



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS**

Ruan Victor Oliveira de Souza

Aplicações do Método da Energia em EDP's

**SALINÓPOLIS-PA
MAIO/2026**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Ruan Victor Oliveira de Souza

Aplicações do Método da Energia em EDP's

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Dr. LUIZ GUTEMBERG ROSARIO MIRANDA - Universidade Federal do Pará

SALINÓPOLIS-PA

Maio/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Ruan Victor Oliveira de Souza

Aplicações do Método da Energia em EDP's

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ GUTENBERG ROSARIO MIRANDA**
Data: 18/05/2026 10:52:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Orientador)
UFPA/Salinópolis

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS ALBERTO RAPOSO DA CUNHA**
Data: 18/05/2026 10:19:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (Membro interno)
UFPA/Salinópolis

Documento assinado digitalmente
 **LINDOMAR MIRANDA RIBEIRO**
Data: 18/05/2026 09:36:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro (Membro interno)

Agradecimentos

Com esse trabalho, concluo um ciclo em minha vida e gostaria de dizer que “até aqui nos ajudou o Senhor”. Ao longo desses quatro anos em Salinópolis, sempre tive os cuidados de Deus, que sempre me deu forças para não desistir. Nessa trajetória, tive como alicerce minha família: minha avó, Onildes Maia, que nunca deixou de acreditar em mim; minha tia, Adalcileia Maia, por todos os conselhos que me deu; e meus pais, Manoel Ivan e Aldileia Maia, que sempre me apoiaram ao longo dessa caminhada.

Aos amigos que fiz, Getulio Miranda, Antonio Augusto (Rock), Romeu Silva, Davi Macedo, Janderson Ataíde e Victor Lobato, que participaram dessa trajetória, onde o macarrão com sardinha e o pastelzinho do Rock salvaram muitos dias de estudo, sem contar as histórias que foram construídas nos “julsos da vida”. De alguma forma, o peso da caminhada ficou mais leve, porque vocês estavam lá para dividir comigo cada momento.

Também não poderia deixar de lembrar de todo o apoio e acolhimento que tive no campus, seja por parte dos vigias Lauro Carvalho e Derison Mark, seja por Diego Santana, que se tornou um grande amigo. Às secretárias Antônia Souza e Rosigleide Gomes, que, ao longo de um ano durante meu estágio na secretaria, sempre me aconselharam e tiveram paciência comigo.

Aos professores Jeziel Correa, que foi o primeiro a me dar uma oportunidade no campus; Anderson de Jesus, Mirelson Martins, Carlos Raposo, Lindomar Miranda e Luiz Gutemberg, que foi como um pai na orientação deste trabalho, agradeço profundamente.

Agradeço a cada um de vocês que participou dessa jornada. Hoje eu venci. Essa vitória não é somente minha, mas de todos vocês. Nós vencemos!

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o Método da Energia, uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento de soluções de uma Equação Diferencial Parcial (EDP). Através de conhecimentos básicos de cálculo, nomeadamente derivadas e integrais, citamos e deduzimos o método em questão. Além disso, realizamos duas aplicações do método: uma considerando um sistema de EDP que modela pequenas curvaturas em uma viga de Timoshenko, onde concluímos que o funcional de energia apresenta um decaimento polinomial; e a outra considerando um sistema de EDP que modela pequenas curvaturas em uma ponte suspensa, onde concluímos que o funcional de energia apresenta um decaimento exponencial.

Palavras-chave: Método da Energia, Equação Diferencial Parcial, viga de Timoshenko, ponte suspensa, decaimento polinomial, decaimento exponencial.

Abstract

In this work, we present the Energy Method, a powerful tool for analyzing the behavior of solutions to a Partial Differential Equation (PDE). Through simple knowledge of calculus, namely derivatives and integrals, we cite and deduce the method in question. Furthermore, we perform two applications of the method: one considering a PDE system that models small bends in a Timoshenko beam, where we conclude that the energy functional has a polynomial decay; and the other considering a PDE system that models small bends in a suspension bridge, where we conclude that the energy functional has an exponential decay.

Key-words: Energy Method, Partial Differential Equation, Timoshenko beam, suspension bridge, polynomial decay, exponential decay.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Derivadas	2
1.2 Integrais	7
1.3 Desigualdade Clássicas	10
2 Método da Energia	15
2.1 Método da Energia para decaimento polinomial	16
2.2 Método da Energia para decaimento exponencial	17
3 Aplicações	19
3.1 Decaimento polinomial para um sistema de Timoshenko	19
3.1.1 Funcional Energia	19
3.1.2 Lemas técnicos	22
3.1.3 Decaimento polinomial	32
3.2 Decaimento exponencial para um sistema de ponte suspensa	35
3.2.1 Funcional Energia	36
3.2.2 Lemas técnicos	39
3.2.3 Decaimento exponencial	45
Referências	50

Introdução

Na literatura, um dos pilares da matemática aplicada é constituído pelo estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDPs), fornecendo o arcabouço teórico para a descrição de fenômenos físicos que variam no espaço e no tempo, como a difusão de calor, a propagação de ondas, flexões de vigas e a dinâmica de fluidos. Dentre as muitas áreas desta teoria, a análise do comportamento de longo prazo das soluções é um dos objetivos principais, denominada análise assintótica.

Uma forma de estabelecer o comportamento de uma solução de EDP é conhecendo-a, no entanto, historicamente, a busca por soluções explícitas para tais equações mostrou-se muitas vezes quase impossível, considerando os métodos simplificados que existem. Diante dessa limitação, o desenvolvimento de métodos qualitativos tornou-se indispensável. Uma ferramenta que é muito utilizada para este fim, é o chamado Método da energia.

O método da energia utiliza ferramentas da análise funcional para investigar o comportamento global das soluções por meio de quantidades escalares conservadas ou dissipadas. A essência desta técnica reside na construção de um funcional, chamado funcional energia, que está diretamente relacionado com a solução da EDP. Ao estabelecer desigualdades diferenciais para esses funcionais, é possível extrair informações cruciais sobre a estabilidade do sistema. No contexto da análise assintótica, o método permite demonstrar taxas de decaimento (exponencial ou polinomial) para a energia total, garantindo que a solução do problema perturbado convirja para o estado de repouso conforme o tempo tende ao infinito. A literatura atual é cheia de trabalhos que usam o Método da Energia (ver [1–5])

Neste trabalho, temos como objetivo usar conhecimentos obtidos nas disciplinas de cálculos para compreender o funcionamento do Método da Energia, sem nos preocuparmos em que espaços funcionais as funções pertencem. Após a explicitação do método faremos duas aplicações, a saber, a primeira é em uma EDP que modela vibrações em vigas (ver [8]) e a outra é uma EDP que modela vibrações em uma ponte suspensa [9, 10]). Nas duas aplicações não estamos interessados na física do modelo e boa colocação, mas sim, na aplicação do Método da Energia para determinar o comportamento assintótico.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estamos interessados em fazer um resumo sobre derivadas e integrais de funções reais, citando e demonstrando algumas propriedades, para mais detalhes ver [6]. Isso será de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Derivadas

Inicialmente, faremos um resumo sobre limite de funções reais.

Definição 1.1. *Seja f uma função real definida em $A \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A . Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $x \in A$ e*

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Simbolicamente, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (1.2)$$

em caso afirmativo.

Por exemplo, Para toda constante $K \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x \rightarrow a} K = K. \quad (1.3)$$

De fato, pois dado $\varepsilon > 0$, podemos $\delta = 1$ e teremos que

$$|x - a| < 1 \implies |K - K| = 0 < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Como queríamos demonstrar.

As propriedades de limites são importantes, no entanto focaremos naquelas que serão necessárias para os nossos objetivos, entre elas, temos as seguintes:

Lema 1.1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Então, existem $\delta > 0$ e $K > 0$, tais que

$$|x - a| < \delta \implies |f(x)| < K.$$

Demonstração. Por definição, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < 1,$$

implicando que

$$|x - a| < \delta \implies L - 1 < f(x) < L + 1.$$

Tomando $K = \max\{|L - 1|, |L + 1|\}$ temos que

$$|x - a| < \delta \implies -K < f(x) < K \implies |f(x)| < K.$$

□

Lema 1.2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então,

i) **Limite da soma**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M; \quad (1.5)$$

ii) **Limite da produto**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M; \quad (1.6)$$

iii) **Conservação do sinal**

Caso $f(x) \leq g(x)$ para todo x próximo de a , temos que

$$L \leq M. \quad (1.7)$$

Demonstração. i) Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $x \in D_{f \cap g}$ e

$$|x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.8)$$

e

$$|x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.9)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que obtemos que

$$|x - a| < \delta \implies |x - a| < \delta_1 \text{ e } |x - a| < \delta_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |f(x) - L + g(x) - M| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $x \in D_{f \cap g}$ e

$$|x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad (1.10)$$

e

$$|x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|}, \quad (1.11)$$

onde $K > 0$ tal que $|g(x)| < K$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que obtemos que

$$|x - a| < \delta \implies |x - a| < \delta_1 \text{ e } |x - a| < \delta_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \implies |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - g(x)L + g(x)L - LM| \\ &\leq |f(x)g(x) - g(x)L| + |g(x)L - LM| \\ &= |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \\ &< K \frac{\varepsilon}{2K} + |L| \frac{\varepsilon}{2|L|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

iii) Vamos supor por contradição que $M < L$. Por hipótese, para $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que $x \in D_{f \cap g}$ e

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \frac{L - M}{2} \\ &\implies L - \frac{L - M}{2} < f(x) < L + \frac{L - M}{2} \\ &\implies \frac{L + M}{2} < f(x) < \frac{2L - M}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_2 &\implies |g(x) - M| < \frac{L - M}{2} \\ &\implies M - \frac{L - M}{2} < g(x) < M + \frac{L - M}{2} \\ &\implies \frac{3M - L}{2} < g(x) < \frac{L - M}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que obtemos que

$$|x - a| < \delta \implies |x - a| < \delta_1 \text{ e } |x - a| < \delta_2.$$

Assim,

$$|x - a| < \delta \implies g(x) < \frac{L - M}{2} < f(x).$$

Contradição, pois, por hipótese temos que $f(x) \leq g(x)$.

□

Agora, vamos para o conteúdo de derivadas.

Definição 1.2. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$. Dizemos f é uma derivável em a , e denotamos a derivada de f em a por $f'(a)$ ou $\frac{df(a)}{dx}$, quando o seguinte limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1.12)$$

existe. Caso f seja derivável em todo $x \in A$, dizemos simplesmente que f é derivável e

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (1.13)$$

Por exemplo, para $f(x) = K$, onde $K \in \mathbb{R}$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K - K}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (1.14)$$

E, para $f(x) = x$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \quad (1.15)$$

As propriedades de derivadas são importantes, no entanto focaremos naquelas que serão necessárias para os nossos objetivos, entre elas, temos as seguintes:

Lema 1.3. Se $f'(x)$ existe. Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x). \quad (1.16)$$

Demonstração. Usando a propriedade *ii)* do Lema 1.2 temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{x-a} \cdot (x-a) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-a} \lim_{h \rightarrow 0} (x-a) \\ &= f'(x) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, ando a propriedade *ii)* do Lema 1.2 temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x) + f(x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x).\end{aligned}$$

Como $f(x)$ é constante em relação h . Temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

□

Lema 1.4. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem. Então,

i) Derivada da soma

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x); \quad (1.17)$$

ii) Derivada da produto

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \quad (1.18)$$

Demonstração. Vamos demonstrar *i)*. Temos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Usando a propriedade *(i)* do Lema 1.2 temos que

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Agora, vamos demonstrar *ii*). Temos que

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}.
\end{aligned}$$

Usando as propriedades (i) e (ii) do Lema 1.2 temos que

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

□

1.2 Integrais

Definição 1.3. *Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e P uma partição do intervalo $[a, b]$ dada por $P = \{x_i \in [a, b]; 0 \leq i \leq n \text{ e } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Dizemos que f é integrável sob o intervalo $[a, b]$, denotado por $\int_a^b f(x)dx$, quando*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (1.19)$$

existe, onde $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

As propriedades de integrais são importantes, no entanto, novamente focaremos naquelas que serão necessárias para os nossos objetivos, entre elas, temos as seguintes.

Lema 1.5. *Se $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis no intervalo $[a, b]$. Então,*

i) Integral da soma

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; \quad (1.20)$$

ii) **Integral da multiplicação por um escalar**

$$\int_a^b K f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx, \quad \forall K \in \mathbb{R}; \quad (1.21)$$

iii) **Consevação do sinal**

Se $f(x) \leq g(x)$, temos que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (1.22)$$

iv) **Desigualdade entre módulos**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.23)$$

v) Se $f(x) > 0$, para todo intervalo $[c, d] \subset [a, b]$, tem-se que

$$\int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx. \quad (1.24)$$

Demonstração. Vamos demonstrar i). Temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) + g(c_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Agora, vamos demonstrar ii). Temos que

$$\int_a^b K f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n K f(c_i) \Delta x_i = K \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = K \int_a^b f(x) dx.$$

Agora, vamos demonstrar iii). Temos que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx.$$

Agora, vamos demonstrar iv). Temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \right| \\ &\leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \right| \\ &\leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(c_i)| \Delta x_i \\ &= \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Por fim, vamos demonstrar (v). Sejam

$$P = \{y_i \in [a, b]; 0 \leq i \leq n \text{ e } c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d\}$$

uma partição de $[c, d]$ e

$$Q = \{x_i \in [a, b]; \text{ e } a = x_0, x_{n+1} = b, x_{i+1} = y_i, 0 \leq i \leq n-1\}$$

uma partição de $[a, b]$. Temos que

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta y_i$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Desde que $P \subset Q$ segue que $\Delta y_i \leq \Delta x_i$. Portanto, como $f(x) > 0$ obtemos

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta y_i \leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx.$$

□

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja f uma função integral no intervalo $[a, b]$. Se F é tal que de $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (1.25)$$

Demonstração. Como a demonstração deste Teorema é um pouco mais complexa, deixamos ao leitor a seguinte referência [6].

□

Lema 1.6. *Se f e g são funções integráveis e deriváveis no intervalo $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (1.26)$$

Demonstração. Pela propriedade ii) temos que

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (1.27)$$

Resultando que

$$f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]' - f(x)g'(x). \quad (1.28)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)g(x)dx &= \int_a^b \{[f(x)g(x)]' - f(x)g'(x)\}dx \\
&= \int_a^b [f(x)g(x)]'dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\
&= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

□

1.3 Desigualdade Clássicas

- **Desigualdade de Young**

Sejam a e b dois reais não negativos. Temos que

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

implicando que

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

Logo,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Alem disso, para todo $\epsilon > 0$ temos que

$$ab = (\sqrt{2\epsilon}a) \left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}b \right) \leq \frac{(\sqrt{2\epsilon}a)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}b \right)^2}{2} = \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

- **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**

Sejam f e g funções tais que $|f|^2$ e $|g|^2$ são funções integráveis em $[a, b]$. Supondo f e g não nulas, denotamos por

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} > 0 \text{ e } B(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} > 0, \quad (1.29)$$

resultando que

$$\int_a^b A^2(x) dx = \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{\int_a^b |f(x)|^2 dx} dx = \frac{1}{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \int_a^b |f(x)|^2 dx = 1,$$

e

$$\int_a^b B^2(x) dx = \int_a^b \frac{|g(x)|^2}{\int_a^b |g(x)|^2 dx} dx = \frac{1}{\int_a^b |g(x)|^2 dx} \int_a^b |g(x)|^2 dx = 1.$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$A(x)B(x) \leq \frac{1}{2}A^2(x) + \frac{1}{2}B^2(x)$$

e pelas propriedades (i), (ii) e (iii) do Lema (1.5), temos

$$\int_a^b A(x)B(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b A^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b B^2(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Assim,

$$\int_a^b \frac{|f(x)||g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}} dx \leq 1,$$

implicando que

$$\frac{1}{\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}} \int_a^b |f(x)||g(x)| dx \leq 1,$$

portanto,

$$\int_a^b |f(x)||g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

Para f e g nulas, a mesma desigualdade segue trivialmente.

• Desigualdade de Poincaré

Seja f uma função derivável tal que, $|f|^2$ e $|f'|^2$ sejam integráveis em $[a, b]$. Supondo $f(a) = 0$, pelo Teorema Fundamental Cálculo, temos que

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(s) ds. \quad (1.31)$$

Usando as propriedades de integral, obtemos

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(s) ds \right| \leq \int_a^x |f'(s)| ds.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|f(x)| \leq \int_a^x |f'(s)| ds \leq \left(\int_a^x 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x |f'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

implicando que

$$|f(x)|^2 \leq \int_a^x |f'(s)| ds \leq \left(\int_a^x 1 ds \right) \left(\int_a^x |f'(s)|^2 ds \right).$$

Usando novamente o Teorema Fundamental Cálculo, obtemos

$$\int_a^x 1 ds = x - a$$

e, pela propriedade de integral, obtemos

$$\int_a^x |f'(s)|^2 ds \leq \int_a^b |f'(s)|^2 ds = \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Resultando que

$$|f(x)|^2 \leq (x - a) \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Portanto, usando a propriedade de integral e Teorema Fundamental Cálculo, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (x - a) \left(\int_a^b |f'(x)|^2 dx \right) dx \\ &= \int_a^b (x - a) dx \left(\int_a^b |f'(x)|^2 dx \right) \\ &= \frac{b - a}{2} \left(\int_a^b |f'(x)|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Agora, supondo $\int_a^b f(x) dx = 0$, pelo Teorema Fundamental Cálculo e as propriedades de integral, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(y) dy \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dy - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(y) dy \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b (f(x) - f(y)) dy \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_y^x f(s) ds dy. \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_y^x f(s) ds dy \right| \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_y^x |f(s)| ds dy. \quad (1.32)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\int_y^x |f(s)| ds \leq \left(\int_y^x 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^x |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando novamente o Teorema Fundamental Cálculo e como $[y, x] \subset [a, b]$, obtemos

$$\int_y^x 1 ds \leq \int_a^b 1 ds = b - a$$

e, pela propriedade de integral, obtemos

$$\int_y^x |f(s)|^2 ds \leq \int_a^b |f(s)|^2 ds = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Resultando que

$$\int_y^x |f(s)| ds \leq (b - a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

Daí, substituindo (1.33) em (1.32), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b (b - a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{(b - a)^{\frac{1}{2}}} \int_a^b \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{(b - a)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_a^b 1 dy \\ &= (b - a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(x)|^2 \leq (b - a) \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Portanto, usando as propriedades de integral e Teorema Fundamental Cálculo, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (b - a) \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) dx \\ &= \int_a^b (b - a) dx \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \\ &= (b - a)^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\lambda_1 \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

sempre que $f(a) = 0$ ou $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Lema 1.7. *Se f e g são funções que estão nas condições das desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré. Então,*

$$\frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx \leq \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx. \quad (1.34)$$

Demonstração. Pela propriedade de integral, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx &\geq \int_0^l (|\varphi_x| - |\psi|)^2 dx \\ &= \int_0^l \{|\varphi_x|^2 + |\psi|^2 - 2|\varphi_x||\psi|\} dx \\ &= \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx - 2 \int_0^l |\varphi_x||\psi| dx. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Usando as desigualdade de Cauchy-Schwarz e de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^l |\varphi_x||\psi| dx &\leq \left(\int_0^l |\varphi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Substituindo a equação (1.36) em (1.35) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx &\geq \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx - 2 \left(\frac{1}{4} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx \right) \\ &= \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx - 2 \int_0^l |\psi|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx - \int_0^l |\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Resultando que

$$\frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx \leq \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \int_0^l |\psi|^2 dx,$$

usando a desigualdade de Poincaré, obtemos o resultado desejado. □

Capítulo 2

Método da Energia

Neste capítulo, vamos estabelecer o Método da Energia. Este é uma ferramenta “poderosa” para analisar o comportamento assintótico de um funcional não negativo $E(t)$ que evolue na grandeza do tempo t .

Definição 2.1. *Seja $E(t)$, com $t \geq 0$, um funcional não negativo. Dizemos que $E(t)$ é dissipativo quando, para dados t_1 e t_2 positivos tais que $t_1 < t_2$ tem-se que*

$$E(t_2) \leq E(t_1). \quad (2.1)$$

Definição 2.2. *Seja $E(t)$ um funcional dissipativo. Dizemos que $E(t)$ decai Polinomialmente quando, existem constantes positivas M e α tais que*

$$E(t) \leq Mt^{-\alpha}, \quad \forall t > 0, \quad (2.2)$$

onde α é a taxa de decaimento polinomial.

Definição 2.3. *Seja $E(t)$ um funcional dissipativo. Dizemos que $E(t)$ decai exponencialmente quando, existem constantes positivas M e ω tais que*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall t > 0, \quad (2.3)$$

onde ω é a taxa de decaimento exponencial.

O Método da Energia considera dois funcionais não negativos $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$, respectivamente, chamados de Funcional Energia e Funcional de Lyapunov. Neste método estabelecemos condições que relacionam os funcionais $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$ para que tenhamos decaimento polinomial ou decaimento exponencial do funcional $E(t)$.

2.1 Método da Energia para decaimento polinomial

O Método da energia para estabelecer um comportamento assintótico do tipo polinomial com taxa 1 está sob a forma do seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Sejam os funcionais não negativos $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$. Se $E'(t) \leq 0$ e existe uma constante positiva β tal que*

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0, \quad (2.4)$$

então, tem-se que

$$E(t) \leq Mt^{-1}, \quad \forall t > 0, \quad (2.5)$$

onde $M = \frac{\mathcal{L}(0)}{\beta}$.

Demonstração. Pela propriedade *iii*) do Lema (1.5), podemos integrar a desigualdade (2.4) no intervalo $[0, t]$ conservando a relação de ordem, ou seja,

$$\int_0^t \mathcal{L}'(s) ds \leq -\beta \int_0^t E(s) ds.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) \leq -\beta \int_0^t E(s) ds,$$

resultando que

$$\mathcal{L}(t) + \beta \int_0^t E(s) ds \leq \mathcal{L}(0).$$

Por hipótese, como $E(t) > 0$, novamente, usando a propriedade *iii*) do Lema (1.5), temos que

$$\int_0^t E(s) ds \geq 0.$$

Além disso, desde que $\mathcal{L}(t) \geq 0$, resulta que

$$\beta \int_0^t E(s) ds \leq \mathcal{L}(0),$$

logo

$$\int_0^t E(s) ds \leq M, \quad (2.6)$$

onde $M = \frac{\mathcal{L}(0)}{\beta}$.

Outrossim, pela propriedade *ii*) do Lema (1.4), temos que

$$(tE(t))' = [t]'E(t) + tE'(t) = E(t) + tE'(t).$$

Por hipótese, temos que

$$E'(t) \leq 0,$$

implicando que

$$(tE(t))' \leq E(t).$$

Integrando a desigualdade acima sob o intervalo $[0, t]$, obtemos

$$\int_0^t (sE(s))' ds \leq \int_0^t E(s) ds,$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s) ds. \quad (2.7)$$

Por fim, das desigualdades (2.6) e (2.7) chegamos à

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s) ds \leq M.$$

Portanto

$$E(t) \leq Mt^{-1}, \quad \forall t > 0.$$

Dessa forma, finalizamos a demonstração deste teorema.

□

2.2 Método da Energia para decaimento exponencial

O Método da energia para estabelecer um comportamento assintótico do tipo exponencial está sob a forma do seguinte Teorema:

Teorema 2.2. *Sejam os funcionais não negativos $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$. Se $E'(t) \leq 0$ e existem constantes positivas c_1 , c_2 e β tais que*

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t) \quad (2.8)$$

e

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0. \quad (2.9)$$

Então, tem-se que

$$E(t) \leq M e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0, \quad (2.10)$$

onde $M = \frac{\mathcal{L}(0)}{c_1}$ e $\omega = \frac{\beta}{c_2}$.

Demonstração. Substituindo a segunda desigualdade de (2.8) em (2.9), obtemos

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\omega \mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0,$$

onde $\omega = \frac{\beta}{c_2}$. Isto é,

$$\mathcal{L}'(t) + \omega \mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.11)$$

Multiplicando (2.11) pelo fator integrante $e^{\omega t}$ temos que

$$e^{\omega t} \mathcal{L}'(t) + \omega e^{\omega t} \mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \forall t > 0,$$

De onde resulta, pela propriedade *ii*) do Lema (1.4), que

$$(e^{\omega t} \mathcal{L}(t))' \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.12)$$

Integrando a desigualdade acima sob o intervalo $[0, t]$ temos

$$\int_0^t (e^{\omega s} \mathcal{L}(s))' ds \leq 0,$$

implicando pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$e^{\omega t} \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) \leq 0,$$

de onde resulta que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\omega t}. \quad (2.13)$$

Agora, substituindo a primeira desigualdade de (2.8) em (2.13), obtemos

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\omega t}, \quad (2.14)$$

resultando que

$$E(t) \leq M e^{-\omega t}, \quad (2.15)$$

onde $M = \frac{\mathcal{L}(0)}{c_1}$. Como queríamos demonstrar.

□

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Decaimento polinomial para um sistema de Timoshenko

Neste seção, consideraremos o sistema de EDP's dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu\psi_{txx} = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.2)$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ e $\rho_1, \rho_2, \kappa, b, \mu$ são constantes positivas. Além disso, consideramos as seguintes condições de contorno

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = \psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

e as seguintes condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (3.4)$$

Para este modelo, nosso objetivo é realizar apenas uma análise de comportamento assintótico das soluções, sem a preocupação em mostrar a boa colocação. No entanto, vamos supor que a solução existe e tem regularidade suficiente para que possamos usar as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, isto é, a função φ tem média nula, ou seja

$$\int_0^l \varphi \, dx = 0. \quad (3.5)$$

3.1.1 Funcional Energia

Inicialmente, vamos determinar o Funcional Energia $E(t)$ associado ao sistema (3.1)-(3.4). Para este propósito, começamos multiplicando a equação (3.1) por φ_t e integrando na variável x em $[0, l]$,

obtemos

$$\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] \varphi_t dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\kappa(\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^l = \kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \varphi_t(l, t) - \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \varphi_t(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx = 0. \quad (3.6)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por ψ_t e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu \psi_{txx}] \psi_t dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx - \mu \int_0^l \psi_{txx} \psi_t dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \psi_x \psi_t \Big|_0^l + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx - \mu \psi_{tx} \psi_t \Big|_0^l + \mu \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$b \psi_x \psi_t \Big|_0^l = b \psi_x(l, t) \psi_t(l, t) - b \psi_x(0, t) \psi_t(0, t) = 0$$

e,

$$b \psi_{tx} \psi_t \Big|_0^l = b \psi_{tx}(l, t) \psi_t(l, t) - b \psi_{tx}(0, t) \psi_t(0, t) = 0$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx = 0. \quad (3.7)$$

Somando as equações (3.6) e (3.7), chegamos à

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)(\varphi_x + \psi)_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \mu \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx = 0.$$

Usando a Propriedade (ii) do Lema 1.4, temos

$$\frac{d}{dt} (|\varphi_t|^2) = \frac{d}{dt} (\varphi_t \varphi_t) = \varphi_{tt} \varphi_t + \varphi_t \varphi_{tt} = 2\varphi_{tt} \varphi_t, \quad (3.8)$$

implicando que

$$\varphi_{tt} \varphi_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\varphi_t|^2). \quad (3.9)$$

Análogamente, temos que

$$\psi_{tt} \psi_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_t|^2), \quad (3.10)$$

$$(\varphi_x + \psi)(\varphi_x + \psi)_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\varphi_x + \psi|^2) \quad (3.11)$$

e

$$\psi_x \psi_{tx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_x|^2). \quad (3.12)$$

Resultando que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) + \mu \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx = 0.$$

Portanto, definimos a energia total associada ao sistema (3.1)–(3.4) como

$$E(t) := \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

E, concluimos que a energia total satisfaz a lei de dissipação dada por

$$E'(t) = -\mu \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.13)$$

Sejam t_1 e t_2 , tais que $0 \leq t_1 < t_2$. Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo (t_1, t_2) , para todo $t \geq 0$ obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} E'(s) ds \leq \int_{t_1}^{t_2} 0 ds, \quad t \geq 0, \quad (3.14)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, implica que

$$E(t_2) - E(t_1) \leq 0, \quad t_2 \geq t_1, \quad (3.15)$$

e chegamos à

$$E(t_2) \leq E(t_1), \quad t_2 \geq t_1, \quad (3.16)$$

isto é, a energia total tende a se estabilizar com o passar do tempo t . Dessa forma, é importante analisar qual o tipo de estabilidade que está acontecendo.

3.1.2 Lemas técnicos

Nesta subseção vamos construir alguns funcionais, que juntamente com funcional energia, nos ajudará a defini o funcional de Lyapunov. Inicialmente, definimos o funcional

$$\mathcal{F}(t) := \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_{tx}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_{xx}|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^l |(\varphi_x + \psi)_x|^2 dx \geq 0. \quad (3.17)$$

Lema 3.1. *O funcional $\mathcal{F}(t)$ satisfaz a seguinte igualdade*

$$\mathcal{F}'(t) = -\mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx. \quad (3.18)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por $-\varphi_{txx}$ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l -[\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] \varphi_{txx} dx = 0,$$

de onde resulta que

$$-\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_{txx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_{txx} dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$-\rho_1 \varphi_{tt} \varphi_{tx} \Big|_0^l + \rho_1 \int_0^l \varphi_{ttx} \varphi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_{txx} dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-\rho_1 \varphi_{tt} \varphi_{tx} \Big|_0^l = -\rho_1 \varphi_{tt}(l, t) \varphi_{tx}(l, t) + \rho_1 \varphi_{tt}(0, t) \varphi_{tx}(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{ttx} \varphi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_{txx} dx = 0. \quad (3.19)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por $-\psi_{txx}$ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$-\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu \psi_{txx}] \psi_{txx} dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$-\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_{txx} dx + b \int_0^l \psi_{xx} \psi_{txx} dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_{txx} dx + \mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$-\rho_2 \psi_{tt} \psi_{tx} \Big|_0^l + \rho_2 \int_0^l \psi_{ttx} \psi_{tx} dx + b \int_0^l \psi_{xx} \psi_{txx} dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \psi_{tx} \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \psi_{tx} dx + \mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-\rho_2 \psi_{tt} \psi_{tx} \Big|_0^l = -\rho_2 \psi_{tt}(l, t) \psi_{tx}(l, t) + \rho_2 \psi_{tt}(0, t) \psi_{tx}(0, t) = 0$$

e,

$$-\kappa(\varphi_x + \psi) \psi_{tx} \Big|_0^l = -\kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \psi_{tx}(l, t) + \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \psi_{tx}(0, t) = 0$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{ttx} \psi_{tx} dx + b \int_0^l \psi_{xx} \psi_{txx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \psi_{tx} dx + \mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx = 0 = 0. \quad (3.20)$$

Somando as equações (3.19) e (3.20), chegamos à

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^l \varphi_{ttx} \varphi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{ttx} \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x (\varphi_x + \psi)_{tx} dx \\ + b \int_0^l \psi_{xx} \psi_{txx} dx + \mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Usando a Propriedade (ii) do Lema 1.4, temos

$$\frac{d}{dt} (|\varphi_{tx}|^2) = \frac{d}{dt} (\varphi_{tx} \varphi_{tx}) = \varphi_{ttx} \varphi_{tx} + \varphi_{tx} \varphi_{ttx} = 2\varphi_{ttx} \varphi_{tx}, \quad (3.21)$$

implicando que

$$\varphi_{ttx} \varphi_{tx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\varphi_{tx}|^2). \quad (3.22)$$

Análogamente, temos que

$$\psi_{ttx} \psi_{tx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_{tx}|^2), \quad (3.23)$$

$$(\varphi_x + \psi)_x (\varphi_x + \psi)_{tx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|(\varphi_x + \psi)_x|^2) \quad (3.24)$$

e

$$\psi_{xx} \psi_{txx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_{xx}|^2). \quad (3.25)$$

Resultando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \int_0^l |\varphi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \kappa \int_0^l |(\varphi_x + \psi)_x|^2 dx + b \int_0^l |\psi_{xx}|^2 dx \right) \\ + \mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição de $\mathcal{F}(t)$ concluímos que

$$\mathcal{F}'(t) = -\mu \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.26)$$

Como queríamos demonstrar. □

Agora, definimos o seguinte funcional

$$\mathcal{G}(t) = -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx - \rho_2 \int_0^l \psi_t \psi dx - \frac{\mu}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx. \quad (3.27)$$

Lema 3.2. *A seguinte igualdade é válida*

$$\mathcal{G}'(t) = -\rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l |(\varphi_x + \psi)_x|^2 dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx. \quad (3.28)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por φ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] \varphi dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \varphi \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-\kappa(\varphi_x + \psi) \varphi \Big|_0^l = -\kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \varphi(l, t) + \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \varphi(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx = 0. \quad (3.29)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por ψ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu \psi_{txx}] \psi \, dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx - \mu \int_0^l \psi_{txx} \psi \, dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx - b \psi_x \psi \Big|_0^l + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx - \mu \psi_{tx} \psi \Big|_0^l + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-b \psi_x \psi \Big|_0^l = -b \psi_x(l, t) \psi(l, t) + b \psi_x(0, t) \psi(0, t) = 0$$

e

$$-\mu \psi_{tx} \psi \Big|_0^l = -\mu \psi_{tx}(l, t) \psi(l, t) + \mu \psi_{tx}(0, t) \psi(0, t) = 0$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0. \quad (3.30)$$

Adicionando as equações (3.29) e (3.30), obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi \, dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0.$$

Pela propriedade (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t \varphi) = \frac{d}{dt} (\varphi_{tt} \varphi) + \varphi_t \varphi_t = \frac{d}{dt} (\varphi_{tt} \varphi) + |\varphi_t|^2, \quad (3.31)$$

implicando que

$$\varphi_{tt} \varphi = \frac{d}{dt} (\varphi_t \varphi) - |\varphi_t|^2.$$

Analogamente, temos que

$$\psi_{tt} \psi = \frac{d}{dt} (\psi_t \psi) - |\psi_t|^2,$$

e

$$\psi_{tx} \psi_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_x|^2).$$

Pela propriedade de derivada e da definição do funcional $\mathcal{G}(t)$, obtemos

$$\mathcal{G}'(t) + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\mathcal{G}'(t) = -\rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx.$$

Como queríamos demonstrar. □

Agora, definimos o seguinte funcional

$$\mathcal{H}(t) = -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx + \frac{\mu}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t \psi dx. \quad (3.32)$$

Lema 3.3. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva C_ϵ , tal que

$$\mathcal{H}'(t) \leq -b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + C_\epsilon \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx.$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por $-\int_0^x \psi(s, t) ds$ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$-\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx = 0,$$

de onde resulta que

$$-\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$-\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx + \kappa(\varphi_x + \psi) \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) \Big|_0^l - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi_x + \psi) \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) \Big|_0^l &= \kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right)(l, t) \\ &\quad - \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right)(0, t) = 0, \end{aligned}$$

implicando que

$$-\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0. \quad (3.33)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por ψ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu \psi_{txx}] \psi \, dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx - \mu \int_0^l \psi_{txx} \psi \, dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx - b \psi_x \psi \Big|_0^l + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx - \mu \psi_{tx} \psi \Big|_0^l + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-b \psi_x \psi \Big|_0^l = -b \psi_x(l, t) \psi(l, t) + b \psi_x(0, t) \psi(0, t) = 0$$

e

$$-\mu \psi_{tx} \psi \Big|_0^l = -\mu \psi_{tx}(l, t) \psi(l, t) + \mu \psi_{tx}(0, t) \psi(0, t) = 0$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi \, dx + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0. \quad (3.34)$$

Adicionando as equações (3.33) e (3.34), obtemos

$$-\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \left(\int_0^x \psi(s, t) \, ds \right) \, dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \mu \int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = 0.$$

Pela propriedade (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\int_0^l \varphi_{tt} \left(\int_0^x \psi(s, t) \, ds \right) \, dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi(s, t) \, ds \right) \, dx \right) - \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(s, t) \, ds \right) \, dx,$$

$$\int_0^l \psi_{tt} \psi \, dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \psi_t \psi \, dx \right) - \int_0^l |\psi_t|^2 \, dx,$$

e

$$\int_0^l \psi_{tx} \psi_x \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l |\psi_x|^2 \, dx \right).$$

Pela definição do funcional $\mathcal{H}(t)$, obtemos

$$\mathcal{H}'(t) + \rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(s, t) \, ds \right) \, dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\mathcal{H}'(t) = -b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(s, t) ds \right) dx.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(s, t) ds \right) dx &\leq \int_0^l |\varphi_t| \left(\rho_1 \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right| \right) dx \\ &\leq \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l \left(\rho_1 \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(s, t) ds \right) dx &\leq \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l \left(\rho_1 \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right| \right)^2 dx \\ &\leq \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{4\epsilon} \int_0^l \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right|^2 dx. \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Resultando que

$$\mathcal{H}'(t) \leq -b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{4\epsilon} \int_0^l \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right|^2 dx.$$

E, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\int_0^l |\psi_t|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx. \quad (3.35)$$

e

$$\int_0^l \left| \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx. \quad (3.36)$$

Portanto,

$$\mathcal{H}'(t) \leq -b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + C_\epsilon \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx,$$

onde $C_\epsilon = \frac{\rho_2}{\lambda_1} + \frac{\rho_1^2}{4\lambda_1^2\epsilon}$ Como queríamos demonstrar.

□

Por fim, definimos o seguinte funcional

$$\mathcal{J}(t) = \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_t \psi_x dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx. \quad (3.37)$$

Lema 3.4. Para todo $\epsilon > 0$, existe constantes positivas C'_ϵ e C''_ϵ , tal que

$$\mathcal{J}'(t) \leq -(\kappa - \epsilon) \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + C'_\epsilon \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + C''_\epsilon \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx.$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por $\frac{b}{\kappa}\psi_x$ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\frac{b}{\kappa} \int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] \psi_x dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_{tt} \psi_x dx - b \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \psi_x dx = 0. \quad (3.38)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por $\varphi_x + \psi$ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \mu\psi_{txx}](\varphi_x + \psi) dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx - b \int_0^l \psi_{xx}(\varphi_x + \psi) dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^l \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx - b\psi_x(\varphi_x + \psi) \Big|_0^l + b \int_0^l \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx \\ + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0. \end{aligned}$$

Pela condição de contorno, temos que

$$-b\psi_x(\varphi_x + \psi) \Big|_0^l = -b\psi_x(l, t)(\varphi_x + \psi)(l, t) + b\psi_x(0, t)(\varphi_x + \psi)(0, t) = 0.$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx + b \int_0^l \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0. \quad (3.39)$$

Adicionando as equações (3.38) e (3.39), obtemos

$$\frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_{tt} \psi_x dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0.$$

Pela propriedade (ii) do Lema 1.4, temos que

$$\int_0^l \varphi_{tt} \psi_x dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \varphi_t \psi_x dx \right) - \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx,$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^l \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \psi_t(\varphi_x + \psi) dx \right) - \int_0^l \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \psi_t(\varphi_x + \psi) dx \right) - \int_0^l \psi_t \varphi_{tx} dx - \int_0^l |\psi_t|^2 dx.\end{aligned}$$

Pela propriedade de derivada e da definição do funcional $\mathcal{J}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(t) - \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx - \rho_2 \int_0^l \psi_t \varphi_{tx} dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0,\end{aligned}$$

aplicando a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(t) - \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx - \rho_2 \psi_t \varphi_t \Big|_0^l + \rho_2 \int_0^l \psi_{tx} \varphi_t dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0.\end{aligned}$$

Pela condição de contorno, obtemos

$$-\rho_2 \psi_t \varphi_t \Big|_0^l = -\rho_2 \psi_t(l, t) \varphi_t(l, t) + \rho_2 \psi_t(0, t) \varphi_t(0, t) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(t) + \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ - \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx = 0,\end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(t) &= -\kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ &\quad + \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}- \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx &\leq \int_0^l |\varphi_t| \left(\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) |\psi_{tx}| \right) dx \\ &\leq \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l \left(\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) |\psi_{tx}| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx &\leq \int_0^l (\mu |\psi_{txx}|) |\varphi_x + \psi| dx \\ &\leq \left(\int_0^l (\mu |\psi_{txx}|)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} - \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^l \varphi_t \psi_{tx} dx &\leq \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l \left(\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) |\psi_{tx}| \right)^2 dx \\ &\leq \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right)^2 \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu \int_0^l \psi_{txx}(\varphi_x + \psi) dx &\leq \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l (\mu |\psi_{txx}|)^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &= \frac{\mu^2}{4\epsilon} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Resultando que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(t) &= -\kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right)^2 \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{\mu^2}{4\epsilon} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &= -(\kappa - \epsilon) \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right)^2 \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{\mu^2}{4\epsilon} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(t) &= -(\kappa - \epsilon) \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right)^2 \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_2}{\lambda_1} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + \frac{\mu^2}{4\epsilon} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{J}'(t) \leq -(\kappa - \epsilon) \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + C'_\epsilon \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx + C''_\epsilon \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx,$$

onde $C'_\epsilon = \frac{1}{4\epsilon} \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right)^2 + \frac{\rho_2}{\lambda_1}$ e $C''_\epsilon = \frac{\mu^2}{4\epsilon}$. Como queríamos demonstrar.

□

3.1.3 Decaimento polinomial

Nesta subseção vamos mostrar que o funcional $E(t)$ decai polinomialmente. Este resultado está sob a forma do seguinte Teorema

Teorema 3.1. *Existem constantes positivas M tal que*

$$E(t) \leq Mt^{-1}, \quad \forall t > 0, \quad (3.40)$$

Demonstração. Para este propósito, vamos construir o funcional Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ e mostrar que este está nas condições do Teorema 2.2.

Definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ da seguinte forma

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) + N_3 \mathcal{H}(t) + N_4 \mathcal{J}(t), \quad (3.41)$$

onde $N_i, i = 1, 2, 3, 4$, são constantes positivas. Inicialmente, fazendo

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{G}(t) + N_3 \mathcal{H}(t) + N_4 \mathcal{J}(t).$$

Para $N_3 > 1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &= -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx - \rho_2 \int_0^l \psi_t \psi dx - \frac{\mu}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx - N_3 \rho_1 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx \\ &\quad + N_3 \left(\frac{\mu}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t \psi dx \right) + N_4 \left(\frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_t \psi_x dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \right) \\ &= -\rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx + \rho_2 (N_3 - 1) \int_0^l \psi_t \psi dx - \rho_1 N_3 \int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx \\ &\quad + N_4 \left(\frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^l \varphi_t \psi_x dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Young, a desigualdade de Poincaré e o Lema 1.7, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi_t \varphi dx &\leq \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \psi_t \psi dx &\leq \left(\int_0^l |\psi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\psi|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi_t \left(\int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx &\leq \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l \left| \int_0^x \psi(s, t) ds \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left| \int_0^x \psi(s, t) ds \right|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1^2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\int_0^l \varphi_t \psi_x dx \leq \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\psi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx \tag{3.46}$$

e

$$\int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \leq \left(\int_0^l |\psi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx. \tag{3.47}$$

Daí, (3.42) fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\geq -\rho_1 \left(\frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) \\
&\quad -\rho_2 (N_3 - 1) \left(\frac{1}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) - \rho_1 N_3 \left(\frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1^2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) \\
&\quad -N_4 \frac{b\rho_1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) - N_4 \rho_2 \left(\frac{1}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \right) \\
&\geq -\left(\frac{\rho_1}{2} (N_3 + 1) + N_4 \frac{b\rho_1}{2\kappa} \right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \left(\frac{\rho_1}{\lambda_1} + \frac{N_4 \rho_2}{2} \right) \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad -\left(\frac{\rho_1}{\lambda_1^2} + \frac{\rho_2 (N_3 - 1)}{2\lambda_1} + \frac{\rho_1 N_3}{2\lambda_1^2} + N_4 \frac{b\rho_1}{2\kappa} \right) \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} (N_3 - 1 + N_4) \int_0^l |\psi_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pela definição do funcional energia $E(t)$ e tomando

$$N = \max \left\{ \frac{2}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{2} (N_3 + 1) + N_4 \frac{b\rho_1}{2\kappa} \right), \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\rho_1}{\lambda_1} + \frac{N_4 \rho_2}{2} \right), \right. \tag{3.48}$$

$$\left. N_3 - 1 + N_4, \frac{2}{b} \left(\frac{\rho_1}{\lambda_1^2} + \frac{\rho_2 (N_3 - 1)}{2\lambda_1} + \frac{\rho_1 N_3}{2\lambda_1^2} + N_4 \frac{b\rho_1}{2\kappa} \right) \right\}, \tag{3.49}$$

obtemos que

$$\mathcal{M} \geq -NE(t). \tag{3.50}$$

Portanto, para $N_1 > N$, temos que

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}(t) + \mathcal{M}(t) \geq (N_1 - N) E(t) \geq 0. \tag{3.51}$$

Agora, vamos mostrar que existe uma constante positiva β tal que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.52)$$

Derivando o funcional de Lyapunov e recordando a lei de dissipação de $E(t)$ dada em (3.13) e os Lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq N_1 E'(t) + N_2 \mathcal{F}'(t) + \mathcal{G}'(t) + N_3 \mathcal{H}'(t) + N_4 \mathcal{J}'(t) \\ &\leq -\{\rho_1 - \epsilon(N_3 + N_4)\} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ &\quad - b(N_3 - 1) \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \{N_4(\kappa - \epsilon) - \kappa\} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \{N_1\mu - N_3 C_\epsilon - N_4 C'_\epsilon\} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx - \{N_2\mu - N_4 C''_\epsilon\} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\epsilon = \min \left\{ \frac{\rho_1}{2(N_3 + N_4)}, \frac{\kappa}{2} \right\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - b(N_3 - 1) \int_0^l |\psi_x|^2 dx \\ &\quad - \kappa \left\{ \frac{N_4}{2} - 1 \right\} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \{N_1\mu - N_3 C_\epsilon - N_4 C'_\epsilon\} \int_0^l |\psi_{tx}|^2 dx \\ &\quad - \{N_2\mu - N_4 C''_\epsilon\} \int_0^l |\psi_{txx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Neste ponto, escolheremos N_1, N_2, N_3 e N_4 suficientemente grande. Tomando $N_3 = 2$, obtemos

$$N_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Tomando $N_4 = 4$, obtemos

$$\frac{N_4}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1.$$

Tomando $N_1\mu = N_3 C_\epsilon + N_4 C'_\epsilon$, obtemos

$$N_1\mu - N_3 C_\epsilon - N_4 C'_\epsilon = 0.$$

E, tomando $N_2\mu = N_4 C''_\epsilon$, obtemos

$$N_2\mu - N_4 C''_\epsilon = 0.$$

Resultando que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

Assim,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

Pela definição do Funcional Energia, chegamos à

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.53)$$

onde $\beta = 1$ é uma constante positiva.

Portanto, o método da energia garante o decaimento polinomial do funcional energia $E(t)$.

□

3.2 Decaimento exponencial para um sistema de ponte suspensa

Neste seção, consideraremos o sistema de EDP's dado por

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = 0, \quad \text{em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.54)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_1 \varphi_t = 0, \quad \text{em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.55)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_2 \psi_t = 0, \quad \text{em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.56)$$

$$\theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{tx} = 0, \quad \text{em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.57)$$

onde $u = u(x, t)$, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$, $\theta = \theta(x, t)$ e $\alpha, \lambda, \gamma, \rho_1, \rho_2, \kappa, b, \mu_1, \mu_2, \delta$ são constantes positivas. Além disso, consideramos as seguintes condições de contorno

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = \varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = \psi(0, t) = \psi(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.58)$$

e as seguintes condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x); \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l), \quad (3.59)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, l). \quad (3.60)$$

Para este modelo, nosso objetivo é realizar apenas uma análise de comportamento assintótico das soluções, sem a preocupação em mostrar a boa colocação. No entanto, vamos supor que a solução existe e tem regularidade suficiente para que possamos usar as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, isto é, as funções u e φ tem média nula, ou seja

$$\int_0^l u \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^l \varphi \, dx = 0. \quad (3.61)$$

3.2.1 Funcional Energia

Inicialmente, vamos determinar o Funcional Energia $E(t)$ associado ao sistema (3.54)-(3.60). Para este propósito, começamos multiplicando a equação (3.54) por u_t e integramos na variável x em $[0, l]$, resultando em

$$\int_0^l [u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x] u_t dx = 0,$$

onde pela linearidade da integral, obtemos

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx - \alpha \int_0^l u_{xx} u_t dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx + \gamma \int_0^l \theta_x u_t dx = 0.$$

Aplicando a integração por partes, chegamos à

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx - \alpha u_x u_t \Big|_0^l + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx + \gamma \theta u_t \Big|_0^l - \gamma \int_0^l \theta u_{tx} dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\alpha u_x u_t \Big|_0^l = \alpha u_x(l, t) u_t(l, t) - \alpha u_x(0, t) u_t(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx - \gamma \int_0^l \theta u_{tx} dx = 0. \quad (3.62)$$

Agora, multiplicando a equação (3.55) por φ_t e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_1 \varphi_t] \varphi_t dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx + \mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx + \mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\kappa(\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^l = \kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \varphi_t(l, t) - \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \varphi_t(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx + \mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx = 0. \quad (3.63)$$

Agora, multiplicando a equação (3.56) por ψ_t e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_2 \psi_t] \psi_t dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \psi_x \psi_t \Big|_0^l + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$b \psi_x \psi_t \Big|_0^l = b \psi_x(l, t) \psi_t(l, t) - b \psi_x(0, t) \psi_t(0, t) = 0.$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0. \quad (3.64)$$

Por fim, multiplicando a equação (3.57) por θ e integrando por partes em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{tx}] \theta dx = 0,$$

resultando que

$$\int_0^l \theta_t \theta dx - \delta \int_0^l \theta_{xx} \theta dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\int_0^l \theta_t \theta dx - \delta \theta_x \theta \Big|_0^l + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0,$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\delta \theta_x \theta \Big|_0^l = \delta \theta_x(l, t) \theta(l, t) - \delta \theta_x(0, t) \theta(0, t) = 0,$$

resultando que

$$\int_0^l \theta_t \theta dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0. \quad (3.65)$$

Somando as equações (3.62), (3.63), (3.64) e (3.65), chegamos à

$$\begin{aligned} & \int_0^l u_{tt}u_t dx + \rho_1 \int_0^l \varphi_{tt}\varphi_t dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt}\psi_t dx + \int_0^l \theta_t \theta dx + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx \\ & + \lambda \int_0^l (\varphi - u)(\varphi - u)_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)(\varphi_x + \psi)_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx \\ & + \mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \mu_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Usando a Propriedade de derivada, chegamos à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l |u_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \int_0^l |\theta|^2 dx + \alpha \int_0^l |u_x|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) \\ & \quad + \mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \mu_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Portanto, definimos a energia total associada ao sistema (3.54)–(3.60) como

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & \quad + \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.67)$$

E, concluímos que a energia total satisfaz a lei de dissipação dada por

$$E'(t) = -\mu_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.68)$$

Sejam t_1 e t_2 , tais que $0 \geq t_1 < t_2$. Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo (t_1, t_2) , para todo $t \geq 0$ obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} E'(s) ds \leq \int_{t_1}^{t_2} 0 ds, \quad t \geq 0, \quad (3.69)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, implica que

$$E(t_2) - E(t_1) \leq 0, \quad t_1 \geq t_2, \quad (3.70)$$

e chegamos à

$$E(t_2) \leq E(t_1), \quad t_1 \geq t_2, \quad (3.71)$$

isto é, a energia total tende a se estabilizar com o passar do tempo. Dessa forma, é importante analisar qual o tipo de estabilidade que está acontecendo.

3.2.2 Lemas técnicos

Nesta subseção vamos construir alguns funcionais que juntamente com funcional energia nos ajudará a defini o funcional de Lyapunov. Inicialmente, definimos o funcional

$$F(t) = \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx. \quad (3.72)$$

Lema 3.5. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva C'_ϵ tal que

$$F'(t) \leq -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx + \epsilon \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + C'_\epsilon \int_0^l |\theta_x|^2 dx. \quad (3.73)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.57) por $\int_0^x u_t(s) ds$, com $x \in (0, l)$, e integrando em $(0, l)$ obtemos

$$\int_0^l [\theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{tx}] \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx = 0.$$

Pela propriedade de integral, obtemos

$$\int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \delta \int_0^l \theta_{xx} \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx = 0.$$

Integrando por partes chegamos à

$$\begin{aligned} \int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \delta \theta_x(x, t) \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l + \delta \int_0^l \theta_x u_t dx \\ + \gamma u_t(x, t) \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l - \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Usando as condições de contorno e identidade de média nula para a função u , obtemos

$$\theta_x(x, t) \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l = \theta_x(l, t) \left(\int_0^l u_t(s, t) ds \right) - \theta_x(0, t) \left(\int_0^0 u_t(s, t) ds \right) = 0 \quad (3.75)$$

e

$$u_t(x, t) \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l = u_t(l, t) \left(\int_0^l u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l - u_t(0, t) \left(\int_0^0 u_t(s, t) ds \right) \Big|_0^l = 0. \quad (3.76)$$

Sustituindo (3.75), (3.76) em (3.74), obtemos

$$\int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx + \delta \int_0^l \theta_x u_t dx - \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx = 0. \quad (3.77)$$

Agora, integrando a equação (3.54) em $(0, x)$ com $x \in (0, l)$, obtemos

$$\int_0^x u_{tt}(s, t) ds - \alpha \int_0^x u_{xx}(s, t) ds - \lambda \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds + \gamma \int_0^x \theta_x(s, t) ds = 0.$$

Usando o teorma fundamental do cálculo, obtemos

$$\int_0^x u_{tt}(s, t) ds - \alpha u_x + \alpha u_x(0, t) - \lambda \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds + \gamma \theta - \gamma \theta(0, t) = 0.$$

Usando a condição de contorno, chegamos à

$$\int_0^x u_{tt}(s, t) ds - \alpha u_x - \lambda \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds + \gamma \theta = 0. \quad (3.78)$$

Multiplicando a equação (3.78) por θ , com $x \in (0, l)$, e integrando em $(0, l)$ obtemos

$$\int_0^l \theta \left(\int_0^x u_{tt}(s, t) ds \right) dx - \alpha \int_0^l u_x \theta dx - \lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx + \gamma \int_0^l |\theta|^2 dx. \quad (3.79)$$

Pela propriedade de derivada, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx = \int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx + \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_{tt}(s, t) ds \right) dx,$$

de onde resulta que

$$\int_0^l \theta \left(\int_0^x u_{tt}(s, t) ds \right) dx = \frac{d}{dt} \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx. \quad (3.80)$$

Substituindo (3.80) em (3.79) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \int_0^l \theta_t \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \alpha \int_0^l u_x \theta dx \\ - \lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx + \gamma \int_0^l |\theta|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Adicionando as equações (3.77) e (3.81), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx - \alpha \int_0^l u_x \theta dx - \lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx \\ + \gamma \int_0^l |\theta|^2 dx + \delta \int_0^l \theta_x u_t dx - \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Pela definição do funcional $F(t)$, segue-se que

$$F'(t) = -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx - \alpha \int_0^l u_x \theta dx - \lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx + \gamma \int_0^l |\theta|^2 dx + \delta \int_0^l \theta_x u_t dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\gamma \int_0^l |\theta|^2 dx \leq \frac{\gamma}{\lambda_1} \int_0^l |\theta_x|^2 dx, \quad (3.83)$$

assim, chegamos à

$$\begin{aligned}
F'(t) = & -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx - \alpha \int_0^l u_x \theta dx - \lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx \\
& + \frac{\gamma}{\lambda_1} \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \delta \int_0^l \theta_x u_t dx,
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
-\alpha \int_0^l u_x \theta dx & \leq \int_0^l |u_x| (\alpha |\theta|) dx \\
& \leq \left(\int_0^l |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l (\alpha |\theta|)^2 dx \right)^{1/2} \\
& \leq \epsilon \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l (\alpha |\theta|)^2 dx \\
& \leq \epsilon \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\alpha^2}{4\epsilon} \int_0^l |\theta|^2 dx \\
& \leq \epsilon \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\alpha^2}{4\lambda_1 \epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
-\lambda \int_0^l \theta \left(\int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right) dx & \leq \int_0^l (\lambda |\theta|) \left| \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right| dx \\
& \leq \left(\int_0^l (\lambda |\theta|)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l \left| \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
& \leq \epsilon \int_0^l \left| \int_0^x (\varphi - u)(s, t) ds \right|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l (\lambda |\theta|)^2 dx \\
& \leq \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + \frac{\lambda^2}{4\lambda_1 \epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.86}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta \int_0^l \theta_x u dx & \leq \int_0^l |u| (\delta |\theta_x|) dx \\
& \leq \left(\int_0^l |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l (\delta |\theta_x|)^2 dx \right)^{1/2} \\
& \leq \epsilon \int_0^l |u|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l (\delta |\theta_x|)^2 dx \\
& \leq \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\delta^2}{4\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Substituindo as equações (3.85), (3.86) e (3.87) em (3.84), obtemos

$$\begin{aligned}
F'(t) &\leq -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx + \epsilon \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\alpha^2}{4\lambda_1\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{4\lambda_1\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \frac{\gamma}{\lambda_1} \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\delta^2}{4\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx \\
&\leq -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx + \epsilon \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + C_\epsilon \int_0^l |\theta_x|^2 dx,
\end{aligned}$$

onde $C'_\epsilon = \frac{\alpha^2}{4\lambda_1\epsilon} + \frac{\lambda^2}{4\lambda_1\epsilon} + \frac{\gamma}{\lambda_1} + \frac{\delta^2}{4\epsilon}$.

□

Agora, definimos o seguinte funcional

$$G(t) = \int_0^l u_t u dx + \rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx + \rho_2 \int_0^l \psi_t \psi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx. \quad (3.88)$$

Lema 3.6. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva C''_ϵ tal que

$$\begin{aligned}
G'(t) &\leq \int_0^l |u_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \int_0^l |u_x|^2 dx \\
&\quad - \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + C''_\epsilon \int_0^l |\theta_x|^2 dx. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.54) por u e integramos na variável x em $[0, l]$, resultando em

$$\int_0^l [u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x] u dx = 0,$$

onde pela linearidade da integral, obtemos

$$\int_0^l u_{tt} u dx - \alpha \int_0^l u_{xx} u dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u dx + \gamma \int_0^l \theta_x u dx = 0.$$

Aplicando a integração por partes, chegamos à

$$\int_0^l u_{tt} u dx - \alpha u_x u \Big|_0^l + \alpha \int_0^l |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u dx + \gamma \int_0^l \theta_x u dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\alpha u_x u \Big|_0^l = \alpha u_x(l, t) u(l, t) - \alpha u_x(0, t) u(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\int_0^l u_{tt} u dx + \alpha \int_0^l |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u dx + \gamma \int_0^l \theta_x u dx = 0. \quad (3.90)$$

Agora, multiplicando a equação (3.55) por φ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \mu_1 \varphi_t] \varphi dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi dx + \mu_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \varphi \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi dx + \mu_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$\kappa(\varphi_x + \psi) \varphi \Big|_0^l = \kappa(\varphi_x + \psi)(l, t) \varphi(l, t) - \kappa(\varphi_x + \psi)(0, t) \varphi(0, t) = 0,$$

implicando que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi dx + \mu_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx = 0. \quad (3.91)$$

Por fim, multiplicando a equação (3.56) por ψ e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_2 \psi_t] \psi dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi dx + \mu_2 \int_0^l \psi_t \psi dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi dx - b \psi_x \psi \Big|_0^l + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi dx + \mu_2 \int_0^l \psi_t \psi dx = 0.$$

Pela condição de contorno, temos que

$$b \psi_x \psi \Big|_0^l = b \psi_x(l, t) \psi(l, t) - b \psi_x(0, t) \psi(0, t) = 0.$$

De onde segue-se que

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi dx + \mu_2 \int_0^l \psi_t \psi dx = 0. \quad (3.92)$$

Adicionando as equações (3.90), (3.91) e (3.92), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^l u_{tt}u \, dx + \rho_1 \int_0^l \varphi_{tt}\varphi \, dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt}\psi \, dx + \mu_1 \int_0^l \varphi_t\varphi \, dx + \mu_2 \int_0^l \psi_t\psi \, dx + \alpha \int_0^l |u_x|^2 \, dx \\ + \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 \, dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \gamma \int_0^l \theta_x u \, dx = 0. \end{aligned}$$

Pela propriedade de derivada, temos que

$$\int_0^l u_{tt}u \, dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l u_t u \, dx \right) - \int_0^l |u_t|^2 \, dx, \quad (3.93)$$

$$\int_0^l \varphi_{tt}\varphi \, dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \varphi_t \varphi \, dx \right) - \int_0^l |\varphi_t|^2 \, dx, \quad (3.94)$$

$$\int_0^l \psi_{tt}\psi \, dx = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l \psi_t \psi \, dx \right) - \int_0^l |\psi_t|^2 \, dx, \quad (3.95)$$

$$\int_0^l \varphi_t \varphi \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 \, dx \right) \quad (3.96)$$

e

$$\int_0^l \psi_t \psi \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l |\psi_t|^2 \, dx \right). \quad (3.97)$$

Pela propriedade de derivada e da definição do funcional $G(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} G'(t) - \int_0^l |u_t|^2 \, dx - \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 \, dx - \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 \, dx + \alpha \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 \, dx \\ + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx + \gamma \int_0^l \theta_x u \, dx = 0, \end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned} G'(t) &= \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 \, dx - \alpha \int_0^l |u_x|^2 \, dx - \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 \, dx \\ &\quad - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 \, dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 \, dx - \gamma \int_0^l \theta_x u \, dx. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} -\gamma \int_0^l \theta_x u \, dx &\leq \int_0^l |u| (\gamma |\theta_x|) \, dx \\ &\leq \left(\int_0^l |u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l (\gamma |\theta_x|)^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon \int_0^l |u|^2 \, dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^l (\gamma |\theta_x|)^2 \, dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Substituindo as equações (3.99) em (3.98), obtemos

$$\begin{aligned}
G'(t) &\leq \int_0^l |u_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \alpha \int_0^l |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 dx \\
&\quad - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \int_0^l |\theta_x|^2 dx \\
&\leq \int_0^l |u_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \int_0^l |u_x|^2 dx \\
&\quad - \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx + C''_\epsilon \int_0^l |\theta_x|^2 dx, \quad (3.100)
\end{aligned}$$

onde $C''_\epsilon = \frac{\gamma^2}{4\epsilon}$.

□

3.2.3 Decaimento exponencial

Nesta subsecção vamos mostrar que o funcional $E(t)$ decai exponencialmente. Este resultado está sob a forma do seguinte Teorema

Teorema 3.2. *Existem constantes positivas M e ω tais que*

$$E(t) \leq M e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0, \quad (3.101)$$

Demonstração. Para este propósito, vamos construir o funcional Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ e mostrar que este está nas condições do Teorema (2.2).

Definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ da seguinte forma

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 F(t) + G(t), \quad (3.102)$$

onde N_i , $i = 1, 2$, são constantes positivas. Inicialmente, vamos mostrar que existem constantes positivas c_1 e c_2 , tais que

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t). \quad (3.103)$$

Note que

$$\mathcal{L}(t) - N_1 E(t) = N_2 F(t) + G(t), \quad (3.104)$$

dessa forma,

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| = |N_2 F(t) + G(t)|. \quad (3.105)$$

Seja

$$H(t) = N_2 F(t) + G(t),$$

temos que

$$|H(t)| = |N_2 F(t) + G(t)| \leq N_2 |F(t)| + |G(t)|.$$

Pela definições dos funcionais F e G , temos que

$$\begin{aligned} |H(t)| \leq & N_2 \left| \int_0^l \theta \left(\int_0^x u_t(s, t) ds \right) dx \right| \\ & + \left| \int_0^l u_t u dx + \rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi dx + \rho_2 \int_0^l u \psi_t \psi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \right|, \end{aligned}$$

usando as propriedades de integral, obtemos

$$\begin{aligned} |H(t)| \leq & N_2 \int_0^l |\theta| \left| \int_0^x u_t(s, t) ds \right| dx + \int_0^l |u_t| |u| dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t| |\varphi| dx \\ & + \rho_2 \int_0^l |\psi_t| |\psi| dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx, \end{aligned}$$

Usando a desigualdade Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |H(t)| \leq & N_2 \left(\int_0^l |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l \left| \int_0^x u_t(s, t) ds \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \rho_1 \left(\int_0^l |\varphi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\int_0^l |\psi_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young, com $\epsilon = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} |H(t)| \leq & \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l \left| \int_0^x u_t(s, t) ds \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u|^2 dx \\ & + \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi|^2 dx \\ & + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ \leq & \frac{N_2}{2} \int_0^l \left| \int_0^x u_t(s, t) ds \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1}{2} \right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx \\ & + \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi|^2 dx + \left(\frac{\rho_2}{2} + \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leq \frac{N_2}{2\lambda_1} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1}{2}\right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_1}{2\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_2}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx \\
&\leq \left(\frac{N_2}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1}{2}\right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_1}{2\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_2}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx. \quad (3.106)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.7 em (3.106), obtemos

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leq \left(\frac{N_2}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1}{2}\right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_1}{\lambda_1} \left(\int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx\right) + \left(\frac{\rho_2}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_2}{2\lambda_1} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx \\
&= \left(\frac{N_2}{2\lambda_1} + \frac{1}{2}\right) \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1}{2}\right) \int_0^l |\varphi_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_1}{\lambda_1} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{\lambda_1^2} + \frac{\rho_2}{2\lambda_1}\right) \int_0^l |\psi_x|^2 dx \\
&\quad + \left(\frac{\rho_2}{2} + \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx \\
&= \left(\frac{N_2}{\lambda_1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx\right) + \frac{1}{\alpha\lambda_1} \left(\frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx\right) + \left(1 + \frac{\mu_1}{\rho_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx\right) \\
&\quad + \frac{2\rho_1}{\lambda_1\kappa} \left(\frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx\right) + \left(\frac{2\rho_1}{b\lambda_1^2} + \frac{\rho_2}{b\lambda_1}\right) \left(\frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{\mu_2}{\rho_2}\right) \left(\frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx\right) + \frac{N_2}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx
\end{aligned}$$

Tomando

$$N = \min \left\{ \frac{N_2}{\lambda_1} + 1, \frac{1}{\alpha\lambda_1}, 1 + \frac{\mu_1}{\rho_1}, \frac{2\rho_1}{\lambda_1\kappa}, \frac{2\rho_1}{b\lambda_1^2} + \frac{\rho_2}{b\lambda_1}, 1 + \frac{\mu_2}{\rho_2}, N_2 \right\}, \quad (3.107)$$

e, pela definição do funcional energia $E(t)$, obtemos

$$|H(t)| \leq NE(t),$$

consequentemente,

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| \leq |H(t)| \leq NE(t).$$

Assim,

$$(N_1 - N)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N_1 + N)E(t).$$

Ao escolher $N_1 > N$, obtemos $c_1 = N_1 - N > 0$ e $c_2 = N_1 + N > 0$ que garante as desigualdades de (3.103).

Agora, vamos que existe uma constante positiva β tal que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.108)$$

Diferenciando o funcional de Lyapunov e recordando a lei de dissipação de $E(t)$ dada em (3.68) e os Lemas 3.5 e 3.6, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq N_1 E'(t) + N_2 F'(t) + G'(t) \\ &\leq -\{N_2 \gamma - 1\} \int_0^l |u_t|^2 dx - \{N_1 \mu_1 - \rho_1\} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \{N_1 \mu_2 - \rho_2\} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ &\quad - \left\{ \alpha - \epsilon \left(N_2 + \frac{N_2 + 1}{\lambda_1} \right) \right\} \int_0^l |u_x|^2 dx - \left\{ \lambda - N_2 \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right\} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx \\ &\quad - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \{N_1 \delta - N_2 C'_\epsilon - C''_\epsilon\} \int_0^l |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{\alpha \lambda_1}{2(N_2 \lambda_1 + N_2 + 1)}, \frac{\lambda \lambda_1}{2N_2} \right\},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\{N_2 \gamma - 1\} \int_0^l |u_t|^2 dx - \{N_1 \mu_1 - \rho_1\} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \{N_1 \mu_2 - \rho_2\} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx \\ &\quad - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \{N_1 \delta - N_2 C'_\epsilon - C''_\epsilon\} \int_0^l |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Neste ponto, escolheremos N_1 e N_2 suficientemente grande. Tomando

$$N_2 = \frac{3}{2\gamma},$$

obtemos

$$N_2 \gamma - 1 = \frac{3}{2\gamma} \gamma - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

E, tomando

$$N_1 = \max \left\{ N, \frac{3\rho_1}{2\mu_1}, \frac{3\rho_2}{2\mu_2}, \frac{N_2 C'_\epsilon + C''_\epsilon}{\delta} + \frac{1}{\delta \lambda_1} \right\},$$

obtemos

$$N_1\mu_1 - \rho_1 \geq \frac{3\rho_1}{2\mu_1}\mu_1 - \rho_1 \geq \frac{3\rho_1}{2} - \rho_1 \geq \frac{\rho_1}{2},$$

$$N_1\mu_2 - \rho_2 \geq \frac{3\rho_2}{2\mu_2}\mu_2 - \rho_2 \geq \frac{3\rho_2}{2} - \rho_2 \geq \frac{\rho_2}{2}$$

e

$$\begin{aligned} N_1\delta - N_2C'_\epsilon - C''_\epsilon &\geq \left(\frac{N_2C'_\epsilon + C''_\epsilon}{\delta} + \frac{1}{\delta\lambda_1} \right) \delta - N_2C'_\epsilon - C''_\epsilon \\ &\geq \left(N_2C'_\epsilon + C''_\epsilon + \frac{1}{\lambda_1} \right) - N_2C'_\epsilon - C''_\epsilon \\ &\geq \frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Resultando que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -\frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & - \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_0^l |\theta_x|^2 dx \geq \frac{1}{\lambda_1} \lambda_1 \int_0^l |\theta|^2 dx = \int_0^l |\theta|^2 dx. \quad (3.109)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -\frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & - \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - b \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \int_0^l |\theta|^2 dx \\ \leq & -\frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & - \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx. \end{aligned}$$

Pela definição do Funcional Energia, chegamos à

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0, \quad (3.110)$$

onde $\beta = 1$ é uma constante positiva.

Portanto, o método da energia garante o decaimento exponencial do funcional energia $E(t)$.

□

Bibliografia

- [1] Almeida Júnior, D.S. & Ramos, A.J.A. (2017) On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*.
- [2] Almeida Júnior, D.S.; Ramos, A.J.A.; Santos, M. L.; Miranda, L. G. R. (2019) Asymptotic behavior of weakly dissipative Bresse-Timoshenko system on influence of the second spectrum of frequency. *Z Angew Math Mech*. 2018;1?14.. <https://doi.org/10.1002/zamm.201700211>.
- [3] Apalara, T. A. & Messaoudi, S. A. (2014) An Exponential Stability Result of a Timoshenko System with Thermoelasticity with Second Sound and in the Presence of Delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. <https://doi.org/10.1007/s00245-014-9266-0>.
- [4] Bouraoui, H. A.; Djebabla, A.; Sahari, M. L; Boulaaras, S. (2023) Exponential stability and numerical analysis of Timoshenko system with dual-phase-lag thermoelasticity. *Int J Numer Model*. 2024;37(2):e3179. <https://doi.org/10.1002/jnm.3179>.
- [5] Feng, B.; Almeida Júnior, D.S.; Santos, M. J.; Miranda, L. G. R. (2019) A new scenario for stability of nonlinear Bresse-Timoshenko type systems with time dependent delay. *Z Angew Math Mech*. 2020;100:e201900160. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900160>.
- [6] Guidorizzi, H. L. (2013) H. Um curso de cálculo, vol. 1, 5ª ed. Rio de Janeiro, LTC.
- [7] Rivera, J. & Muñoz, E. (2011) *Teoria de Semigrupos e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais*. Petrópolis: LNCC.
- [8] Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Phil. Mag.* **41** (1921) 744-746.
- [9] Timoshenko S. Theory of Suspension Bridges, *Journal of the Franklin Institute*, **235:3** (1943) 213-238. doi: 10.1016/S0016-0032(43)90627-1
- [10] Timoshenko S. Theory of Suspension Bridges, *Journal of the Franklin Institute*, **235:4** (1943) 327-349. doi: 10.1016/S0016-0032(43)90418-1