UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

WILLIAMS DA SILVA SANTOS

A ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO PARA HIPERSUPERFÍCIES MINÍMAS

Belém

2023

WILLIAMS DA SILVA SANTOS

A ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO PARA HIPERSUPERFÍCIES MINÍMAS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva.

Belém

2023

WILLIAMS DA SILVA SANTOS

A ESTIMATIVA DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO PARA HIPERSUPERFÍCIES MINÍMAS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva (Orientador)
Faculdade de Matemática, UFPA

José Edilson Ferreira Filho

Prof. Dr. José Edilson Ferreira Filho (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

Valter Borges

Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Júnior (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA DEFESA: 13 / 12 / 2023

Conceito: Excelente

Belém

2023

Dedico este trabalho à minha mãe, Rita de Cássia da Silva Santos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família por todo suporte que puderam me dar durante toda minha graduação.

Aos meus amigos(as) Alisson Thiago, Luiz Guilherme, Wallace Júnior, Felipe Quaresma, Augusto Cezar, Bheatriz Costa, Evelyn Sabrina, Maria Rita e Eliane Oliveira pela amizade que cultivamos durante esse período.

Ao meu orientador Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva por me orientar durante esses 3 anos, de orientação de iniciação científica ao TCC.

Ao Prof Dr. Valter Borges por ser solícito, pela sua influência e contribuição em minha formação acadêmica.

A todos os outros professores que fizeram parte da minha trajetória.

Aos membros da banca que aceitaram o convite para participar.

Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro de gigantes.

Isaac Newton.

RESUMO

Neste trabalho, abordaremos os principais conceitos da geometria riemanniana, o qual é um campo da geometria diferencial dedicado ao estudo das variedades riemannianas. Estes conceitos têm a capacidade de estender, por exemplo, a compreensão dos principais operadores do cálculo diferencial integral, como o laplaciano. A partir disso, usaremos esses conceitos para obter uma estimativa para o primeiro autovalor do laplaciano para a hipersuperfícies minimamente mergulhadas em $\mathbb{S}^{n+1}$, o qual foi obtido em [2], nessa demonstração empregamos a conhecida fórmula de Reilly. Por fim, combinaremos esse resultado com um resultado obtido por P. Yang e S. T. Yau em [8], para obter um limite inferior para a área de uma hipersuperfície mínima em termos de seu gênero, da sua dimensão e do primeiro autovalor do laplaciano.

Palavras-chave: Geometria, Geometria riemanniana, autovalor, laplaciano.

ABSTRACT

In this work, we will address the main concepts of Riemannian geometry, which is a field of differential geometry dedicated to the study of Riemannian manifolds. These concepts have the capacity to extend, for example, the understanding of the main operators of integral differential calculus, such as the laplacian. We will use these concepts to obtain an estimate for the first eigenvalue of the Laplacian for minimally dipped hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$, which was obtained in [2], in this demonstration we employ the well-known Reilly formula. Finally, we will combine this result with a result obtained by P. Yang and S. T. Yau in [8], to obtain a lower bound for the area of a minimal hypersurface in terms of its genus, its dimension and the first eigenvalue of the laplacian..

Key-words: Geometry, Riemannian geometry, eigenvalue, laplacian.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A geometria Riemanniana originou-se com a visão de Bernhard Riemann(1826-1866) expressa em sua palestra inaugural "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"("Sobre as hipóteses nas quais a geometria se baseia") no ano de 1866. É uma generalização consideravelmente ampla e abstrata da geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, podemos caracterizar a geometria Riemanniana como o ramo da geometria diferencial que estuda as chamadas variedades Riemannianas, as quais são definidas como variedades diferenciáveis com uma métrica Riemanniana (um produto interno sobre o espaço tangente em cada ponto que varia diferenciavelmente de ponto a ponto). Isto dá, em particular, noções locais de ângulo, comprimento de curvas, áreas e etc... Tal área teve um impacto profundo na comunidade acadêmica e permitiu até mesmo a formulação da teoria geral da relatividade de Albert Einstein. Nosso objetivo aqui é desenvolver a teoria dos principais objetos estudados na área, sendo eles as variedades Riemannianas, curvaturas e imersões isométricas, de tal maneira que determinaremos um limitante inferior para o primeiro autovalor de uma hipersuperfície orientável, fechada e mergulhada minimamente em $\mathbb{S}^{n+1}$ e, como consequência desse resultado, sob as mesmas hipóteses, determinamos a estimativa para a área de uma hipersuperfície em termos da sua dimensão e do seu gênero.

Capítulo 2

Variedades Diferenciáveis

Inicialmente, apresentaremos um conceito que irá permear grande parte dos resultados subsequentes, sendo esse o de variedades diferenciáveis. A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial Integral a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Além disso, abordaremos também a noção de vetor tangente à uma variedade, aplicações diferenciáveis entre variedades, diferencial de uma aplicação e difeomorfismos. Alguns dos exemplos mostrados neste capítulo podem ser encontrados em [1], [4], [5] e [6].

2.1 Definições e Exemplos

Definição 1. *Uma* ***variedade diferenciável*** *de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $\mathrm{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que*

(i) $\bigcup_\alpha \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha) = M$

(ii) Para todos os indices α, β tais que $\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathrm{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$ os conjuntos $\mathrm{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathrm{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathrm{x}_\beta^{-1} \circ \mathrm{x}_\alpha$ e $\mathrm{x}_\alpha^{-1} \circ \mathrm{x}_\beta$ são diferenciáveis.

(iii) A família $\{(U_\alpha, \mathrm{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (i). e (ii).

Dado $p \in \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação x_α ou o par $(U_\alpha, \mathrm{x}_\alpha)$ é dito ser uma ***parametrização*** *(ou sistema de coordenadas) de M em p e $\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)$ uma* ***vizinhança coordenada*** *em p. Uma família $(U_\alpha, \mathrm{x}_\alpha)$ satisfazendo (i), (ii) e (iii) definem estrutura diferenciável em M. A condição (iii) permanece por motivos técnicos, para mais detalhe consulte [4]. Na verdade, podemos facilmente* *completar uma estrutura diferenciável em M agregando todas as parametrizações que, juntamente com alguma parametrização da estrutura, satisfazem a condição (ii), como demonstra [4]. Denotaremos apenas por M^n uma variedade diferenciável M de dimensão n.*

Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Para definirmos uma topologia em M, basta declarar que um subconjunto $A \subset M$ é aberto em M, se $\mathrm{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo α. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações x_α são contínuas. Para demonstrarmos tal fato nos valemos da definição de topologia em um conjunto, i.e, mostremos que $\varnothing$ e M são abertos, que união arbitrária de abertos de M é aberta e a interseção finita de abertos de M é aberta.

(i) $\varnothing$ e M são abertos: De fato, pois

$$\mathrm{x}_\alpha^{-1}(\varnothing \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathrm{x}_\alpha^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

$$\mathrm{x}_\alpha^{-1}(M \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathrm{x}_\alpha^{-1}(\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$$

Ao qual ambos são abertos em $\mathbb{R}^n$

(ii) A união arbitrária de abertos de M é aberta: Seja $\bigcup\limits_{\lambda \in I} A_\lambda$ uma união arbitrária de abertos A_λ em M, então

$$\mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(\left(\bigcup_{j\in I} A_j\right) \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{j\in I}(A_j \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha))\right) = \bigcup_{j\in I} \mathrm{x}_\alpha^{-1}(A_j \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha))$$

De tal maneira que $\mathrm{x}_\alpha^{-1}(A_j \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para cada $j \in I$.

(iii) A interseção finita de abertos de M é aberta: Seja $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_\lambda$ a interseção finita de abertos B_k em M, então

$$\mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(B_k \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha))\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(B_k \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)\right)$$

Onde $\mathrm{x}_\alpha^{-1}\left(B_k \cap \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)\right)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo $k = 1, ..., n$

Observação. Neste trabalho, o espaço topológico considerado sobre uma varieda difrenciável serão apenas aqueles que são de Hausdorff e com base enumerável.

Exemplo 1 ($\mathbb{R}^n$)**.** Considere $M = \mathbb{R}^n$ com a seguinte estrutura diferenciável $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$, onde $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $Id_{\mathbb{R}^n}(x) = x$, é imediato verificar que com essa estrutura $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável.

Exemplo 2 (Esfera $\mathbb{S}^n$)**.** Dado o conjunto

$$M^n = \mathbb{S}^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{k}^{n+1} x_k^2 = 1\right\}$$

Para cada $i = 1, 2, ..., n$ considere o hemisfério

$$U_i = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}^n; x_i = 0 \text{ e } x_1^2 + ... + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + ... + x_{n+1}^2 < 1\}$$

e defina as aplicações $\varphi_i^{\pm} : U_i^n \to \mathbb{S}^n$ dadas por

$$\varphi_i^{\pm}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm D_i, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$$

tal que $D_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) = \sqrt{1 - (x_1^2 + ... + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + ... + x_{n+1}^2)}$. Geometricamente, isso equivale a cobrir a esfera $\mathbb{S}^n$ com vizinhanças coordenadas que são semi-esferas perpendiculares aos eixos x_1, x_2 e x_3 e tomar como coordenada em, por exemplo, $\varphi_i^+(U_i)$ a projeção ortogonal de $\varphi_i^+(U_i)$ sobre o plano $x_i = 0$. Com isso, é imediato verificar que para todo $i = 1, 2, ..., n$ os itens (i) e (ii) da Definição 1 são satisfeitos.

Exemplo 3 (Variedades como gráfico de funções)**.** Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto qualquer e $f : U \to \mathbb{R}^k$ é uma função contínua qualquer, então o gráfico de f

$$U \times f(U) = graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\}$$

na topologia induzida de $\mathbb{R}^k$ é uma variedade diferenciável de dimensão n, cuja parametrização consiste da aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to graf(f)$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+k}$

Definição 2. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é **diferenciável** em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização, $\mathrm{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(\mathrm{x}(U)) \subset \mathrm{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathrm{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

*é diferenciável em $\mathrm{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos desse aberto. A aplicação (2.1) é denominada **expressão local de** φ nas parametrizações x e y.*

Decorre de (ii) da Definição 1 que a definição de uma aplicação diferenciável independe das parametrizações x e y. Assim, dadas quaisquer outras parametrizações (U_1, x_1) de p e (V_1, y_1) de $\varphi(p)$ tais que $\varphi(\mathrm{x}_1(U_1)) \subset \mathrm{y}_1(V_1)$, temos que $\mathrm{y}_1^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x}_1$ é diferenciável, pois

$$\mathrm{y}_1^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x}_1 = (\mathrm{y}_1^{-1} \circ \mathrm{y}) \circ (\mathrm{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x}) \circ (\mathrm{x}^{-1} \circ \mathrm{x}_1)$$

e $\mathrm{y}_1^{-1} \circ \mathrm{y}$, $\mathrm{x}^{-1} \circ \mathrm{x}_1$ são diferenciáveis.

Observação. Ocasionalmente omitiremos a parametrização x quando trabalhamos com a representação de uma função f em coordenadas e escrevemos

$$f(x_1, ..., x_n)$$

ao invés de

$$(f \circ \mathrm{x})(x_1, ..., x_n)$$

2.2 Vetores tangente

Consideremos agora a questão de como definir a noção de vetor tangente a um ponto em uma variedades diferenciável. Esta noção não é óbvia, já que uma variedade é um espaço abstrato que não se encontra em princípio imerso em um espaço ambiente, por exemplo, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Portanto, precisamos buscar uma característica de vetores tangentes em espaços euclidianos que independem do espaço ambiente.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, então

$$\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

se $\alpha(t_0) = p$ temos que o vetor tangente a $\alpha'(t_0) = v$ é dado por

$$\alpha'(t_0) = \left(\frac{dx_1}{dt}(t_0), ..., \frac{dx_n}{dt}(t_0)\right)$$

Além disso, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em p, então a derivada direcional de f em p na direção de v é dada pela regra da cadeia por

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{dx_i}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(p)$$

Como as derivadas parciais são operadores lineares sobre funções, esta expressão mostra que a derivada direcional em p na direção de v pode ser vista como um *funcional linear* atuando sobre funções diferenciáveis que depende apenas do vetor tangente v à curva. Esta noção pode ser generalizada para variedades diferenciáveis da seguinte forma.

Definição 3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ é chamada **curva** diferenciável em M. Suponha que $\alpha(t_0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O **vetor tangente** à curva α em $t = t_0$ é a função $\alpha'(t_0) : C^\infty \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(t_0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t_0}, \quad f \in C^\infty(M)$$

Um vetor tangente à variedade M em p é qualquer vetor tangente à uma curva diferenciável passando por p. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p será o espaço vetorial denotado por T_pM.

Além disso, segue que, se $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em $\mathrm{x}(x_0) = p \in M$, escrevendo a função f e a curva α nesse sistema de coordenadas, obtemos

$$(f \circ \mathrm{x})(q) = f(x_1(q), ..., x_n(q)), \qquad q = (x_1, ..., x_n) \in U$$

e

$$(\mathrm{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), \qquad t \in I$$

Onde observamos que $f \circ \mathrm{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{x}^{-1} \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n$. Então, por definição, o vetor tangente a curva α em p tem sua expressão em coordenadas locais dada por

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0)(f) &= \left.\frac{d}{dt}[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]\right|_{t_0} \\
&= \sum_i \left.\frac{\partial (f \circ x)}{\partial x_i}\right|_{(x^{-1}\circ\alpha)(t_0)} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t_0} \qquad \text{(Regra da Cadeia)} \\
&= \sum_i \left.\frac{\partial (f \circ x)}{\partial x_i}\right|_{x_0} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t_0}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\alpha'(t_0)(f) = \sum_i \left(\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{x_0} \right) f$$

Podemos observar na expressão acima que o vetor tangente a uma curva α em p só depende das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Além disso, temos também que o conjunto T_pM, juntamente com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n denominado de **espaço tangente de** M **em** p e que a escolha de uma parametrização $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ determina uma base associada $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1}^n$ cujos vetores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ são conhecidos como **vetores coordenados** e são definidos por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \mathrm{x})\right|_x$$

Proposição 1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável . Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Demonstração. Sejam x e y parametrizações de p e $\varphi(p)$ respectivamente, então representando a aplicação φ e a curva α em tais parametrizações, obtemos

$$(\mathrm{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x})(q) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$$

e

$$(\mathrm{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

Daí, tomando $\beta = \varphi \circ \alpha$ (em coordenadas), segue

$$\beta(t) = ((\mathrm{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{x}) \circ (\mathrm{x}^{-1} \circ \alpha))(t) = (y_1(x_1(t), ..., x_n(t)), ..., y_m(x_1(t), ..., x_n(t))) \in \mathbb{R}^m$$

Com isso, se $F : M_2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $f(p) \in M_2$, então

$$(F \circ \beta)(t) = F(y_1(x_1(t), ..., x_n(t)), ..., y_m(x_1(t), ..., x_n(t)))$$

Logo, por definição de vetor tangente, temos

$$\begin{aligned}\beta'(0)(F) &= \left.\frac{d}{dt}(F \circ \beta)(t)\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1,j=1}^{n,m} \left(\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_0 \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) F\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{\partial/\partial y_i\}_{i=1}^m$ de $T_{\varphi(p)}M$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\beta'(0) &= \left(\sum_i \frac{dx_i}{dt}\bigg|_0 \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, ..., \sum_i \frac{dx_i}{dt}\bigg|_0 \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\right)_{\partial/\partial y_i} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = d\varphi_p(v)
\end{aligned}
$$

Com isso, a matriz acima mostra que a aplicação $d\varphi_p(v) : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é uma transformação linear que não depende da escolha de α. $\square$

Definição 4. *A transformação linear dada pela proposição anterior é chamada de* ***diferencial*** *de φ em p.*

Definição 5. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é um* ***difeomorfismo*** *se ela é diferenciável, bijetiva e sua inversa φ^{-1} for diferenciável. Além disso, φ é um* ***difeomorfismo local*** *em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V vizinhança de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

2.3 Campos de vetores e colchetes

O objetivo deste capítulo é introduzir campos vetoriais. Deve-se pensar num campo vetorial como uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor T_pM. Como formalização de tal conceito, inicialmente definimos o fibrado tangente de uma variedade diferenciável.

Definição 6 (Fibrado tangente)**.** ***O fibrado tangente****, denotado por TM, de uma variedade diferenciável M é a união disjunta de todos os espaços tangentes de M, ou ainda*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$$

Além disso, dado que M é uma variedade diferenciável, então M admite uma estrutura diferenciável máxima $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$. Para cada α definimos

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$$

por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right), \quad (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha) \in U_\alpha \quad \text{e} \quad (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$$

Com a estrutura diferenciável $\{(y_\alpha, U_\alpha \times \mathbb{R}^n)\}$ é possível mostrar que TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. De fato, como $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ e $d(x_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_{\alpha(q)}}M$, $q \in U_\alpha$, então

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$$

o que verifica (i) da Definição 1. Agora, seja y_β uma outra parametrização para TM e $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$, temos

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)) \quad q_\alpha \in U_\alpha\,,\ q_\beta \in U_\beta \ \text{ e } \ v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$$

Logo

$$y_\beta^{-1} \circ x_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha))$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ também será, o que torna $y_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ diferenciável, o mesmo conclui-se para $y_\alpha^{-1} \circ x_\beta$, e assim verificamos a condição (ii) da Definição 1. Portanto, TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 7 (Campo de vetores)**.** *Um **campo de vetores** X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é dito diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável. Consideremos uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, então é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{n}$ é a base associada a x. Denotaremos por $\mathscr{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis de uma variedade diferenciável.

Outra forma de ver um campo de vetores diferenciável em M é como o operador que associa a cada função $f \in C^\infty(M)$ uma função $Xf \in C^\infty$ através da expressão

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f = X_p f$$

Onde X_p é um vetor tangente em T_pM. Note ainda que, a partir dessa caracterização

(i) X é linear: Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$ então

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \sum_i a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sum_i a_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \sum_i a_i(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}$$
$$= \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$$

(ii) X satisfaz a regra do produto: Seja $f, g \in C^\infty(M)$, então

$$X_p(fg) = \sum_i a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = g\sum_i a_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\sum_i a_i(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}$$
$$= gX_p(f) + fX_p(g)$$

Ao exibir um campo de vetores como um operador podemos agora passar a considerar iterações do tipo $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$ onde $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Embora, em geral, a expressão obtida por $X(Y(f))$ ou $Y(X(f))$ não é um campo vetorial porque não satisfaz a regra do produto e, além disso, envolvem derivadas de ordem superior. Por outro lado, a expressão

$$X(Y(f)) - Y(X(f))$$

define um campo vetorial.

Lema 1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$, $Z(f) = (XY - YX)f$.*

Demonstração. Provaremos inicialmente que, se Z existe, então ele é único. Sejam $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, $p \in M$ e $\mathrm{x} : U \to M$ uma parametrização de p e suas expressões locais dadas por

$$X = \sum_i a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad Y = \sum_j b_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

daí

$$X(Y(f)) = \sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i\left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)$$
$$Y(X(f)) = \sum_j b_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}\right)$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, temos que $Z(f)$ é dado na parametrização x por

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i,j}\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{2.2}$$

o que mostra a unicidade de Z. Para mostrar que Z existe, defina Z_α para cada $\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha) \subset M$ por meio de (2.2). Por meio da unicidade $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \varnothing$, o que nos permite definir Z para toda variedade M.

$\square$

O campo vetorial Z dado pelo lema anterior é chamado de ***colchete***, o qual é denotado por $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 2. *Se X,Y e Z são campos diferenciáveis em M, a e b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anticomutatividade)*
Por consequência $[X,X] = 0$

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ *(linearidade)*

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y]$ *= 0 (identidade de Jacobi)*

(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Definição 8. *Sejam M^n uma variedade diferenciável, $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $e_1,...,e_n \in \mathscr{X}(U)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{e_i|_q\}_{i=1}^n$, formam uma base de T_qM, dizemos que $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um **referencial local**. Se o conjunto de campos $\{e_i|_q\}_{i=1}^n$ formam uma base ortonormal de T_qM para cada $q \in U$, dizemos que $\{e_i\}_{i=1}^n$, é um **referencial local ortonormal**.*

Capítulo 3

Variedades Riemannianas

Introduziremos nessa seção uma das principais definições da teoria da Geometria Riemanniana e está se trata das Métricas Riemannianas a qual, pode se dizer que, em cada ponto de uma variedade diferenciável nos fornece um produto interno em T_pM a cada ponto $p \in M$. Daí então é possível definir o comprimento de vetores tangente, ângulos entre vetores e comprimentos de curvas, por exemplo.

3.1 Métricas Riemannianas

Definição 9 (Métrica Riemanniana)**.** *Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle .,. \rangle$ (uma forma bilinear, simétrica e positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Seja $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais se $X, Y \in \mathscr{X}(\mathrm{x}(U))$, então*

$$X = \sum_i X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_j Y^j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

daí

$$g(X,Y) = \left\langle \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j g_{ij}$$

Portanto, dizer que a métrica varia diferenciavelmente é dizer que as funções coordenadas $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, dada por $g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle$, com $\mathrm{x}(x_1, ..., x_n) = q \in \mathrm{x}(U)$ são *funções diferenciáveis em U. As funções g_{ij} são chamadas de **as componentes da métrica** e $G = (g_{ij})_{n\times n}$ é a matriz quadrada simétrica da forma bilinear na base associada a parametrização, então*

$$\langle u, v\rangle = u^T G v$$

onde u^T é uma matriz linha de n colunas e v é uma matriz coluna de n linhas com os coeficientes de ambos na base associada a parametrização.

Definição 10. *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de* ***Variedade Riemanniana****.*

Exemplo 4 (Métrica Euclidiana)**.** Seja $M = \mathbb{R}^n$ e para cada $p \in M$ identificamos $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, então

$$g(u, v) = \sum_{ij} u^i v^j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{ij} u^i v^j \delta_{ij} = \sum_{ij} u^i v^j$$

De tal forma que $g_{ij} = \delta_{ij}$. Daí, temos que a matriz G da deste produto interno matriz identidade. $\mathbb{R}^n$ é chamado de ***espaço euclidiano*** de dimensão n.

Definição 11 (Imersão)**.** *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \to N$ é uma **imersão** se dF_p é injetiva para todo $p \in M$*

Definição 12 (Imersão Isométrica)**.** *Sejam M e N^{n+m} variedades Riemannianas com métricas $\langle,\rangle_M$ e $\langle,\rangle_N$, respectivamente. Uma imersão $F : M \to N$ é chamada **imersão isométrica** se*

$$\langle u, v\rangle_M = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_N, \quad \forall p \in M \;\; e \;\; u, v \in T_pM \tag{3.1}$$

Exemplo 5 (Variedades em $\mathbb{R}^{n+k}$)**.** Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ uma variedade diferenciável de dimensão n. A aplicação inclusão $i : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ é uma imersão, de modo que, se considerarmos a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{n+k}$, ela induz em M uma métrica Riemanniana. Neste caso, a inclusão passa a ser uma imersão isométrica. Daí, como a diferencial di_p da inclusão é a inclusão natural de T_pM em $\mathbb{R}^{n+k}$, segue que

$$\langle v, w\rangle_p = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^{n+k}}, \quad v, w \in \mathbb{R}^{n+k}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{n+k}}$ é a métrica definida no Exemplo 4.

Exemplo 6 (Esfera $\mathbb{S}^n$)**.** A métrica euclidiana induz uma métrica em $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, como visto acima. Note que, de acordo com o Exemplo 3, podemos ver o hemisfério superior da esfera como o gráfico da função $f : B_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, ..., x_n) = \sqrt{1 - ||x||^2}$$

com

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{1-||x||^2}}$$

Então, uma parametrização $\varphi : \mathbb{R}^n \to graf(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ para gráfico de f é dada por

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$$

de tal forma que

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial x_i} = \begin{cases} \delta_{kj} & \text{se } \ k \neq n+1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & \text{se } \ k = n+1 \end{cases}$$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{x_j}(x) = \left(0, ..., \underset{j}{1}, ..., 0, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)$$

Logo

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{graf(f)} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1-||x||^2} \end{aligned}$$

Observação. Para diferentes parametrizações podemos definir diferentes funções g_{ij}. Por exemplo, para $\mathbb{S}^n$, podemos obter tais funções pela projeção estereográfica ou ainda por coordenadas esféricas.

Exemplo 7 (Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^n$)**.** Considere o semi espaço superior de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

Dado $R > 0$, se definirmos diretamente em $\mathbb{H}^n$ a métrica definida por

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij} R^2}{(x_n)^2}$$

então $\mathbb{H}^n$ com esta métrica, denotado $\mathbb{H}^n_R$, é uma variedade Riemanniana chamada o ***espaço hiperbólico*** n-dimensional.

Definição 13. *Um **campo vetorial** V **ao longo de uma curva** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M, a função $t \to V(t)f$ é uma função diferenciável em I. O campo vetorial indicado por $\dfrac{d\alpha}{dt}$ é chamado de **campo velocidade (ou tangente)** de α. Se M é* *uma variedade Riemanniana, a norma ou comprimento de um vetor $v \in T_pM$ é a norma induzida pelo produto interno*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u^i u^j}$$

Um ***segmento*** *da curva α é restrição de α a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ e seu comprimento é definido por*

$$\mathscr{L}(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b ||\alpha'(t)||_{T_{\alpha(t)}M} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(t) \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \frac{d\alpha^j}{dt}(t)} dt$$

com $g_{ij}(t) = g_{ij}(\alpha(t))$

Exemplo 8. Dada a curva $\alpha(t) = (0, t)$ no semi espaço $\mathbb{R}^2_+$, temos que $\alpha'(t) = (0, 1)$

(i) Se $\mathbb{R}^2_+$ é considerado imerso no plano euclidiano, então a métrica euclidiano induz uma métrica em $\mathbb{R}^2_+$, i.e

$$\mathscr{L}(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||_{\mathbb{R}^2} dt = \int_a^b 1 dt = b - a$$

(ii) Se consideramos $\mathbb{R}^2_+$ como o plano hiperbólico, então para $a, b > 0$

$$\mathscr{L}(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||_{\mathbb{R}^2_+} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\alpha(t)) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\delta_{ij} R^2}{t^2} \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt}} dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\frac{R^2}{t^2}} dt = \int_a^b \frac{R}{t} dt = R(\ln(b) - \ln(a))$$

3.2 Conexão Riemanniana

Agora, apresentaremos um conceito que nos oferece uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas por meio das conexões afins. Especificamente, podemos falar sobre a aceleração de uma curva em M.

Como em geral não existe um espaço ambiente $\mathbb{R}^n$ onde a variedade está mergulhada, não é imediatamente óbvio como definir um vetor aceleração a uma curva. Se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ é uma curva diferenciável em uma variedade M não podemos simplesmente definir

$$\alpha''(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha'(t) - \alpha'(t_0)}{t - t_0}$$

porque $\alpha'(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}M$ e $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$, i.e, estão em espaços vetoriais distintos, logo a diferença entre eles pode não fazer sentido. A definição do conceito de conexão atende a esta necessidade de definir uma noção de derivação intrínseca para campos vetoriais. O nome conexão se refere exatamente à ideia de "conectar" localmente os espaços tangentes de uma variedade. O interesse nas conexões afins está relacionado ao fato de que a escolha de uma métrica Riemanniana em uma variedade M determina de forma única uma conexão afim com propriedades específicas em M.

Conexões Afins

Definição 14. *Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$$

denotada por

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

que satisfaz as seguintes propriedades

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Observação. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, temos $\nabla_X f = X(f)$

Se M é uma variedade diferenciável e $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma parametrização. Considere a expressão em coordenadas locais de dois campos de vetores $X, Y \in \mathscr{X}(M)$

$$X = \sum_i x_i X_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_j y_j X_j$$

onde $X_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, então por meio das propriedades de conexão

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i x_i X_i} \sum_j y_j X_j \\
&= \sum_i \sum_j x_i \nabla_{X_i} y_j X_j \\
&= \sum_i \sum_j x_i (X_i(y_j) X_j + y_j \nabla_{X_i} X_j)
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{X_i} X_j$ é um campo fazemos(escrevendo em coordenadas locais) $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, de tal forma que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis conhecidas como ***símbolos de Christoffel***, daí

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{i,j} x_i \left(X_i(y_j) X_j + y_j \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\
&= \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j + \sum_{i,j,k} x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k \quad \text{(trocando o indice j por k na primeira parcela)} \\
&= \sum_{i,k} x_i X_i(y_k) X_k + \sum_{i,j,k} x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k \\
&= \sum_k \left(\sum_i x_i X_i(y_k) + \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k \\
&= \sum_k \left(X(y_k) + \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k
\end{aligned}$$

Em particular,

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(X_p(y_k) + \sum_{i,j} x_i(p) y_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) X_k(p)$$

os coeficientes x_i dependem apenas do valor de X em p, por outro lado $X_p(y_k)$, por definição de vetor tangente, dependem dos valores de Y ao longo de uma curva diferenciável passando por p cujo vetor tangente é X_p.

Exemplo 9 (Conexão Euclidiana)**.** Identificando os espaços tangentes em $\mathbb{R}^n$ com o próprio $\mathbb{R}^n$, vetores tangentes com vetores em $\mathbb{R}^n$ e campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ com aplicações diferenciáveis $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definimos a conexão euclidiana $\nabla : \mathscr{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p)$$

isto é, a derivada direcional do campo Y em p na direção de X_p.

Proposição 3. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α, denominado **derivada covariante** de V ao longo de c, tal que:*

(i) É linear

$$\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

onde W é um campo vetorial ao longo de α.

(ii) Satisfaz a regra do produto

$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$$

onde f é uma função diferenciável em I.

(iii) Se V é induzido por um campo de vetores $X \in \mathscr{X}(M)$, isto é, $V(t) = X(\alpha(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}X$

Demonstração. Provemos inicialmente a unicidade de $\frac{DV}{dt}$. Suponha que exista tal campo $\frac{DV}{dt}$ satisfazendo todas as propriedades do enunciado. Localmente, para um sistema de coordenadas, temos

$$V(t) = \sum_j V^j(t) X_j|_t, \qquad X_j|_t = X_j(\alpha(t))$$

Por meio das duas primeiras propriedades do enunciado

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dV^j}{dt}X_j + V^j\frac{DX_j}{dt}$$

Da terceira propriedade,

$$\frac{DV^j}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}X_j = \nabla_{\sum_i \frac{d\alpha^i}{dt}X_i} X_j = \sum_i \frac{d\alpha^i}{dt}\nabla_{X_i}X_j$$

Daí, $\dfrac{DV}{dt}$ se escreve localmente como

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dV^j}{dt} X_j + V^j \sum_i \frac{d\alpha^i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \tag{3.2}$$

o que mostra que o campo $\frac{DV}{dt}$ é unicamente determinado. Para determinar a existência de $\frac{DV}{dt}$, consideremos uma parametrização $\mathrm{x} : U \to M$ para uma vizinhança de $\alpha(t)$, defina o campo $\frac{DV}{dt}$ em $\mathrm{x}(U)$ por meio de (3.2), então é imediato verificar que um campo definido desta forma satisfaz todas as propriedades do enunciado. □

Definição 15. $\dfrac{DV}{dt}$ *é chamado de **derivada covariante** de V ao longo da curva α.*

Definição 16. . *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ é chamado **paralelo** quando $\dfrac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$*

Proposição 4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável e V_0 um vetor tangente em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo paralelo V definido ao longo de α tal que $V(t_0) = V_0$.*

Demonstração. [1, Proposição 2.6] □

Definição 17. *Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$, para todos $i, j = 1, ..., n$.*

Conexão Riemanniana

Como métricas Riemannianas e conexões definem cada uma uma estrutura geométrica particular, o caso mais relevante de variedade Riemanniana dotada de uma conexão é quando a estrutura geométrica definida por elas coincidem, ou seja, que reflita as propriedades da métrica. Para isso a conexão deve satisfazer duas condições.

Definição 18. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇. A conexão é dita **compatível com a métrica** $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável α e quaisquer pares de campos de vetores paralelos V e W ao longo de α, isto é, $\dfrac{DV}{dt} = \dfrac{DW}{dt} = 0$, tivermos $\langle V, W \rangle = constante$.*

Proposição 5. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$, tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

Demonstração. Suponha que ∇ é compatível com a métrica, i.e, para todos os campos vetoriais V e W ao longo de qualquer curva diferenciável α em M vale $\langle V, W\rangle = constante$. Fixe $t_0 \in I$ e tome uma base $B_{t_0} = \{E_i|_{t_0}\}_{i=1}^n$ ortonormal para $T_{\alpha(t_0)}M$. Por meio da Proposição 4 estenda paralelamente cada um dos vetores $E_i|_{t_0}$ a campos $V(t)$ ao longo de α, então pela compatibilidade com a métrica o conjunto $B_t = \{E_i|_t\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal para $T_{\alpha(t)}M$ com $t \in I$. Agora, dados campos V e W ao longo de α, podemos escrever

$$V = \sum_i V^i(t)E_i|_t \quad \text{e} \quad W = \sum_j W^j(t)E_j|_t$$

Como os campos $E_1, ..., E_n$ são paralelos ao longo de α, temos

$$\frac{DE_1}{dt} = ... = \frac{DE_n}{dt} = 0$$

logo,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dV^i}{dt}E_i + V_i\frac{DE_i}{dt} = \sum_i \frac{dV^i}{dt}E_i$$

similarmente,

$$\frac{DW}{dt} = \sum_j \frac{dW^j}{dt}E_j$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \left\langle \sum_i \frac{dV^i}{dt}E_i, \sum_j W^j E_j \right\rangle + \left\langle \sum_i V^i E_i, \sum_j \frac{dW^j}{dt}E_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \frac{dV^i}{dt}W^j\langle E_i, E_j\rangle + V^i\frac{dW^j}{dt}\langle E_i, E_j\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left(\frac{DV^i}{dt}W^j + V^i\frac{dW^j}{dt} \right) \delta_{ij} \qquad (\text{para} \ \ i = j) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_i V^i W^i \right) \\
&= \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle
\end{aligned}$$

Agora, se V e W são campos paralelos, segue

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle 0, W\rangle + \langle V, 0\rangle = 0$$

Portanto, $\langle V, W\rangle = constante$. □

Enunciamos agora um resultado que será de extrema importância para aplicações futuras.

Corolário 1. Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$$

Demonstração. Suponha que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e sejam $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável com $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in I$, e com $\alpha'(t_0) = X(p)$. Então

$$X(p)\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle\bigg|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z\rangle_p$$

Como p é arbitrário, segue o resultado. A recíproca é imediata. □

Definição 19. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Observação. Note que, dada uma parametrização $\mathrm{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, então se ∇ é simétrica, temos

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n$$

Ou seja, os índices inferiores dos símbolos de Christoffel são simétricos.

Enunciamos agora o teorema principal desta seção

Teorema 1. *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

(i) ∇ é simétrica

(ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana

Demonstração. [1, Teorema 3.6] □

Capítulo 4

Curvatura

Neste capítulo, abordaremos um dos principais invariantes geométricos da geometria Riemanniana, a curvatura. Apresentaremos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. A partir disso abordamos as curvaturas seccional, escalar e de Ricci.

4.1 Tensores

Grande parte dos conceitos utilizados nos estudos das variedades diferenciáveis é destinada a aplicar resultados da álgebra linear. O cálculo diferencial integral nos ensina como aproximar objetos diferenciáveis por objetos lineares, e as definições abstratas da teoria das variedades nos fornecem um método para interpretar essas aproximações lineares sem depender de coordenadas. Este capítulo generaliza o conceito de funcionais lineares para multilineares.

Definição 20. *Um* ***(r,1)-tensor*** T *é uma aplicação* $T : \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{r} \to \mathscr{X}(M)$ *multilinear sobre o anel* $C^\infty(M)$ *das funções diferenciáveis em* M*. Enquanto que, num* $(r, 0)$*-tensor, o contradomínio é* $C^\infty(M)$*. Formalmente.*

$$T(Y_1, ..., fX + gY, ...Y_r) = fT(Y_1, ..., Y_r) + gT(Y_1, ..., Y_r)$$

para todos $X, Y, Y_1, ..., Y_r \in \mathscr{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$*.*

Um tensor T é um objeto pontual no seguinte sentido. Seja $p \in M$ e U uma vizinhança de p e

$\{E_i\}_{i=1}^n$ um referencial local em U, então em U

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1} \text{ , ..., } Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}, \quad 1 \leq i_r \leq n$$

Pela linearidade do tensor T

$$T\left(\sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, ..., \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}\right) = \sum_{i_1,...,i_r} y_{i_1} \cdots y_{i_r} T(E_{i_1}, ..., E_{i_r})$$

Da expressão acima decorre que o valor de $T(Y_1, ..., Y_r)$ em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores em p de $T(E_{i_1}, ..., E_{i_1})$, e dos valores de $Y_1, ..., Y_r$ em p. E neste sentido que dizemos que T é pontual. As funções $T(E_{i_1}, ..., E_{i_n}) = T_{i_1 \dots i_n}$ são chamadas de ***componentes*** de T no referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$.

Exemplo 10. O ***tensor métrico*** $g : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$ definido por

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle \quad X, Y \in \mathscr{X}(M)$$

é um $(2, 0)-$tensor e suas componentes g_{ij} no referencial $\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^n$ são os coeficientes da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.

Ademais, em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como segue.

Definição 21. *Seja T um $(r, 1)$-tensor a* ***derivada covariante*** *de T é um $(r+1, 1)$-tensor ∇T dado por*

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, X) = \nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) - T(\nabla_X Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_X Y_r)$$

Enquanto que para um $(r, 0)$-tensor, temos

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, X) = X(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_X Y_r)$$

Exemplo 11. Em uma variedade Riemanniana M com a conexão de Levi-Civita ∇, temos que, se g é o tensor métrico, então $\nabla g = 0$. Com efeito, dados $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y, Z) &= Z\langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ \text{(Compatibilidade com a métrica)} \quad &= Z\langle X, Y \rangle - Z\langle X, Z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Curvatura

Definição 22. *Seja M uma variedade Riemanniana. A* **curvatura** *de M é um $(3,1)$-tensor*

$$R : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$$

definido por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad X,Y,Z \in \mathscr{X}(M)$$

Note que, se $M = \mathbb{R}^n$ e $X,Y,Z \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$, escrevemos tais campos nas coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$, então

$$\nabla_Y Z = (Y(z_1), ..., Y(z_n))$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (X(Y(z_1)), ..., X(Y(z_n))$$

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y(X(z_1)), ..., Y(X(z_n)))$$

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y](z_1), ..., [X,Y](z_n))$$

daí

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= (X(Y(z_1)), ..., X(Y(z_n)) - (Y(X(z_1)), ..., Y(X(z_n))) - ([X,Y](z_1), ..., [X,Y](z_n)) \\ &= ([X,Y](z_1), ..., [X,Y](z_n)) - ([X,Y](z_1), ..., [X,Y](z_n)) = 0 \end{aligned}$$

Podemos, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana, como havíamos afirmado.

Proposição 6. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

(i) R é bilinear em $\mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M)$, i.e,

$$R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1,Y)Z + gR(X_2,Y)Z$$

$$R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X,Y_1)Z + gR(X,Y_2)Z$$

para todos $X,Y,Z,X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathscr{X}(M)$ e $f,g \in C^\infty(M)$.

(ii) *Para todo par* (X,Y), $R : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ *é linear, i.e,*

$$R(X,Y)(fZ + gW) = fR(X,Y)Z + gR(X,Y)W$$

para todos $X,Y,Z,W \in \mathscr{X}(M)$ *e* $f,g \in C^\infty(M)$.

(iii) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(iv) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi)*

Demonstração. [1, Proposição 2.2] □

Por meio do tensor de curvatura podemos definir o $(4,0)$-tensor $R : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$ como segue

$$R(X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z, W\rangle$$

Proposição 7. *O tensor acima possui as seguintes propriedades:*

(i) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$

(ii) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

(iii) $\nabla_T R(X,Y,Z,W) + \nabla_Z R(X,Y,W,T) + \nabla_W R(X,Y,T,Z) = 0$ *(segunda identidade de Bianchi)*

Demonstração. [1, Proposição 2.5] □

4.3 Curvatura Seccional, Ricci e Escalar

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos

Curvatura seccional

Dado um espaço vetorial V e $x,y \in V$, indicaremos por $|x \times y|$ a expressão

$$|x \times y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle}$$

que representa a área do paralelogramo formados pelos vetores x e y.

Proposição 8. *Seja a $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{R(x,y,y,x)}{|x \times y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. De fato, considere $\{z, w\}$ outra base para σ. Seja $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ a matriz(inversível) mudança de base, escrevemos os vetores x e y como combinação linear dos vetores da base $\{z, w\}$

$$x = a_{11}z + a_{21}w$$

$$y = a_{12}z + a_{22}w$$

Por manipulação, obtemos $R(x,y,y,x) = (\det A)^2 R(z,w,w,z)$, um cálculo análogo também nos fornece $|x \times y| = (\det A)^2 |z \times w|$. Portanto,

$$K(x,y) = \frac{R(x,y,y,x)}{|x \times y|^2} = \frac{(\det A)^2 R(z,w,w,z)}{(\det A)^2 |z \times w|} = \frac{R(z,w,w,z)}{|z \times w|} = K(z,w)$$

Como a base $\{z, w\}$ é arbitrária, segue o resultado. $\square$

Definição 23. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado* ***curvatura seccional*** *de σ em p.*

Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar

Definição 24. *Definimos o* ***tensor de Ricci*** *como o traço do $(4,0)$-tensor. Isto é, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal e $u, v \in T_pM$, então para cada $p \in M$ o tensor de Ricci é dado por*

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, u)v, e_i \rangle$$

Observação. É imediato da Proposição 7 (i) que $\mathrm{Ric}(u,v) = \mathrm{Ric}(v,u)$

Definição 25. *Dado $p \in M$, fixemos um vetor $v \in T_pM$, de modo que $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n = v\}$ seja uma base ortonormal de T_pM, então*

$$|v \times e_j|^2 = |v|^2 |e_j|^2 - \langle v, e_j \rangle = 1, \quad \forall \ 1 \leq j \leq n-1$$

Vamos considerar todas as possíveis curvaturas seccionais dos planos que podemos gerar com v e tomemos

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K(v, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(e_i, v)v, e_i \rangle$$

e

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(e_j)$$

tais números são chamados de ***curvatura de Ricci*** *na direção de v e* ***curvatura escalar*** *em p, respectivamente*

Observação (Curvaturas de Variedades de Dimensão 2)**.** No caso de variedades Riemannianas de dimensão 2, para cada ponto $p \in M$ existe apenas um plano espaço tangente. Com isso, se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal para T_pM, temos

$$S(p) = \sum_{j=2}^{2} \mathrm{Ric}_p(e_j) = \mathrm{Ric}_p(e_1) + \mathrm{Ric}_p(e_2) = K(e_1, e_2) + K(e_2, e_1) = 2K(e_1, e_2)$$

Capítulo 5

Imersões isométricas

Inicialmente, relembramos a Definição 12, a qual nos diz que: *Se M^n e $\overline{M}^{n+k}$ são variedades diferenciáveis, uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma **imersão isométrica** se a diferencial df_p é injetiva para todo $p \in M$ e também*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM \quad e \quad df_p(u), df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$$

*O número k é chamado de codimensão da imersão f. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, i.e, se V é aberto em $f(M)$, então $V = f(M) \cap U$ onde U é aberto em $\overline{M}$, diz-se que f é um **mergulho**. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \to \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma **subvariedade** de $\overline{M}$. Chamamos $\overline{M}$ de **variedade ambiente**. O caso particular em que a codimensão k da imersão é 1, $f(M)$ é denominada uma **hipersuperfície**.*

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Então para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. Mais precisamente, existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Desta forma podemos simplificar a notação identificando U com sua imagem $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$, $f(q) \in f(U)$. Sendo assim, o espaço tangente de M em q se torna um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em $f(q)$. Além disso, podemos estender (localmente) os campos de vetores em M para campos de vetores em $\overline{M}$, isto é, os campos de vetores em M restritos a U podem ser estendidos a campos de vetores em $\overline{U}$. Ademais, assumindo a partir de agora que f seja uma imersão isométrica, observemos que para cada $q \in U$, o produto interno em

$T_q\overline{M}$ o decompõe na soma direta (aqui já identificamos q com $f(q)$)

$$T_p\overline{M} = T_qM \oplus T_qM^{\perp}$$

onde $T_qM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_qM em $T_q\overline{M}$. Assim, para cada $v \in T_q\overline{M}$, podemos escrever $v = v^{\top} + v^{\perp}$, com $v^{\top} \in T_qM$ e $v \in T_qM^{\perp}$. Neste caso, denominamos $v^{\top}$ e $v^{\perp}$ de componente tangencial e componente normal de v, respectivamente. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $T\overline{M}^{\perp} := \bigsqcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM^{\perp}$ chamado de ***fibrado normal*** e denotamos por $\mathscr{X}(M)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores normais a M.

Proposição 9. *Sejam $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente. Para $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ temos*

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\bar{X}}\overline{Y}\right)^{\top} \tag{5.1}$$

onde $(.)^{\top}$ denota a projeção ortogonal de $T\overline{M}|_M$ sobre TM e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões de X e Y a $\overline{M}$.

Demonstração. Comecemos mostrando que o segundo membro da igualdade realmente define uma conexão afim em M. Sejam $\overline{X}, \overline{Y}$ e $\overline{Z}$ extensões de X, Y e Z a $\overline{M}$. Então

$$\begin{aligned}\nabla_{X+Y}Z &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}+\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\top} + (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} \\ &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z\end{aligned}$$

Sejam $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$, $\overline{Z}$ extensão de Z, $\bar{g}$ e $\bar{h}$ extensões de g e h e também $\bar{g}\overline{X} + \bar{h}\overline{Y}$ extensão de $gX + hY$ num aberto de $\overline{M}$. Então,

$$\begin{aligned}\nabla_{gX+hY}Z &= (\overline{\nabla}_{\bar{g}\overline{X}+\bar{h}\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} = (\bar{g}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} + \bar{h}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} = \bar{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\top} + \bar{h}(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^{\top} \\ &= g\nabla_X Z + h\nabla_Y Z\end{aligned}$$

Nas mesmas condições

$$\begin{aligned}\nabla_X(gY) &= \left[\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\bar{g}\overline{Y})\right]^{\top} = (\overline{X}(\bar{g})\overline{Y} + \bar{g}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} = X(g)Y + \bar{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} \\ &= X(g)Y + g\nabla_X Y\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que ∇ é uma conexão afim em M. Resta mostrar que ∇ é compatível com a métrica e simétrica. Verifiquemos a compatibilidade com a métrica

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle &= \overline{X}\langle\overline{Y},\overline{Z}\rangle = \langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\rangle + \langle\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\rangle\\ &= \langle(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp} + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top},\overline{Z}\rangle + \langle\overline{Y},(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\top} + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\perp}\rangle\\ &= \langle(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp},\overline{Z}\rangle + \langle(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top},\overline{Z}\rangle + \langle\overline{Y},(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\top}\rangle + \langle\overline{Y},(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^{\perp}\rangle\end{aligned}$$

Como em p, $Z = \overline{Z}$ e $Y = \overline{Y}$, temos

$$\langle(\overline{\nabla}_{X}\overline{Y})^{\perp},\overline{Z}\rangle = \langle\overline{Y},(\overline{\nabla}_{X}\overline{Z})^{\perp}\rangle = 0$$

Daí

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle$$

Por fim, ∇ é simétrica. Com efeito

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top} - (\nabla_{\overline{Y}}\overline{X})^{\top} = (\nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_{\overline{Y}}\overline{X})^{\top}\\ &= ([\overline{X},\overline{Y}])^{\top}\\ &= [X,Y]\end{aligned}$$

Com isso, por meio do Teorema 1 concluímos que ∇ é a conexão de Levi-Civita M definida por (5.1) $\square$

Observe que, a partir da proposição anterior, se ∇ e $\overline{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões de X e Y a $\overline{M}$, então

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} &= \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp}\\ &= \nabla_X Y + \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp}\\ \Rightarrow \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp} &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y\end{aligned}$$

Daí, definimos

Definição 26. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica a aplicação bilinear e simétrica $\alpha : \mathscr{X}(U)\times\mathscr{X}(U)\to\mathscr{X}(U)^{\perp}$, dada por*

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é chamada de a ***segunda forma fundamental*** *de f.*

Definição 27. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica, um referencial ortonormal $\{\bar{e}_r\}_{r=1}^{n+k}$ em um aberto $\overline{U} \subset \overline{M}$ é dito **adaptado** à imersão f se, quando restritos a M, os campos de vetores $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n}$ são tangentes a M e os campos de vetores $\{\bar{e}_{n+j}\}_{j=1}^{k}$ são normais a M em $U := \overline{U} \cap M$.*

Sendo α a segunda forma fundamental de uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ e $\{e_1, ..., e_n, \eta_1, ..., \eta_k\}$ um referencial adaptado de um aberto $U \subset M$ o campo

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\sum_i \alpha(e_i, e_i) = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\langle \alpha(e_i, e_i), \eta_j\rangle \eta_j \in \mathscr{X}(M)^{\perp}$$

tem seu valor conhecido em $p \in M$ como ***vetor curvatura média***.

Definição 28. *Uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é **mínima** se $\overrightarrow{H} = 0$.*

Capítulo 6

A estimativa do primeiro autovalor para hipersuperfícies mínimas

6.1 Operadores diferenciáveis

A derivação covariante de tensores possibilita a extensão às variedades Riemannianas de certos operadores diferenciais (gradiente, divergente, laplaciano e hessiano) comumente utilizados no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Neste contexto, inicialmente abordaremos alguns desses operadores.

Em todas as próximas explanações, consideramos M como uma variedade Riemanniana de dimensão n, onde M está munida de uma conexão de Levi-Civita.

Definição 29. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $X \in \mathscr{X}(M)$. Definimos o* ***gradiente*** *de f como o campo vetorial diferenciável ∇f, tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f)$$

para todo $X \in \mathscr{X}(M)$.

Proposição 10. *Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal de uma vizinhança $U \subset M$. Então em U, temos*

$$\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$$

Demonstração. Dado $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal uma vizinhança $U \subset M$, então em U, $\nabla f = \sum_i f_i e_i$, e por definição de gradiente $\langle \nabla f, e_i \rangle = e_i(f)$, usando a ortonormalidade de

$\{e_i\}_{i=1}^n$,

$$\langle \nabla f, e_j \rangle = \sum_i \langle f_i e_i, e_j \rangle = \sum_i f_i \langle e_i, e_j \rangle$$

$$(\text{para } i = j) \Rightarrow f_i = \langle \nabla f, e_i \rangle = e_i(f)$$

Logo

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_i e_i(f) e_i \end{aligned}$$

□

Exemplo 12. Se $M = \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e e_i é o i-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$ para cada $1 \leq i \leq n$, então

$$\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Definição 30. *Seja $X \in \mathscr{X}(M)$. A **divergência** de X é a função diferenciável $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \to \nabla_v X(p)\}$$

*onde **tr** denota o traço do operador linear $v \in T_pM \to \nabla_v X(p)$*

Proposição 11. *Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$, então*

$$\operatorname{div} X = \sum_i (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle)$$

Demonstração. Se $X = \sum_i a_i e_i$, por meio da definição, e utilizando a compatibilidade com a métrica, segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_i (e_i(\langle X, e_i \rangle) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_i \left(e_i \left(\left\langle \sum_j a_j e_j, e_i \right\rangle \right) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_j (e_i(a_i \langle e_j, e_i \rangle) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle \right) \quad \text{(utilizando a ortogonalidade de } \{e_i\}_{i=1}^n) \end{aligned}$$

$$= \sum_i (e_i(a_i\delta_{ii}) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle)$$
$$= \sum_i (e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle))$$

□

Em particular, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ for geodésico em $p \in U \subset M$, teríamos

$$\operatorname{div} X = \sum_i e_i(a_i)$$

Proposição 12. *Se $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

(i) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$

(ii) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle$

Demonstração. Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$.

(i) Em U, temos que $X + Y = \sum_i (x_i + y_i)e_i$. Por definição de divergente

$$\operatorname{div}(X+Y) = \sum_i (e_i(x_i + y_i) - \langle X + Y, \nabla_{e_i} e_i\rangle) = \sum_i e_i(x_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle + \sum_i e_i(y_i) - \langle Y, \nabla_{e_i} e_i\rangle$$
$$= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$$

(ii) Seja $X = \sum_i x_i e_i$, utilizando a ortogonalidade de $\{e_i\}_{i=1}^n$, daí $x_i = \langle X, e_i\rangle$, então $X = \sum_i \langle X, e_i\rangle e_i$. Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_i (e_i(fx_i) - \langle fX, \nabla_{e_i} e_i\rangle) \\ &= \sum_i (e_i(f)x_i + fe_i(x_i) - \langle fX, \nabla_{e_i} e_i\rangle) \\ &= f\sum_i (e_i(x_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle) + \sum_i \langle X, e_i(f)e_i\rangle \\ \text{(Proposição 10)} \quad &= f \operatorname{div} X + \langle X, \nabla f\rangle \end{aligned}$$

Exemplo 13. Se $M = \mathbb{R}^n$ e $1 \leq i \leq n$, podemos tomar $e_i = E_i$, o i-ésimo campo canônico do $\mathbb{R}^n$. Uma vez que tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de $\mathbb{R}^n$, tem-se, para cada $X \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$,

$$\operatorname{div} X = \sum_i E_i(a_i) = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

$\square$

De posse do divergente de um campo e do gradiente de uma função, definimos agora o laplaciano como segue

Definição 31. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, definimos o **laplaciano** como a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Proposição 13. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$, então*

$$\Delta f = \sum_i (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))$$

Demonstração. Dado $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em $U \subset M$. Seja $\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$, utilizando a definição do laplaciano de uma função, segue

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\
&= \sum_i (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle) \\
&= \sum_i (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))
\end{aligned}$$

$\square$

Em particular, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ for geodésico em $p \in M$, temos

$$\Delta f = \sum_i e_i(e_i(f))$$

Exemplo 14. Para $M = \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. tomemos $e_i = E_i$ o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$ para cada $1 \leq i \leq n$, o qual forma um referencial geodésico para cada ponto de $\mathbb{R}^n$, então

$$\Delta f = \sum_i E_i(E_i(f)) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Definição 32. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Definimos o **hessiano** de f como o $(2,0)$-tensor dado por*

$$(\operatorname{Hess}_M f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$$

Note que, por meio da compatibilidade com a métrica, temos

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}_M f)(X,Y) &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, a simetria de ∇ nos garante que $\mathrm{Hess}_M f$ é simétrico. Com efeito, sejam $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}_M f)(X,Y) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\
&= Y(X(f)) + [X,Y] - (\nabla_X Y)(f) \\
&= Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) \\
&= (\mathrm{Hess}_M f)(Y,X)
\end{aligned}
$$

Vamos agora considerar a seguinte construção. Se $T : V \to V$ é um operador linear autoadjunto em um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno, denotamos por

$$
|T|^2 = \mathrm{tr}(T^2) = \mathrm{tr}(T \circ T)
$$

o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de T. Assim, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de V, segue que

$$
|T|^2 = \sum_i \langle T^2(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle T(T(e_i)), e_i\rangle = \sum_i \langle T(e_i), T(e_i)\rangle = \sum_i |T(e_i)|^2
$$

Nesse contexto, seja M^n uma variedade Riemanniana com uma conexão de Levi-Civita ∇, vimos anteriormente que o hessiano de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável é um $(2,0)$-tensor simétrico. Portanto, em cada $p \in M$ é possível determinar uma forma bilinear simétrica induzida em T_pM pelo $\mathrm{Hess}_M f$, i.e, $(\mathrm{Hess}\, f)_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$. Daí, fica bem determinado um operador autoadjunto $(\mathrm{Hess}\, f)_p : T_pM \to T_pM$ tal que

$$
(\mathrm{Hess}\, f)_p(u,v) = \langle (\mathrm{Hess}\, f)_p(u), v\rangle
$$

Por outro lado

$$
\begin{gathered}
\langle \nabla_u \nabla f, v\rangle = (\mathrm{Hess}\, f)_p(u,v) = \langle (\mathrm{Hess}\, f)_p(u), v\rangle \\
\Rightarrow (\mathrm{Hess}\, f)_p(u) = \nabla_u \nabla f
\end{gathered}
$$

então por meio da discussão do parágrafo anterior, segue

$$|(\text{Hess } f)_p|^2 = \sum_i |(\text{Hess } f)_p(e_i)|^2 = \sum_i |\nabla_{e_i} \nabla f|^2.$$

Além disso, é imediato que

$$\begin{aligned}
\text{tr}((\text{Hess } f)_p) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \sum_i (e_i(\langle \nabla f, e_i \rangle) - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\
\text{(Definição de gradiente)} \quad &= \sum_i (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)) \\
&= (\Delta f)_p
\end{aligned}$$

Por vezez $(\text{Hess } f)_p(u)$ é referido como o dual de $\text{Hess}_M f$.

6.2 Resultados auxiliares

Uma definição semelhante à Definição 1 é a de variedades com bordo. Ela compartilha essencialmente as mesmas características das variedades sem bordo, com a distinção de que suas parametrizações são definidas em conjuntos abertos de semi espaços do espaço Euclidiano.

Definição 33. *Definimos o **semi-espaço** $\mathbb{H}^n$ como o conjunto dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$$

Podemos ainda munir $\mathbb{H}^n$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$, i.e, um subconjunto aberto U no semi-espaço $\mathbb{H}^n$ tem a forma $U = V \cap \mathbb{H}^n$, onde V é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Definição 34. *Uma **variedade diferenciável de dimensão** n **com bordo** é um conjunto M e uma família de aplicações $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{H}^n$ em M tais que*

(i) $\bigcup x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ e $x_\beta^{-1}(U_\beta)$ são abertos em $\mathbb{H}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

(iii) a família $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ é máxima relativa às condições (i) e (ii).

*Um ponto $p \in M$ é dito **ponto de bordo** de M se para um sistema de coordenadas $f : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ em torno de p se tem $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = p$. O conjunto dos pontos de bordo de M, é chamado o **bordo** de M e indicado por ∂M.*

Além disso, é possível demonstrar que ∂M é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n-1$. Para obter mais informações detalhadas sobre o assunto, consulte [4].

As propriedades de diferenciabilidade de funções, plano tangente, orientabilidade, entre outros conceitos, para variedades com bordo são introduzidas de forma análoga às correspondentes definições utilizadas em variedades diferenciáveis sem bordo.

Definição 35. *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é **orientável** se M admite uma estrutura diferenciável $\{U_\alpha, x_\alpha\}$, tal que:*

(i) para todo par $\alpha.\beta$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Consideremos agora a seguinte situação. Suponha agora que M é uma variedade orientável com bordo ∂M. Denotamos por ν o campo normal unitário exterior a M ao longo de ∂M. A orientação de M induz uma orientação em ∂M como segue: dado $p \in \partial M$ e dada uma base $\{u_i\}_{i=1}^{n-1}$ de $T_p\partial M$, dizemos que tal base é positiva se $\{\nu, u_1, ..., u_{n-1}\}$ é uma base positiva de T_pM. Com isso, definida a orientação do bordo de uma variedade e a divergência de um campo vetorial, enunciamos

Teorema 2. *(Divergência) Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathscr{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $i : \partial M \to M$ e ν denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M)$$

Além disso, se M for fechada, isto é, compacta e sem bordo ($\partial M = \varnothing$), então

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = 0$$

Teorema 3. *(Takahashi) Se $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+k}$ é uma imersão isométrica, então*

$$\Delta_M f + nf = n\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ denota o vetor curvatura média de f, Δ_M o laplaciano em M e $\Delta_M f = (\Delta_M f_1, ..., \Delta_M f_{n+k+1})$, se $f = (f_1, ..., f_n)$. Em particular,

$$f \text{ é minima} \Leftrightarrow \Delta_M f + nf = 0$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico em p em uma vizinhança $U \subset M$ de p, complete $\{e_1, ..., e_n, N_1, ..., N_k\}$ em um referencial adaptado para $f|_U$, de modo que $\{e_1, ..., e_n, N_1, ..., N_k, f\}$ seja uma base ortonormal para $T_q\mathbb{R}^{n+k+1}$ para todo $q \in U$.

Se α denota a segunda forma fundamental de f, ∇ a conexão de Levi-Civita de M e D aquela de $\mathbb{R}^{n+k+1}$, então em p temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_M f &= \left(\sum_i e_i(e_i(f)), ..., \sum_i e_i(e_i(f_{n+k+1}))\right) \\
&= \sum_i D_{e_i} D_{e_i} f = \sum_i D_{e_i} e_i \\
&= \sum_{i,j} \langle D_{e_i} e_i, e_j\rangle e_j + \sum_{i,l} \langle D_{e_i} e_i, N_l\rangle N_l + \sum_i \langle D_{e_i} e_i, f\rangle f \\
&= \sum_{i,j} \langle (D_{e_i} e_i)^\top + (D_{e_i} e_i)^\perp, e_j\rangle e_j + \sum_{i,l} \langle D_{e_i} e_i, N_l\rangle N_l + \sum_i (e_i(\langle e_i, f\rangle) - \langle e_i, D_{e_i} f\rangle) f \\
&= \sum_{i,j} \cancelto{0}{\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle e_j} + \sum_{i,l} \langle D_{e_i} e_i, N_l\rangle N_l + \sum_i \cancelto{0}{e_i(\langle e_i, f\rangle) f} - \sum_i \langle e_i, D_{e_i} f\rangle f \\
&= \sum_i \alpha(e_i, e_i) - \sum_i \langle e_i, e_i\rangle f \\
&= n\overrightarrow{H} - nf
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta_M f + nf = n\overrightarrow{H}$$

□

Lema 2. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\Delta_{\overline{M}} f = \Delta_M f - n\overrightarrow{H}(f) + (\mathrm{Hess}_{\overline{M}}\, f)(N, N)$$

em cada $p \in M$, onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média da imersão e N é um campo unitário, normal a M em uma vizinhança de p.

Demonstração. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$, respectivamente, as conexões de de Levi-Civita de M e $\overline{M}$ e por α a segunda forma fundamental de ϕ. Se $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ é um referencial adaptado em uma vizinhança de $p \in M$ em $\overline{M}$, então, no ponto p, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{M}} f &= \sum_{i=1}^{n+1} (e_i(e_i(f)) - (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)(f)) + ((e_{n+1}(e_{n+1}(f)) - (\overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_{n+1})(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\alpha(e_i, e_i)(f) + (\nabla_{e_i} e_i)(f)) + N(N(f)) - (\overline{\nabla}_N N)(f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \alpha(e_i, e_i)(f) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)) + N(N(f)) - (\overline{\nabla}_N N)(f) \\
&= \underbrace{\sum_i (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))}_{\Delta_M f} - \underbrace{\sum_i \alpha(e_i, e_i)(f)}_{n\overrightarrow{H}(f)} + \underbrace{N(N(f)) - (\overline{\nabla}_N N)}_{\left(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f\right)(N,N)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\overline{M}} f = \Delta_M f - n\overrightarrow{H}(f) + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(N, N)$$

□

Teorema 4. *(Bochner) Seja M^n uma variedade Riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\operatorname{Hess} f|^2$$

Demonstração. Fixamos $p \in M$ e seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$ contendo p. Então, em p, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\Delta(\langle \nabla f, \nabla f\rangle) &= \frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i(\langle \nabla f, \nabla f\rangle)) - (\nabla_{e_i} e_i)(\langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\
&= \sum_i e_i(\langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f\rangle) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla_{e_i} \nabla f\rangle \quad (6.1) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f\rangle + \sum_i |\nabla_{e_i} \nabla f|^2 \quad (6.2) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f\rangle + |\operatorname{Hess} f|^2 \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que, para $X \in \mathscr{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle R(\nabla f, e_i)\nabla f, e_i\rangle &= \sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f - \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f - \nabla_{[\nabla f, e_i]} \nabla f, e_i\rangle \quad (6.4) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \nabla_{[\nabla f, e_i]} \nabla f, e_i\rangle \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Quanto a primeira parcela de (6.5), observe que em p

$$\nabla_{\nabla f} e_i = \nabla_{\sum_j e_j(f)e_j} e_i = \sum_j e_j(f)\nabla_{e_j} e_i = 0, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle &= \sum_i (\nabla f(\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle) - \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i\rangle)\\
&= \sum_i \nabla f(\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle)\\
&= \nabla f\left(\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle\right)\\
&= \nabla f(\mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f))\\
&= \nabla f(\Delta f)\\
&= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle
\end{aligned}$$

Agora para a segunda parcela de (6.5), temos

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f + \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle &= \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle + \langle \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle)\\
&= \sum_i (e_i(\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle) - \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla_{e_i} e_i\rangle + \langle \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle)\\
&= \sum_i (e_i(\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle) + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, [\nabla f, e_i]\rangle)\\
&= \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle\\
&\quad + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i - \nabla_{e_i}\nabla f\rangle)\\
&= \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \cancel{\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle} + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \cancelto{0}{\nabla_{\nabla f} e_i}\rangle\\
&\quad - \cancel{\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle})\\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle
\end{aligned}$$

Substituindo tais relações em (6.1)

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle R(\nabla f, e_i)\nabla f, e_i\rangle &= \sum_i \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle\\
&= \sum_i \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f + \nabla_{[\nabla f, e_i]}\nabla f, e_i\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle &= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_i \langle R(\nabla f, e_i)\nabla f, e_i\rangle \\ &= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \sum_i \langle R(e_i, \nabla f)\nabla f, e_i\rangle \\ &= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)\end{aligned}$$

Portanto, substituindo tais relações em (6.3), segue

$$\frac{1}{2}|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\operatorname{Hess} f|^2$$

□

Demonstraremos agora a fórmula em que se baseia a demonstração do resultado principal deste trabalho.

Consideremos agora a seguinte situação: $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana compacta e orientada, com conexão de levi-Civita $\overline{\nabla}$, sabemos que o bordo $\partial\overline{M} = M$ é uma variedade de Riemanniana de dimensão n com a métrica e a orientação induzidas por $\overline{M}$. Denotamos por ν a normal unitária exterior a $\overline{M}$ ao longo de M e por $\overrightarrow{H}$ o vetor curvatura média de M com respeito à inclusão de M em $\overline{M}$, sabemos que existe uma função $H : M \to \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{H} = H\nu$. Tal função é denominada ***curvatura média***. Para o que segue, objetos geométricos com barra se referem a $\overline{M}$, enquanto que objetos sem barra se referem a M.

Teorema 5. *(Reilly) Nas condições citadas anteriormente, se $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\begin{aligned}\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 \overline{M} = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f|^2 d\overline{M} + 2\int_M f_\nu (\Delta f) dM \\ - n\int_M H f_\nu^2 dM - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM\end{aligned}$$

onde $\nu(f) = f_\nu = \langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial \nu}$ e α é a segunda forma fundamental da inclusão $i : M \to \overline{M}$.

Demonstração. Para demonstrar tal fórmula integramos em ambos os membros da fórmula de Bochner em relação a $\overline{M}$, segue

$$\frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 d\overline{M} = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\overline{M} + \int_{\overline{M}} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f|^2 d\overline{M} \quad (6.6)$$

No membro esquerdo, aplicamos o Teorema da Divergência, daí

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 d\overline{M} &= \frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \operatorname{div}_{\overline{M}}(\overline{\nabla}(|\overline{\nabla} f|^2)) d\overline{M} = \frac{1}{2}\int_{M} \nu(|\overline{\nabla} f|^2) dM = \frac{1}{2}\int_{M} \nu\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle dM \\ &= \int_M \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\rangle dM = \int_M (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) dM\end{aligned}$$

Por outro lado, da Proposição 12 (ii), temos

$$\operatorname{div}_{\overline{M}}((\overline{\Delta} f)\overline{\nabla} f) = \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f\rangle + (\overline{\Delta} f)^2$$

Utilizando tal relação na segunda parcela do membro direito de (6.6) e utilizando novamente o Teorema da Divergência, segue

$$\begin{aligned}\int_{\overline{M}} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f)\rangle d\overline{M} &= \int_{\overline{M}} \operatorname{div}_{\overline{M}}((\overline{\Delta} f)\overline{\nabla} f) d\overline{M} - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ &= \int_M \langle (\overline{\Delta} f)\overline{\nabla} f, \nu\rangle dM - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ &= \int_M (\overline{\Delta} f)\langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle dM - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ &= \int_M f_\nu (\overline{\Delta} f) dM - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M}\end{aligned}$$

Substituindo tais relações em (6.6)

$$\begin{aligned}\int_M (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) dM = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\overline{M} + \int_M f_\nu(\overline{\Delta} f) dM - \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} \\ + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f|^2 d\overline{M}\end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{aligned}\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 d\overline{M} = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}_{\overline{M}}|^2 d\overline{M} \\ + \int_M (f_\nu(\overline{\Delta} f) - (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f)) dM\end{aligned} \quad (6.7)$$

Para a última integral de (6.7), consideremos o Lema 2, nessas condições, temos

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} f &= \Delta f - n\overrightarrow{H}(f) + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nu) \\ &= \Delta f - nH\nu(f) + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nu) \\ &= \Delta f - nHf_\nu + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nu)\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por f_ν

$$f_\nu\overline{\Delta} f = f_\nu \Delta f - nHf_\nu^2 + f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) \tag{6.8}$$

Por outro lado, como $\overline{\nabla} f = f_\nu \nu + \nabla f$ e $\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f$ é $C^\infty(\overline{M})$-bilinear e simétrica, daí

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) &= (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, f_\nu\nu + \nabla f)\\
&= (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, f_\nu\nu) + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nabla f)\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \nabla f)\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle \overline{\nabla}_{\nabla f}\overline{\nabla} f, \nu\rangle\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle \overline{\nabla}_{\nabla f}(f_\nu\nu + \nabla f), \nu\rangle\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle (\nabla f)(f_\nu)\nu + \nu\overline{\nabla}_{\nabla f}\nu + \overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f, \nu\rangle\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + (\nabla f)(f_\nu)\cancelto{1}{\langle\nu,\nu\rangle} + \nu\langle\overline{\nabla}_{\nabla f}\nu,\nu\rangle + \langle\overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f,\nu\rangle\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle + \nu\langle\overline{\nabla}_{\nabla f}\nu,\nu\rangle + \langle\overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f,\nu\rangle
\end{aligned}$$

Como $\langle\overline{\nabla}_{\nabla f}\nu,\nu\rangle = \frac{1}{2}\nabla f\langle\nu,\nu\rangle = 0$ e também $\overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f = \alpha(\nabla f,\nabla f) + \nabla_{\nabla f}\nabla f$. Então

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) &= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle + \langle\alpha(\nabla f,\nabla f) + \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nu\rangle\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle + \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle + \cancelto{0}{\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nu\rangle}\\
&= f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle + \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle
\end{aligned}$$

O que nos dá

$$(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) = f_\nu(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle + \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle \tag{6.9}$$

Subtraindo as equações (6.8) e (6.9) e usando o fato de que $\operatorname{div}_M(f_\nu\nabla f) = f_\nu\operatorname{div}(\nabla f) + \langle\nabla f, \nabla f_\nu\rangle = f_\nu\Delta f + \langle\nabla f,\nabla f_\nu\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
f_\nu\overline{\Delta} f - (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu, \overline{\nabla} f) &= f_\nu\Delta f - nHf_\nu^2 - \langle\nabla f,\nabla f_\nu\rangle - \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle - \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle\\
&= f_\nu\Delta f - nHf_\nu^2 + f_\nu\Delta f - \operatorname{div}_M(f_\nu\nabla f) - \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle\\
&= 2f_\nu\Delta f - nHf_\nu^2 - \operatorname{div}_M(f_\nu\nabla f) - \langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle
\end{aligned}$$

Integrando a ambos os membros em relação a M e utilizando novamente o Teorema da Divergência com o fato de que $\partial M = \varnothing$, segue

$$\int_M (f_\nu\overline{\Delta} f - (\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\overline{\nabla} f))dM = 2\int_M f_\nu\Delta f dM - n\int_M Hf_\nu^2 dM - \int_M\langle\alpha(\nabla f,\nabla f),\nu\rangle dM$$

Por fim, substituindo em (6.7) a última igualdade obtida, o resultado segue

$$\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f)^2 \overline{M} = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}_{\overline{M}} f|^2 d\overline{M} + 2\int_M f_\nu (\Delta f) dM$$
$$- n\int_M H f_\nu^2 dM - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle dM.$$

□

6.3 Teorema principal

Chegamos agora ao resultado principal deste trabalho. Para sua demonstração, assumimos dois fatos. Primeiramente, o ***Teorema da Separação de Jordan-Brower***, o qual garante que, se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa e fechada, então $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M^n$ tem exatamente duas componentes conexas, uma das quais é limitada. Além disso, ambas são abertas e têm M por bordo.

Em segundo lugar, seja M^n uma variedade Riemanniana orientada, e $U \subset M$ um aberto conexo e limitado, cuja fronteira ∂U é uma hipersuperfície de M^n. Dada uma função diferenciável $f : \partial U \to \mathbb{R}$, o ***problema de Dirichlet*** para o laplaciano de M em U, com condição de contorno dada por f, é a procura de uma solução para

$$\begin{cases} \Delta_M \overline{f} = 0 \text{ em } U \\ \overline{f}|_{\partial U} = f. \end{cases}$$

Ademais, segundo [6, Teorema A.61], é possível mostrar que tal problema sempre admite uma única solução $\overline{f} \in C^\infty(U) \cap C^\infty(\overline{U})$. Além disso, um número real λ é chamado ***autovalor*** de Δ se existe uma função suave h sobre M, não identicamente nula, tal que

$$\Delta h + \lambda h = 0$$

A função h é chamada de ***autofunção*** associada ao autovalor λ.

Prosseguimos agora para demonstração do resultado principal deste trabalho.

Teorema 6 (Choi-Wang)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície fechada e orientável, minimamente mergulhada em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se $\lambda > 0$ é o primeiro autovalor não nulo do laplaciano de M, então*

$$\lambda \geq \frac{n}{2} \tag{6.10}$$

Demonstração. Nas hipóteses do teorema, é imediato a partir do Teorema da Separação de Jordan-Brower que $\mathbb{S}^{n+1} \backslash M$ possui exatamente duas componentes conexas N_1 e N_2, ambas abertas, simplesmente conexas e tendo M como fronteira comum em $\mathbb{S}^{n+1}$, isto é, $\partial N_1 = M = \partial N_2$. Portanto, sendo ν_1 e ν_2 as normais unitárias ao longo de M exteriores a N_1 e N_2, respectivamente. Com isso, tem-se $\nu_1 = -\nu_2$.

Agora seja N qualquer um dos dois abertos N_1 e N_2 e ν seu respectivo campo normal unitário correspondente e $\overline{M} = N \cup M = N \cup \partial N$. Se $\overline{\Delta}$ denota o laplaciano de $\mathbb{S}^{n+1}$, considere a solução $\overline{f} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \overline{\Delta}\overline{f} = 0 \text{ em } N \\ \overline{f}|_{\partial N} = f \end{cases}$$

onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma autofunção associada a λ, ou seja, $f \neq 0$ e

$$\Delta f + \lambda f = 0$$

sobre M. Aplicando a fórmula de Reilly e utilizando a minimalidade da imersão, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\overline{M}} (\overline{\Delta}\overline{f})^2 d\overline{M} = \int_{\overline{M}} \mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla}\overline{f}, \overline{\nabla}\overline{f}) d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess} \overline{f}|^2 d\overline{M} + 2\int_M \overline{f}_\nu (\Delta f) dM \\ - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle dM. \end{aligned}$$

Substituindo

$$\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla}\overline{f}, \overline{\nabla}\overline{f}) = n|\overline{\nabla}\overline{f}|^2 \tag{6.11}$$

$$\Delta f = -\lambda f \tag{6.12}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\overline{M}} n|\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess} \overline{f}|^2 d\overline{M} + 2\int_M \overline{f}_\nu(-\lambda f) dM - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle dM \\ &= n\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess} \overline{f}|^2 d\overline{M} - 2\lambda \int_M \langle f\overline{\nabla}\overline{f}, \nu \rangle dM - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu \rangle dM \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Teorema da Divergência à terceira parcela da última igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \langle f\overline{\nabla}\overline{f}, \nu \rangle dM &= \int_{\overline{M}} \mathrm{div}_{\overline{M}}(\overline{f}\overline{\nabla}\overline{f}) d\overline{M} = \int_{\overline{M}} (|\overline{\nabla}\overline{f}|^2 + \overline{f}\overline{\Delta}\overline{f}) d\overline{M} \\ &= \int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} + \int_{\overline{M}} \overline{f}\overline{\Delta}\overline{f} d\overline{M} \\ &= \int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M}. \end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
0 &= n\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}\overline{f}|^2 d\overline{M} - 2\lambda\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM \\
&= (n-2\lambda)\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} + \int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}\overline{f}|^2 d\overline{M} - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM \\
&\Rightarrow -\int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}\overline{f}|^2 d\overline{M} = (n-2\lambda)\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM
\end{aligned}
$$

Agora, usando o fato de que $\nu_1 = -\nu_2$, escolhemos N de tal maneira que

$$
\int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM \leq 0
$$

devemos ter

$$
\begin{aligned}
-\int_{\overline{M}} |\operatorname{Hess}\overline{f}|^2 d\overline{M} &= (n-2\lambda)\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} - \int_M \langle \alpha(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle dM \\
&\geq (n-2\lambda)\int_{\overline{M}} |\overline{\nabla}\overline{f}|^2 d\overline{M} \\
&\Rightarrow n - 2\lambda \leq 0 \\
&\Rightarrow \boxed{\lambda \geq \frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Observação. Durante a demonstração utilizamos em (6.11) que $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(\overline{\nabla}\overline{f}, \overline{\nabla}\overline{f}) = n|\overline{\nabla}\overline{f}|^2$, tal igualdade é válida se considerarmos a restrição do tensor de Ricci da esfera a $\overline{M} \subset \mathbb{S}^{n+1}$ e também o fato de $\mathbb{S}^{n+1}$ ser uma ***variedade de Einstein***, para mais detalhes consultar [3].

É importante notar que, para o caso em que vale a igualdade em (6.10), no artigo [9], Yau conjectura que, se M^n é uma variedade Riemanniana orientável, fechada e minimamente mergulhada em $\mathbb{S}^{n+1}$, então $\lambda = n$. Nesse contexto, a desigualdade (6.10) pode ser uma evidência para a veracidade da conjectura de Yau.

6.4 Algumas aplicações

Inicialmente, consideremos um resultado de [8], o qual é dedicado à estimativa do primeiro autovalor λ, em termos de outras grandezas geométricas e topológicas, uma delas é a sua área $A(M)$ e o seu gênero. Neste artigo, é mostrado que:

Teorema 7 (Yang-Yau)**.** *Seja M^2 uma superfície fechada e orientável de gênero g, então*

$$\lambda A(M) \leq 8\pi(g+1)$$

Combinando esse resultado com aquele obtido no teorema principal, temos

Corolário 2. Seja M^2 uma superfície fechada e orientável, minimamente mergulhada em $\mathbb{S}^3$, então.

$$A(M) \leq 8\pi(g+1)$$

Demonstração. Dado que $n = 2$, utilizamos Teorema 6 e o Teorema 7, então

$$\begin{aligned} &\frac{2}{2}A(M) \leq \lambda A(M) \leq 8\pi(g+1) \\ &\Rightarrow A(M) \leq 8\pi(g+1) \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Do Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[2] Choi, W. e Wang, A. *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*. Journal of Differential Geometry. 1983

[3] Gomes, J. N. *Notas de Aula da Disciplina MAT6651 - Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas*. IME-USP, São Paulo, 2015.

[4] Lee, J. M. *Introduction to smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] Muniz Neto, A. *Tópicos de Geometria Diferencial*, SBM, Rio de Janeiro, 2014.

[7] Petersen, P. *Riemannian Geometry*, Springer, New York, 2006.

[8] Yang, P. e Yau, S. T. *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*. Annali della Scuola Normale Superiore di PisaClasse di Scienze, 1980.

[9] Yau, S. T. *Seminar on differential geometry*, Annals of Math. Studies, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J, 1982.