



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

WALLACE HENRIQUE ALMEIDA DE OLIVEIRA

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO:
Uso em Planilha Eletrônica**

**BRAGANÇA-PA
2023**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

H518t Henrique, Wallace Henrique Almeida de Oliveira.
TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO: : Uso em
Planilha Eletrônica / Wallace Henrique Almeida de Oliveira
Henrique. — 2023.
44 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda Ned
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Faculdade de
Matemática, Bragança, 2023.

1. Transformações Lineares. 2. Aprendizagem. 3. Planilhas
Eletrônicas. I. Título.

CDD 518.43

WALLACE HENRIQUE ALMEIDA DE OLIVEIRA

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO:
Uso em Planilha Eletrônica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda.

**BRAGANÇA-PA
2023**

WALLACE HENRIQUE ALMEIDA DE OLIVEIRA

**TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO:
Uso em Planilha Eletrônica**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado a Universidade Federal do
Pará, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de
Licenciado Pleno em Matemática.

Bragança, 8 de fevereiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Nelson Ned Nascimento Lacerda

Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Orientador- UFPA

Marly dos Anjos Nunes

Prof. Dra. Marly dos Anjos Nunes

Examinador Interno- UFPA

Edson Jorge de Matos

Prof. Dr. Edson Jorge de Matos

Examinador Interno- UFPA

AGRADECIMENTOS

Muita gente me ajudou a realizar esse trabalho; Henrique Reis, a quem lia sempre os rascunhos dessa obra, me motivava e incentivava para que concluísse, num período que tive uma série de problemas pessoais que me tiram o gozo do trabalho acadêmico. A Maria da Paz e Jose Claudeci que tiveram a bondade e caridade de me criar e educar. Sem eles, não poderia estar aqui hoje, pois, me deram o mais divino bem: a vida.

A meu orientador e amigo, Nelson Ned N. Lacerda, que me conduziu nesse trabalho e a cada momento me incentivou para concluí-lo. A diversos professores, a quem tenho uma dívida impagável, pois, com seus esforços me tornaram um ser humano melhor.

E aquele que fundamenta a existência, da sentida e apesar dos nossos pecados, SEMPRE está receptivo a nos perdoar: Nosso Senhor Jesus Cristo.

“A informática e as telecomunicações serão para o século XXI o que as rodovias foram para o século XX”.

(Bill Clinton-2003)

RESUMO

Devido à dificuldade no ensino de álgebra linear vem-se procurando novos meios de apresentar este conteúdo. O presente trabalho apresenta uma abordagem computacional no ensino das transformações lineares no plano, onde utiliza-se do programa Microsoft Excel para desenvolver esse conteúdo algébrico. A vantagem na utilização de planilhas eletrônicas é a exploração das representações matriciais, numéricas e gráficas das transformações lineares de forma simultânea, o que torna uma excelente ferramenta no ensino e aprendizagem de álgebra linear.

Palavras-chaves: Transformações Lineares; Aprendizagem; Planilhas Eletrônicas.

ABSTRACT

Due to the difficulty in teaching linear algebra, new ways of presenting this content have been sought. The present work presents a computational approach in the teaching of linear transformations in the plane, where the Microsoft Excel program is used to develop this algebraic content. The advantage of using electronic spreadsheets is the exploration of matrix, numerical and graphic representations of linear transformations simultaneously, which makes them an excellent tool for teaching and learning linear algebra.

Keywords: Linear Transformations; Learning; Electronic Spreadsheets.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Transformações Lineares.....	12
Figura 2 - Núcleo De Uma Transformação Linear.....	14
Figura 3 - A Imagem De T	16
Figura 4 - Reflexão Em Torno Do Eixo Dos x	23
Figura 5 - Reflexão Em Torno Do Eixo Dos y	24
Figura 6 - Reflexão Na Origem.....	24
Figura 7 - Reflexão Em Torno Da Reta $y = x$	25
Figura 8 - Reflexão Em Torno De Reta $y = -x$	26
Figura 9 - Dilatação Ou Contração Na Direção D Vetor.....	26
Figura 10 - Dilatação Ou Contração Na Direção Do Eixo Dos x	27
Figura 11 - Dilatação Ou Contração Na Direção Do Eixo Dos y	28
Figura 12 - Cisalhamento Na Direção Do Eixo Dos X	29
Figura 13 - A Rotação Do Plano Em Torno Da Origem.....	29
Figura 14 - Imagem Do Vetor $v = (4,2)$ Pela Rotação De $\theta = \pi/2$	30
Figura 15 - Estrutura Básica Da Planilha Excel.....	32
Figura 16 - Barra De Formulas.....	33
Figura 17 - Barra De Tarefas Do Excel.....	33
Figura 18 - Representação Geométrica Da Figura Plana Utilizada.....	33
Figura 19 - Esboço Da Figura Resultante Do Produto Da Matriz A Pela Matriz B	34
Figura 20- Resultado Da Aplicação Da Matriz T A Matriz B	35
Figura 21 - Resultado De Uma Rotação De Um Angulo De $\pi/3$ Radianos Com Relação À Origem, Aplicado A Figura Original.....	37
Figura 22 - Resultado Da Aplicação De Uma Dilatação Vertical De Fator 4, Seguida Por Uma Rotação De Um Ângulo De $\pi/3$ Radianos A Figura Original.....	38
Figura 23 - Resultado Da Aplicação De Uma Rotação De Um Angulo $\pi/3$ Radianos A Figura Original, Seguida Por Uma Dilatação Vertical De Fator 3.....	39
Figura 24 - Resultado Da Aplicação Da Transformada Inversa.....	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	12
2.1	Transformações lineares	12
2.2	Núcleo de uma transformação linear	14
2.3	Imagem	16
2.4	Isomorfismo.....	18
2.5	Matriz de uma transformação linear.....	19
2.6	Operações com transformações lineares	20
2.6.1	Adição	20
2.6.2	Multiplicação por escalar	21
2.6.3	Composição.....	21
3	TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS	23
3.1	Reflexões	23
3.2	Dilatação e contrações	26
3.3	Cisalhamentos	28
3.4	Rotação	29
4	METODOLOGIA.....	31
5	TRANSFORMAÇÕES LINEARES COM USO DO EXCEL	32
5.1	Excel.....	32
5.2	Atividade Desenvolvida Microsoft Excel.....	33
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	41
	REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é de fundamental importância na formação básica daqueles que pretendem, usá-las nas suas áreas de atuação, seja elas, a Matemática ou em outros campos de atuação, pois, este conteúdo se encontra implícito em diversas áreas como na Análise e Geometria. Devido a esta característica, a consolidação de conceitos fundamentais é indispensável para aqueles que pretendem atuar nas ciências matemáticas e engenharias.

De acordo com Olivera (2002), devido a essa importância e peso que a álgebra linear tem sobre a formação dos docentes do ensino superior despertou interesse de pesquisadores franceses e canadenses na década de 90. Ainda segundo Oliveira (2002), para os pesquisadores franceses, o processo de ensino e aprendizagem é mal sucedido no primeiro curso de álgebra linear.

Uma das hipóteses deste baixo aproveitamento do ensino/aprendizagem de álgebra linear, se dá pela forma abstrata e axiomática utilizada para tratar das primeiras noções de álgebra linear, que se mostra verdadeira pela pesquisa desenvolvida por Dorier (1997) fenômeno esse que foi chamado de “obstáculo do formalismo”.

De acordo com os resultados da pesquisa de Maria (2018), que reforçam a tese de Dorier e acrescenta que parte dessa dificuldade do aprendizado de álgebra linear está relacionada ao ensino que ainda está apoiada em bases puramente expositivas dos conteúdos algébricos e trata as novas tecnologias de ensino como meras potencialidades sem uso efetivo, na prática pedagógica diária.

Entre os conteúdos da álgebra linear o escolhido para ser desenvolvido nesse trabalho foi as transformações lineares. O motivo desta escolha se baseia na importância geral que este conteúdo tem na teoria da álgebra linear e suas aplicações em diversos ramos do conhecimento.

Dentro de um cenário em que a importância das disciplinas básicas na formação teórica do discente do ensino superior tornou-se fundamental, autores como Nomura (2008), explica que novas formas de investigar, apresentar e explicar conteúdos básicos torna-se fundamental e indispensável na formação profissional, pois, esses conhecimentos serão exigidos no seu âmbito profissional.

Em vista disso, autores tem investigado e analisado as potencialidades do uso de ferramentas digitais no ensino de álgebra linear. Entre estes autores, pode-se destacar o

trabalho de Santana (2019), que usou o software GeoGebra¹ para desenvolver estratégia de ensino/aprendizagem de álgebra linear, seu trabalho, fica restrito a tópicos de matrizes, vetores, projeções ortogonais e ao método dos mínimos quadrados. O trabalho de Parmegiani (2011) utilizou o software Matlab² para desenvolver o conteúdo de transformações lineares no curso de engenharia, onde os alunos deveriam fazer um roteiro simples para criar uma figura no plano e aplicar a esta uma ou mais transformações lineares, onde os principais recursos utilizados no Matlab foram as transformações lineares no plano e a representação gráfica. Concretizando assim os conteúdos visto na disciplina.

Tendo em vista essas considerações, temos como objetivo geral deste trabalho apresentar transformações lineares no plano utilizando a planilha eletrônica Excel. Para isso, foi realizado uma pesquisa bibliográfica em site, revistas e artigos acadêmicos sobre o conteúdo de transformações lineares. Após essa revisão realizou-se a aplicação de exemplos no programa Excel.

O presente trabalho está organizado em capítulos de 1 a 6, no qual o capítulo 1 é a presente introdução. Já o capítulo 2 fora destinado ao estudo das transformações lineares, bem como seus conceitos de núcleo de uma transformação linear, imagem, isomorfismo e matriz de uma transformação linear. O capítulo 3 se faz presente para o estudo de principais transformações lineares plana, são elas, reflexões, dilatação e contrações, cisalhamentos e rotação. O capítulo 4 tem como foco apresentar a metodologia apresentada nesse trabalho. Para o capítulo 5 abordaremos transformações lineares com uso do Excel, onde desenvolveremos as potencialidades do programa e será aplicado o conteúdo de álgebra linear. O capítulo 6 trata-se das considerações finais, no qual abordaremos discussões e resultados a respeito deste trabalho.

¹ O GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmico que condensa conceitos de geometria e álgebra em uma interface gráfica. Por este motivo, seu nome é uma aglutinação de **Geometria** e **Álgebra**.

² É uma plataforma de programação e computação numérica usada por milhões de engenheiros e cientistas para analisar dados, desenvolver algoritmos e criar modelos.

2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

No capítulo 2 e 3 mostra uma estudo sobre um tipo de especial de função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais. Particularmente, nosso interesse é nas funções vetoriais lineares, que serão denominadas transformações lineares. Esta teoria tem como base os trabalhos de Steinbruch (1987), Boldrini (1980), Callioli (1978), Lima (1996).

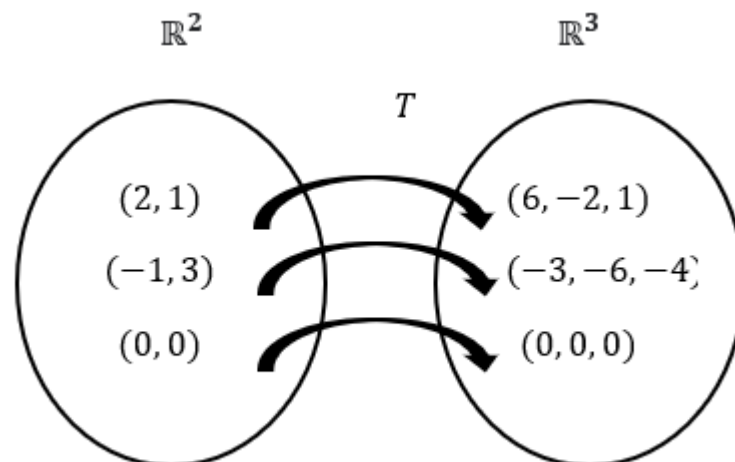
2.1 Transformações lineares

Para que T seja uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W , escreve-se $T: V \rightarrow W$. Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem uma só vetor imagem $w \in W$. Que será indicado por $w = T(v)$.

Exemplificando, considerando " $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$."

Uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se a lei que define a transformação T for $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$, o diagrama a seguir apresenta três vetores particulares v e suas correspondentes imagens w .

Figura 1 - Transformações lineares.



Fonte: Steinbruch (1987).

Note que para calcular, por exemplo, $T(2, 1)$, tem-se $x = 2$ e $y = 1$, e daí:

$$T(2,1) = (3 \times 2, -2 \times 1, 2 - 1) = (6, -2, 1)$$

Definição 1. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é chamada transformação linear de V em W se:

- I) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear.

De fato:

- I) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores genéricos de \mathbb{R}^2

Então:

$$\begin{aligned} T(u, v) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ T(u, v) &= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ T(u, v) &= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ T(u, v) &= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) \\ T(u, v) &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

- II) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ T(\alpha u) &= (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\ T(\alpha u) &= \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) \\ T(\alpha u) &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

Propriedade 1.1³ Se $T: V \rightarrow W$ for uma transformação linear, então

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$$

para $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

De forma análoga, tem-se:

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

Para $\forall v_i \in V$ e $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

³ A demonstração desta propriedade pode ser encontrada na referência [BOLDRINI, J. L. 1980, p151]

Suponhamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma base⁴ do domínio V e que se saiba quais são as imagens $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ dos vetores desta base: sempre é possível obter imagem $T(v)$ de qualquer $v \in V$, pois sendo v uma combinação linear dos vetores da base, isto é:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

e pela relação acima, temos:

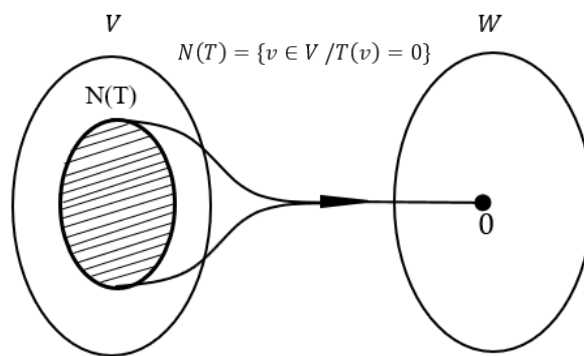
$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_nT(v_n)$$

Assim, uma transformação linear $T:V \rightarrow W$ fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base de V .

2.2 Núcleo de uma transformação linear

Definição 2. Chama-se núcleo de uma transformação linear $T:V \rightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$. Indica-se esse conjunto por $N(T)$ ou $\ker(T)$

Figura 2 - Núcleo de uma transformação linear.



Fonte: Adaptada de Steinbruch (1987).

Observe que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.

Exemplo 1.2 O núcleo de uma transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

é conjunto:

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0)\}$$

⁴ CALLIOLI, C. A, 1978, p. 67

Assim

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0)$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontra-se as soluções:

$$x = 0 \text{ e } y = 0$$

logo

$$N(T) = \{(0, 0)\}$$

Propriedade 2.1⁵ O núcleo de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é um subespaço vetorial⁶ de V .

De fato, sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes ao $N(T)$ e α um número real qualquer. Então, $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Assim:

$$\text{I) } T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

Ou seja,

$$v_1 + v_2 \in N(T)$$

$$\text{II) } T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha 0 = 0$$

Isto é,

$$\alpha v_1 \in N(T)$$

Propriedade 2.2 Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

A demonstração dessa propriedade tem duas partes:

$$\text{a) } \text{Vamos mostrar que se } T \text{ é injetora, então } N(T) = \{0\}$$

De fato,

Seja $v \in N(T)$, ou seja, $T(v) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo, $T(v) = T(0)$. Como T é injetora por hipótese, $v = 0$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.

$$\text{b) } \text{Vamos mostrar que se } N(T) = \{0\}, \text{ então } T \text{ é injetora.}$$

⁵ A demonstração desta propriedade 2.1 encontra-se [CALLIOLI, C. A, 1978, p. 103]

⁶ STEINBRUCH, 1985, p.15

De fato,

Sejam v_1 e $v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então, $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 = 0$, isto é, $v_1 = v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2)$ implica em, $v_1 = v_2$, T é injetora.

2.3 Imagem

Definição 3: Chama-se imagem de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ ao conjunto dos vetores $w \in W$ que são imagens de pela menos um vetor $v \in V$. Indica-se esse conjunto por $Im(T)$ ou $T(V)$:

$$Im(T) = \{w \in W / T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observemos que $Im(T) \subset W$ e $Im(T) \neq \emptyset$, pois $0 = T(0) \in Im(T)$. Se

$$Im(T) = W,$$

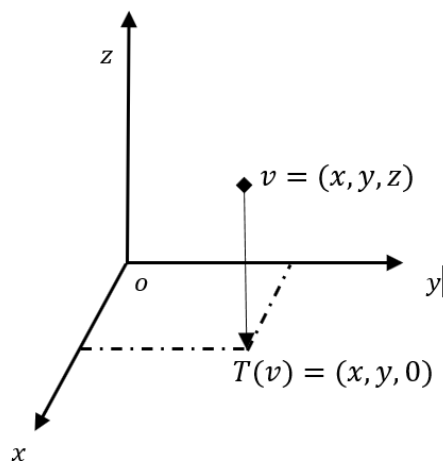
T diz-se sobrejetora, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que

$$T(v) = w.$$

Exemplo 1.3 Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ a projeção ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy . A imagem de T é o próprio plano xy :

$$Im(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$$

Figura 3 - A imagem de T .



Fonte: Steinbruch (1987).

Observemos que o núcleo de T é o eixo dos z :

$$N(T) = \{(0, 0, z)/z \in \mathbb{R}\}.$$

Pois $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$ para todo $z \in \mathbb{R}$

Propriedade 3 A imagem de uma transformação $T: V \rightarrow W$ é um subespaço de W .

Sejam w_1 e w_2 vetores pertencentes a $Im(T)$ e α um número real qualquer. Devemos mostra que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $\alpha w_1 \in Im(T)$, isto é, devemos mostra que existem vetores v e u pertencentes a V tais que $T(v) = w_1 + w_2$ e $T(u) = \alpha w_1$.

Como $w_1, w_2 \in Im(T)$, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$.

Fazendo $v = v_1 + v_2$ e $u = \alpha v_1$, portanto, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W .

Corolário 1 Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear.

Se $dimV = dimW$, então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

De fato:

$$\begin{aligned} T \text{ é injetora} &\Rightarrow N(T) = \{0\} \text{ (propriedade 2.2)} \\ &\Rightarrow 0 + dim Im(T) = dimV \\ &\Rightarrow dim Im(T) = dimW \text{ (hipótese)} \\ &\Rightarrow Im(T) = W \\ &\Rightarrow T \text{ é sobrejetora} \end{aligned}$$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned} T \text{ é sobrejetora} &\Rightarrow Im(T) = W \\ &\Rightarrow dim Im(T) = dimW \\ &\Rightarrow dim Im(T) = dim V \text{ (hipótese)} \\ &\Rightarrow dim N(T) = 0 \text{ (teorema 1)} \\ &\Rightarrow N(T) = \{0\} \\ &\Rightarrow T \text{ é injetora (propriedade 2,2)} \end{aligned}$$

Assim, numa transformação linear na qual $dim V = dim W$, se T injetora (ou sobrejetora), então T é também bijetora (injetora e sobrejetora ao mesmo tempo).

Corolário 2 Se $\dim V = \dim W$ e T é injetora, então T transforma base em base, isso é, se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base V , então $T(B) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é base de W .

De fato:

Como $\dim V = \dim W = n$, base mostra que $T(B)$ é LI. Para tanto, consideramos a igualdade:

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

ou, pela linearidade de T :

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0.$$

Como T é injetora, vem:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_1 = 0$$

sendo B uma base, B é LI e, portanto:

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Logo, $T(B)$ é uma base de W .

2.4 Isomorfismo

Chama-se isomorfismo do espaço vetorial V no espaço vetorial W a uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, que é bijetora. Nesse caso, os espaços vetoriais V e W são ditos isomorfos.

a. O operador linear

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$$

É um isomorfismo na \mathbb{R}^2 . Como $\dim V = \dim W = 2$, basta mostrar que T é injetora (corolário 1). De fato: $N(T) = \{(0,0)\}$, que implica T ser injetora.

b. A transformação linear

$$T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(at^2 + bt + c) = (a, a + b, b - c)$$

É também um isomorfismo.

c. O espaço vetorial \mathbb{R}^2 é isomorfo ao subespaço

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

do \mathbb{R}^3 (W representa o plano xy de \mathbb{R}^3)

De fato, a aplicação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow W$, tal que $T(x, y) = (x, y, 0)$, é bijetora: a cada vetor (x, y) de \mathbb{R}^2 corresponde um só vetor $(x, y, 0)$ de W e, reciprocamente. Logo, \mathbb{R}^2 e W são isomorfos.

2.5 Matriz de uma transformação linear

Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, a uma base V e B uma base de W . Sem prejuízo da generalização, consideremos o caso em que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$.

Sejam $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de V e W , respectivamente.

Um vetor $v \in V$ pode ser expresso por

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

ou

$$v_A = (x_1, x_2)$$

E a imagem $T(v)$ por

$$T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 \quad (1)$$

ou

$$T(v)_B = (y_1, y_2, y_3)$$

Por outro lado:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) \quad (2)$$

Sendo $T(v_1)$ e $T(v_2)$ vetores de W , eles são combinações lineares dos vetores de B :

$$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3 \quad (3)$$

$$T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3 \quad (4)$$

Substituindo esses vetores em (2), vem que

$$T(v) = x_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3) + x_2 (a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3)$$

ou

$$T(v) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) w_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) w_2 + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2) w_3$$

Comparando essa igualdade com (1), conclui-se

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou, simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Sendo a matriz $[T]_B^A$ é denominada matriz de T em relação as bases A e B.

As colunas da matriz $[T]_B^A$ são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação a base B, conforme se pode ver em (3) e (4):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

↑ ↑

$$T(v_1)_B \quad T(v_2)_B$$

De um modo geral, para $T: V \rightarrow W$ linear, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são bases de V e W , respectivamente, teremos que $[T]_B^A$ é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de A em relação a base B:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑

$$T(v_1)_B \quad T(v_2)_B \quad T(v_3)_B$$

Como se vê, matriz $[T]_B^A$ depende das bases A e B consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma particular matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representa-la, no entanto, fixadas as bases, a matriz é única.

2.6 Operações com transformações lineares

2.6.1 Adição

Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: V \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se soma das transformações lineares T_1 e T_2 a transformação linear

$$T_1 + T_2: V \rightarrow W$$

$$v \mapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \forall v \in V$$

Se A e B são bases de V e W , respectivamente, demonstra-se que:

$$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$$

Exemplo 1.4 Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: V \rightarrow W$ transformações lineares definidas por $T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y) = (-x, y, x + y)$.

Determine: $T_1 + T_2$

$$(T_1 + T_2)(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y)$$

$$(T_1 + T_2)(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x) + (-x, y, x + y)$$

$$(T_1 + T_2)(x, y) = (2y, 2x, 2x + y)$$

2.6.2 Multiplicação por escalar

Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de T pelo escalar α é transformação linear

$$\alpha T: V \rightarrow W$$

$$v \mapsto (\alpha T)(v) = \alpha T(v), \forall v \in V$$

Se A e B são bases de V e W , respectivamente, demonstra-se que:

$$[\alpha T]_B^A = \alpha [T]_B^A$$

Exemplo 1.5 Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo T definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $\alpha = 2$. Determine: αT

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$$

$$(2 \cdot T)(x, y) = (2x + 4y, 4x - 2y, 2x)$$

2.6.3 Composição

Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: V \rightarrow U$ transformações lineares. Chama-se aplicação composta de T_1 com T_2 , e se representa por $T_2 \circ T_1$, a transformação linear:

$$T_2 \circ T_1: V \rightarrow U$$

$$v \mapsto (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)), \forall v \in V$$

Se A, B e C são bases de V, W e U , respectivamente, demonstra-se que:

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \times [T_1]_B^A$$

Exemplo 1.6 Sejam S e T operadores lineares no \mathbb{R}^2 definidos por $S(x, y) = (2x, y)$ e $T(x, y) = (x, x - y)$.

Determine: $S \circ T$

$$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x, x - y) = (2x, x - y)$$

Observe que

$$[S \circ T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [S] [T]$$

No capítulo a seguir vamos estudar as principais transformações planas.

3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Definimos transformações lineares planas as transformações de $T(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. As próximas seções vamos explicar as mais utilizadas.

3.1 Reflexões

a) Reflexão em torno do eixo dos x

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo dos x .

Demonstra-se que as reflexões são transformações lineares.

Esta particular transformação é $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

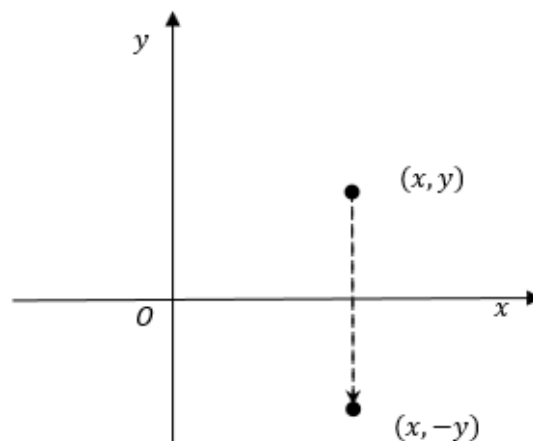
$$(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, -y)$$

Sendo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sua matriz canônica, isso é:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representação geométrica:

Figura 4 - Reflexão em torno do eixo dos x .



Fonte: Steinbruch (1987).

b) Reflexão em torno do eixo dos y

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(-x, y)$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

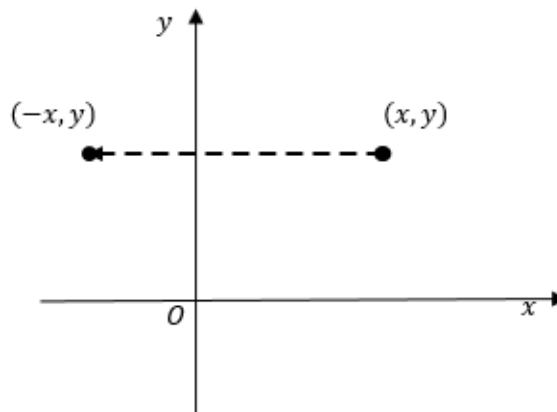
$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

Sendo $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sua matriz canônica, isso é:

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representação geométrica:

Figura 5 - Reflexão em torno do eixo dos y .



Fonte: Steinbruch (1987).

c) Reflexão na origem:

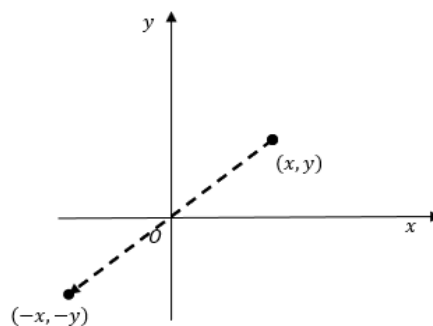
Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(-x, -y)$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

Representação geométrica:

Figura 6 - Reflexão na origem.



Fonte: Steinbruch (1987).

Ou:

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d) Reflexão em torno da reta $y = x$

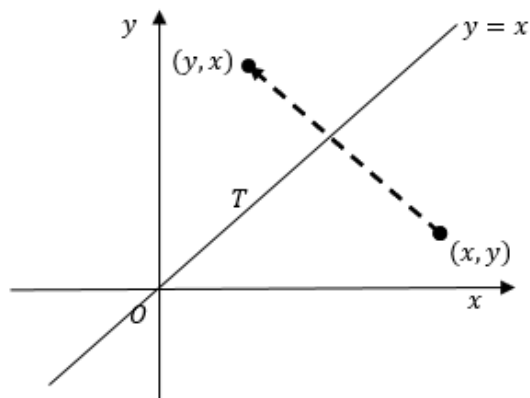
Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem (y, x)

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

Representação geométrica:

Figura 7 - Reflexão em torno da reta $y = x$.



Fonte: Steinbruch (1987).

Ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

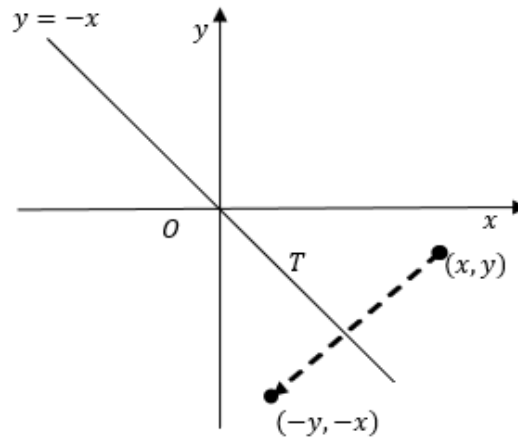
e) Reflexão em torno de reta $y = -x$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, -x)$$

Representação geométrica:

Figura 8 - Reflexão em torno de reta $y = -x$



Fonte: Steinbruch (1987).

Ou:

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.2 Dilatação e contrações

a) Dilatação ou contração na direção d vetor

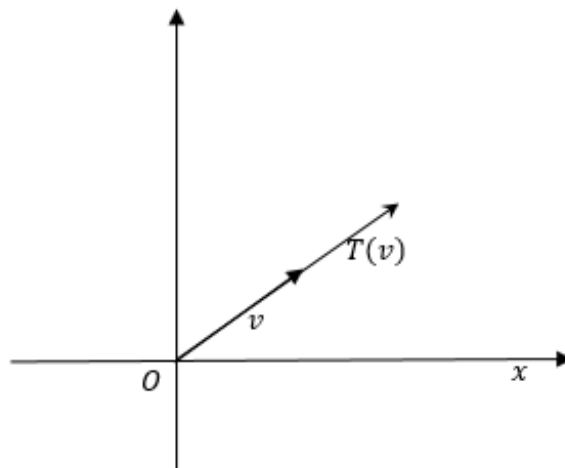
Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $\alpha(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{R}$$

Representação geométrica:

Figura 9 - Dilatação ou contração na direção d vetor.



Fonte: Steinbruch (1987).

Ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observemos que:

Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;

Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;

Se $\alpha = 1$, T é a identidade;

Se $\alpha < 0$, T troca o sentido d vetor.

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ é um exemplo de contração.

b) Dilatação ou contração na direção do eixo dos x

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(\alpha x, y)$ $\alpha > 0$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

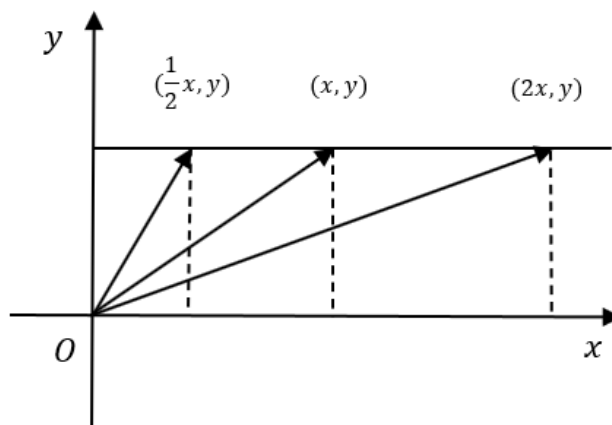
$$(x, y) \mapsto (\alpha x, y) \quad \alpha > 0$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representação geométrica:

Figura 10 - Dilatação ou contração na direção do eixo dos x .



Fonte: Steinbruch (1987).

A figura acima tem dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = \frac{1}{2}$.

Observemos que:

Se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;

Se $0 < \alpha < 1$, T contrai vetor

c) Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

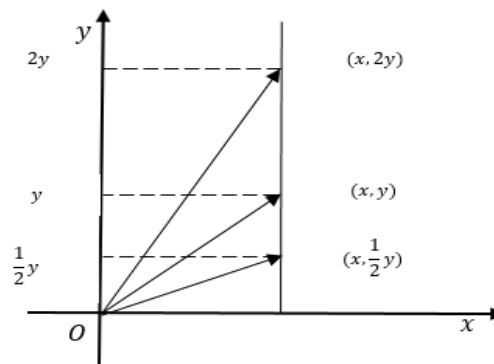
Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, \alpha y)$ $\alpha > 0$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, \alpha y) \quad \alpha > 0$$

Representação geométrica:

Figura 11 - Dilatação ou contração na direção do eixo dos y.



Fonte: Steinbruch (1987).

3.3 Cisalhamentos

a) Cisalhamento na direção do eixo dos x

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, \alpha y, y)$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, \alpha y, y)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representação geométrica:

Figura 12 - Cisalhamento na direção do eixo dos x .

Fonte: Steinbruch (1987).

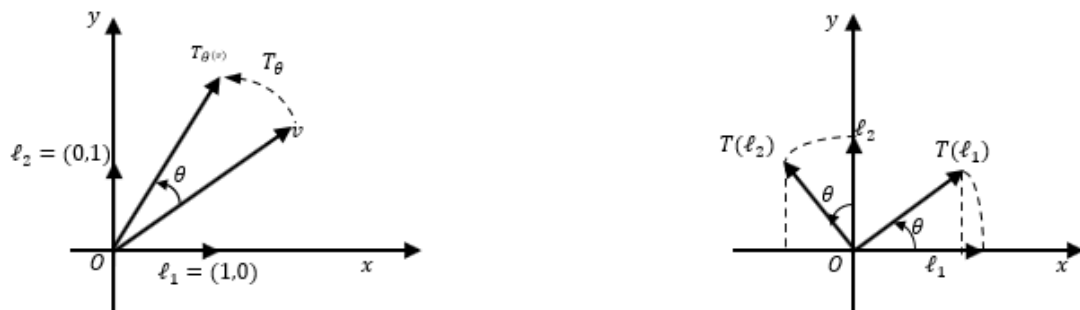
O feito do cisalhamento é transformar o retângulo $OAPB$ no paralelogramo $OAP'B'$, de mesma base e mesma altura. Observamos que, por esse cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos x até chegar em $(x + \alpha y, y)$, com exceção dos pontos do próprio eixo dos x , que permanecem em sua posição, pois para eles $y = 0$. Com isso o retângulo e o paralelogramo da figura 12 acima têm a mesma base \overline{OA} .

3.4 Rotação

A rotação do plano em torno da origem (figura 13 à esquerda), que faz cada ponta descrever um ângulo θ , determina uma transformação linear $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é:

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Figura 13 - A rotação do plano em torno da origem.



Fonte: Steinbruch (1987).

As imagens dos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ (figura 13 à direita) são

$$T(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$T(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

isto é

$$T(e_1) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$$

$$T(e_2) = (-\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2$$

por consequência, a matriz da transformação T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz chama-se de rotação de um ângulo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e é matriz canônica da transformação linear $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.

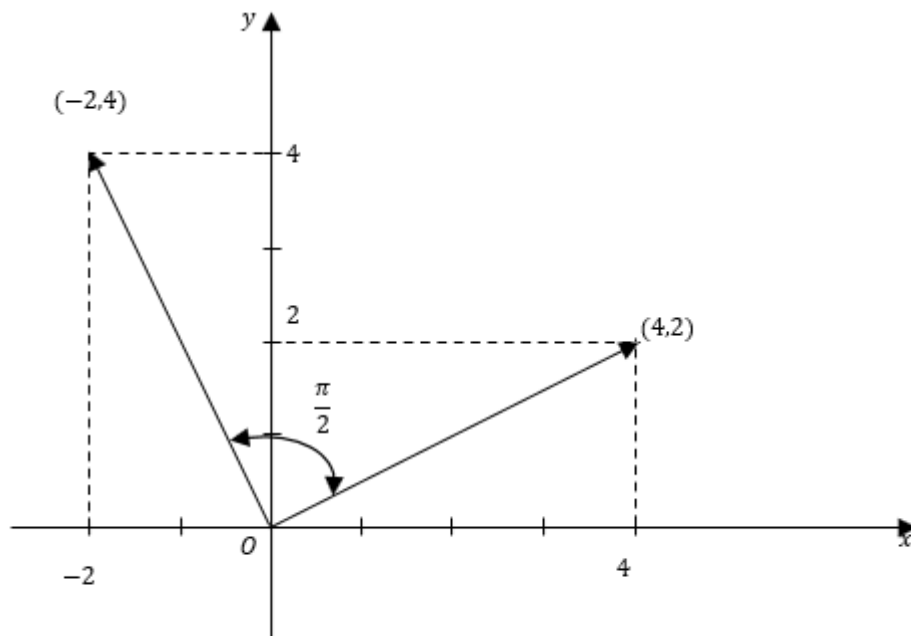
Exemplo 1.7 Determine a imagem do vetor $v = (4, 2)$ pela rotação de $\theta = \pi/2$.

$$[T(4, 2)] = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T(4, 2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T(4, 2)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Figura 14 - Imagem do vetor $v = (4, 2)$ pela rotação de $\theta = \pi/2$.



Fonte: Steinbruch (1987).

4 METODOLOGIA

Segundo Minayo (2016) a metodologia é o caminho percorrido para a elaboração de uma pesquisa científica, é a prática exercida na compreensão de fatos da realidade. A metodologia é, portanto, um conjunto de ferramentas, em que se inclui a teoria de abordagem (método de análise), os instrumentos de operacionalização do conhecimento (técnicas de pesquisa) e a criatividade do autor na seleção de dados e na elaboração do texto científico, bem como a sua capacidade crítica. Dessa forma, a metodologia a ser utilizada em um trabalho possui grande importância uma vez que determina os passos a serem seguidos para a concretização do trabalho.

O presente trabalho se desenvolveu primeiramente no estudo de artigos, livros, e trabalhos sobre Álgebra Linear, focando principalmente em transformações lineares. Após a revisão bibliográfica, testamos aplicações com uso de planilha eletrônica. Por fim, desenvolvemos a atividade com a planilha Excel por ser de fácil acesso ao autor e também ao meio acadêmico, como professores de Matemática.

5 TRANSFORMAÇÕES LINEARES COM USO DO EXCEL

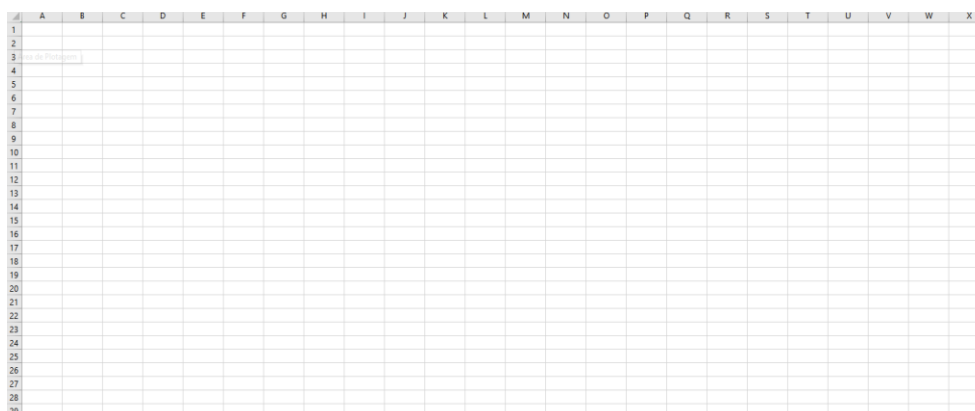
Existem programas computacionais que realizam gráficos e tabelas, podemos citar o GEOGEBRA, CALC do pacote LibreOffice e o MATLAB. A plataforma escolhida nesse trabalho foi planilha eletrônica Excel, por ter características singulares como; facilidade de manuseio, compilação e execução de dados simultâneos.

5.1 Excel

O Microsoft Excel é um programa de computador de análise e apresentação de dados em forma de planilhas. Apresenta também diversos recursos de cálculo e apresentação gráfica, tornando-se uma ferramenta utilizada por suas potencialidades de uso. O Microsoft Excel pode ser encontrado no site oficial da Microsoft, o Excel é um entre diversos programas que compõem o pacote office. Este é um software proprietário que requer adquirir uma licença para usá-lo, mas também pode-se adquirir um teste grátis por um período de tempo com todas as funções liberadas, estes softwares, também conhecidos como software não livre, tem como suas principais características o código fonte fechado e regras de uso especificados. No site oficial, encontre um passo a passo de como executar a instalação, que independe do sistema operacional que hardware executa.

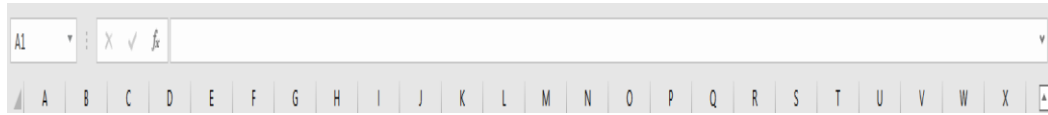
A interface do Excel consiste em uma tela onde na horizontal temos uma marcação alfabética e na vertical uma marcação numérica, o cruzamento dessas duas temos o que se chama de célula de dados do Excel. Unidade fundamental da planilha do programa.

Figura 15 - Estrutura básica da planilha Excel.



A barra de fórmulas é a parte onde é aplicado os comandos da biblioteca de funções, que podem ser lógicos, financeiros, matemáticos e trigonométricos entre outras

Figura 16 - Barra de formulas.



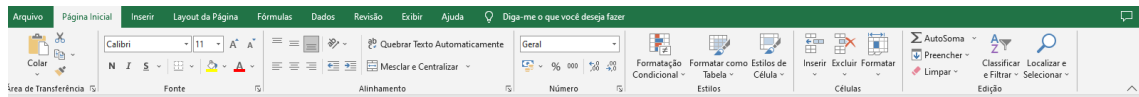
Fonte: Autor (2023).

funções.

Fonte: Autor (2023).

O programa tem uma barra de tarefas onde pode-se ser encontrada todas as funções exercidas pelo programa divididas por categorias, como vemos na figura 17.

Figura 17 - Barra de tarefas do Excel.



5.2 Atividade Desenvolvida Microsoft Excel

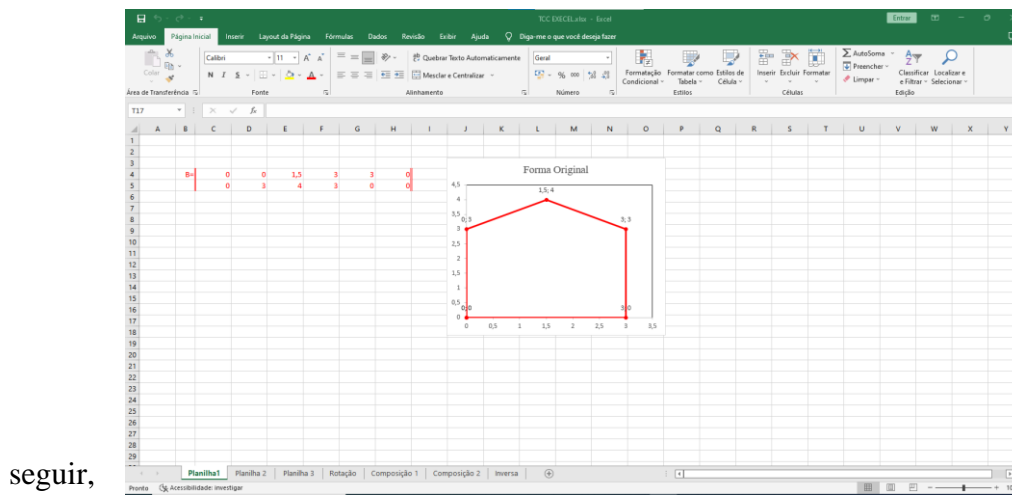
Fonte: Autor (2023).

Esta atividade foi baseada no trabalho de Brondino (2012) e a figura escolhida para ser desenvolvida no programa foi a do livro de Foley et al. (1990), que é apresentada na figura 18. Os valores que aparecem acima dos vértices da figura correspondem respectivamente as coordenadas x e y de cada vértice chamado original, que são A (0; 0), B (0; 3), C (1,5; 4), D (3; 0) e E (0; 0). E estão dispostas nas colunas da matriz B, presente na

Figura 18 - Representação geométrica da figura plana utilizada.

figura 18.

Fonte: Autor (2023).



seguir,

A
exemplos de

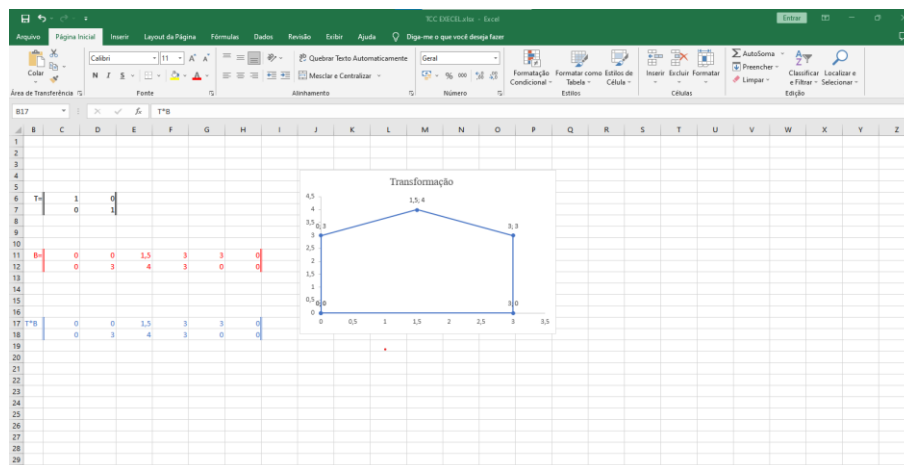
transformações plano com uso do Excel e sua representação geométrica:

i) 1ª Atividade Transformação Identidade

Para elaborar essa atividade, adicionamos a matriz T de ordem 2×2 na planilha, matriz essa que representa a matriz de transformação linear. Para realizar a multiplicação de

Figura 19 - Esboço da figura resultante do produto da matriz A pela matriz B.

matrizes no Microsoft Excel, devesse selecionar uma célula⁷ e na barra de fórmulas digitar



Fonte: Autor (2023).

“=MATRIZ.MULT(células da matriz T; células da matriz B)” em seguida pressionar Ctrl+Shift+Enter, que a operação multiplicação de matriz será realizada. No exemplo, usamos as células referentes a matriz T de forma “C6:D7” e a matriz B de forma “C11:H12”. Estes valores são dados pela simples forma de selecionar as células das matrizes.

Vale salientar que na multiplicação de matrizes, a ordem dos elementos afeta o resultado, ou seja, não é comutativa. O resultado da multiplicação da matriz T pela matriz B é apresentada na figura 19. Como a matriz T mostrada na figura 19 é a matriz identidade, a figura plana não é modificada.

O resultado dessa transformação gerou os pontos:

⁷ O uso da palavra “célula” ou “células” nesse texto tem referência a unidade básica da planilha Excel, que é o cruzamento de uma coluna com uma linha da planilha.

$$\begin{aligned}
 A(0; 0) &\rightarrow A'(0; 0) \\
 B(0; 3) &\rightarrow B'(0; 3) \\
 C(1,5; 4) &\rightarrow C'(1,5; 4) \\
 D(3; 3) &\rightarrow D'(3; 3) \\
 E(3; 0) &\rightarrow E'(3; 0) \\
 F(0; 0) &\rightarrow F'(0; 0)
 \end{aligned}$$

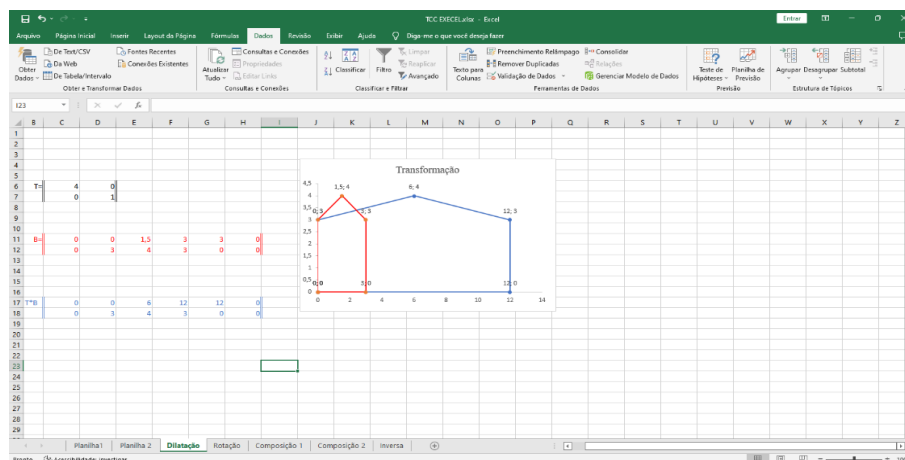
Na figura 19 é mostrada a visualização simultânea da matriz de transformação, das coordenadas dos vetores da figura original (Domínio), das coordenadas dos vértices da figura transformada (Imagem) e da representação gráfica da transformação. O Excel também contém um editor de texto em sua constituição permitindo o uso de recurso de cores, onde a cor que identifica a matriz aparece na figura gerada por esta matriz.

A modificação numérica dos elementos da matriz T, sua aplicação a matriz B provoca uma mudança de forma na figura originária. Esta mudança de forma pode ser verificada para vários tipos de transformação. Pois, o mecanismo de operação do Excel está atrelado de forma fixa as células da matriz e seus valores, a modificação deles, recalcula a fórmula fixada na barra de fórmulas, ou seja, o produto de matrizes.

ii) 2ª Atividade Dilatação de uma Transformação Linear

Tomemos uma matriz $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aplicada a matriz B, tem-se uma dilatação horizontal de fator 4, que pode ser observado na cor azul do gráfico da figura 20.

Figura 20- Resultado da aplicação da matriz T a matriz B



O resultado dessa transformação gerou os pontos:

$$A(0; 0) \rightarrow A'(0; 0)$$

$$B(0; 3) \rightarrow B'(0; 3)$$

$$C(1,5; 4) \rightarrow C'(6; 4)$$

$$D(3; 3) \rightarrow D'(12; 3)$$

$$E(3; 0) \rightarrow E'(12; 0)$$

$$F(0; 0) \rightarrow F'(0; 0)$$

Observe que a figura 20 mostra a figura original, junto com a figura gerada pela transformação, esta sobreposição proporciona uma visão mais detalhada e concreta da transformação linear. Um ganho pedagógico considerável para os alunos, pois a visão do antes e depois de uma transformação linear gera uma visão dinâmica do processo matemático.

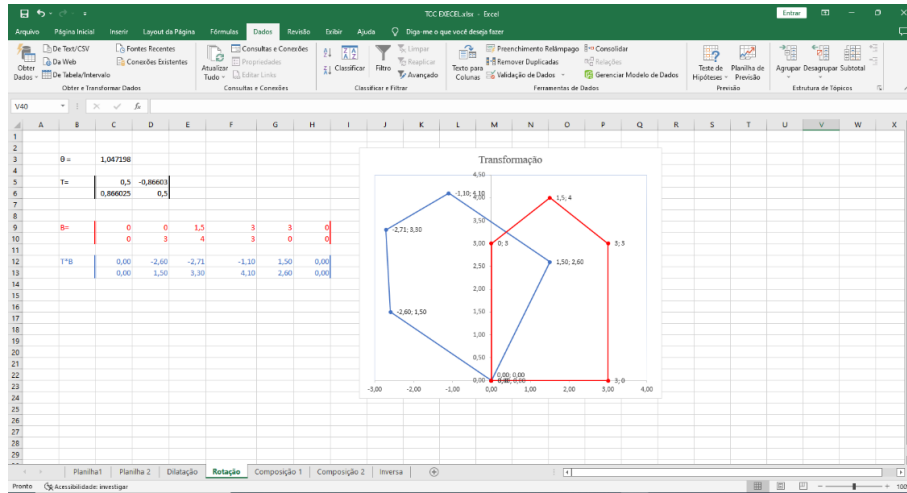
iii) 3ª atividade Rotação de uma Transformação Linear

Veja o efeito da rotação com relação à origem, devesse inicialmente escolher o ângulo de rotação desejado. A matriz T agora será representada pela matriz de rotação, que será dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Note que o ângulo θ tem uma célula importante nessa aplicação, o valor que era referido a ele terá que ser atrelado as funções trigonométricas da matriz T. Ao variar o ângulo θ , os elementos da matriz T são automaticamente atualizados pela planilha e o efeito de sua aplicação a matriz B pode-se ser visualizada. Na figura 21, o ângulo utilizado foi de $\frac{\pi}{3}$ radianos. A forma de aplicar $\frac{\pi}{3}$ radianos na barra de fórmula é “=PI()/3”.

Figura 21 - Resultado de uma rotação de um ângulo de $\pi/3$ radianos com relação à origem, aplicado a figura original.



Fonte: Autor (2023).

O resultado dessa transformação gerou os pontos:

$$A(0; 0) \rightarrow A'(0; 0)$$

$$B(0; 3) \rightarrow B'(-2,60; 1,5)$$

$$C(1,5; 4) \rightarrow C'(-2,71; 3,30)$$

$$D(3; 3) \rightarrow D'(-1,10; 4,10)$$

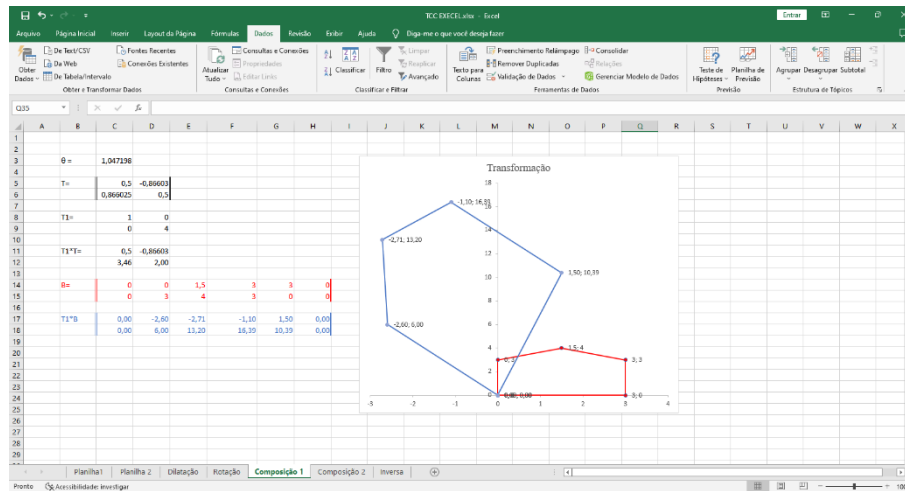
$$E(3; 0) \rightarrow E'(1,5; 2,60)$$

$$F(0; 0) \rightarrow F'(0; 0)$$

iv) 4ª atividade Composição de Transformações Lineares

. Uma nova matriz denominada de T1 será adicionada a planilha. A matriz da transformação resultante será dada pelo produto das matrizes T1 e T respectivamente, após isso, será aplicado o produto de matrizes a matriz B das coordenadas da figura original. O resultado da transformação resultante após uma rotação de ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com relação à origem, seguida por uma dilatação de fator 4 na direção vertical é apresentado na figura 22

Figura 22 - Resultado da aplicação de uma dilatação vertical de fator 4, seguida por uma rotação de um ângulo de $\pi/3$ radianos a figura original.



Fonte: Autor (2023).

O resultado dessa transformação gerou os pontos:

$$A(0; 0) \rightarrow A'(0; 0)$$

$$B(0; 3) \rightarrow B'(-2,60; 6)$$

$$C(1,5; 4) \rightarrow C'(-2,71; 13,20)$$

$$D(3; 3) \rightarrow D'(-1,10; 16,39)$$

$$E(3; 0) \rightarrow E'(1,5; 10,39)$$

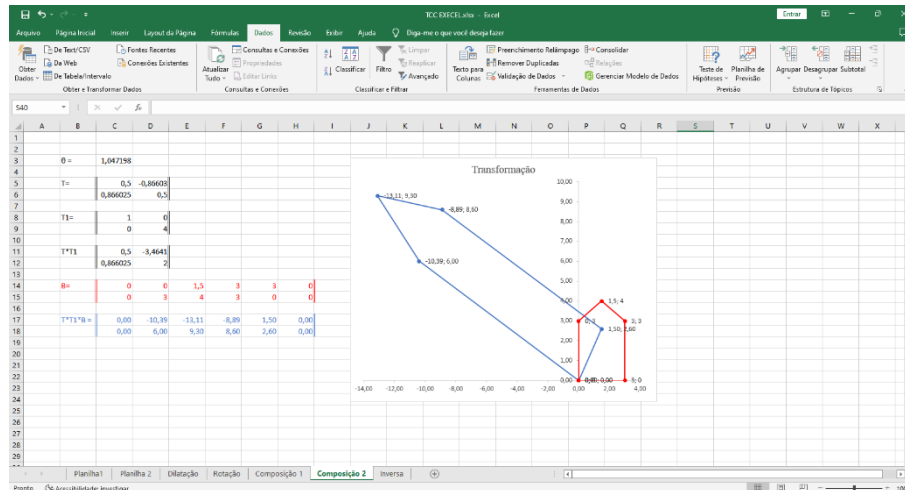
$$F(0; 0) \rightarrow F'(0; 0)$$

Sabendo que a propriedade comutativa não se aplica as transformações, podemos trabalhar a noção de ordem com que as transformações são aplicadas interfere nos resultados. Portanto, temos o produto de matrizes T1 e T resultando a figura 22. Mudando a ordem desse produto temos uma transformação completamente diferente.

A mudança feita na barra de formulas do Excel foi de “=MATRIZ.MULT(C8:D9;C5:D6)” que representa o produto $T1*T$, para “=MATRIZ.MULT(C5:D6;C8:D9)” que representa $T*T1$ na planilha. Aplicado a matriz de coordenadas da figura original

Desta forma, a aplicação da matriz $T*T1$ a matriz de coordenadas B pode ser observada na figura 23 e comparada com a figura 22.

Figura 23 - Resultado da aplicação de uma rotação de um ângulo $\pi/3$ radianos a figura original, seguida por uma dilatação vertical de fator 3.



Fonte: Autor (2023).

O resultado dessa transformação gerou os pontos:

$$A(0; 0) \rightarrow A'(0; 0)$$

$$B(0; 3) \rightarrow B'(-10,39; 6)$$

$$C(1,5; 4) \rightarrow C'(-13,11; 9,30)$$

$$D(3; 3) \rightarrow D'(-8,89; 8,60)$$

$$E(3; 0) \rightarrow E'(1,5; 2,60)$$

$$F(0; 0) \rightarrow F'(0; 0)$$

Agora vamos explorar a transformação inversa, para isso contamos com um recurso do software, onde a inversa da matriz de transformação é obtida. Esta matriz inversa (A matriz inversa está representada por $\text{Inv}(T*T1)$) é gerada a parte da imagem da transformação $T*T1$, para isso usamos o comando na barra de fórmulas “=MATRIZ.INVERSO(células da matriz $T*T1$)” em seguida pressionar $\text{Ctrl}+\text{Shift}+\text{Enter}$ que a operação matriz inversa será realizada (figura 24). Para a aplicação da transformação inversa devesse fazer a inversa da matriz $T*T1$, assim gerando a $\text{Inv}(T*T1)$. A partir deste resultado realizasse a multiplicação de matriz com a $T*T1*B$, assim resultando na matriz $\text{Inv}(T*T1)*(T*T1*B)$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades de compreensão dos conteúdos de álgebra linear são devidas em grande parte seu grau de abstração, que leva a má compreensão dos conceitos e um grande número de reprovação de discentes em anos iniciais de cursos de ciências matemáticas exatas. Devido a isso, veem-se procurando meios de diminuir essas dificuldades e aprimorar os métodos pedagógicos utilizados.

A revolução tecnológica nos deu diversas ferramentas que proporcionou um avanço de conhecimento nessas últimas décadas, mas ainda é pouco integrado no processo educacional e pedagógico brasileiro.

Tendo em vista este problema, esse trabalho apresentou uma aplicação de Microsoft Excel na exploração das transformações lineares planas, a escolha do programa deu-se pela fácil manipulação das planilhas, exibição de dados tabulares, gráficos e matriciais, além de apresentar transformações simultâneas de dados gráficos e algébricos. Assim sendo, pode-se afirmar o Microsoft Excel é uma ferramenta excepcional no ensino e aprendizagem, pois, consolida a argumentação e dedução processo matemático.

O aprendizado é baseado na capacidade que o indivíduo tem em apreender certos conteúdos, e esse aprendizado está atrelado a didática escolhida. Este trabalho visa a integração de um novo método de ensino que venha a ser acrescentado na prática pedagógica diária da sala de aula. Reforçado assim o ensino e aprendizagem atual.

Como as planilhas eletrônicas tem uma capacidade expressiva de visualização e edição dos dados, sugerimos que novos trabalhos sejam desenvolvidos abordando conteúdos básicos do Ensino Médio e Fundamental⁸, pois, como sabemos e é demonstrado em diversos exames internacionais de desenvolvimento educacional há um déficit no aprendizado de Matemática. E que essas aplicações sejam disponibilidades para esse público.

Para elaborações mais complexas de transformações lineares devesse procurar um software mais completo e específico como o MATLAB., podemos citar como exemplo o artigo Parmegiani (2011), que descreve uma metodologia de trabalho utilizada na disciplina de Álgebra Linear, relacionada ao ensino das transformações lineares no plano com a utilização do MATLAB. Porém esse software é um pouco mais complexo que o utilizado nesse trabalho.

⁸ Conteúdos como grandezas e medidas são ótimos para serem explorados na planilha Excel, por ser de simples estruturação no software. Assim como alguns conteúdos de álgebra e estatísticas. Não há muito sentido abordar conteúdos como funções no Excel, em relação à representação gráfica, pois, existem softwares mais simples e intuitivos como o geômetra.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. **Álgebra linear**. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980

BRONDINO, N. **UMA SUGESTÃO DE USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES**. COBENGE 2012 - XL COBENGE: UFPA - BELÉM/PA, [s. l.], 3 set. 2012. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/7/artigos/103759.pdf>. Acesso em: 21 out. 2022.

CALLIOLI, C. A. et alii. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1978

DORIER, J. (1997). **Continuous analysis of one year of science students' work in linear algebra, in first year of french university**. In G: Booker,P.Cobb & T.N.de Mendicuti (Ed.), *Proceedings of the XIVth annual meeting of the psychology of mathematics education - vol. 2* (pp. 35-42). Mexico: CINESTAV. Retrieved from <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16903>

LIMA, E. L.. **Álgebra Linear**. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1996. Disponível em: https://famaf.aulavirtual.unc.edu.ar/pluginfile.php/31446/mod_resource/content/1/%5BElon_Lages_Lima%5D_IMPA_Algebra_Linear.pdf Acesso em: 17 out. 2022.

FOLEY, J.D. et al. **Computer Graphics: Principles and Practice**. Local: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

MARIA, P. **O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico**. Uminho.pt, 19 jan. 2018.

MINAYO. M C, S. O desafio da pesquisa social. In: MINAYO. M, C, S.; DESLANDES. S, F.; GOMES. R. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 1ª reimp. – Petrópolis, RJ : Vozes, 2016.

NICHOLSON, W.K. **Álgebra Linear**, 2a. edição, McGrawHill, 2006.

NOMURA N. M. (2008). PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA **Como Sobrevivem as Diferentes Noções de Álgebra Linear nos Cursos de Engenharia Elétrica e nas**

Instituições, 2008, 138 p. Dissertação (Mestrado). Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11343> - Acesso em: 27 set. 2022

OLIVEIRA, V. C. A. DE [UNESP. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. Aleph, p. 187 f. : il., 22 ago. 2002.

PARMEGIANI, R. (2011). **Explorando as Transformações Lineares no Plano com o Uso do Matlab**. Anais do XXXIX COBENGE - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. CD-ROM.

PARMEGIANI, Roselice. **EXPLORANDO AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO COM O USO DO MATLAB**. COBENGE 2011 - XXXIX COBENGE: FURB - BLUMENAU/SC, [s. l.], 2011. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/8/sexoestec/art1578.pdf>. Acesso em: 18 set. 2022

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. [sl: sn] 1985

SANTANA, F. T. DE et al. **Inovação no processo de ensino e aprendizagem de álgebra linear usando o software geogebra**. repositorio.ufrn.br, 16 set. 2019.