



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

GILBERTO GIL ASEVEDO PIRES JUNIOR

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA NO
SENTIDO CLÁSSICO**

BRAGANÇA
2023

GILBERTO GIL ASEVEDO PIRES JUNIOR

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA NO
SENTIDO CLÁSSICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena.

BRAGANÇA
2023

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P667e Pires Junior, Gilberto Gil Asevedo.

Existência e unicidade de solução para a equação da onda no sentido clássico / Gilberto Gil Asevedo Pires Junior. — 2023.
38 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2023.

1. Equação da onda. 2. Corda vibrante. 3. Método de D'Alembert. 4. Equação diferencial parcial. I. Título.

CDD 515.353

GILBERTO GIL ASEVEDO PIRES JUNIOR

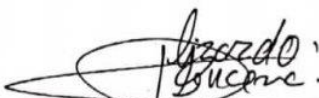
**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA
NO SENTIDO CLÁSSICO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Matemática,
do Campus Universitário de Bragança, da
Universidade Federal do Pará, como
requisito parcial para obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

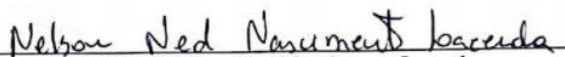
Data da aprovação: 30/03/2023

Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena.
Orientador - UFPA



Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Examinador Interno - UFPA

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a minha família, em especial a minha mãe e avó, que sempre acreditaram em mim e fizeram o possível pela minha educação. A todos os amigos que tenho, sendo aos que já tinha e aos novos que fiz dentro e fora da universidade, que me proporcionaram momentos que levarei para sempre.

Ao meu orientador Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena que aceitou me orientar e que vem compartilhando um pouco do seu conhecimento comigo desde o primeiro período de faculdade. Aos professores membros da banca examinadora, Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosario Miranda e Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda, por aceitarem o convite de participarem deste momento.

Agradeço a Universidade Federal do Pará - Campus Bragança e a todo o corpo docente da faculdade de matemática, por desenvolverem o conhecimento para a carreira profissional e valores críticos para vida.

Por fim, agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente na minha trajetória acadêmica.

“Não importa o que aconteça, continue a nadar.”
(WALTERS, GRAHAM; PROCURANDO NEMO, 2003.)

RESUMO

Nesse trabalho investigamos o modelo matemático para a equação da onda no sentido clássico de Newton e Leibniz. Nosso objetivo é apresentar a existência e unidade de solução bem como a dependência contínua dos dados iniciais. Apresentamos essas soluções segundo o método de D'Alembert.

Palavras-chave: Corda vibrante, Equação da onda, Método de D'Alembert

ABSTRACT

In this paper we investigate the mathematical model for the wave equation in the classical sense of Newton and Leibniz. Our goal is to present the existence and uniqueness of the solution as well as the continuous dependence on the initial data. We present these solutions according to D'Alembert's method.

Keywords: Vibrating string, Wave equation, D'Alembert's method

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Comprimento do arco de uma curva.....	14
Figura 2 - Representação de gráfico de uma região R limitada por uma curva fechada	15
Figura 3 - Vibração da corda	17
Figura 4 - Posição da corda fixa	18
Figura 5 - Comprimento da corda.....	19
Figura 6 - Exemplo 3.3.1	27
Figura 7 - Exemplo 3.3.2	27
Figura 8 - Exemplo 3.3.3	28
Figura 9 - Exemplo 3.3.4	28
Figura 10 - Interpretação da solução	30
Figura 11 - Gráfico do domínio de dependência	31
Figura 12 - Gráfico da variação do domínio de dependência.....	32
Figura 13 - Exemplo do domínio de dependência.....	33
Figura 14 - Exemplo do domínio de influencia.....	33
Figura 15 - Domínio de influência de um intervalo	33
Figura 16 - Problema de Cauchy	34

Sumário

INTRODUÇÃO	12
1 PRELIMINARES	13
1.1 Noções do Cálculo Diferencial e Integral	13
1.1.1 Teorema Fundamental do Calculo.....	13
1.1.2 Regra da cadeia.....	14
1.1.3 Fórmula do Comprimento do Arco	14
1.1.4 Teorema de Green	15
1.2 Noções de Equações Diferenciais Parciais	15
1.2.1 Conceito de Equação diferencial Parcial	15
1.2.2 Problema de Valor Inicial e de Contorno	16
1.2.3 O Princípio da Superposição	16
2 EQUAÇÕES PARA OSCILAÇÕES EM UMA CORDA	17
2.1 Oscilações em uma Corda via D'Alembert	17
2.2 Princípio de D'Alembert.....	19
2.3 Boa Colocação da Equação da Onda	21
2.4 Interpretação da Solução de D'Alembert.....	29
2.5 Domínios de Dependência e Influencia	31
2.6 Equação não homogênea.....	34
CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	38

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução à teoria das Equações diferenciais parciais, as quais são amplamente úteis para modelar fenômenos que dependam da posição, do tempo ou outras variáveis. O estudo dessas equações é largamente utilizado em modelos matemáticos e descrevendo fenômenos físicos presentes na natureza, como por exemplo, problemas de eletrodinâmica, difusão do calor e propagação de ondas. Problemas em que a solução dessas equações nem sempre pode ser obtida apenas por meio de métodos analíticos.

E necessário ressaltar que o problema tratado neste trabalho carrega grande importância dentro da história da matemática, visto que ele repercutiu em grandes debates científicos sendo um dos assuntos mais importante no século XVIII. Grandes matemáticos da época como D'Alembert, Daniel Bernoulli, Euler e Lagrange se mobilizaram para tentar resolvê-lo. Esses debates estenderam-se até meados do século XIX e resultaram em diversas soluções, que geraram discussões a respeito de outros assuntos importantes trazendo inúmeras contribuições para a matemática da época e embasamento para teorias que viriam a surgir.

Nesse trabalho vamos estudar o modelo matemático para a corda vibrante, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral como base de recurso matemático. Entendemos que por corda vibrante nesse modelo, pensaremos em uma corda super fina, flexível e infinita estica ao longo do eixo x , sendo o modelo físico caracterizado pela seguinte forma matemática dada por

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

em que a é uma constante real, não nula, $u = u(x, t)$ representa a posição de um ponto x da corda no instante t , u_{tt} representa a segunda derivada de $u(x, t)$ em relação a t e u_{xx} representa a segunda derivada de $u(x, t)$ em relação a x .

Sendo assim, o trabalho tem como objetivo principal resolver esse problema de vibrações de cordas elásticas, que se reduz na obtenção de solução para essa equação diferencial parcial, conhecida como a equação da onda unidimensional. Em seguida iremos abordar a existência de soluções, a unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais a partir do princípio de D'Alembert. Fazemos a análise da solução através do método de D'Alembert tanto para o problema homogêneo como o não homogêneo.

No Capítulo 1 apresentaremos os principais conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Parciais, necessários para entendimento da teoria discutida.

No capítulo 2 deduziremos a equação da onda e mostraremos que ela é bem posta.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as definições sobre Cálculo e Equações Diferenciais Parciais necessárias para entendimento do trabalho. Admitimos conhecido por parte do leitor alguns resultados teóricos Físicos, de Cálculo e de Equações Diferenciais Parciais. Não vamos delongar nas definições, pois nosso objetivo é apenas destacar alguns teoremas utilizados. Para as demonstrações veja as referências.

1.1 Noções do Cálculo Diferencial e Integral

No século XVII, Newton e Leibniz¹ como trabalhos independentes, motivados por problemas físicos, mostraram como o cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando uma integral definida por antidiferenciação. O procedimento envolve os conceitos de integral e derivada que se ligam intimamente para o que é conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo.

1.1.1 Teorema Fundamental do Calculo

Teorema 1.1.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A função $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.1.1)$$

é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

O leitor interessado pode encontra a demonstração destes fatos em [1].

Teorema 1.2.

Dada uma função continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e seja G uma de suas primitivas tal que

$$G'(x) = f(x)$$

Para todo o x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad (1.1.2)$$

O leitor interessado pode encontra a demonstração destes fatos em [1].

Assim reduzimos o cálculo da integral definida a determinar uma primitiva de f . Portanto o problema do cálculo de uma área passa a ser um problema de resolver uma equação diferencial.

¹ Isaac Newton, cientista inglês (1643-1727)

Gottfried Leibniz, filósofo e matemático (1646 - 1716)

1.1.2 Regra da cadeia

Apresentaremos a regra da cadeia em dois casos

Teorema 1.3.

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável em x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ onde são funções diferenciáveis em t . Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1.1.3)$$

A prova deste resultado encontra-se em [3]

Teorema 1.4.

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável em x e y , onde $x = g(t, s)$ e $y = h(t, s)$ onde são funções diferenciáveis em t e s . Então z é uma função diferenciável de t e s .

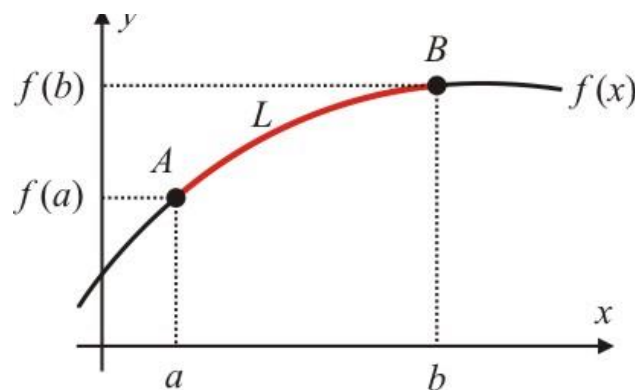
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (1.1.4)$$

A prova deste resultado encontra-se em [3]

1.1.3 Fórmula do Comprimento do Arco

O comprimento de uma curva é o menor número tal que o comprimento dos caminhos polinomiais nunca pode ultrapassar, não importando qual seja o comprimento do segmento.

Figura 1 - Comprimento do arco de uma curva



Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2021/10/como-calculer-o-comprimento-de-um-arco-de-curva.html>

Teorema 1.5.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a, b) , cuja derivada é uma função contínua. O comprimento do gráfico da função f , sobre o intervalo $[a, b]$ é dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (1.1.5)$$

A prova deste resultado encontra-se em [4].

A partir da qual vem da fórmula da distância aproximada do comprimento do arco composta de infinitesimais segmentos de reta. Como o número de segmentos tende para o infinito essa aproximação se torna um valor exato.

1.1.4 Teorema de Green

Um outro resultado importante do cálculo para o trabalho é o teorema de Green que nos apresenta a interação entre a integração numa região e a integração na fronteira dessa mesma região.

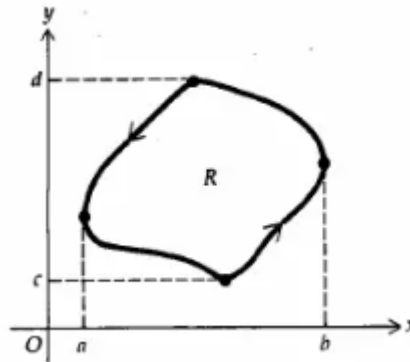
Teorema 1.6.

Sejam M e N funções de duas variáveis, como por exemplo x e y , de tal modo que possuam derivadas parciais primeira contínuas em um disco aberto B no \mathbb{R}^2 . Se uma curva C for fechada contida inteiramente em B e se R for uma região limitada por C , então

$$\oint_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \quad (1.1.6)$$

A prova deste resultado encontra-se em [5].

Figura 2 - Representação de gráfico de uma região R limitada por uma curva fechada



Fonte: (LEITHOLD, 2001, p.1101)

1.2 Noções de Equações Diferenciais Parciais

1.2.1 Conceito de Equação diferencial Parcial

Uma Equação diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes x, y, z, \dots , e as derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u(x, y, z, \dots)$. Assim, uma EDP de ordem k com uma variável dependente em n -variáveis independentes x_1, \dots, x_n é uma expressão da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (1.2.1)$$

Em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com F sendo uma função dada e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função que queremos determinar.

A ordem de uma EDP é a ordem da derivada parcial de maior ordem presente na equação. Dizemos que a EDP é linear se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é não linear.

Uma EDP linear é dita homogênea quando a parte que não possui a variável dependente é nula ($g(x_1, \dots, x_n) = 0$), caso contrário diremos que a equação é não-homogênea.

1.2.2 Problema de Valor Inicial e de Contorno

As EDP's podem possuir infinitas soluções ou até não ter solução. Mas podemos impor algumas condições adicionais para garantir a existência e unicidade de soluções.

Um Problema de Valor Inicial (PVI), ou Problema de Cauchy, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas de maneira que, umas das variáveis independentes são fixadas em relação à variável dependente e a suas derivadas.

Um Problema de Valores de Contorno (PVC), ou Problemas de Fronteira, consiste em uma Equação Diferencial, juntamente com condições complementares impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo ou fronteira da região ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$).

Problemas envolvendo condições de fronteira e condições iniciais são chamados de problemas de valores iniciais e de fronteira, que é abreviado para a sigla PVIC.

1.2.3 O Princípio da Superposição

Para EDP's lineares homogêneas, a existência de uma solução não nula, implica diretamente na existência de infinitas soluções. De fato, se u é uma solução da EDP, então ku também é solução, para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se uma EDP linear homogênea tem como soluções as funções u e v , então todas as combinações lineares de u e v também são soluções da EDP. Este resultado é conhecido como Princípio da Superposição.

Capítulo 2

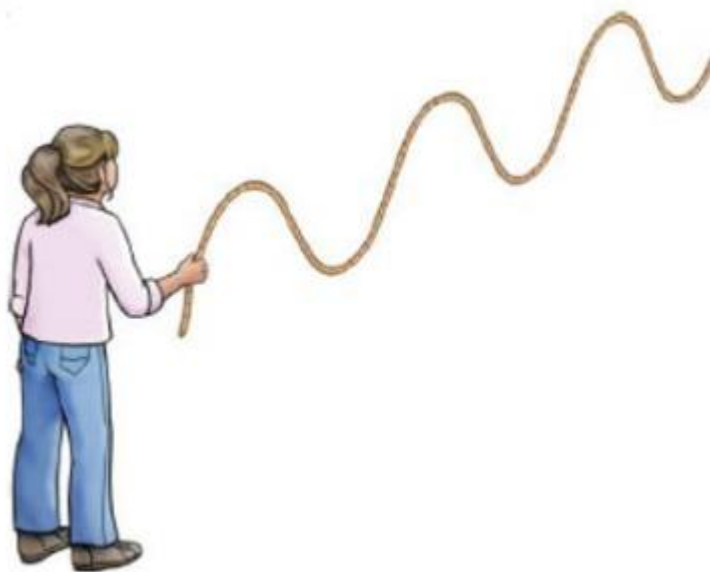
EQUAÇÕES PARA OSCILAÇÕES EM UMA CORDA

Neste capítulo explicitaremos o que é uma corda no sentido do nosso modelo matemático e seu comportamento para deduzirmos a equação da onda pelo princípio de D'Alembert. Verificaremos a existência e a unicidade das soluções encontradas. Faremos uma interpretação geométrica da solução de D'Alembert. Definimos e estudamos o Domínio de Dependência e Influência dos dados iniciais e condição de contorno. E resolvemos alguns problemas de valor inicial para equação da onda, dentre eles o problema de Cauchy que provamos ser bem posto.

2.1 Oscilações em uma Corda via D'Alembert

Por corda se entende um fio fino e flexível. Suponhamos que a corda em estado de equilíbrio coincida com o eixo das abscissas em um sistema de coordenadas cartesianas com origem num ponto 0 do plano \mathbb{R}^2 , limitando o estudo a pequenas oscilações transversais. Por transversal entende-se que a oscilação é realizada em um eixo do plano e cada ponto da corda se desloca perpendicularmente a esse eixo.

Figura 3 - Vibração da corda



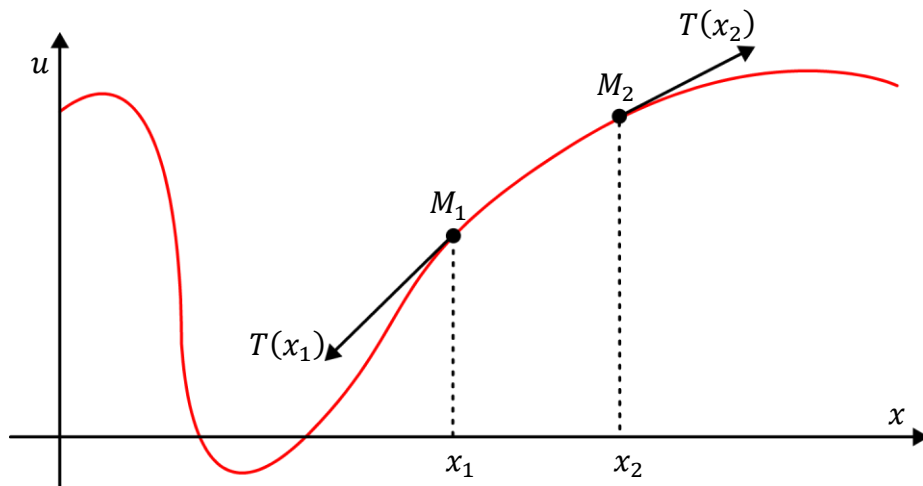
Fonte: <https://pt.slideshare.net/marcoasanches/ondulatria-78040527>

Representaremos o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t , por $u(x, t)$, a partir de sua posição de equilíbrio. As hipóteses a seguir são necessárias para construção de considerações posteriores.

- Todas as forças de atrito, tanto internas, quanto externas serão desconsideradas;
- A força gravitacional é pequena quando comparada com as tensões da corda;
- As amplitudes $u(x, t)$ e suas derivadas são pequenas de modo que seus quadrados e produtos são desconsiderados quando comparados com a unidade.

Fixado um instante $t > 0$, supondo que o perfil da corda seja o da figura abaixo.

Figura 4 - Posição da corda fixa



Fonte: Própria do autor, (2023)

Temos

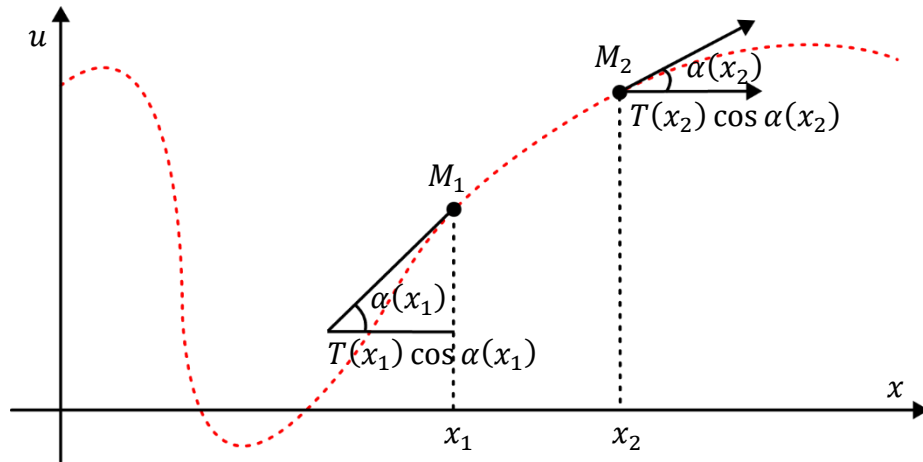
$$\overline{M_1 M_2}(t) = S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \quad (2.1-1)$$

Devido à hipótese (c) temos $S \cong x_2 - x_1$. Como não há variação de comprimento, segue da lei de Hooke que a tensão T não varia com o tempo. Mostraremos agora que a tensão também não depende de x . Com efeito, as forças que atuam sobre o arco $\overline{M_1 M_2}$ são as seguintes:

- Tensões tangenciais em M_1 e M_2 ;
- Forças externas caso existam;
- Forças de inércia;

Supondo que o movimento se dá na direção perpendicular ao eixo x e que as forças externas e de inercia também tem direção perpendicular a esse eixo, deduzimos que $\overline{M_1M_2}$ não possui aceleração na direção x . Ou seja, a resultante das forças na direção x é nula. Agora seja α o ângulo agudo de T com o eixo x no instante t . Temos;

Figura 5 - Comprimento da corda



Fonte: Própria do autor, (2023)

Assim obtemos,

$$T(x_2) \cdot \cos \alpha(x_2) - T(x_1) \cdot \cos \alpha(x_1) = 0 \quad (2.1.1)$$

Além disso,

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \cong \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} \cong 1 \quad (2.1.2)$$

Segue de (2.1.1) e (2.1.2) que $T(x_1) = T(x_2)$. Isso mostra que T não depende de x . Vamos considerar $T(x, t) = t_0$ para todo x e t . Passamos agora a dedução da equação da onda seguindo o princípio de D'Alembert.

2.2 Princípio de D'Alembert

“Num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram”

I) Tensões na direção u

$$F_1 = T_0 [\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)]$$

Por outro lado,

$$\sin \alpha(x) = \frac{\tan \alpha(x)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \cong \frac{\partial u}{\partial x}$$

Segue-se que;

$$\begin{aligned} F_1 &= T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) \right] = T_0 \int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ \therefore F_1 &= T_0 \int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

II) Forças externas

Seja $p(x, t)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda na direção u , temos:

$$\therefore F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx \quad (2.2.2)$$

III) Forças de inércia

Seja $\rho(x)$ a densidade linear da corda. A massa do segmento Δx da corda é dado por $\rho(x)\Delta x$.

Logo a força de inercia sobre esse segmento é dada por

$$\begin{aligned} &-\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \therefore F_3 &= - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Segue de (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) e do princípio de D'Alembert que

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 &= 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $T_0 > 0$. Supondo ainda que o integrando é uma função contínua obtemos

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) = 0$$

Supondo que o integrando $F(x)$ seja positivo em um certo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, obtemos uma vizinhança $\delta(x_0)$ tal que $F|_{\delta(x_0)} > 0$. Segue-se que $\int_{\delta(x_0)} F > 0$, contradizendo a igualdade (2.2.4) devido a arbitrariedade de x_1 e x_2 .

Supondo que a corda é uniforme, temos $\rho(x) = \rho(\text{constante})$. Desse modo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} p(x, t)$$

Portanto,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad (2.2.5)$$

Esta é a equação da onda com $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ e $F(x, t) = \frac{1}{\rho} p(x, t)$

Em geral a equação da onda é dada por

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F$$

Em que $\Delta = \sum_{\delta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{\delta 2}}$ é o operador de Laplace.

Quando $F = 0$, a equação se diz homogênea. Uma solução forte dessa equação em um intervalo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz essa equação pontualmente em $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

A seguir vamos estabelecer a boa colocação do problema de Cauchy para a equação homogênea

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

2.3 Boa Colocação da Equação da Onda

Vamos determinar $u = u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, tal que;

$$(p) \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ em } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ em } \mathbb{R} \end{cases}$$

Para mostrar a existência de solução vamos começar efetuando uma mudança de variável $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ dada por

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}, \text{ com } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Calculemos u_{tt} e u_{xx} nas variáveis ξ e η . Temos:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma$$

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial u}{\partial \eta} \gamma \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \gamma \right) + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \gamma \right)
\end{aligned}$$

Devido a continuidade temos $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, assim

$$u_{xx} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (2.3.1)$$

Da mesma forma obtemos

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \beta + \frac{\partial u}{\partial \eta} \delta \\
u_{tt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \beta + \frac{\partial u}{\partial \eta} \delta \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \beta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \delta \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta} \delta \right)
\end{aligned}$$

Devido a continuidade temos $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, assim

$$u_{tt} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (2.3.2)$$

De volta a equação do problema (p), obtemos;

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - a^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\
&= (\beta^2 - a^2\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2\beta\delta + 2a^2\alpha\gamma) \frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta} + (\delta^2 - a^2\gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Afim de obter uma boa simplificação desta equação vamos determinar α, β, γ e δ , de modo que;

$$(p_1) \begin{cases} \beta^2 - a^2\alpha^2 = 0 \\ \delta^2 - a^2\gamma^2 = 0 \\ 2(\beta\delta + a^2\alpha\gamma) \neq 0 \end{cases}$$

Tomamos $\beta = a\alpha$ e $\delta = -a\gamma$. É fácil ver que essa escolhas nos dá imediatamente $(p_1)_1$ e $(p_1)_2$. Além disso, $2(\beta\delta + a^2\alpha\gamma) = 2(-a^2\alpha\gamma - a^2\alpha\gamma) = 2a(-2a\alpha\gamma) = 2a((-a\gamma)\alpha - (a\alpha)\gamma) = 2a(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$. Deste modo, podemos escolher quaisquer α e γ não nulos e obtemos β e δ não nulos satisfazendo (p_1) .

Assim escolhemos $\alpha = \gamma = 1$ e obtemos a mudança

$$(p_2) \begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

Aplicando a mudança de variável (p_2) obtemos;

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
&(\beta^2 - a^2\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2\beta\delta + 2a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\delta^2 - a^2\gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0
\end{aligned}$$

Para $\beta^2 - a^2\alpha^2 = 0$, $\delta^2 - a^2\gamma^2 = 0$ e $2\beta\delta + 2a^2\alpha\gamma \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\partial u / \partial \xi$ é constante com relação a η .

Segue-se que $\partial u / \partial \xi = \theta(\xi)$. Integrando de 0 a ξ , obtemos;

$$\int_0^\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}(s) ds = \int_0^\xi \theta(s) ds$$

$$u(s, \eta) \Big|_0^\xi = \int_0^\xi \theta(s) ds$$

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi \theta(s) ds + u(0, \eta)$$

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi \theta(s) ds + g(\eta)$$

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\therefore u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \text{ com } f, g \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$$

Portanto, a solução de D'Alembert é dada por

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

A seguir usamos as condições iniciais do problema (p) para determinar $f(x)$ e $g(x)$.

Sejam $u_0 \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$. Temos:

$$(p_3) \begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = a \cdot f'(x) - a \cdot g'(x) = u_1(x) \end{cases}$$

Integrando $(p_3)_2$ de 0 a x , obtemos;

$$\int_0^x (f'(s) - g'(s)) ds = \frac{1}{a} \int_0^x u_1(s) ds$$

$$f(s) - g(s) \Big|_0^x = \frac{1}{a} \int_0^x u_1(s) ds$$

$$f(x) - g(x) - (f(0) - g(0)) = \frac{1}{a} \int_0^x u_1(s) ds$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x u_1(s) ds + c$$

Assim obtemos o sistema

$$(p_4) \begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x u_1(s) ds + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (p_4) , obtemos;

$$\left| \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(s) ds + \frac{c}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(s) ds - \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

Segue-se que

$$(p_5) \left| \begin{aligned} f(x+at) &= \frac{1}{2}u_0(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} u_1(s) ds + \frac{c}{2} \\ g(x-at) &= \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} u_1(s) ds - \frac{c}{2} \end{aligned} \right.$$

Podemos ainda reescrever $(p_5)_2$ como

$$g(x-at) = \frac{1}{2}u_0(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 u_1(s) ds - \frac{c}{2}$$

Portanto, a solução de D'Alembert é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s) ds \quad (2.3.3)$$

Isso conclui a demonstração de existência. Como esta solução depende unicamente das condições iniciais u_0 e u_1 , ela é única.

A seguir mostraremos que a solução obtida depende continuamente dos dados iniciais. Sejam (u_0, u_1) e (v_0, v_1) dois pares de dados iniciais aos quais correspondem as soluções $u(x,t)$ e $v(x,t)$. Devido a formula de D'Alembert obtemos;

$$|u(x,t) - v(x,t)| = \left| \begin{aligned} &\frac{1}{2}[u_0(x+at) - v_0(x+at)] + \frac{1}{2}[u_0(x-at) - v_0(x-at)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} [u_1(s) - v_1(s)] ds \end{aligned} \right|$$

$$\begin{aligned} |u(x,t) - v(x,t)| &\leq \frac{1}{2}|u_0(x+at) - v_0(x+at)| + \frac{1}{2}|u_0(x-at) - v_0(x-at)| \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |u_1(s) - v_1(s)| ds \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/1 + T$. Daí supondo que

$$|u_0(x) - v_0(x)|, |u_1(x) - v_1(x)| < \delta$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ obtemos

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta ds$$

$$\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta ds = \delta + \frac{1}{2a} (\delta s) \Big|_{x-at}^{x+at}$$

$$\delta + \frac{1}{2a} (\delta s) \Big|_{x-at}^{x+at} = \delta + \frac{1}{2a} \delta [(x+at) - (x-at)]$$

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \delta + \frac{1}{2a} \delta 2at = \delta + \delta t = \delta(1+t)$$

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \delta(1+T) = \varepsilon$$

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \varepsilon$$

Vejam os um exemplo;

Determine a solução do problema abaixo no ponto (2, 10)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u_0(x) = x^2 \\ u_1(x) = 2 \end{cases}$$

Notemos que $a = 1$. Assim da solução de D'Alembert obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [(x+t)^2 + (x-t)^2] + \frac{1}{2a} \int_{x-t}^{x+t} 2 ds = x^2 + t^2 + 2t$$

$$\therefore u(2,10) = 124$$

Vejam os uma outra solução para este mesmo exemplo

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s) ds$$

Considerando os dados do problema obtemos

$$u(2,10) = \frac{1}{2} [(2+10)^2 + (2-10)^2] + \frac{1}{2} \int_{2-10}^{2+10} 2 ds$$

$$u(2,10) = \frac{1}{2} (144 + 64) + \frac{1}{2} \int_{-8}^{12} 2 ds$$

$$u(2,10) = 104 + \frac{1}{2} (2s) \Big|_{-8}^{12}$$

$$u(2,10) = 104 + (12 - (-8)) = 104 + 20$$

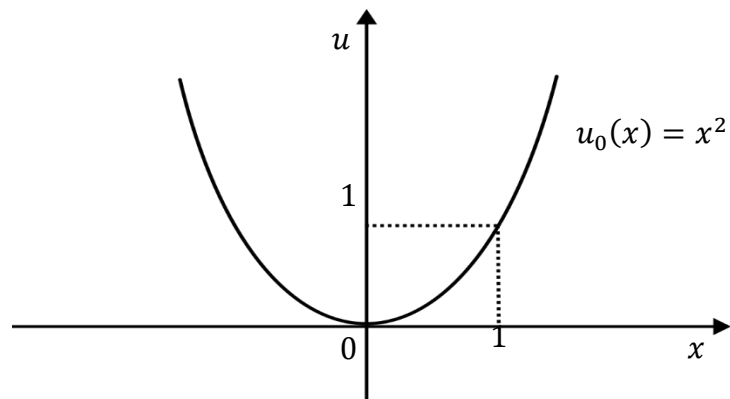
$$\therefore u(2,10) = 124$$

Vamos analisar graficamente a solução do exemplo, para $t = 0, 1, 2, 3$

- $t = 0$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}[x^2 + x^2] + \frac{1}{2} \int_x^x 2 ds = x^2$$

Figura 6 - Exemplo 3.3.1

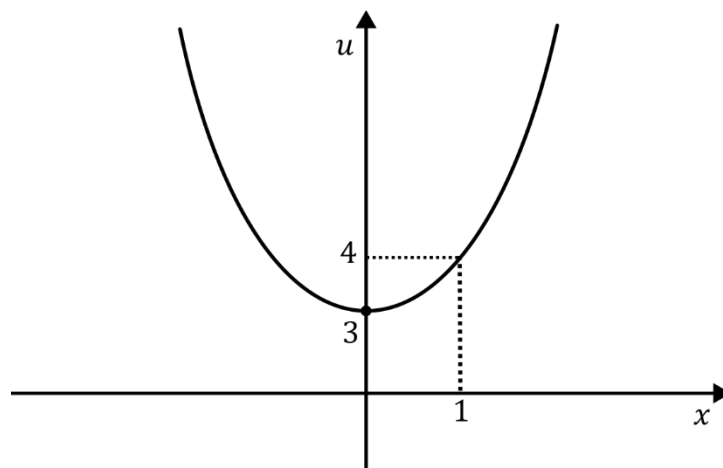


Fonte: Própria do autor, (2023)

- $t = 1$

$$u(x, 1) = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2] + 2 = x^2 + 3$$

Figura 7 - Exemplo 3.3.2

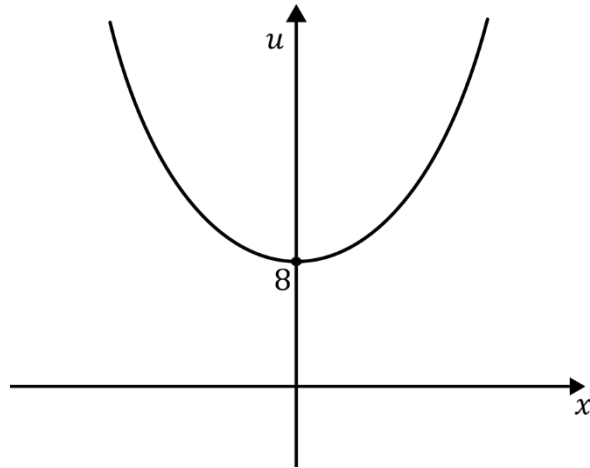


Fonte: Própria do autor, (2023)

- $t = 2$

$$u(x, 2) = x^2 + 8$$

Figura 8 - Exemplo 3.3.3

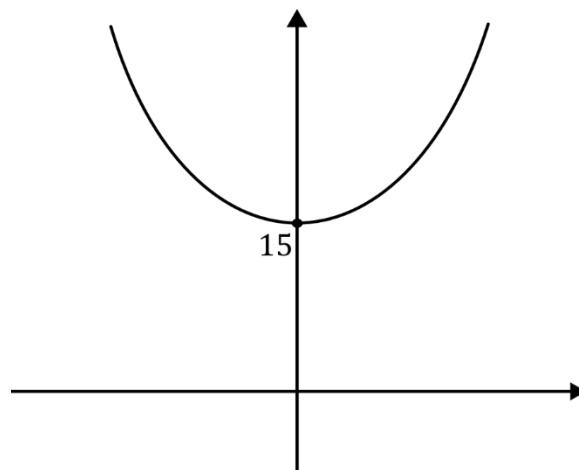


Fonte: Própria do autor, (2023)

- $t = 3$

$$u(x, 3) = x^2 + 15$$

Figura 9 - Exemplo 3.3.4



Fonte: Própria do autor, (2023)

2.4 Interpretação da Solução de D'Alembert

A função $u_0(x) = u(x, 0)$ é chamada perfil da onda. Vamos dar uma visão geométrica da solução de D'Alembert plotando alguns gráficos da solução de um problema particular. Consideremos a solução de D'Alembert com $u_1(x) = 0$. Temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)]$$

Notamos que o gráfico de $u_0(x - at)$ é obtido a partir do gráfico de $u_0(x)$ fazendo-se uma translação de at no sentido positivo do eixo x . Analogamente, o gráfico de $u_0(x + at)$ é obtido transladando-se o gráfico de $u_0(x)$ com mesma velocidade at no sentido negativo do eixo x . Neste sentido, $u_0(x - at)$ e $u_0(x + at)$ são chamadas onda progressiva, ou do futuro e onda regressiva, ou onda do passado, respectivamente.

Agora vamos considerar uma onda $u_0(x)$ em particular apenas para efeito de gráfico vamos considerar $u_0(x)$ apenas contínua e não de classe \mathbb{C}^2 , como obtivemos na solução de D'Alembert.

$$\text{Seja } u_0(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

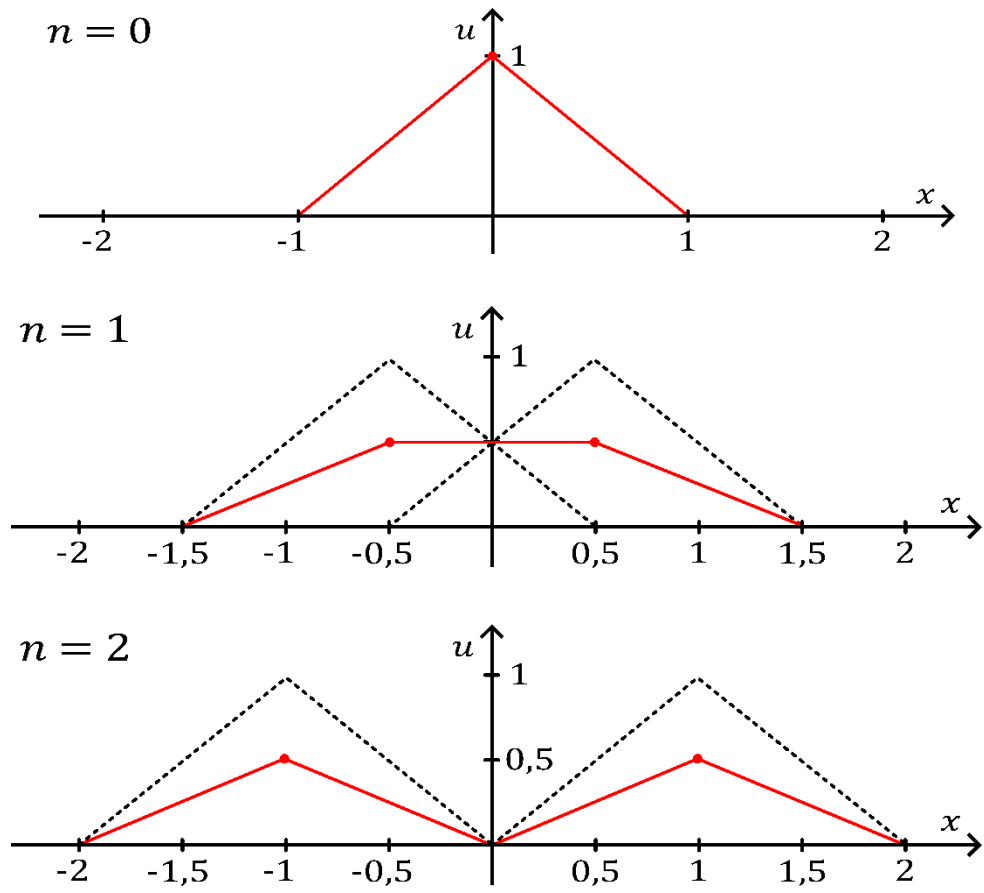
Vamos fazer o gráfico das soluções

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)]$$

Para os casos $t = t_n = n/2a$, com $n = 0, 1$ e 2 . Ou seja, faremos os gráficos de

- i) $u(x, 0) = u_0(x)$
- ii) $u\left(x, \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left[u_0\left(x + \frac{1}{2}\right) + u_0\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$
- iii) $u\left(x, \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}[u_0(x + 1) + u_0(x - 1)]$

Figura 10 - Interpretação da solução



Fonte: Própria do autor, (2023)

2.5 Domínios de Dependência e Influência

Analisando a solução de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s) ds$$

Notamos que $u(x, t)$ depende dos valores de

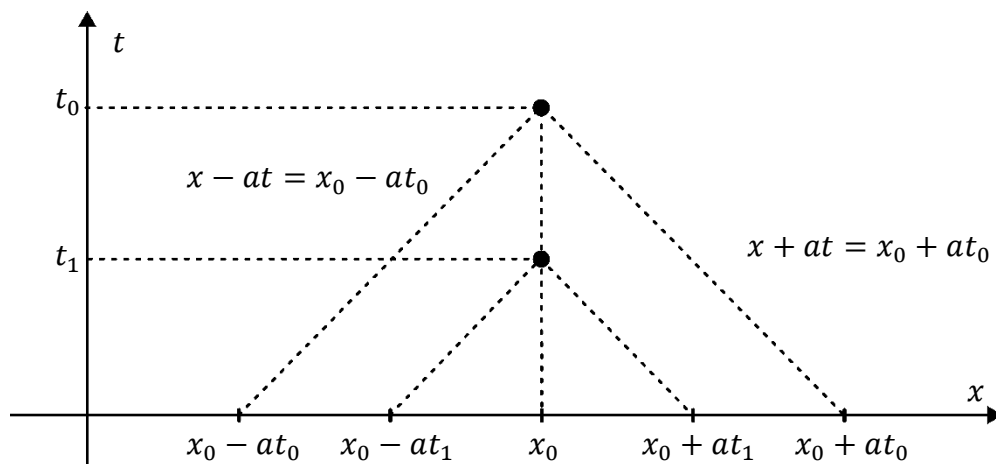
- i) u_0 nos extremos do intervalo $[x - at, x + at]$;
- ii) u_1 no intervalo $[x - at, x + at]$

Desse modo, fixando (x_0, t_0) , qualquer mudança na definição das condições iniciais u_0 e u_1 fora do intervalo $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ não altera a solução $u(x_0, t_0)$. Motivados por essa observação definimos o intervalo.

$$D(u, x_0, t_0) = [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$$

Chamada domínio de dependência do ponto (x_0, t_0) .

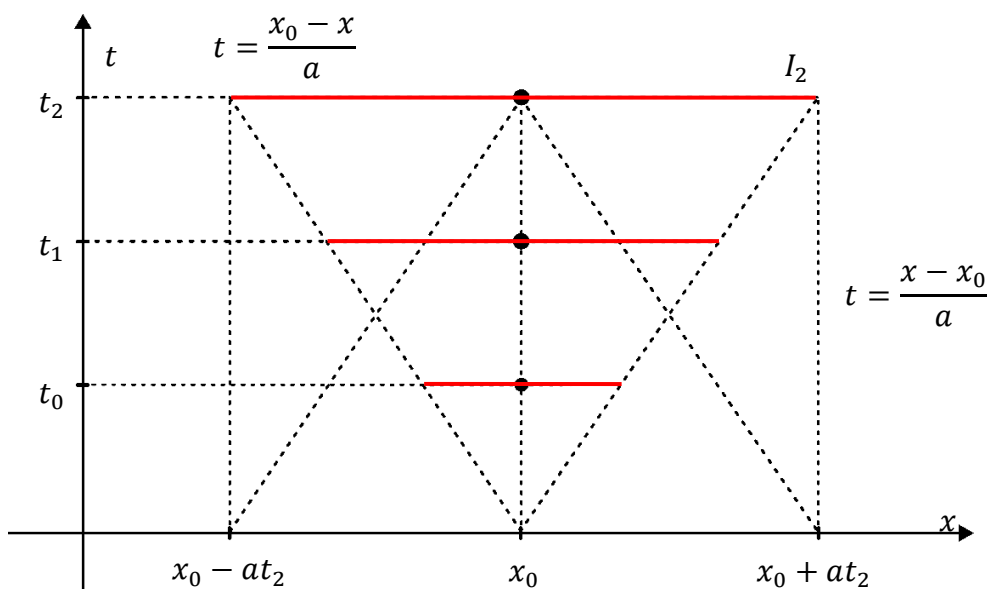
Figura 11 - Gráfico do domínio de dependência



Fonte: Própria do autor, (2023)

Agora fixaremos x_0 e analisemos como varia o domínio de dependência quando t varia no intervalo $[0, +\infty)$.

Figura 12 - Gráfico da variação do domínio de dependência



Fonte: Própria do autor, (2023)

Observação: Notamos que x_0 está no domínio de dependência de todos os pontos do segmento $I_2 = \{(x, t_2); x_0 - at_2 \leq x \leq x_0 + at_2\}$. Isso significa que mudando os dados iniciais u_0 e u_1 em x_0 alteramos a solução em todo o segmento I_2 .

Assim concluímos que x_0 está no domínio de dependência de todos os pontos do conjunto, chamado domínio de influência de $(x_0, 0)$.

$$I(u, x_0) = \{(x, t); x_0 - at \leq x \leq x_0 + at, 0 \leq t \leq +\infty\}$$

As retas $x + at = x_0 + at_0$ e $x - at = x_0 - at_0$ obtidas no domínio de independência de (x_0, t_0) são chamadas características da equação $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. O triângulo obtido no domínio de dependência é chamado característico.

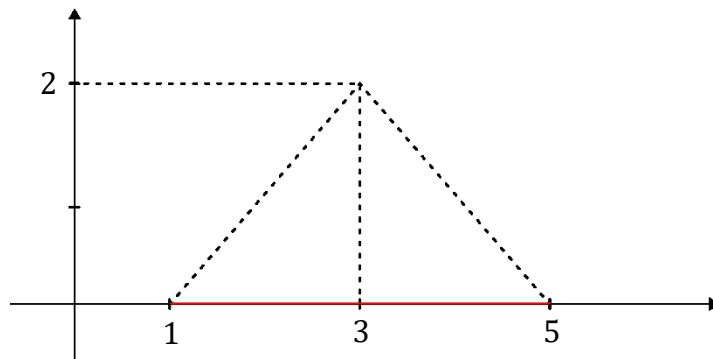
Voltemos ao problema do exemplo anterior

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u_0(x) = x^2 \\ u_1(x) = 2 \end{cases}$$

O domínio de dependência no ponto $(3, 2)$ é o intervalo $D(u, 3, 2) = [1, 5]$. As características por esse ponto são as retas $x + t = 5$ e $x - t = 1$. O domínio de influência do ponto $(3, 0)$ é o ângulo agudo determinado pelo vértice e as retas

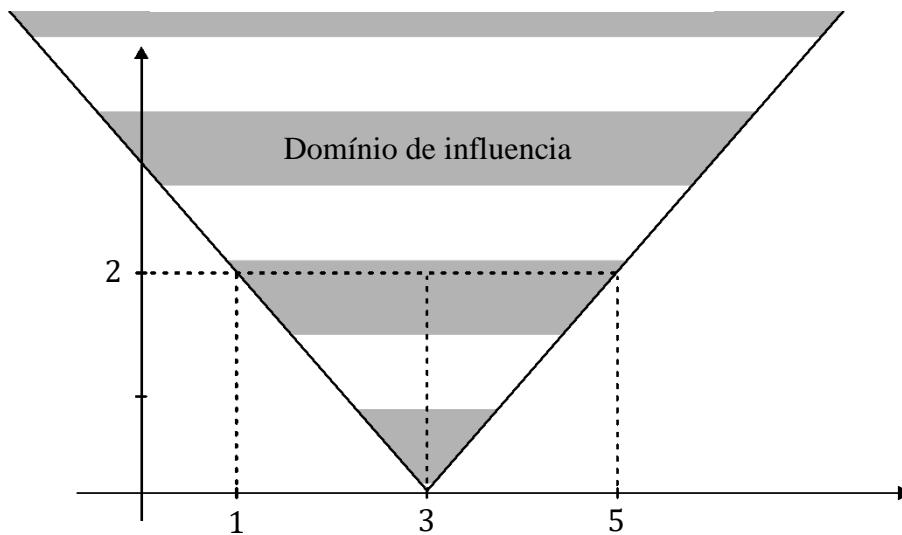
$$t = \frac{3 - x}{1} \quad t = \frac{x - 3}{1}$$

Figura 13 - Exemplo do domínio de dependência



Fonte: Própria do autor, (2023)

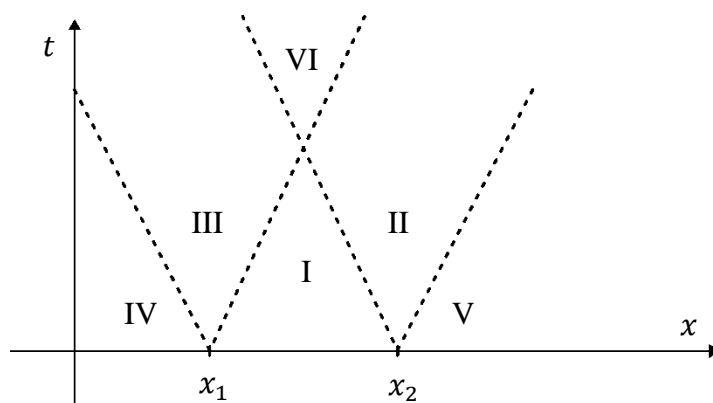
Figura 14 - Exemplo do domínio de influência



Fonte: Própria do autor, (2023)

O domínio de influência de um intervalo $[x_1, x_2]$ é a reunião dos domínios de influência de cada ponto do intervalo $[x_1, x_2]$.

Figura 15 - Domínio de influência de um intervalo



Fonte: Própria do autor, (2023)

Seja o ponto (ξ, τ) . Devido a formula de D'Alembert obtemos

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2}[u_0(\xi - a\tau) + u_0(\xi + a\tau)] + \frac{1}{2a} \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(s) ds$$

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi - a\tau) - \frac{1}{2a} \int_0^{\xi - a\tau} u_1(s) ds + \frac{1}{2}u_0(\xi + a\tau) + \frac{1}{2a} \int_0^{\xi + a\tau} u_1(s) ds$$

$$u(\xi, \tau) = \phi(\xi - a\tau) + \psi(\xi + a\tau)$$

Isso mostra que a onda do futuro $\phi(x - at)$ é constante ao longo da característica da função $x - at = \xi - at$. Analogamente a onda do passado $\psi(x + at)$ é constante ao longo da característica $x + at = \xi + a\tau$.

2.6 Equação não homogênea

O objetivo desta seção é resolver o seguinte problema de Cauchy, ou problema de valor inicial, para a equação da onda

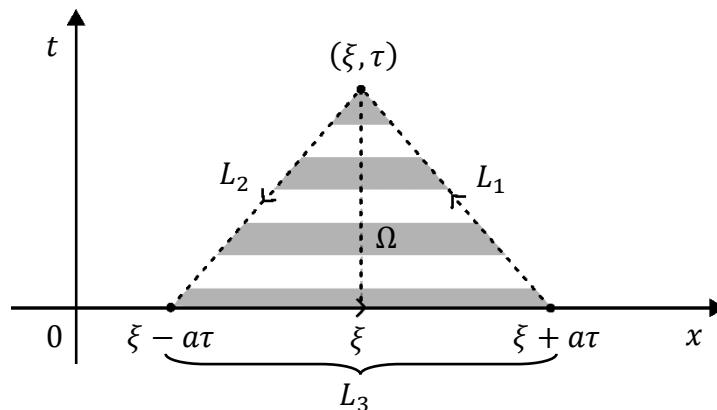
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t) & , x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ & (2.6.1) \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R} & (2.6.2) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & , x \in \mathbb{R} & (2.6.3) \end{cases}$$

Em que $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ e $F(x, t) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Isso quer dizer que vamos mostrar que existe uma função $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3).

Dado um ponto $(\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, vamos obter $u(\xi, t)$ satisfazendo (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3).

Seja Ω o triangulo característico determinado por (ξ, τ) . Vamos orientar a fronteira Γ de Ω no sentido anti-horário.

Figura 16 - Problema de Cauchy



Fonte: Própria do autor, (2023)

Integramos ambos os membros de (2.6.1) em Ω e obtemos;

$$\int_{\Omega} (a^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = - \int_{\Omega} F dx dt \quad (2.6.4)$$

Agora aplicamos o teorema de Green com $Q = a^2 u_x$ e $P = u_t$. Temos;

$$\int_{\Omega} (Q_x - P_t) dx dt = \int_{\Gamma} P dx + Q dt$$

Logo obtemos,

$$\int_{\Omega} (a^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = \int_{\Gamma} u_t dx + a^2 u_x dt \quad (2.6.5)$$

A seguir, parametrizamos os segmentos de Γ . Temos:

$$L_1 := x + at = \xi + a\tau, \quad \xi \leq x \leq \xi + a\tau$$

$$L_2 := x - at = \xi - a\tau, \quad \xi - a\tau \leq x \leq \xi$$

$$L_3 := x = 0, \quad \xi - a\tau \leq x \leq \xi + a\tau$$

Notamos que $dt = 0$ sobre L_3 , $dx = a dt$ sobre L_2 e $dx = -a dt$ sobre L_1 . Segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_t dx + a^2 u_x dt &= \int_{L_1} u_t dx + a^2 u_x dt + \int_{L_2} u_t dx + a^2 u_x dt + \int_{L_3} u_t dx + a^2 u_x dt \\ &= \int_{L_1} u_t(-a dt) - a u_x(-a dt) + \int_{L_2} u_t(a dt) + a u_x(a dt) + \int_{L_3} u_t dx \\ &= \int_{L_1} u_t(-a dt) - a u_x dx + \int_{L_2} u_t(a dt) + a u_x dx + \int_{L_3} u_t dx \\ &= (-a) \int_{L_1} u_t dt + u_x dx + a \int_{L_2} u_t dt + u_x dx + \int_{L_3} u_t dx \\ &= (-a) \int_{L_1} du + a \int_{L_2} du + \int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau} u_t dx \\ &= (-a)[u(\xi, \tau) - u(\xi + a\tau, 0)] + a[u(\xi - a\tau, 0) - u(\xi, \tau)] + \int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau} u_t(x, 0) dx \\ \int_{\Gamma} u_t dx + a^2 u_x dt &= a[u(\xi + a\tau, 0) + u(\xi - a\tau, 0)] - 2au(\xi, \tau) + \int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau} u_t(x, 0) dx \end{aligned}$$

Devido a essa última igualdade, (2.6.4) e (2.6.5) obtemos;

$$- \int_{\Omega} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = a[u(\xi + a\tau, 0) + u(\xi - a\tau, 0)] - 2au(\xi, \tau) + \int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau} u_t(x, 0) dx$$

Segue desta última igualdade que

$$u(\xi, \tau) = \underbrace{\frac{1}{2}[u_0(\xi + a\tau) + u_0(\xi - a\tau)] + \frac{1}{2a} \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(s) ds}_{v} + \underbrace{\frac{1}{2a} \int_{\Omega} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu}_{w}$$

Notamos que $u = v + w$, em que v é a solução de D'Alembert para o problema homogêneo associado do problema (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3). Por outro lado, é possível mostrar que,

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{\Omega} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

é solução do problema

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = F(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.6.6) \\ (2.6.7) \end{matrix}$$

Segue-se que $u = v + w$ é solução do problema (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3). Além disso é possível mostrar que a solução obtida u é única e depende continuamente dos dados iniciais. Isso é feito de modo análogo ao que foi feito no problema homogêneo.

Segue-se que o Problema de Cauchy (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3) é bem proposto.

Vejamos um exemplo;

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 \\ u_0(x) = x^2 \\ u_1(x) = 1 \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \frac{1}{2}[u_0(\xi + a\tau) + u_0(\xi - a\tau)] + \frac{1}{2a} \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(x) dx + \frac{1}{2a} \int_{\Omega} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2}[(\xi + \tau)^2 + (\xi - \tau)^2] + \frac{1}{2} \int_{\xi - \tau}^{\xi + \tau} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{t + \xi - \tau}^{-t + \xi - \tau} dx dt \\ &= \xi^2 + \tau^2 + \tau + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} -2t dt \\ &= \xi^2 + \tau^2 + \tau - \frac{\tau^2}{2} \\ &= \xi^2 + \frac{\tau^2}{2} + \tau \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse estudo esperamos que o leitor tenha adquirido um conhecimento introdutório a respeito das equações diferenciais parciais a partir do entendimento do conceito de problema de valor inicial e de contorno pela abordagem de D'Alembert para obter a solução da equação da onda. Sugere-se que seja dada continuidade ao estudo uma vez que há outras maneiras para se obter a solução da equação da onda. O caminho natural de sequência desses estudos são as séries de Fourier e obtenção de soluções em variáveis separáveis em seguida continuar o estudo no nível das soluções fracas no sentido de Sobolev.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] GUIDORIZZI, H. L.; Um Curso de Cálculo, volume 1, LTC, Rio de Janeiro, 2008.
- [2] GUIDORIZZI, H. L.; Um Curso de Cálculo, volume 3, LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [3] STEWART, James; Cálculo, Vol. 2, 7ª edição. Editora Cengage Learning, 2013.
- [4] LEITHOLD, L.; O Cálculo com Geometria Analítica. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. Vol. I. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- [5] LEITHOLD, L.; O Cálculo com Geometria Analítica. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. Vol. II. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- [6] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [7] MEDEIROS, L.A.; Iniciação as Equações Diferenciais Parciais, LTC, 1o Ed., Rio de Janeiro, 1978.
- [8] MEDEIROS, L. A.; FERREL, J.; BIAZUTTI, A.; Métodos clássicos em equações diferenciais parciais. [S.l.: s.n.], 2005.
- [9] GUEDES, Djairo; FREIRIA, Aloiso; Equações Diferenciais Aplicadas (Coleção Matemática Universitária), IMPA, 2012.