítico-numérica apresentada.



Fonte: Autoria própria.

5 - CONCLUSÃO

O lago Água Preta é considerado, na região paraense, o principal reservatório de abastecimento de água da cidade de Belém e sua região metropolitana. Porém, o mesmo sofre com a poluição por nutrientes e efluentes trazidos pelo rio Guamá, o qual tem suas águas bombeadas para dentro do lago afim de manter o nível do reservatório para a posterior distribuição. Devido a sua importância, o Água Preta tem sido objeto de várias pesquisas.

Este trabalho analisou o comportamento do elemento fósforo dentro deste lago através da modelagem e simulação computacional. Para isso, utilizou-se o software Wxmaxima, para a resolução analítica, através da computação simbólica, e para o ajuste entre a curva de regressão e os dados reais, através do método dos mínimos quadrados não lineares, uma vez que as informações da concentração de fósforo apresentaram o comportamento periódico, do tipo senoidal, devido à influência do perfil pluviométrico da região em que o lago está situado.

Levando em consideração os dados pluviométricos mensais, no período de novembro de 2008 a outubro de 2009, e confrontando o resultado da concentração analisada na saída do lago, com o modelo obtido pela estratégia analítica–numérica, conclui-se que o rio Guamá é o principal responsáveis da poluição do lago Água Preta, uma vez que, os efluentes oriundos da cidade são despejados direta e indiretamente, principalmente no período de maior precipitação, onde os resíduos dos centros urbanos são levados pela chuva até o rio.

Como perspectiva para futuros trabalhos, pode-se indicar as medições de concentração em intervalos de tempo menores do que foi apresentado aqui para um ajuste mais preciso. Além disso, outros elementos ou substâncias poluentes podem ser analisadas utilizando esta estratégia para a modelagem matemática e a respectiva simulação computacional.

REFERÊNCIAS

BARROS, Flávia Mariani. **Dinâmica do Nitrogênio e do Fósforo e estado trófico nas águas do Rio Turvo Sujo.** 2008. 193 f. Tese (Engenharia Agrícola) – Programa de Pós–Graduação em Engenharia Agrícola, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa Minas Gerais, 2008.

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA Jr, Wilson. Castro. **Equações Diferenciais Com Aplicações**. 1ª ed. São Paulo: Harbra, 1988.

BRADY, Nyle C. **Natureza e propriedade dos solos**, 7ª ed. Rio de Janeiro; Livraria Freitas Bastos S.A, 1989.

BRASIL, Agência Nacional de Águas. **Cuidando das águas: soluções para melhorar a qualidade dos recursos hídricos**. Brasília, DF: ANA, 2011. 154 p.

ESTEVES, Francisco de Assis. **Fundamentos de Limnologia**, 2ª Ed. Rio de Janeiro; Interciência, 1998.

FERNANDES, André Luís Teixeira. et al. **Métodos e projetos hidráulicos e de saneamento, volume 1**. Uberaba: Universidade de Uberaba, 2013. 364 p.

KLEIN, Claudia, AGNE; Sandra Aparecida Antonini. **Fósforo: de nutriente à poluente!**. Rev. Elet. em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental, v(8), nº 8, p. 1713-1721, SET-DEZ, 2012.

LIMA, Rômulo Correa. **Desenvolvimento de um modelo via MEF para análise da dispersão de poluentes em rios, lagos e estuários**. 2012. 113 f. Tese (Engenharia de Recursos Naturais) – Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

ODUM, Eugene P. **Ecologia**. Rio de Janeiro; Editora Guanabara Koogan S.A, 1988.

PINTO – COELHO, Ricardo Motta. **Fundamentos em Ecologia**. Porto Alegre; Armed Editora, 2000.

SODRÉ, Silvana do Socorro Veloso. **Hidroquímica dos Lagos Bolonha e Água Preta mananciais de Belém – Pará**. 2007. 115 f. Dissertação (Mestrado em ciências ambientais) - Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

VEIGA, Bruno Victor. **Fatores intervenientes na dinâmica do fósforo em ambiente Lênticos – investigação sobre o reservatório de Alagados no Estado do Paraná.** 2010. 114 f. Tese (Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.