

Renan Lobo Duarte

**Comparação de operadores de cruzamentos  
utilizados em Algoritmos Genéticos aplicados  
aos Problemas da Cobertura de Conjuntos e da  
Mochila Multidimensional**

Brasil

2019

Renan Lobo Duarte

**Comparação de operadores de cruzamentos utilizados em  
Algoritmos Genéticos aplicados aos Problemas da  
Cobertura de Conjuntos e da Mochila Multidimensional**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como requisito obrigatório para obtenção do  
grau de Bacharel em Ciência da Computação  
pela Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Pará - UFPA

Faculdade de Computação

Bacharelado em Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Filipe de Oliveira Saraiva

Brasil

2019

Renan Lobo Duarte

Comparação de operadores de cruzamentos utilizados em Algoritmos Genéticos aplicados aos Problemas da Cobertura de Conjuntos e da Mochila Multidimensional/  
Renan Lobo Duarte. – Brasil, 2019-

55 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Filipe de Oliveira Saraiva

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Pará - UFPA  
Faculdade de Computação  
Bacharelado em Ciência da Computação, 2019.

1. Algoritmos Genéticos. 2. Cruzamento. 2. Comparação. I. Filipe de Oliveira Saraiva. II. Universidade Federal do Pará. III. Faculdade de Computação. IV. Comparação de operadores de cruzamentos utilizados em Algoritmos Genéticos aplicados aos Problemas da Cobertura de Conjuntos e da Mochila Multidimensional

Renan Lobo Duarte

**Comparação de operadores de cruzamentos utilizados em  
Algoritmos Genéticos aplicados aos Problemas da  
Cobertura de Conjuntos e da Mochila Multidimensional**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como requisito obrigatório para obtenção do  
grau de Bacharel em Ciência da Computação  
pela Universidade Federal do Pará

Trabalho aprovado. Brasil, 11 de julho de 2019:

---

**Prof. Dr. Filipe de Oliveira Saraiva**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Claudomiro Sales**  
Avaliador

---

**Prof. Dr. Reginaldo Filho**  
Avaliador

Brasil  
2019

*Este trabalho é dedicado a todos que me ajudaram, direta ou indiretamente, a chegar a este ponto.*

# Agradecimentos

Os agradecimentos direcionam-se, primeiramente, aos meus pais, Reginaldo e Jacilene Duarte, que acreditam em mim. Aos professores, que me ajudaram com sua vasta experiência em suas respectivas áreas e, principalmente, ao meu orientador, Prof. Dr. Filipe Saraiva. Agradeço também aos meus colegas e amigos: Adiel, Alan, Aurore, Daniell, Gabriel, Ítalo, Israel, Jayme, Fernando, Matheus, Marcos, Jéssica, Jeanne, Leonardo, Lucas, Kelly, Ronald, Francielma, Isabela e Arthur. Agradeço, especialmente, aos amigos Jhemerson e Ana Cardoso, junto com sua filha Elizabeth, cuja importância é extrema. Aos que não citei, meus agradecimentos sinceros.

*“Algumas pessoas me disseram que elas não acham que um pinguim gordinho realmente personifica a graça do Linux. O que me diz que eles nunca viram um pinguim furioso correndo atrás deles a umas 100 milhas por hora.”*Linus

*Torvalds*

# Resumo

Os algoritmos genéticos são técnicas da inteligência artificial utilizados para problemas de otimização baseando-se na teoria da seleção natural darwiniana. A eficácia desse algoritmo é mais notória em se tratando de problemas NP-difíceis como o Problema de Cobertura de Conjunto (SCP) e o Problema Multidimensional da Mochila (PMM). Operadores de cruzamento são uma das etapas dos algoritmos genéticos que tem importância fundamental na realização da busca por soluções no espaço de busca. Avaliar, portanto, os métodos de cruzamento é de suma importância, devido a sua capacidade de formar indivíduos, podendo melhorá-los ou piorá-los. Ao final deste trabalho, pode-se dizer qual o método de cruzamento se sobressai e para qual tipo de problema.

**Palavras-chave:** Algoritmo Genético, Otimização, Cruzamento.

# Abstract

Genetic algorithms are artificial intelligence techniques used for optimisation problems based on the theory of Darwinian natural selection. The effectiveness of this algorithm is more noticeable in the case of NP-hard problems such as the Set Covering Problem (SCP) and the Multidimensional Knapsack Problem (MKP). Crossover operators are the steps of the genetic algorithms that have fundamental importance in searching solutions in the search space. Evaluating, therefore, crossover methods is most important because of their ability to form individuals, which can improve or worsen them. At the end of this work, It can be said which crossover method fits better in and for which type of problem.

**Keywords:** Genetic Algorithm, Optimisation, Crossover.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma do Algoritmo Genético canônico . . . . .	19
Figura 2 – Codificação binária do cromossomo . . . . .	20
Figura 3 – Escolha dos indivíduos da população . . . . .	21
Figura 4 – Probabilidades de seleção no método da roleta . . . . .	22
Figura 5 – Torneio com agrupamentos de indivíduos . . . . .	22
Figura 6 – Cruzamento de um ponto no ponto 5 . . . . .	23
Figura 7 – Cruzamento uniforme usando máscara . . . . .	24
Figura 8 – Cruzamento uniforme gerando dois filhos . . . . .	24
Figura 9 – Mutação aplicada no indivíduo . . . . .	26
Figura 10 – Gráfico da média da função objetivo para as 15 instâncias testadas . . . . .	37
Figura 11 – Gráfico do tempo médio de execução para as 15 instâncias testadas . . . . .	38
Figura 12 – Gráfico da média geral da função objetivo para cada operador de cruzamento . . . . .	39
Figura 13 – Gráfico da média geral de tempo de execução para cada operador de cruzamento . . . . .	39
Figura 14 – Gráfico da média da função objetivo para as 15 instâncias testadas . . . . .	40
Figura 15 – Gráfico do tempo médio de execução para as 15 instâncias testadas . . . . .	41
Figura 16 – Gráfico da média geral da função objetivo . . . . .	41
Figura 17 – Gráfico da média geral de tempo de execução . . . . .	42

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação de custos para cada subconjunto . . . . .	30
Tabela 2 – Relação dos itens, seus pesos e seus valores . . . . .	31
Tabela 3 – Descrição das instâncias de teste do problema de cobertura de conjunto	35
Tabela 4 – Descrição das instâncias de teste do problema multidimensional da mochila . . . . .	35
Tabela 5 – Cruzamento Uniforme . . . . .	49
Tabela 6 – Cruzamento de Fusão . . . . .	50
Tabela 7 – Cruzamento de um ponto . . . . .	51
Tabela 8 – Cruzamento Uniforme . . . . .	53
Tabela 9 – Cruzamento de Fusão . . . . .	54
Tabela 10 – Cruzamento de um ponto . . . . .	55

# Lista de abreviaturas e siglas

SCP	Set Covering Problem
AG	Algoritmo Genético
PMM	Problema Multidimensional da Mochila

# Lista de símbolos

$\Sigma$	Letra grega maiúscula Sigma
$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$\subset$	Subconjunto próprio
$\subseteq$	Subconjunto
$\emptyset$	Conjunto Vazio
$=$	Igual
$  $	Cardinalidade de Conjunto
$\neq$	Diferente

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Trabalhos Relacionados</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>17</b>
1.3.1	Geral	17
1.3.2	Específicos	17
<b>1.4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>17</b>
<b>1.5</b>	<b>Estrutura do trabalho</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>ALGORITMOS GENÉTICOS</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Codificação</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Operadores Genéticos</b>	<b>20</b>
2.2.1	Seleção	20
2.2.1.1	Método de seleção proporcional	21
2.2.1.2	Método de seleção por torneio	21
2.2.2	Cruzamento	22
2.2.2.1	Cruzamento de um ponto	23
2.2.2.2	Cruzamento Uniforme	23
2.2.2.3	Cruzamento de Fusão Baseado em Fitness	25
2.2.3	Mutação	25
<b>2.3</b>	<b>Soluções inviáveis</b>	<b>26</b>
<b>2.4</b>	<b>Considerações do Capítulo</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADOS</b>	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>Problema de Cobertura de Conjunto</b>	<b>29</b>
3.1.1	Exemplo de aplicação	30
<b>3.2</b>	<b>Problema da Mochila</b>	<b>30</b>
3.2.1	Exemplo de aplicação	31
<b>3.3</b>	<b>Considerações dos Capítulos</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>MODELAGEM E SIMULAÇÃO</b>	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Aspectos Gerais</b>	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Implementação e Recursos Computacionais</b>	<b>34</b>
<b>4.3</b>	<b>Instâncias de Teste</b>	<b>34</b>
<b>4.4</b>	<b>Considerações do Capítulo</b>	<b>35</b>

---

<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>5.1</b>	<b>Testes com SCP</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>5.2</b>	<b>Testes com PMM</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>5.3</b>	<b>Considerações do Capítulo</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>6.1</b>	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>6.2</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE A – TABELAS SCP</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE B – TABELAS PMM</b> . . . . .	<b>52</b>

# 1 Introdução

Desde sempre, o homem teve o desejo de entender o que está a sua volta (GOLDBARG; LUNA, 2005). Por causa disso, o ser humano vem criando vários modelos para abstrair os eventos do mundo real. Segundo Goldbarg e Luna (2005), um modelo é capaz de levar o ser humano à uma visão bem estruturada da realidade. Na geografia e na cartografia, o mapa é o modelo do planeta Terra. Na física e na química, o átomo é representado por um núcleo com prótons e nêutrons, e mais uma órbita de elétrons em volta.

Na computação e na pesquisa operacional, a otimização é usada para estabelecer o melhor uso dos recursos disponíveis para uma determinada tarefa. Para maximizar ou minimizar o valor de uma função, modelos de otimização são utilizados. Modelos de otimização são modelos matemáticos que visam representar um determinado problema no qual deseja-se otimizar o valor de uma função objetivo, obedecendo determinadas restrições (PRADO; SARAMAGO, 2005).

O tipo de problema de otimização usado nesse trabalho é o de otimização combinatória, que busca combinar os componentes discretos do modelo de forma a chegar a uma boa solução (REEVES, 1993 apud OLIVEIRA; SARAIVA, 2004).

Entretanto, esse problema tem uma grande quantidade de combinações de suas variáveis de decisão, o que torna inviável o uso de métodos exatos a um custo computacional razoável (REEVES, 1993 apud OLIVEIRA; SARAIVA, 2004). Devido à ausência de métodos polinomiais determinísticos, são problemas considerados NP-difíceis. Uma abordagem muito usada para resolver esses problemas são as metaheurísticas.

Metaheurísticas são, segundo Luke (2013), métodos ou técnicas que aplicam um certo grau de aleatoriedade para encontrar boas soluções para problemas difíceis. E neste trabalho, serão utilizadas metaheurísticas chamadas Algoritmos Genéticos.

Os algoritmos genéticos são algoritmos bioinspirados nos quais estados sucessores são gerados pela seleção, cruzamento e mutação de dois estados pais (RUSSELL; NORVIG, 2004), fazendo assim a evolução para estados melhores, ou seja, chegando a boas soluções, que são os extremos desejados da função objetivo para que um determinado problema de otimização seja resolvido.

O algoritmo genético, em sua forma canônica, possui etapas como seleção, cruzamento e mutação. A etapa de seleção escolhe dois pais dentre um conjunto de soluções chamado população, e cruza-os na etapa de cruzamento. Após isso, aplica-se a mutação no indivíduo gerado no cruzamento.

Este trabalho tem como foco analisar operadores da etapa de cruzamento, porque é a etapa que introduz novas possibilidades de combinação de componentes para resolver

um problema de otimização combinatória.

## 1.1 Trabalhos Relacionados

Os trabalhos relacionados à análise de operadores de cruzamento são poucos e relacionados ao Problema do Caixeiro Viajante e *Job Shop* Clássico. Os autores encontrados foram Bahaabadi, Mohaymany e Babaei (2012), Starkweather et al. (1991), Nagata e Kobayashi (1999) e Oliveira e Saraiva (2004).

Bahaabadi, Mohaymany e Babaei (2012) analisam os operadores de cruzamento PMX (*Partially Mapped Crossover*), CX (*Cycle Crossover*), POS (*Position-Based Crossover*), AP (*Alternating-Position Crossover*) e ER (*Edge Recombination Crossover*), usados no Problema do Caixeiro Viajante (TSP), e propõem um operador de cruzamento que aumenta as chances de cada cidade se conectar às cidades vizinhas (BAHAABADI; MOHAYMANY; BABAEI, 2012).

Starkweather et al. (1991), por sua vez, analisam os operadores genéticos *Edge Recombination Crossover* melhorado, *Order Crossover* e suas variações, PBX, PMX e CX.

Nagata e Kobayashi (1999) analisam três operadores: EAX (*Edge Association Crossover*), EXX (*Edge Crossover*) e EX (*Edge Recombination Crossover*), usados no Problema do Caixeiro Viajante, e propõem requisitos para um novo operador genético de cruzamento.

Oliveira e Saraiva (2004) fazem um estudo comparativo dos operadores de cruzamento PMX (*Partially Mapped Crossover*), OX (*Order Crossover*), CX (*Cycle Crossover*), LOX (*Linear Order Crossover*), e PPX (*Precedence Preservative Crossover*).

## 1.2 Justificativa

O operador de cruzamento dos algoritmos genéticos é fator crucial para produção de soluções melhores a cada geração, pois seu método de cruzamento influencia na forma de herdar características dos melhores pais selecionados, conforme explicado por Beasley e Chu (1996). Por causa disso, há a necessidade de comparar os operadores de cruzamento existentes, para auxiliar na escolha do método de cruzamento mais aplicável para um determinado problema de otimização.

Considerando isso, viu-se a importância de estudar os operadores de cruzamento que podem ser utilizados em várias implementações do algoritmo genético, usando dois tipos de problemas de otimização combinatória.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Geral

Este trabalho visa comparar três operadores genéticos de cruzamento para o algoritmo genético, aplicado em dois problemas de otimização: Problema Multidimensional da Mochila (maximização) e Problema de Cobertura de Conjunto (minimização). Os operadores estudados são: cruzamento uniforme, cruzamento de fusão e cruzamento de um ponto.

### 1.3.2 Específicos

- Testar os operadores genéticos de cruzamento uniforme, fusão e um ponto no Problema Multidimensional da Mochila.
- Testar os operadores genéticos de cruzamento uniforme, fusão e um ponto no Problema de Cobertura de Conjunto.
- Comparar média de custos e de tempos de execução para cada instância do SCP.
- Comparar média de benefícios e de tempos de execução para cada instância do PMM.
- Comparar médias gerais de resultados e de tempos de execução dos operadores genéticos para cada problema estudado.

## 1.4 Metodologia

Dentre os artigos pesquisados para verificar estudos semelhantes, em sua maioria, foram encontrados artigos voltados para os problemas do Caixeiro Viajante e *Job Shop* Clássico, escritos pelos autores [Bahaabadi, Mohaymany e Babaei \(2012\)](#), [Starkweather et al. \(1991\)](#), [Nagata e Kobayashi \(1999\)](#) e [Oliveira e Saraiva \(2004\)](#). [Bahaabadi, Mohaymany e Babaei \(2012\)](#) Fazem a análise a fim de propor um método de cruzamento, e não usa nenhum dos cruzamentos estudados nesse trabalho. Já [Starkweather et al. \(1991\)](#) fazem apenas análises de operadores de cruzamento usados no Problema do Caixeiro Viajante. [Nagata e Kobayashi \(1999\)](#) analisam três operadores de cruzamento para o Problema do Caixeiro Viajante e propõem requisitos para criar um novo operador. [Oliveira e Saraiva \(2004\)](#), por sua vez, fazem um estudo comparativo de cinco operadores de cruzamento aplicados ao problema de *Job Shop* Clássico. A busca pelos artigos usou as palavras-chave: *set covering, knapsack problem, comparison, crossover operators, genetic algorithms*. Os repositórios utilizados foram o Google Acadêmico, Springer, IEEE. Os algoritmos genéticos implementados baseiam-se nos algoritmos presentes nos artigos de [Beasley e Chu \(1996\)](#),

pois foram os melhores modelos encontrados nessa literatura.

Para avaliar os cruzamentos, foram usados dois problemas de otimização: o Problema de Cobertura de Conjuntos (minimização) e o Problema Multidimensional da Mochila (maximização), utilizando instâncias da biblioteca OR-Library, disponibilizada por [Beasley \(1990\)](#). Desse repositório, foram extraídos problemas grandes, ou seja, com mais de 100 variáveis. Após as simulações, os resultados são exibidos em tabelas, comparados em qualidade de solução (lucro no PMM e custo no SCP) e tempo, analisando as médias de execução para cada instância em cada problema.

## 1.5 Estrutura do trabalho

Esse trabalho é dividido em seis capítulos, estruturados conforme abaixo:

- O [Capítulo 2](#) refere-se à teoria a respeito de algoritmos genéticos e os métodos de cruzamento, servindo de base para o trabalho.
- O [Capítulo 3](#) discute os métodos de otimização usados no trabalho.
- O [Capítulo 4](#) descreve como o algoritmo genético foi modelado aos problemas de otimização e as simulações computacionais.
- O [Capítulo 5](#) exhibe os resultados em tabelas, comparando-se a qualidade das soluções e o seu tempo de execução.
- O [Capítulo 6](#) contém as conclusões tomadas após o desenvolvimento do trabalho.

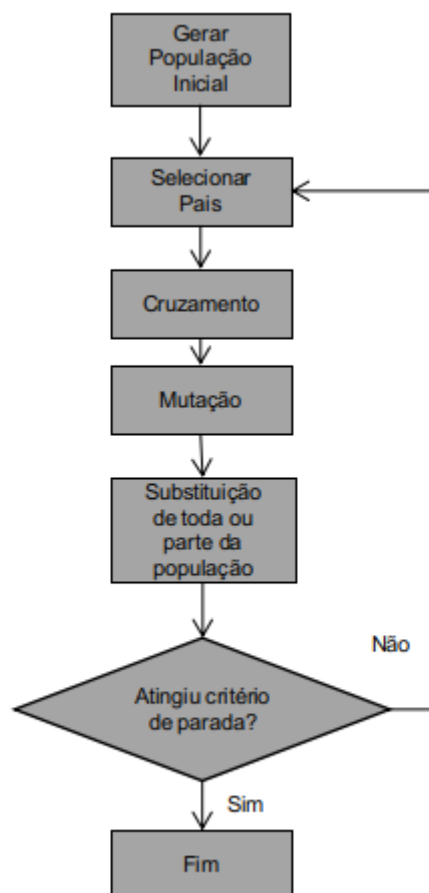
## 2 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos são algoritmos de busca baseados na teoria da seleção natural darwiniana, que permite a sobrevivência do indivíduo mais apto (HOLLAND, 1992 apud SHEN; XU; HUANG, 2011). Os AG são utilizados para resolver problemas de otimização combinatória para os quais não há resolução por métodos exatos, devido às grandes combinações de variáveis que compõem o modelo do problema.

Os Algoritmos Genéticos representam as soluções dos problemas usando caracteres de um determinado alfabeto finito. Geralmente, as soluções são codificadas em forma de *strings* binárias, ou seja, cadeias de 0-1, que são os valores das variáveis de decisão do problema. Em algoritmos genéticos, essas posições na cadeia são chamadas *genes*. Essas cadeias são conhecidas como *chromossomos*. A Figura 1 mostra o fluxograma de um algoritmo genético canônico.

Dado um conjunto de soluções (conhecido como população), dois indivíduos são

Figura 1 – Fluxograma do Algoritmo Genético canônico



selecionados para cruzar e gerar novos indivíduos. A etapa de cruzamento forma um indivíduo totalmente diferente dos pais, mesmo que herde características deles, podendo ser mais apto ou não (apto nesse caso significa mais próximo do ótimo global de um problema de otimização). A função de aptidão, também chamada de função de *fitness*, verifica o quão apto o indivíduo está em relação a população. Em problemas de otimização, é o valor da solução quando a função objetivo é aplicada.

Após a etapa do cruzamento, ocorre a etapa da mutação, que altera os genes do cromossomo. A mutação tem como objetivo ampliar a diversidade da população, evitando a convergência prematura.

Os AG realizam essas etapas iterativamente, até atingir um determinado critério de parada (Figura 1), que comumente é definido pelo número de iterações que o algoritmo executa. Essas iterações são chamadas de *gerações*. Em outras palavras, os AG selecionam, cruzam e modificam os indivíduos várias vezes até a sua convergência.

## 2.1 Codificação

Os indivíduos são codificados como cadeias de caracteres pertencentes a um alfabeto finito (RUSSELL; NORVIG, 2004), que são arranjados para formar a configuração da solução. Cada posição dessa cadeia (cromossomo) é um componente da solução, ou seja, a variável de decisão.

A representação mais comum em AG é a binária, cujos genes assumem valor 0 ou 1 (Figura 2). Os cromossomos são codificados da seguinte maneira:

Figura 2 – Codificação binária do cromossomo



Fonte: O autor

## 2.2 Operadores Genéticos

Os Algoritmos Genéticos repetem etapas a cada geração, e esta seção tem como objetivo detalhar as operações usuais dos Algoritmos Genéticos. Estas operações são: seleção, cruzamento e mutação.

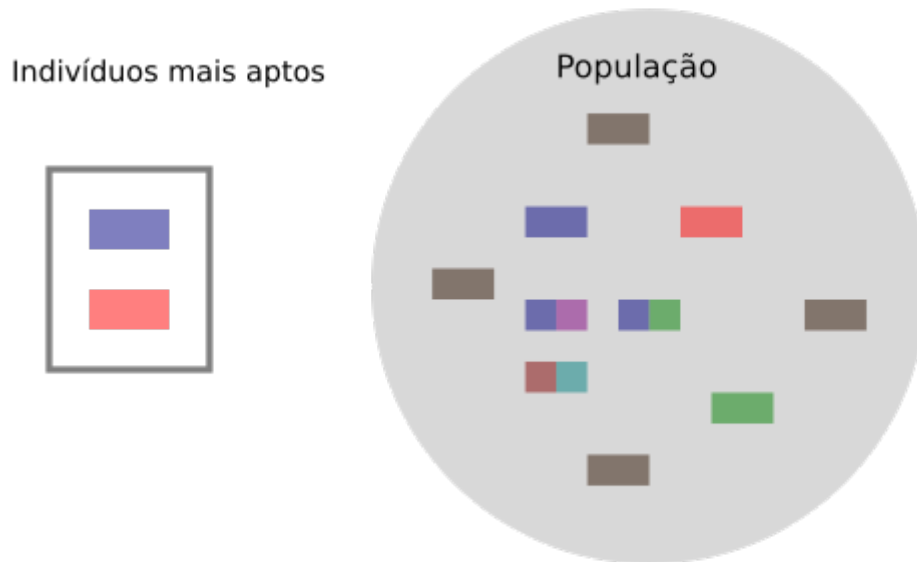
### 2.2.1 Seleção

Nessa etapa, dois indivíduos são escolhidos da população para realizar o cruzamento (Figura 3). Essa escolha é feita com base no valor de *fitness*, que é a aptidão do indivíduo

perante a população. O cálculo da aptidão é feito ao aplicar a função objetivo nos cromossomos (FILITTO, 2008). Em uma tradução livre de Chu e Beasley (1998), "Seleção de pais é a tarefa de definir oportunidades reprodutivas para cada indivíduo na população".

A escolha dos pais visa reunir os melhores indivíduos, para que sejam transmitidas as melhores características para a próxima geração.

Figura 3 – Escolha dos indivíduos da população



Fonte: O autor

Os métodos de seleção mais comuns são os de seleção proporcional e o método do torneio.

#### 2.2.1.1 Método de seleção proporcional

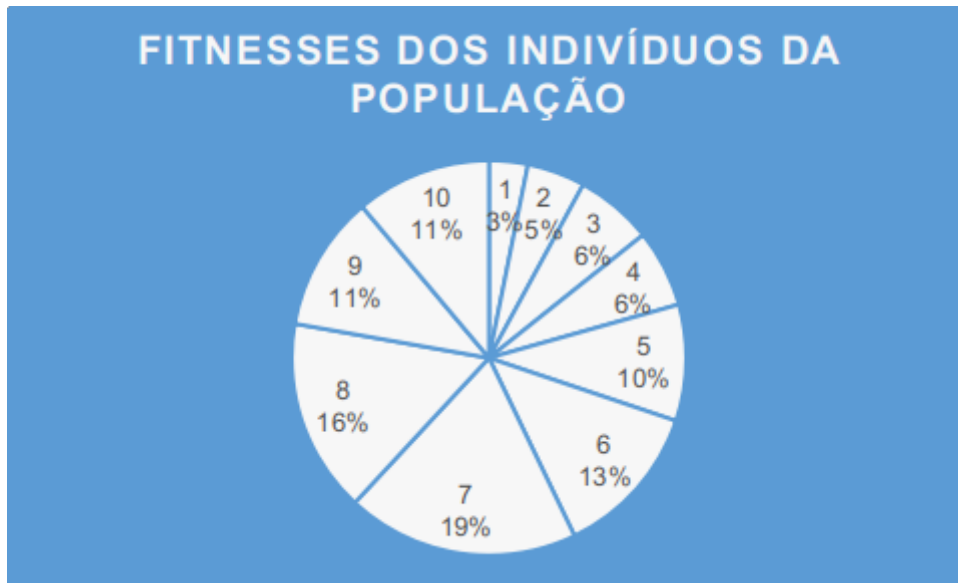
O método de seleção proporcional calcula a probabilidade de cada indivíduo ser escolhido (BEASLEY; CHU, 1996). O método proporcional mais usado é o da roleta (Figura 4). O método da roleta consiste de representar os indivíduos numa roleta, na qual cada pedaço representa a proporção do indivíduo (POZO et al., ), que é a chance de o indivíduo ser escolhido.

Segundo Obitko (1998), o método funciona assim: Soma-se todos os valores de *fitness* dos indivíduos. Em seguida, um número aleatório entre 0 e o valor da soma é sorteado. Depois, percorre-se a população, somando o valor do *fitness* de cada indivíduo até que a soma seja maior que o número sorteado. Quando isso acontecer, é escolhido o cromossomo atual.

#### 2.2.1.2 Método de seleção por torneio

O método do torneio consiste de selecionar melhores indivíduos em cada agrupamento (BEASLEY; CHU, 1996) e cruzá-los. Segundo Beasley e Chu (1996), a escolha se

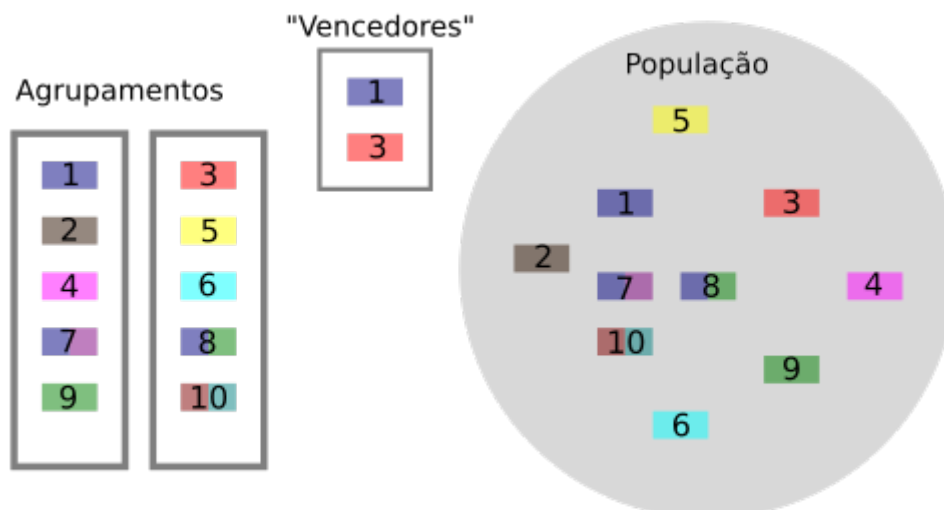
Figura 4 – Probabilidades de seleção no método da roleta



Fonte: O autor

dá formando dois grupos  $T$ , com  $n$  indivíduos. De cada grupo, o indivíduo mais apto é escolhido para cruzar com o indivíduo escolhido no outro grupo (Figura 5). A forma mais básica de implementar é o torneio binário, no qual  $|T| = 2$ .

Figura 5 – Torneio com agrupamentos de indivíduos



Fonte: O autor

### 2.2.2 Cruzamento

O cruzamento é responsável por cruzar os indivíduos após a etapa de seleção e gerar um ou mais novos indivíduos, sendo responsável por transmitir as características dos

pais aos descendentes (BEASLEY; CHU, 1996).

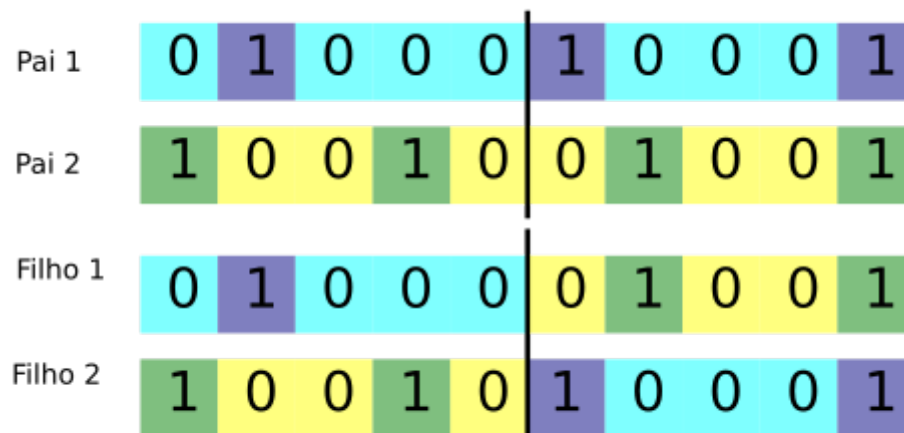
Vários métodos de cruzamento foram propostos ao longo do tempo, como PMX, ER, OX1, etc. Porém, apenas três métodos de cruzamentos serão abordados nesse trabalho, sendo estes: cruzamento de um ponto, cruzamento uniforme e cruzamento de fusão, sendo este último proposto por Beasley e Chu (1996).

### 2.2.2.1 Cruzamento de um ponto

O cruzamento de um ponto é o padrão no estudo de algoritmos genéticos. Esse método de cruzamento consiste em dividir os pais selecionados em duas partes (OBITKO, 1998), intercalando-os em até dois novos descendentes (BEASLEY; CHU, 1996).

O ponto de cruzamento, que pode ser escolhido por acaso no cromossomo (RUSSELL; NORVIG, 2004), divide os pais para gerar os descendentes. Caso a quinta posição seja escolhida como ponto de cruzamento, os primeiros cinco genes do primeiro genitor é concatenado aos últimos 5 genes do segundo, assim como os primeiros 5 genes do segundo são concatenados aos 5 restantes do primeiro (Figura 6).

Figura 6 – Cruzamento de um ponto no ponto 5



Fonte: O autor

### 2.2.2.2 Cruzamento Uniforme

O cruzamento uniforme consiste em gerar aleatoriamente uma máscara de 0's e 1's do mesmo tamanho dos cromossomos (ZHAO et al., 2009). Conforme a Figura 7, para cada bit  $j$  da máscara, copia-se o bit  $j$  de um dos genitores da seguinte forma: caso o bit  $j$  da máscara seja 0, copia o bit  $j$  do primeiro genitor; caso contrário, copia o do segundo.

Figura 7 – Cruzamento uniforme usando máscara

Máscara	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Pai 1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Pai 2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Filho	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1

Fonte: O autor

Figura 8 – Cruzamento uniforme gerando dois filhos

Máscara	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Pai 1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Pai 2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Filho 1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
Filho 2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Fonte: O autor

Chu e Beasley (1998) não definem explicitamente uma máscara, mas é escolhido um número aleatório para cada bit dos genitores, ou seja, a cada gene  $j$  dos cromossomos, o gerador de números aleatórios sorteia um valor  $r \in [0, 1]$  e escolhe o bit a ser copiado conforme o critério explicado anteriormente.

Zhao et al. (2009), por sua vez, explicam esse método usando a geração de dois filhos (Figura 8). O *modus operandi* é parecido, com uma diferença: se o valor do bit  $j$  da máscara for 0, copia o  $j$ -ésimo bit do primeiro pai no primeiro descendente, e o do segundo pai no segundo descendente; Caso contrário, copia o  $j$ -ésimo bit do primeiro no

segundo descendente, e o do segundo pai no primeiro filho.

### 2.2.2.3 Cruzamento de Fusão Baseado em Fitness

O cruzamento de fusão, proposto por [Beasley e Chu \(1996\)](#), baseia-se na avaliação (*fitness*) de cada pai, e calcula uma probabilidade. A probabilidade  $p$  é calculada da seguinte forma:

$$p = f(Y)/(f(X) + f(Y)) \quad (2.1)$$

Na qual  $f(X)$  e  $f(Y)$  são os valores das funções de *fitness* dos pais  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

A escolha do gene que comporá o descendente depende dessa probabilidade. Esse método de cruzamento foi proposto para herdar as características do pai mais apto, ou seja, em uma tradução livre de [Beasley e Chu \(1996\)](#) "*Assume-se que a herança de um gene específico de um genitor mais apto provavelmente contribua mais com a aptidão geral do que aquela de um menos apto*".

Sejam  $f(X)$  e  $f(Y)$  as funções de *fitness* dos indivíduos  $X = [10001]$  e  $Y = [10111]$ . Considerando que cada indivíduo tenha os valores de *fitness*  $f(X) = 2$  e  $f(Y) = 4$ , a probabilidade de copiar o  $j$ -ésimo gene de  $X$  no descendente é  $p = 4/(2 + 4) = 0,66$ , e a de copiar o  $j$ -ésimo gene de  $Y$  é  $1 - p = 0,33$ . Isso significa que os genes do primeiro genitor terão mais chances de serem escolhidos.

Nos estudos feitos sobre esse operador, foi descoberta uma propriedade interessante: se a probabilidade de escolher o bit do primeiro é calculada conforme mostrada acima (na qual o numerador é o valor de *fitness* do segundo indivíduo ( $Y$ )), os indivíduos de menor valor terão mais chance de repassar seus genes. Substituindo o numerador pelo valor de *fitness* do primeiro, as chances de escolha priorizam o indivíduo de maior valor. Logo, em problemas de minimização, o numerador deve ser o *fitness* do segundo genitor, para aumentar as chances de escolher o bit do primeiro (como ocorre no exemplo mencionado). Já em problemas de maximização, o numerador deve ser o *fitness* do primeiro, para que o indivíduo de maior valor seja priorizado (tenha mais probabilidade de ter seus bits copiados).

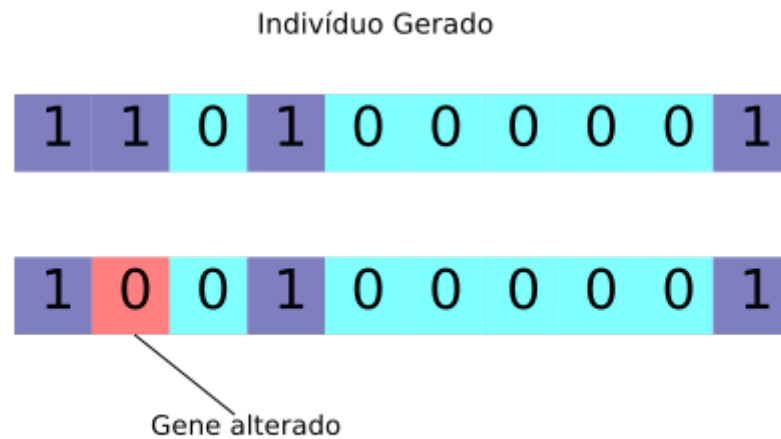
### 2.2.3 Mutação

A mutação, por sua vez, é responsável por manter a diversidade da população, alterando alguns genes no indivíduo ([CHU; BEASLEY, 1998](#)), evitando a convergência prematura. O operador de mutação escolhe aleatoriamente um ou mais genes ([Figura 9](#)), segundo uma probabilidade muito pequena ([DANTAS, 2016](#)), e os altera para outro caractere do alfabeto escolhido para codificação. A etapa da mutação ocorre após o cruzamento.

Segundo [Bäck \(1993 apud BEASLEY; CHU, 1996\)](#), a taxa de mutação deve ser

igual a  $1/n$ , na qual  $n$  é o tamanho do cromossomo. Isso equivale a mudar um bit aleatório por *string*.

Figura 9 – Mutação aplicada no indivíduo



Fonte: O autor

## 2.3 Soluções inviáveis

Após a mutação, algumas soluções podem ser inviáveis, ou seja, violam as restrições do problema em questão. Para resolver a inviabilidade das soluções, vários autores propõem métodos para evitar que tais soluções comprometam a qualidade do AG. Courant (1943 apud DJANNATY; DOOSTDAR, 2008) propôs o método de penalização das funções objetivos, e Beasley e Chu (1996) propuseram um operador de viabilidade, para ajustar a solução sem penalizar a função objetivo.

A penalização da função objetivo, segundo Djannaty e Doostdar (2008), pode adicionar (ou subtrair) ou multiplicar o valor da função objetivo para cada restrição violada pela solução. Em termos matemáticos, as penalizações são aplicadas assim:

$$fitn(S) = f(S) \pm pen_1(S) \text{ ou } fitn(S) = f(S) \times pen_2(S) \quad (2.2)$$

Nas quais  $pen_1 = 0$  e  $pen_2 = 1$  são as respectivas penalidades de soluções viáveis, ou seja, soluções viáveis não são penalizadas.

O operador de viabilidade, proposto por Beasley e Chu (1996), coloca de maneira gulosa as restrições faltantes na solução, tornando-a viável.

## 2.4 Considerações do Capítulo

No [Capítulo 2](#) foi visto o conceito teórico dos algoritmos genéticos, como eles atuam e porque são importantes. A codificação dos indivíduos para o algoritmo genético também foi explicada nesse capítulo. Foram vistos também as descrições de cada operador genético, como seleção cruzamento e mutação. Os operadores de viabilidade também foram tratados no [Capítulo 2](#), porque mostraram sua importância, apesar de não existirem no algoritmo genético canônico. E os estudos feitos para esse trabalho mostraram a sua capacidade de consertar soluções inviáveis.

No [Capítulo 3](#), serão explicados conceitos sobre problemas de otimização e os problemas utilizados nesse trabalho, além de exemplos para demonstrar sua aplicação.

### 3 Problemas de Otimização Utilizados

Problemas de otimização são aqueles que tem como objetivo encontrar o melhor valor de uma função com diversas variáveis, obedecendo a uma ou várias restrições (FILITTO, 2008), e são categorizados como contínuos ou discretos (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Os problemas de otimização contínuos são aqueles cujos valores pertencem ao conjunto dos números reais (GOLDBARG; LUNA, 2005). Sua forma geral é a seguinte:

$$\textit{otimizar } f(x) \tag{3.1}$$

$$\textit{sujeito a } h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m_h \tag{3.2}$$

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m_g \tag{3.3}$$

onde  $f : R^n \rightarrow R$ ,  $h : R^n \rightarrow R$  e  $g : R^n \rightarrow R$ . Isso significa que as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  mapeiam  $n$  variáveis para um valor unidimensional.

Os problemas de otimização discretos, por sua vez, utilizam variáveis discretas. Goldberg e Luna (2005) dão a seguinte explicação: Dado um conjunto  $E = \{1, 2, \dots, m\}$ , uma coleção de subconjuntos  $F$  do tipo  $\emptyset \neq F \subseteq 2^{|E|}$ , e a função objetivo  $C : F \rightarrow R$ , encontrar a configuração  $S^* \subseteq F$  satisfazendo ou  $C(S^*) \geq C(S), \forall S \subset F$ , no caso de maximização, ou  $C(S^*) \leq C(S), \forall S \subset F$ , no caso de minimização. A configuração  $S^*$  é a melhor configuração encontrada do problema em questão, dentre todas as outras configurações  $S \subset F$ .

As variáveis envolvidas são chamadas variáveis de decisão, que adicionam ou removem componentes do modelo de otimização. Os problemas de otimização que possuem comportamento linear são chamados de Problemas de Programação Linear (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Problemas de programação Linear envolvem variáveis de decisão não-negativas, e sua função objetivo é a soma das variáveis de decisão com seus coeficientes. Assim como todos os outros problemas de otimização, possuem um conjunto de restrições a serem satisfeitas. A programação linear deve ter as seguintes características: Proporcionalidade, Não-negatividade, Aditividade e Separabilidade.

*Proporcionalidade* significa que os recursos consumidos para uma determinada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade (GOLDBARG; LUNA, 2005), ou seja, as restrições são proporcionais à complexidade da atividade.

A *não-negatividade* significa que é possível desenvolver uma atividade em qualquer nível não negativo (GOLDBARG; LUNA, 2005). Isso significa que cada variável de decisão com seus coeficientes não devem ser negativos.

A *aditividade* garante que o custo total deve ser a soma dos custos de cada parcela

da atividade (GOLDBARG; LUNA, 2005), ou seja, a soma de cada componente com seus coeficientes.

A *separabilidade*, por sua vez, permite identificar separadamente cada custo das operações em cada atividade. (GOLDBARG; LUNA, 2005). Isso significa que os conjuntos variável de decisão com coeficientes são independentes entre si.

A formulação geral de um problema de Programação Linear é a seguinte:

$$\text{Otimizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.4)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = p + 1, p + 2, \dots, m \quad (3.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, q \quad (3.7)$$

$$x_j \in \mathbb{R}, \quad j = q + 1, q + 2, \dots, n \quad (3.8)$$

onde  $c_j$  é o coeficiente da variável de decisão  $x_j$ , e  $b_i$  é o elemento do vetor  $b$  das restrições. Na Equação 3.6, temos um conjunto de  $p$  restrições, nas quais o total deve ser pelo menos  $b_i$ , para cada  $i = 1, \dots, p$ . A Equação 3.7 mostra que toda a variável de decisão do problema não deve ser negativa.

Uma forma de Programação Linear é a otimização combinatória, que busca a melhor combinação de variáveis dentre as possíveis combinações do modelo (OLIVEIRA; SARAIVA, 2004), e os valores dessas variáveis são discretos, e são chamados de Problemas de Programação Inteira (GOLDBARG; LUNA, 2005). Para esses problemas, métodos exatos não conseguem resolvê-los a um custo computacional razoável, o que torna inviável o uso desses métodos. Nesse trabalho, são estudados dois problemas de otimização combinatória: o Problema Multidimensional da Mochila (maximização) e o Problema de Cobertura de Conjuntos (minimização).

### 3.1 Problema de Cobertura de Conjunto

O problema da cobertura de conjuntos é um problema de otimização combinatória do tipo NP-difícil (OLIVEIRA, 1999) que busca minimizar o número de conjuntos que cobrem o universo, ou seja, o conjunto de todos os elementos do problema. Dadas as equações abaixo, temos

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.9)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

$$x_j \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Sendo a [Equação 3.9](#) a função de custo total que deve ser minimizada ([BEASLEY; CHU, 1996](#)), onde  $c_j$  é o custo de cada subconjunto  $j$ . A [Equação 3.10](#) é a restrição que obriga todos os elementos  $i$  serem cobertos por, pelo menos, um conjunto  $j$ , sendo  $a_{ij}$  o  $i$ -ésimo elemento do conjunto  $j$ . A [Equação 3.11](#) indica que  $x_j$  é a variável de decisão, ou seja, se o conjunto  $j$  está presente (quando assume valor 1) ou não (quando assume 0) na solução. Quando  $c_j$  é o mesmo para todos os conjuntos, trata-se da forma convencional do problema, ou seja, preocupa-se apenas em reunir o menor número de subconjuntos que cubram todos os elementos.

### 3.1.1 Exemplo de aplicação

Dados o conjunto universo  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , e a coleção de subconjuntos  $S = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\}$  do tipo  $S \subseteq 2^{|U|}$ , deve-se encontrar uma combinação  $\emptyset \neq S^* \subseteq S$  tal que o seu custo total seja o menor. A [Tabela 1](#) mostra os custos de cada subconjunto de  $S$ .

Tabela 1 – Relação de custos para cada subconjunto

Conjuntos	Custos
$\{1, 3\}$	1
$\{2, 4\}$	1
$\{3, 5, 7\}$	2
$\{2, 4, 5\}$	3
$\{3, 6, 7\}$	4
$\{1, 3, 5, 7\}$	4
$\{2, 4, 6\}$	6

Fonte: O autor

A resolução mais trivial seria  $F = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\}$ , de custo total 10. Porém, o problema visa minimizar o custo total dos subconjuntos que possam cobrir todos os elementos de  $U$ . A melhor solução para esse problema é  $S^* = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}\}$ , cujo custo total é 8. Para o problema de cobertura de conjuntos de custo único, basta considerar  $c_j = 1$  ([Equação 3.9](#)),  $\forall j = 1, \dots, n$ . Usando o exemplo anterior e considerando que cada subconjunto tenha custo  $c = 1$ , a solução melhor seria aquela cuja cardinalidade seja a mínima, ou seja,  $S^* = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\}$ , de cardinalidade  $|S^*| = 2$ .

## 3.2 Problema da Mochila

É um problema NP-difícil que consiste em formar um subconjunto de objetos cujo valor (também chamado de lucro) total seja maximizado, obedecendo a restrição de capacidade máxima da mochila ([DJANNATY; DOOSTDAR, 2008](#)). O problema é

modelado da seguinte forma:

$$\text{maximizar } f(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (3.12)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

$$x_j \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

sendo a [Equação 3.12](#) referente à função objetivo que deve ser maximizada (pois trata-se de problema de maximização), onde  $p_j$  é o valor do item  $j$ . A [Equação 3.13](#) refere-se à capacidade máxima  $c_i$  por cada restrição (ou mochila)  $i$ , onde  $w_{ij}$  é o peso do item  $j$  na mochila  $i$ . A [Equação 3.14](#) indica as variáveis de decisão, informando se o item  $j$  está(1) ou não(0) na solução. A [Equação 3.13](#) representa a forma multidimensional do problema, ou seja, possui  $m$  restrições ou mochilas ([DJANNATY; DOOSTDAR, 2008](#)), ao contrário do problema da mochila convencional ([MAHATO; BISWAS, 2013](#)), conforme a [Equação 3.15](#).

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Exemplo de aplicação

Para exemplificar o problema mais facilmente, consideremos apenas uma mochila cuja capacidade máxima é igual a 50, que deve carregar, no máximo, quatro itens. A [Tabela 2](#) relaciona os itens com seus coeficientes.

Tabela 2 – Relação dos itens, seus pesos e seus valores

Item	Valor	Peso
1	100	30
2	20	25
3	15	50
4	40	12

Fonte: O autor

A solução trivial seria carregar o item 3, mas seu valor é pequeno. A solução ótima do problema em questão é  $100x_1 + 40x_4 = 140$ , pois o peso total é  $30x_1 + 12x_4 = 42 \leq 50$ .

## 3.3 Considerações dos Capítulos

No [Capítulo 3](#), foram elucidados os conceitos teóricos sobre problemas de otimização, e os desafios da otimização combinatória, cuja resolução por métodos exatos é inviável. Também foram explicados os conceitos inerentes aos dois problemas usados nesse trabalho, que são o problema da cobertura de conjunto e o problema multidimensional da mochila.

O [Capítulo 4](#) mostrará como o algoritmo genético foi modelado aos problemas de otimização usados, assim como os recursos computacionais empregados e as instâncias de teste de cada problema.

## 4 Modelagem e Simulação

Este capítulo descreve como foi a modelagem do AG para os problemas de cobertura de conjunto e da mochila multidimensional, além dos recursos computacionais utilizados e como foram feitos os testes.

### 4.1 Aspectos Gerais

Para esse trabalho, os modelos de implementação adotados são os modelos presentes nos artigos de [Beasley e Chu \(1996\)](#) e [Chu e Beasley \(1998\)](#), para os dois tipos de problemas de otimização.

O modelo usado para o problema de cobertura gera a população inicial a partir dos arquivos de texto das instâncias. Após gerar a população inicial, calcula o valor da função de *fitness*  $f_i = \sum_{j=1}^n c_j s_{ij}$  de todos os indivíduos. Em cada iteração, seleciona dois indivíduos usando torneio binário; efetua o cruzamento destes; usa o operador heurístico de viabilidade, proposto por ([BEASLEY; CHU, 1996](#)), para consertar uma eventual solução inviável gerada no cruzamento; e aplica a mutação, cuja taxa é constante de dois bits. Essas operações repetem até gerar um indivíduo não duplicado, ou seja, que ainda não esteja na população. Após gerar o indivíduo não duplicado, aplica a substituição aleatória de um indivíduo que esteja entre os piores da população, cujo custo total estão acima da média e recalcula os *fitnesses* dos indivíduos. Ao final do algoritmo, a melhor solução exibida é a de menor valor dentre as outras na população

No problema da mochila, o algoritmo também lê arquivos de instâncias do problema e gera a população inicial com as configurações presentes no arquivo e calcula os valores da função de *fitness*  $f_i = \sum_{j=1}^n p_j s_{ij}$  dos indivíduos. Guarda uma solução "boa" inicial, que será atualizada no final da execução do algoritmo. É utilizada a seleção por torneio binário. Efetua o cruzamento entre os indivíduos, aplica mutação alterando dois genes do cromossomo. Após a mutação, a solução, quando inviável, é corrigida por um operador de viabilidade, adicionando variáveis quando os valores da restrição é muito pequeno e retirando-as quando a restrição é violada. Essas operações são repetidas até gerar um indivíduo totalmente diferente dos demais na população. Após ter o indivíduo viável e não duplicado, aplica-se a substituição da pior solução pela nova. Após isso, atualiza a solução ótima caso o indivíduo gerado seja melhor que a anterior.

O cruzamento de um ponto para esse trabalho foi adaptado pra gerar apenas um filho, porque estava levando mais de 10 segundos para que o algoritmo terminasse sua execução no problema da cobertura. Isso ocorre por que o algoritmo, após as operações de seleção, cruzamento, mutação e reparo, verifica se a solução gerada é igual a outra

na população. Quando é gerado apenas um filho, a chance de ocorrer duplicatas é bem pequena, levando menos tempo para verificá-las. Porém, quando são gerados dois filhos, o tempo para verificar aumentou durante os testes, pois o algoritmo verifica se nenhum dos filhos estão na população. O critério de parada para os algoritmos implementados é o número máximo de gerações, 100 para o Problema de Cobertura e 100 para o Problema da Mochila.

Para cada instância dos problemas, o algoritmo genético foi executado 20 vezes, e para cada teste de operador genético de cruzamento. O total de execuções é de 1800, sendo 2 problemas de otimização, e cada um com 900 execuções, 20 em cada uma das 15 instâncias, aplicando 3 operadores de cruzamento.

## 4.2 Implementação e Recursos Computacionais

A linguagem adotada foi a linguagem Python, devido a sua comodidade de manipular listas e seu desempenho. O sistema de computação utilizado possui 2GHz de processador, 4 GB de memória RAM, executando o sistema operacional Ubuntu 18.04 LTS.

O algoritmo implementado não utilizou bibliotecas de algoritmos genéticos, nem *frameworks*. Apenas foi utilizado o modelo dos artigos de [Beasley e Chu \(1996\)](#) e [Chu e Beasley \(1998\)](#) para os dois problemas.

## 4.3 Instâncias de Teste

A fonte de dados utilizada provém da biblioteca virtual OR-Library disponibilizada por [Beasley \(1990\)](#). Foram testados 15 instâncias do Problema de Cobertura de Conjuntos de 5.1 a 5.5 contendo 200 elementos e 2000; de A.1 a A.5, com 300 elementos e 3000 conjuntos; e de C.1 e C.5, com 400 elementos e 4000 conjuntos. Para o Problema da Mochila Multidimensional, foram testadas 15 instâncias, numeradas de 1 a 15. As cinco primeiras instâncias contém 500 variáveis e 5 restrições; 500 variáveis e 10 restrições nas instâncias de 6 a 10; e 500 variáveis e 30 restrições nas cinco últimas. As instâncias foram retiradas dos arquivos `scp51.txt` até `scpc5.txt` para o Problema de Cobertura e, para o Problema da Mochila, as instâncias foram retiradas dos arquivos `mknapcb3.txt`, `mknapcb6.txt` e `mknapcb9.txt`. Os dados referentes às instâncias testadas dos dois problemas são mostrados nas tabelas [3](#) e [4](#).

Tabela 3 – Descrição das instâncias de teste do problema de cobertura de conjunto

Instâncias	Nº de Elementos	Nº de Conjuntos
5.1	200	2000
5.2	200	2000
5.3	200	2000
5.4	200	2000
5.5	200	2000
A.1	300	3000
A.2	300	3000
A.3	300	3000
A.4	300	3000
A.5	300	3000
C.1	400	4000
C.2	400	4000
C.3	400	4000
C.4	400	4000
C.5	400	4000

Fonte: O autor

Tabela 4 – Descrição das instâncias de teste do problema multidimensional da mochila

Instâncias	Nº de Restrições	Nº de Variáveis
1	5	500
2	5	500
3	5	500
4	5	500
5	5	500
6	10	500
7	10	500
8	10	500
9	10	500
10	10	500
11	30	500
12	30	500
13	30	500
14	30	500
15	30	500

Fonte: O autor

As instâncias foram escolhidas dessa forma para melhor avaliação dos resultados, porque instâncias pequenas não permitem uma comparação precisa das métricas utilizadas nesse trabalho.

## 4.4 Considerações do Capítulo

Nesse Capítulo foi abordado como os algoritmos foram modelados aos problemas em questão, quais recursos computacionais foram empregados e as instâncias de teste usadas nas simulações.

O [Capítulo 5](#) trata dos resultados obtidos nos testes, assim como as comparações estatísticas dos operadores de cruzamento estudados no trabalho.

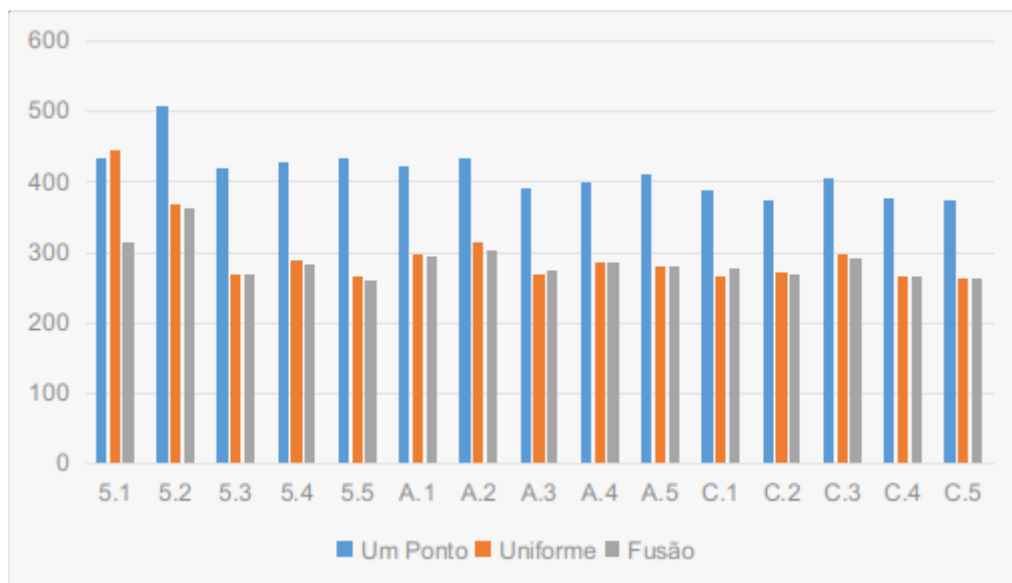
## 5 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados dos testes efetuados com os três operadores. As tabelas referentes aos testes encontram-se nos apêndices A e B.

### 5.1 Testes com SCP

O algoritmo genético foi testado 20 vezes para cada uma das 15 instâncias do Problema de cobertura de conjuntos, a fim de calcular as médias da função objetivo e de tempo de execução em segundos. As tabelas referentes aos testes são organizadas da seguinte maneira: para cada instância, a linha superior contém os valores de custo total da melhor solução quando o algoritmo termina de executar, e na linha inferior, o tempo que o algoritmo levou do início das gerações até a exibição da melhor solução.

Figura 10 – Gráfico da média da função objetivo para as 15 instâncias testadas



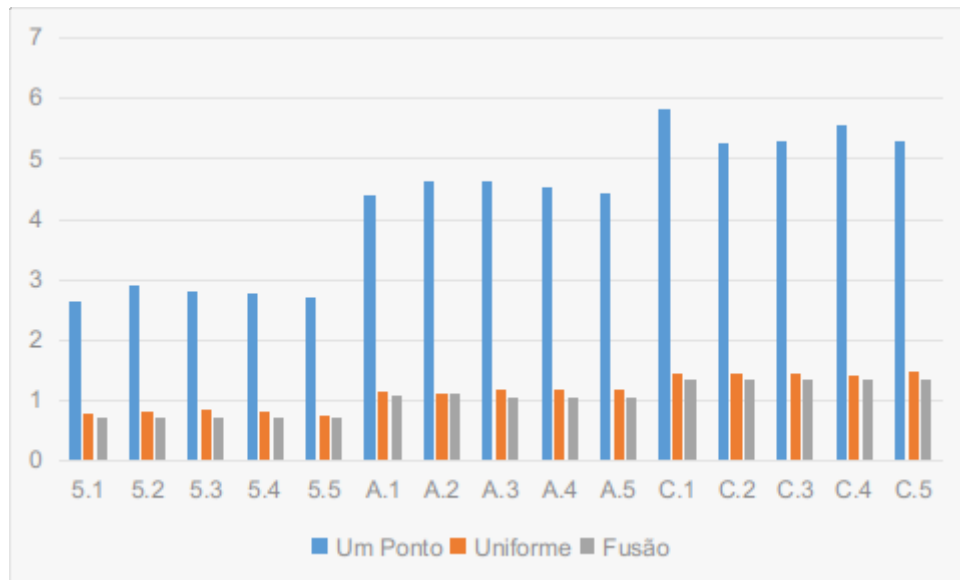
Fonte: O autor

Na Figura 10, as médias aritméticas das funções objetivo retornaram melhores resultados quando foram utilizados os cruzamentos uniforme e de fusão, que culminaram com valores médios inferiores a 300 na maioria das instâncias testadas. As exceções encontram-se nas instâncias 5.1, 5.2 e A.2, cujos valores estão entre 300 e 400. O cruzamento de um ponto, por sua vez, não reduziu os custos médios, com valores passando de 400 na maioria das vezes. O cruzamento de fusão melhorou a função objetivo em 8 das 15 instâncias, empatando com o cruzamento uniforme em 5 instâncias.

Isso acontece pelos seguintes motivos: O cruzamento de um ponto apenas divide os

pais e os concatena, elevando o valor da função objetivo (o que seria bom em um problema de maximização). O cruzamento de fusão dá mais chance ao melhor pai de passar seus genes. Já o cruzamento uniforme, que possui comportamento aleatório, decide de qual pai escolhe o gene baseando-se em um número aleatório do conjunto  $[0, 1]$ .

Figura 11 – Gráfico do tempo médio de execução para as 15 instâncias testadas

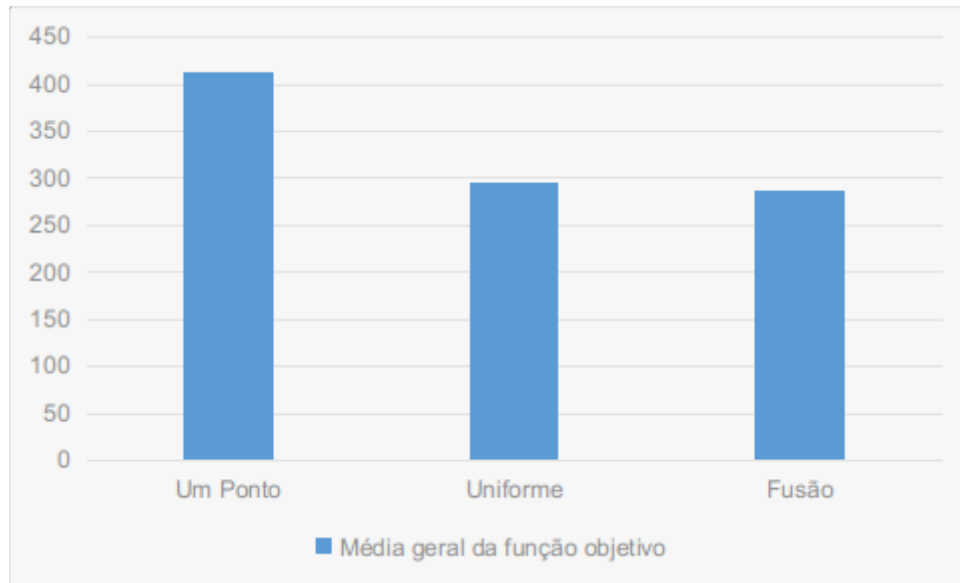


Fonte: O autor

Na Figura 11, percebe-se um desempenho bom usando os cruzamentos uniforme e fusão, com tempos médios de execução inferiores a 2 segundos. O cruzamento de um ponto, por sua vez, teve o pior desempenho, com tempos médios superiores a 2 nas primeiras cinco instâncias, superiores a 4 segundos nas instâncias de A.1 a A.5 e, nas instâncias C.1 até C.5, superiores a 5 segundos. Esse crescimento no tempo médio de execução deve-se ao tamanho das instâncias (5.1 - 5.5 com 200 elementos e 2000 conjuntos, A.1 - A.5 com 300 elementos e 3000 conjuntos, e C.1 - C.5 com 400 elementos e 4000 conjuntos).

Os cruzamentos uniforme e fusão tiveram desempenho médio melhor porque formam o indivíduo de maneira aleatória e probabilística, respectivamente. O cruzamento de um ponto, por sua vez, acabou levando mais tempo porque tem mais chance de gerar duplicatas, pois apenas concatena as partes dos pais.

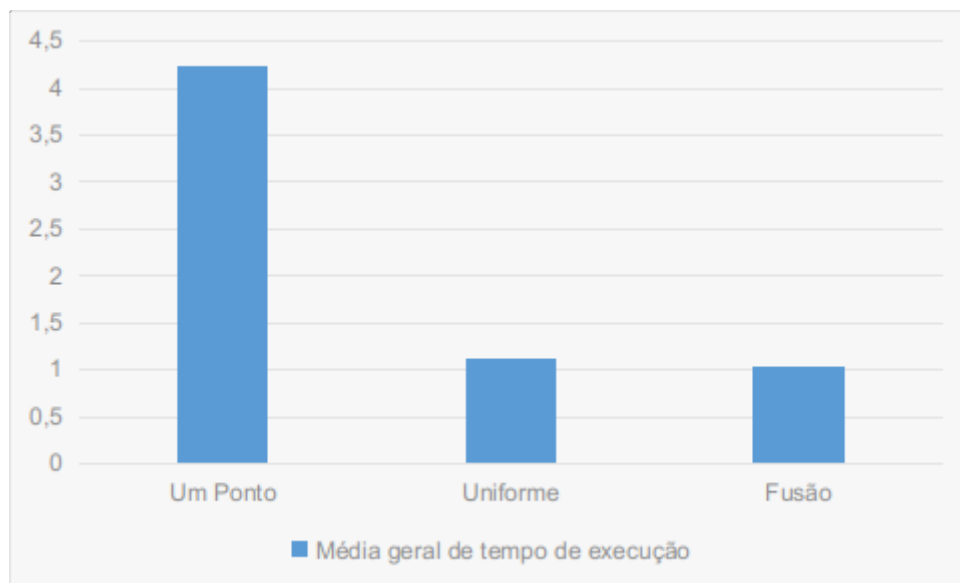
Figura 12 – Gráfico da média geral da função objetivo para cada operador de cruzamento



Fonte: O autor

Na Figura 12, percebe-se que o cruzamento de fusão ofereceu os melhores resultados, ou seja, os menores custos para o Problema de Cobertura de Conjuntos.

Figura 13 – Gráfico da média geral de tempo de execução para cada operador de cruzamento



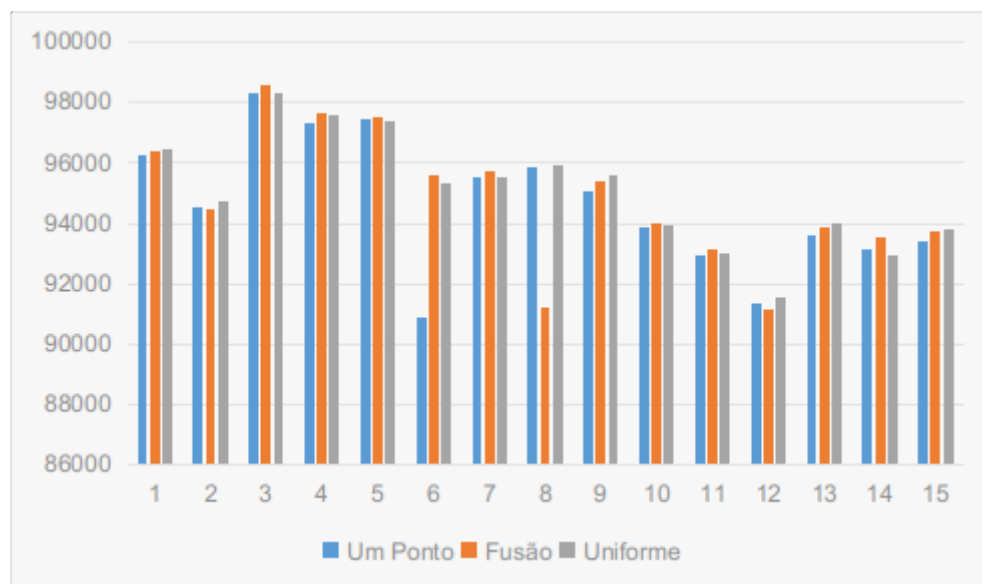
Fonte: O autor

Na Figura 13, o cruzamento de fusão conseguiu o melhor tempo médio de execução para todas as instâncias testadas. O cruzamento de um ponto, por sua vez, conseguiu ser o pior, tanto na função objetivo quanto no tempo de execução, em geral.

## 5.2 Testes com PMM

O algoritmo genético foi testado 20 vezes em cada uma das 15 instâncias do problema da mochila multidimensional, para colher dados de função objetivo e tempo de execução, e calcular as médias aritméticas após as execuções. As tabelas referentes aos testes são estruturadas da seguinte forma: Para cada instância do problema, a linha superior representa o valor máximo retornado pela melhor solução encontrada em cada rodada, e a linha inferior, o tempo de execução em segundos desde a primeira geração até a exibição da melhor solução.

Figura 14 – Gráfico da média da função objetivo para as 15 instâncias testadas



Fonte: O autor

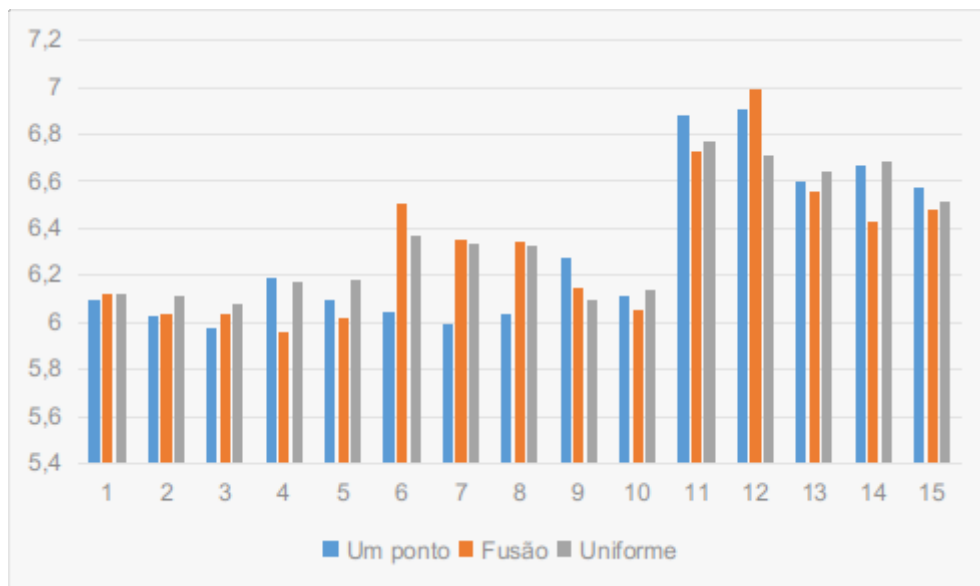
A [Figura 14](#) mostra que os métodos de cruzamento que retornaram valores médios maiores foram o cruzamento uniforme e de fusão, embora o cruzamento de um ponto também tenha retornado bons valores. O cruzamento de fusão foi o melhor nas instâncias 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11 e 14, e o uniforme, nas instâncias 1, 2, 8, 9, 12, 13 e 15. Entre eles, o melhor foi o de fusão, que culminou com melhores soluções em 8 instâncias, ao contrário do cruzamento uniforme, que o fez em 7.

O cruzamento de fusão teve esse comportamento devido ao seu caráter probabilístico, que dá mais chances de o filho herdar os genes do melhor pai. O cruzamento uniforme, por sua vez, escolhe os genes dos pais aleatoriamente. Por esse motivo, pode aumentar ou diminuir o valor da função objetivo. O cruzamento de um ponto, por outro lado, já consegue aumentar o valor da função objetivo porque apenas concatena as partes dos pais.

A [Figura 15](#) mostra que o cruzamento de um ponto teve o melhor tempo médio de execução em 6 das 15 instâncias testadas, enquanto que o cruzamento de fusão obteve o melhor tempo em 7 das 15 instâncias testadas, e o cruzamento uniforme, em 2 instâncias.

O cruzamento de um ponto normalmente demoraria mais porque tem mais chances

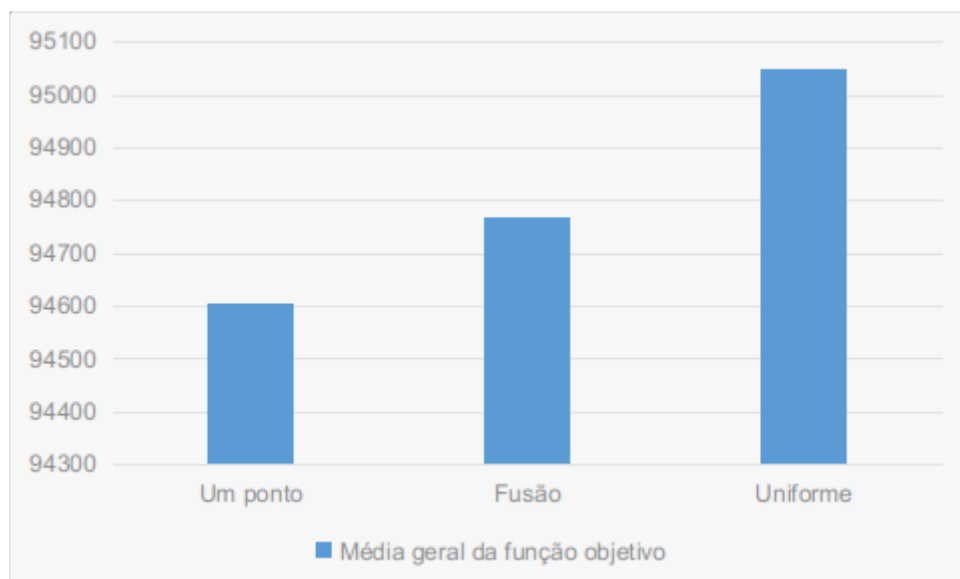
Figura 15 – Gráfico do tempo médio de execução para as 15 instâncias testadas



Fonte: O autor

de produzir duplicatas. Porém, nesse caso, conseguiu um bom desempenho. Isso ocorre porque o problema em questão ajusta as soluções inviáveis considerando as várias restrições quando adiciona ou remove componentes, formando assim um indivíduo completamente diferente. O cruzamento de fusão teve comportamento parecido ao que mostrou no problema de cobertura. O cruzamento uniforme, por sua vez, não se comportou da mesma maneira que no SCP porque é completamente aleatório na formação do indivíduo, podendo assim gerar duplicatas.

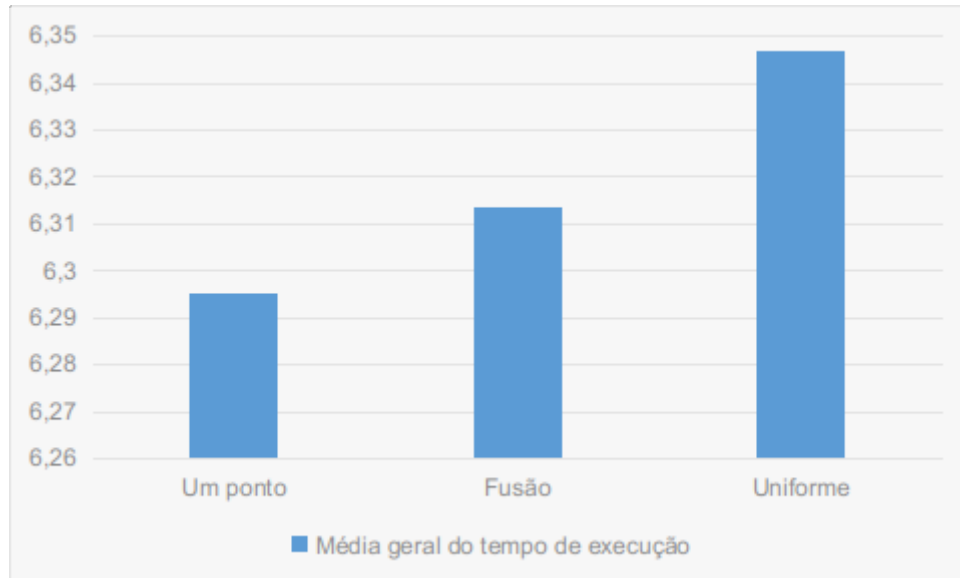
Figura 16 – Gráfico da média geral da função objetivo



Fonte: O autor

Na [Figura 16](#) é visível que o cruzamento uniforme culminou com os melhores valores da função objetivo, ultrapassando 95000. O segundo melhor foi o cruzamento de fusão, com mais de 94700.

Figura 17 – Gráfico da média geral de tempo de execução



Fonte: O autor

Na [Figura 17](#) é possível ver que o cruzamento de um ponto teve o menor tempo de execução para o Problema da Mochila. O segundo melhor tempo ficou com o cruzamento de fusão.

### 5.3 Considerações do Capítulo

Foi visto nesse capítulo os desempenhos dos operadores estudados para esse trabalho, avaliando em quais instâncias tiveram melhor desempenho e em quais não o tiveram.

No [Capítulo 6](#) serão discutidas as conclusões obtidas ao desenvolver esse trabalho e quais possíveis trabalhos futuros.

## 6 Conclusões

### 6.1 Considerações Finais

O trabalho abordou conceitos teóricos sobre algoritmo genético, que é a base desse trabalho, explicando detalhadamente cada conceito inerente, além dos métodos de cruzamento estudados aqui. Também foram explicados os problemas de otimização utilizados para o estudo, fazendo uso de problemas com grande dimensão, para melhor aferir a eficácia dos algoritmos. Foi também explanada a implementação dos algoritmos genéticos em cada problema estudado. As análises dos algoritmos se deu pelas médias aritméticas calculadas para cada instância, executando 20 vezes cada, além de a média geral para os conjuntos de instâncias ser considerada no estudo.

É verificável que os algoritmos genéticos são uma boa metaheurística para resolver problemas de otimização, principalmente os NP-difíceis. Escolher uma taxa de mutação pequena o suficiente, o método de cruzamento, a forma de representar as soluções influenciam muito nos resultados. Por isso, a boa escolha dos parâmetros é algo muito importante.

Analisando os gráficos de média geral, o cruzamento de fusão mostrou menores custos médios e tempos médios de execução no Problema da cobertura de conjuntos. Já no Problema da Mochila, o cruzamento uniforme retorna os melhores valores da função objetivo, mas tem o pior tempo de execução. Os resultados não são muito diferentes dos demais, não tendo talvez implicações mais relevantes para os crossover utilizados para esses problemas específicos.

Considerando os gráficos por instâncias, pode-se dizer que o cruzamento de fusão foi o melhor nos dois problemas de otimização estudados, tanto nos valores de função objetivo quanto no tempo de execução.

Ainda não dá pra dizer qual método de cruzamento é o melhor absoluto, pois os problemas de otimização tem configurações diferentes e os algoritmos implementados consideram duplicatas. Apesar disso, os cruzamentos de fusão e uniforme foram bons no quesito função objetivo para os dois problemas. Já o cruzamento de um ponto conseguiu o melhor tempo médio apenas no PMM.

### 6.2 Trabalhos Futuros

Pretende-se como trabalhos futuros derivados dessa pesquisa aplicar algoritmos genéticos para a robótica, aplicando o problema de cobertura de conjuntos para encontrar o subgrafo da trajetória do robô.

Fazer esse estudo comparativo em outros problemas de otimização combinatória.

Ainda como trabalho futuro, pretende-se usar algoritmos genéticos e cobertura de conjuntos na aplicação de agentes na rede elétrica.

## Referências

- BAHAABADI, M. R.; MOHAYMANY, A. S.; BABAEI, M. *An Efficient Crossover Operator For Traveling Salesman Problem*. [S.l.], 2012. v. 2, n. 4, 607–619 p. Disponível em: <<http://ijoce.iust.ac.ir/article-1-115-en.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- BEASLEY, J. E. *OR Library*. 1990. Disponível em: <<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>>. Acesso em: 05 abr 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.
- BEASLEY, J. E.; CHU, P. C. A genetic algorithm for the set covering problem. *European Journal of Operational Research*, Londres, Inglaterra, v. 94, n. 2, p. 392–404, 1996. Citado 9 vezes nas páginas 16, 17, 21, 23, 25, 26, 30, 33 e 34.
- CHU, P. C.; BEASLEY, J. E. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Journal of Heuristics*, Kluwer Academic Publishers, Londres, Inglaterra, n. 4, p. 63–86, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 21, 24, 25, 33 e 34.
- DANTAS, B. A. *Metaheurísticas para o Problema da Mochila Multidimensional*. Tese (Doutorado), Campo Grande, MS, 2016. Citado na página 25.
- DJANNATY, F.; DOOSTDAR, S. A hybrid genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, Sanandaj, Irã, v. 3, n. 9, p. 443 – 456, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 26, 30 e 31.
- FILITTO, D. Algoritmos genéticos: Uma visão explanatória. *Saber Acadêmico*, n. 6, p. 137 – 143, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 28.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: Campus, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 15, 28 e 29.
- LUKE, S. *Essentials of Metaheuristics*. second. [S.l.]: Lulu, 2013. Available for free at <http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>. Citado na página 15.
- MAHATO, S.; BISWAS, S. A faster genetic algorithm to solve knapsack problem employing fuzzy technique. In: . Tiruchengode, India: [s.n.], 2013. Citado na página 31.
- NAGATA, Y.; KOBAYASHI, S. An analysis of edge assembly crossover for the traveling salesman problem. In: *IEEE SMC'99 Conference Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- OBITKO, M. *XI. Cruzamento e Mutação*. 1998. Disponível em: <<https://www.obitko.com/tutorials/genetic-algorithms/portuguese/crossover-mutation.php>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- OLIVEIRA, A. C. D.; SARAIVA, F. D. O. Um algoritmo genético aplicado ao problema de job shop clássico : Estudo comparativo entre os operadores de crossover. *Dados*, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 17 e 29.
- OLIVEIRA, N. V. de. *Problema de Cobertura de Conjuntos - Uma Comparação Numérica de Algoritmos Heurísticos*. Florianópolis, SC: [s.n.], 1999. Citado na página 29.

POZO, A. et al. Computação Evolutiva. Citado na página 21.

PRADO, J. R. d.; SARAMAGO, S. F. P. Otimização por colônia de partículas. *Revista Famat*, Uberlândia, n. 4, p. 87 – 103, 2005. Disponível em: <[http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat\\_Revista\\_04.pdf](http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_Revista_04.pdf)>. Acesso em: 05 abr 2019. Citado na página 15.

RUSSELL, S.; NORVIG, P. *Inteligência Artificial: Tradução da segunda edição*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004. 115-116 p. Citado 3 vezes nas páginas 15, 20 e 23.

SHEN, W.; XU, B.; HUANG, J. P. An improved genetic algorithm for 0-1 knapsack problems. In: *2011 Second International Conference on Networking and Distributed Computing*. Hangzhou, China: [s.n.], 2011. Citado na página 19.

STARKWEATHER, T. et al. A Comparison of Genetic Sequencing Operators. In: *Proceedings of the fourth International Conference on Genetic Algorithms*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1991. p. 69–76. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

ZHAO, J. F. et al. Genetic algorithm based on greedy strategy in the 0-1 knapsack problem. In: *3rd International Conference on Genetic and Evolutionary Computing, WGEN 2009*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 105–107. ISBN 9780769538990. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Tabelas SCP

Tabela 5 – Cruzamento Uniforme

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
5.1	307	3088	299	308	321	302	299	299	289	313	298	336	312	291	300	306	307	289	309	317	444,5
	0,73	0,98	0,73	0,79	0,72	0,84	0,72	0,69	0,78	0,95	0,72	0,82	0,72	0,72	0,95	0,72	0,73	0,77	0,73	0,72	0,7765
5.2	363	375	366	384	360	374	378	374	373	365	364	355	349	367	380	366	363	370	378	362	368,3
	1,16	0,72	0,75	0,74	0,88	0,95	0,72	0,71	0,75	0,71	0,72	0,96	0,71	0,73	0,93	0,73	0,73	0,93	0,75	0,7	0,799
5.3	263	263	270	280	265	269	275	269	266	258	271	262	279	258	287	263	262	262	266	279	268,35
	0,94	0,73	0,76	0,78	0,72	0,7	0,69	0,78	0,78	0,94	0,69	0,7	1,24	0,94	1,02	0,76	0,75	1,03	0,94	0,71	0,83
5.4	317	296	269	288	275	282	288	301	290	299	293	279	285	286	272	301	287	278	290	271	287,35
	0,7	0,76	0,69	0,71	0,72	0,77	0,96	0,95	0,74	0,93	0,69	0,94	0,73	0,74	0,95	0,93	0,72	0,71	0,72	0,69	0,7875
5.5	262	274	256	280	242	285	247	256	252	270	279	250	262	314	252	287	247	255	257	257	264,2
	0,71	0,84	0,7	0,69	0,7	0,7	0,69	0,75	0,81	0,71	0,76	0,7	0,68	0,7	0,72	0,71	0,79	0,68	0,71	0,74	0,7245
A.1	299	306	296	293	287	280	295	287	294	310	306	277	294	296	286	297	305	297	304	297	295,3
	1,1	1,06	1,11	1,19	1,07	1,1	1,3	1,13	1,2	1,07	1,11	1,04	1,1	1,19	1,1	1,48	1,06	1,1	1,37	1,05	1,1465
A.2	322	310	330	321	310	310	299	305	300	330	319	308	308	320	309	317	310	309	314	314	313,25
	1,09	1,07	1,18	1,08	1,09	1,11	1,05	1,14	1,2	1,17	1,07	1,11	1,1	1,07	1,09	1,1	1,08	1,08	1,07	1,09	1,102
A.3	288	282	284	276	291	291	294	268	274	275	284	274	22	281	274	282	289	283	268	276	267,8
	1,1	1,37	1,39	1,05	1,19	1,41	1,04	1,07	1,32	1,07	1,08	1,37	1,4	1,25	1,1	1,06	1,08	1,15	1,08	1,06	1,182
A.4	278	274	298	264	298	274	298	284	295	275	282	299	278	277	287	292	286	285	288	278	284,5
	1,17	1,34	1,43	1,05	1,04	1,36	1,06	1,11	1,07	1,17	1,08	1,08	1,33	1,08	1,37	1,16	1,1	1,37	1,05	1,04	1,173
A.5	275	287	294	283	274	279	270	286	272	268	286	287	269	275	281	279	277	275	279	277	278,65
	1,31	1,08	1,31	1,37	1,08	1,06	1,06	1,05	1,07	1,08	1,1	1,1	1,08	1,1	1,38	1,07	1,38	1,21	1,14	1,08	1,1555
C.1	294	274	267	278	290	281	274	279	282	274	20	271	287	271	282	288	278	261	273	279	265,15
	1,44	1,38	1,41	1,38	1,51	1,41	1,38	1,43	1,41	1,4	1,41	1,41	1,41	1,53	1,39	1,44	1,46	1,41	1,41	1,44	1,423
C.2	257	266	281	275	273	269	282	262	275	261	270	277	285	266	270	261	268	261	262	275	269,8
	1,4	1,41	1,46	1,39	1,5	1,41	1,57	1,41	1,4	1,42	1,42	1,41	1,41	1,41	1,42	1,47	1,4	1,41	1,39	1,4	1,4255
C.3	305	291	313	297	284	296	280	299	296	303	290	286	296	298	296	309	284	296	292	285	294,8
	1,42	1,42	1,43	1,41	1,43	1,42	1,45	1,4	1,41	1,42	1,42	1,45	1,4	1,41	1,44	1,68	1,47	1,43	1,42	1,41	1,437
C.4	277	262	260	240	277	265	258	260	270	275	258	257	269	268	274	272	266	259	273	265	265,25
	1,49	1,4	1,41	1,45	1,41	1,4	1,41	1,39	1,4	1,4	1,39	1,4	1,4	1,39	1,44	1,41	1,38	1,39	1,37	1,42	1,4075
C.5	270	262	259	263	273	267	257	256	271	258	252	270	268	262	269	261	252	274	260	249	262,65
	1,44	1,42	2,09	1,42	1,41	1,41	1,4	1,39	1,64	1,42	1,4	1,43	1,46	1,42	1,47	1,41	1,46	1,38	1,4	1,38	1,4625

Fonte: O autor

Tabela 6 – Cruzamento de Fusão

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
5.1	305	302	311	314	292	291	316	303	288	300	301	318	310	331	304	303	397	397	300	294	313,85
	0,65	0,83	0,81	0,68	0,68	0,65	0,63	0,64	0,65	0,67	0,73	0,65	0,78	0,71	0,62	0,73	0,69	0,63	0,66	0,63	0,686
5.2	345	347	356	365	370	358	370	385	349	358	362	357	364	365	355	349	372	367	364	377	361,75
	0,74	0,61	0,72	0,63	0,76	0,65	0,64	0,83	0,68	0,65	0,92	0,65	0,66	0,71	0,67	0,63	0,65	0,69	0,69	0,84	0,701
5.3	274	260	273	280	262	261	292	273	273	260	273	253	258	248	277	248	263	266	285	272	267,55
	0,65	0,64	0,65	0,68	0,67	0,84	0,64	0,7	0,63	0,83	0,66	0,66	0,65	0,64	0,71	0,7	0,71	0,64	0,89	0,72	0,6955
5.4	270	289	298	290	275	275	277	271	282	270	291	292	276	292	280	290	296	297	286	268	283,25
	0,65	0,69	0,66	0,66	0,68	0,67	0,67	0,67	0,86	0,71	0,71	0,62	0,72	0,64	0,63	0,69	0,67	0,67	0,76	0,73	0,688
5.5	272	276	238	274	263	260	258	243	239	278	256	257	247	272	261	253	279	247	248	252	258,65
	0,66	0,76	0,64	0,72	0,62	0,73	0,72	0,71	0,72	0,61	0,74	0,66	0,66	0,76	0,82	0,65	0,78	0,67	0,64	0,64	0,6955
A.1	287	277	309	307	290	297	300	300	272	292	283	283	282	302	285	289	292	284	301	309	292,05
	1,03	1,03	1,01	1,04	1,06	1,03	1,06	0,99	1	1,23	1,05	1,09	1,02	1,01	1,09	1,04	1,3	1,01	1,01	0,99	1,0545
A.2	283	293	304	307	324	303	305	313	305	311	302	324	295	290	312	305	298	298	304	286	303,1
	1,05	1,04	1,34	1,01	1,07	1,06	1,03	1,05	1,11	1,33	1,01	1,37	1,14	1,13	0,99	1,02	1	1,04	1,04	1,03	1,093
A.3	277	287	280	270	275	279	267	265	289	286	258	284	251	281	270	265	270	281	271	280	274,3
	0,97	1,12	1,09	1,04	1,12	1	0,97	1,11	1,02	0,98	1,16	0,99	0,98	0,97	1,13	1,31	0,99	1,05	0,99	0,98	1,0485
A.4	277	280	274	292	279	273	276	288	287	296	289	280	277	279	296	283	303	274	286	293	284,1
	0,99	0,95	1	0,98	1,1	0,96	1,15	0,99	1,06	0,99	1,27	1,04	0,98	0,97	0,97	0,97	1,01	0,97	1	1,02	1,0185
A.5	280	299	280	279	272	282	267	299	260	272	278	274	278	273	283	280	289	274	272	274	278,25
	1	1,11	1,01	1,1	1,02	1,06	0,99	1,01	1,04	0,98	1,04	1,19	1,19	1,08	0,99	1,15	1,1	0,97	0,97	0,97	1,0485
C.1	294	278	281	263	276	268	277	271	287	272	278	275	274	278	274	274	276	266	284	265	275,55
	1,35	1,3	1,34	1,31	1,29	1,3	1,3	1,32	1,3	1,3	1,34	1,31	1,42	1,3	1,28	1,28	1,35	1,28	1,33	1,29	1,3155
C.2	272	260	266	280	275	265	267	270	277	273	269	267	267	266	276	266	255	263	245	260	266,95
	1,33	1,37	1,31	1,34	1,32	1,43	1,35	1,3	1,33	1,35	1,28	1,31	1,32	1,31	1,32	1,3	1,32	1,28	1,25	1,32	1,322
C.3	290	293	296	294	286	292	284	288	288	284	293	281	302	302	289	278	293	300	304	286	291,15
	1,3	1,35	1,32	1,31	1,29	1,36	1,28	1,29	1,36	1,35	1,3	1,32	1,28	1,35	1,29	1,34	1,29	1,36	1,29	1,38	1,3205
C.4	288	252	275	266	260	265	248	247	266	260	260	273	275	277	261	270	265	262	257	273	265
	1,28	1,31	1,3	1,39	1,3	1,3	1,29	1,32	1,33	1,34	1,3	1,31	1,26	1,33	1,28	1,3	1,32	1,37	1,52	1,31	1,323
C.5	256	274	253	265	255	252	252	255	266	263	260	255	261	272	260	268	259	265	260	264	260,75
	1,28	1,3	1,37	1,28	1,31	1,29	1,31	1,31	1,39	1,37	1,51	1,34	1,33	1,34	1,29	1,34	1,3	1,3	1,36	1,3	1,331

Fonte: O autor

Tabela 7 – Cruzamento de um ponto

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
5.1	437	427	420	460	445	422	430	431	439	456	429	450	427	435	430	441	406	398	455	443	434,05
	3,05	3,21	2,65	2,45	3,13	2,67	2,52	2,53	2,24	2,39	2,58	2,9	2,5	2,53	2,87	2,62	2,12	2,41	2,32	2,9	2,6295
5.2	443	508	494	520	505	518	512	515	508	512	509	502	518	511	527	522	475	501	497	507	505,2
	2,9	2,71	2,93	3,1	3,42	2,95	2,85	2,71	2,91	2,45	3,06	2,8	2,84	3,03	2,6	3,17	2,65	2,76	2,69	3,01	2,877
5.3	446	391	411	398	425	399	433	411	433	436	419	420	437	416	410	419	404	415	393	436	417,6
	2,88	2,74	2,63	3,11	2,74	2,59	2,6	2,97	2,48	3,34	2,38	2,85	3,32	3,13	2,75	2,81	2,47	2,22	2,92	2,79	2,786
5.4	431	406	388	425	444	427	420	424	431	447	447	404	433	423	392	448	449	439	423	438	426,95
	2,43	2,93	2,56	2,5	3,04	2,72	2,35	2,77	2,59	2,94	2,71	2,92	2,83	3,23	2,56	3,11	2,34	3,16	2,86	2,86	2,7705
5.5	451	457	427	453	400	435	431	435	432	422	411	449	405	429	421	385	442	452	468	440	432,25
	2,71	2,9	2,78	2,59	2,58	2,82	2,01	2,35	2,79	2,54	3,23	2,62	2,64	2,22	2,68	3,42	2,76	2,87	2,45	3,06	2,701
A.1	424	399	422	431	405	438	384	451	437	409	434	425	458	376	394	406	444	435	415	428	420,75
	4,87	4,81	4,35	3,79	4,86	4,43	4,13	5,02	4,77	4,12	4,46	3,57	4,66	4,22	3,58	4,78	4,71	3,76	3,94	4,63	4,373
A.2	433	453	444	431	451	445	412	410	453	400	420	421	438	452	439	421	418	426	432	429	431,4
	4,26	5,09	4,53	4,63	4,71	4,89	4,44	4,68	4,98	4,02	4,69	4,48	5,35	3,95	4,7	4,81	4,09	4,98	5,34	3,62	4,612
A.3	393	401	381	402	382	373	396	396	383	400	390	371	403	404	386	392	402	379	371	388	389,65
	5,97	4,09	4,37	4,97	5,2	4,34	4,96	4,46	4,44	5,46	3,32	4,53	4,62	4,85	4,26	4,85	4,85	3,72	4,55	4,36	4,6085
A.4	399	386	400	405	409	412	385	386	406	399	387	414	414	389	381	403	422	408	393	384	399,1
	5,14	3,86	4,2	4,9	4,95	4,07	4,48	4,26	4,46	4,7	4,36	4,76	4,4	4,57	3,92	5,19	4,96	5,5	3,82	4	4,525
A.5	420	410	401	429	404	379	408	403	415	413	425	368	413	430	417	412	435	414	400	410	410,3
	4,41	4,5	4,42	4,28	3,97	3,96	4,02	4,39	3,94	3,81	4,29	4,51	4,67	4,93	5,22	4,95	4,77	4,41	4,72	4,05	4,411
C.1	396	398	361	391	380	406	400	395	369	394	395	392	365	387	390	374	370	392	394	381	386,5
	7,44	5,65	6,31	4,44	5,81	6,37	5,3	6,63	5,95	6,52	5,53	5,82	4,74	5,12	5,3	5,63	5,59	5,03	6,58	6,41	5,8085
C.2	373	352	370	371	373	389	390	369	370	367	371	375	383	359	374	373	371	361	368	374	371,65
	5,12	5,06	5,63	4,61	4,5	5,58	5,92	5,09	4,88	5,56	5,41	5,79	4,67	5,3	5,66	4,86	5,14	5,08	6,01	4,78	5,2325
C.3	425	392	419	400	413	383	415	398	395	404	395	416	403	398	396	410	422	390	418	407	404,95
	5,64	6,09	4,62	5,31	4,86	4,33	6,31	4,46	5,44	5,54	5,5	5,23	5,3	5,07	5,3	5,05	5,32	5,28	5,71	5,51	5,2935
C.4	389	375	382	355	370	364	391	373	370	362	378	398	375	395	374	366	357	380	378	380	375,6
	4,98	6,28	6,14	4,93	5,36	5,47	6,03	5,43	5,26	5,16	5,69	5,71	5,37	5,49	5,7	6,02	5,81	6,03	4,83	5,07	5,538
C.5	365	384	324	351	370	396	384	382	392	373	390	370	367	369	384	366	384	364	372	386	373,65
	5,07	5,33	4,93	6	5,04	5,13	5,27	5,47	5,76	5,55	4,96	5,49	5,3	5,28	5,68	5,17	4,62	5,46	4,54	5,27	5,266

Fonte: O autor

## APÊNDICE B – Tabelas PMM

Tabela 8 – Cruzamento Uniforme

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
1	97372	96757	96004	95631	96163	96482	96433	96365	97288	96310	96529	97357	96701	95762	95182	96430	95651	97023	96094	96484	96400,9
	6,12	5,85	6,13	6,28	6	5,98	5,96	5,84	5,92	5,81	7,41	6,59	6,04	6,02	6,24	5,97	6	6,11	6,08	6,03	6,119
2	94632	95033	95888	94425	94618	95091	94034	95405	94790	95934	93616	94962	93767	95159	94824	94465	94523	94896	93737	93713	94675,6
	6,04	6	5,98	6,77	6,16	5,97	5,91	6,4	6,01	5,64	6,23	5,67	6,06	6,2	6,05	6,31	6,25	6,19	6,16	6,16	6,108
3	97593	97340	99440	98130	97478	97475	97175	99029	98921	97201	98390	99614	97757	97595	98320	97950	97549	100748	98910	98514	98256,45
	6,02	5,86	6,04	5,97	5,85	5,86	6,06	6,07	6,3	6,17	5,94	6,55	5,99	6,41	6,33	5,95	5,93	5,85	6	6,34	6,0745
4	96246	97475	95885	97548	98569	98243	97754	98733	97533	98030	97742	99053	98189	98112	98848	97090	96553	96652	96016	97078	97567,45
	6,05	6,02	5,82	6,21	6,07	5,82	6,36	6,13	6,44	6,24	6,11	6,07	6,3	5,81	5,91	6,21	7,22	6,4	6,21	5,95	6,1675
5	95972	97354	97680	97559	98233	97695	98718	97883	97501	96725	97332	96327	96667	97926	96744	96478	97417	97271	97365	98486	97366,65
	6,04	6,89	6,05	6,2	5,79	6,43	5,98	6,45	6,18	5,97	6,51	6,13	6,16	6,14	6,22	6,19	6,14	6,1	6,05	5,99	6,1805
6	94021	95729	96079	94449	95120	95448	95313	96290	95922	96163	93959	95199	95059	95671	95701	95473	93504	95583	96174	95636	95324,65
	6,7	6,88	5,93	6,35	6,1	6,17	7,2	6,12	6,38	6,05	6,15	6,13	6,84	6,19	6,16	6,57	6,09	6,43	6,75	6,17	6,368
7	96238	95418	96317	95995	95623	94544	94915	96103	95741	95430	95368	96002	94793	95004	95290	95404	95806	95218	95112	95835	95507,8
	6,59	6,16	7,17	6,08	6,66	6,74	6,51	5,9	6,2	6,09	6,17	6,17	6,1	6,52	6,04	6,31	5,96	6,26	5,98	6,97	6,329
8	96748	95967	95367	94980	95483	95631	96203	95380	97370	96166	97001	95675	95460	96484	95854	97478	96109	95331	96048	93740	95923,75
	6,04	6,3	6,72	6,18	6,1	6,18	6,38	6,89	6,11	5,97	6,71	6,16	6,29	5,91	6,76	6,09	6,5	6,47	5,94	6,78	6,324
9	95074	93959	95984	96364	95009	95134	95289	95587	95718	96054	95068	96813	96528	94897	96630	95260	95292	94718	96517	95548	95572,15
	6,45	5,99	5,94	6,21	6,27	6,09	6,16	6,22	6,03	6,09	6,18	5,89	6,1	6,13	5,98	6,24	5,87	6,02	5,88	6,17	6,0955
10	94626	94380	94935	93202	94889	93089	94245	93692	93894	94549	94091	93287	94344	93253	93209	93395	93324	94030	93053	94877	93918,2
	6,39	5,94	6,26	5,79	6,01	6,94	6,29	5,94	5,87	6,23	5,94	6,07	5,94	6,23	6,23	6,3	5,97	6,34	6,11	5,93	6,136
11	93109	94071	92041	92449	92756	91568	93764	95134	93213	94060	92717	92383	93559	91955	92923	92289	92287	92384	93034	94429	93006,25
	7,26	6,45	6,5	6,55	7,13	6,74	6,73	6,95	6,66	6,84	6,4	6,96	7,08	6,58	6,76	6,85	6,98	6,59	6,85	6,44	6,765
12	90716	90990	91422	92017	92804	92505	90357	91275	90704	90461	90903	93496	91358	91584	92424	91066	90473	92063	92509	91322	91522,45
	6,52	6,66	6,94	6,64	6,78	6,79	6,98	6,59	6,75	6,36	6,58	6,55	6,82	6,49	6,83	6,72	6,82	6,67	7,12	6,5	6,7055
13	94254	94162	94516	93110	94193	94823	94751	93887	95337	92605	93824	92899	92951	95502	93422	93315	94973	92853	94055	93645	93953,85
	6,71	6,42	6,76	6,31	6,25	6,76	6,28	6,44	8,07	6,28	6,56	6,56	6,65	6,24	6,37	6,62	6,71	6,52	6,9	7,37	6,639
14	93539	92190	92103	92304	92329	92167	93439	92778	92531	92115	93489	92851	93294	92982	92658	92503	92917	92768	93409	96494	92943
	6,56	6,59	8,8	6,29	6,3	6,76	6,55	6,64	6,58	6,63	6,31	6,63	6,7	6,45	6,72	6,74	6,88	6,83	6,22	6,43	6,6805
15	93159	93672	93123	94012	94627	92827	94285	93827	95533	95277	93408	92827	94334	93678	92673	95123	93625	92551	93321	93890	93788,6
	6,79	6,36	6,34	6,36	6,48	6,04	6,48	6,54	6,38	6,39	6,75	6,37	6,77	6,37	6,92	6,41	6,68	6,57	6,64	6,5	6,507

Fonte: O autor

Tabela 9 – Cruzamento de Fusão

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
1	96300	97005	97557	96697	95507	95972	96128	95646	96900	97968	96432	96983	96147	95917	96440	95815	95689	96393	95775	96489	96388
	6,36	5,8	6,07	6,22	5,94	6,49	6,09	6,01	6,12	5,89	6,42	6,01	6,1	5,97	6,23	6,09	5,98	5,9	6,29	6,46	6,122
2	94210	94095	94325	94259	95299	94342	95634	94156	94235	94977	93964	94071	94191	96422	93635	95603	94090	93160	94080	94536	94464,2
	5,91	6,3	5,73	5,95	5,84	5,96	5,99	5,97	6,12	5,97	5,86	5,94	5,94	6,17	5,96	5,83	6,36	6,3	6,34	6,17	6,0305
3	98440	98850	98049	99099	99384	98427	98532	98777	97609	97229	98095	98336	97647	98377	99032	99481	98800	99437	98204	98760	98528,25
	5,93	5,97	6,16	6,11	5,95	5,91	5,99	6,31	5,84	6,3	5,98	5,99	6	5,74	6,19	5,82	5,9	6,12	6,31	6,09	6,0305
4	97514	97009	99529	98160	96974	97167	96960	98610	97966	97834	97607	96560	98085	99203	97176	96924	97421	97790	98110	96423	97651,1
	5,93	5,85	6,15	5,84	5,68	6,21	5,74	5,9	6,19	5,74	6,21	5,96	5,81	6,16	5,93	6,04	6,12	5,91	5,89	5,82	5,954
5	96788	98453	96516	97005	98579	97218	97420	98600	96721	97375	97601	96539	97608	96548	97227	97472	98087	98543	97226	98189	97485,75
	5,91	5,85	6,01	6,32	5,83	6,35	5,99	6,04	6,03	6,06	6,24	5,94	5,77	6,02	5,76	6,03	5,86	5,89	6	6,42	6,016
6	95832	95425	95893	97124	96850	95354	94892	96063	95949	95083	95395	96645	95824	94446	93632	95636	94525	94819	97072	95219	95583,9
	6,85	6,47	5,97	8,31	6,27	6,62	6,22	6,76	6,33	6,27	5,95	6,71	5,91	6,89	6,41	5,98	6,02	6,42	6,79	6,89	6,502
7	94551	96190	94543	96278	95618	96757	94992	97451	95902	95523	95178	95960	94940	95086	96053	96269	96603	96056	94295	95850	95704,75
	6,02	6,09	6,66	6,04	6,36	6,65	6	6,02	6,64	6,55	6,28	6,14	6,12	6,75	6,13	6,44	6,06	6,43	6,82	6,72	6,346
8	94994	95186	95513	95215	95140	94977	95248	95774	95794	95228	9790	94115	96072	96418	95250	95304	95976	96376	95518	95684	91178,6
	6,25	6,34	6,26	6,16	5,96	5,97	6,57	6,11	6,72	5,9	6,42	6,2	5,85	7,49	6,94	5,87	6,76	5,99	6,7	6,3	6,338
9	95709	94857	97400	94659	94675	95524	95784	94934	95336	96426	94676	95002	95052	98164	95187	94178	93985	94407	95737	95010	95332,6
	6,26	6,29	6,25	6,3	6,59	6,11	5,87	6,08	5,84	6,27	6,11	5,96	5,81	6,08	6,24	5,94	6,19	6,24	6,09	6,4	6,146
10	94141	93828	93376	95416	93683	95099	93423	92965	94652	94151	93249	93252	95895	93690	93846	92398	94928	94071	94216	93342	93981,05
	5,81	5,92	6,12	6,3	6,03	5,9	5,86	6,05	6,16	5,88	6,22	5,92	6,1	6,52	6,28	6,07	6,16	5,86	5,94	5,92	6,051
11	94368	93603	92404	93898	92550	93100	91680	93622	92522	92890	91508	93467	93212	93059	91934	92891	93422	93209	94539	94372	93112,5
	6,57	6,36	7,05	6,42	6,47	6,44	6,96	6,53	6,9	6,99	6,58	6,46	7,16	6,58	6,79	6,56	6,31	6,57	7,72	6,98	6,72
12	91721	90353	89787	91844	90896	91497	91454	91957	90718	92216	91377	91000	91836	90487	90383	90402	90164	90968	92008	91117	91109,25
	7,28	6,45	7,54	6,63	6,77	7,18	6,65	7,21	6,64	7,17	7,15	6,81	7,16	7,02	6,89	7,49	6,86	7,25	7,19	6,41	6,9875
13	93960	93638	93233	93732	95126	93724	93048	92680	92805	93258	93662	95585	93745	93622	93641	94246	92000	94311	94402	96004	93821,1
	6,62	6,49	6,68	6,35	6,65	6,29	6,42	6,23	6,68	7,02	6,65	6,37	6,41	6,56	7,52	6,28	6,52	6,55	6,25	6,54	6,554
14	93040	93602	92914	94467	93357	93033	92995	94087	92472	94260	93315	93228	92911	92804	92865	93576	95046	94227	94041	93415	93482,75
	6,69	6,34	6,28	6,33	6,38	6,33	6,44	6,32	6,33	6,28	6,54	6,58	6,44	6,35	6,43	6,41	6,47	6,64	6,52	6,42	6,426
15	94252	93330	93259	94161	94211	93645	93678	93480	93640	93496	93107	93911	94447	93649	94373	93019	93985	94594	92753	92897	93694,35
	6,79	6,54	6,44	6,61	6,46	6,65	6,71	6,32	6,3	6,53	6,28	6,31	6,66	6,32	6,42	6,51	6,69	6,29	6,36	6,41	6,48

Fonte: O autor

Tabela 10 – Cruzamento de um ponto

Instâncias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Média
1	96038	96853	95858	95023	96832	96370	96448	95378	95719	96096	96477	96291	96566	98093	95873	96118	95827	96653	97079	94849	96222,05
	5,91	5,89	6,21	5,93	5,75	5,95	6,01	5,87	6,42	5,7	6,2	6,15	6,06	6,15	6,6	6,16	6,86	6,04	6,09	5,94	6,0945
2	93960	94424	94199	93925	94625	95075	94063	94685	94650	94154	95264	95793	92749	94281	95542	94119	94326	94303	95118	94213	94473,4
	5,87	5,91	6,16	6	5,74	6,22	5,87	6	5,98	5,99	6,16	5,7	5,98	6,04	5,81	6,16	6,27	6,32	6	6,26	6,022
3	98439	97595	97181	98389	97593	99011	97691	97923	97713	97411	99201	98307	97756	98618	98310	98670	99185	99079	98637	98630	98266,95
	6,05	5,94	5,78	6	5,86	5,84	5,88	5,99	6,21	5,87	5,86	5,72	5,9	6,23	6,05	6,13	6,09	5,78	6,31	5,97	5,973
4	97816	97032	96590	96315	96738	97905	98028	96431	97124	96989	97513	96958	96521	98004	97101	96847	98602	98623	97697	97629	97323,15
	5,91	5,9	6,03	7,14	6,16	5,91	6,07	5,96	6,31	5,93	5,84	7,23	6,45	5,74	5,97	6,52	5,88	5,96	6,08	6,72	6,1855
5	97904	97499	96612	97137	97117	97975	96312	96711	97211	97810	97255	96749	98721	97582	98737	97354	98396	97263	97165	96733	97412,15
	6,22	6,03	6,16	5,95	7,26	5,73	6,08	5,84	6,03	6,04	5,94	6,06	5,89	6,06	5,91	5,94	6,09	6,15	6,22	6,16	6,088
6	94628	95335	95032	95359	96303	94276	94101	96184	94900	95798	94746	94977	94755	95149	95680	94896	9448	94734	95758	95385	90872,2
	6,86	3,13	6,29	5,84	5,74	6,1	6,02	6	6,21	6,3	6,67	6,15	6,28	6	6,01	5,97	6,98	6,29	5,89	6,14	6,0435
7	95593	95908	95901	96197	95785	95149	94940	95365	95481	94837	95788	95886	95217	95843	94803	95490	95145	96572	94794	95808	95525,1
	5,95	6,14	6,25	5,93	6,21	5,76	5,9	5,9	6,04	6,18	6	5,84	5,96	6,16	5,91	5,88	5,94	6,06	5,95	5,88	5,992
8	95489	95610	95221	95670	94680	95785	96464	96070	95921	97051	96324	97428	94378	96530	94854	95377	95996	95922	95365	96132	95813,35
	6,15	5,87	6,25	5,92	6,02	5,8	6,4	6	6,04	6,26	5,79	5,97	6,05	5,88	6,04	6,12	5,99	5,91	6,09	6,1	6,0325
9	95125	95677	95085	94974	95398	94118	95037	94617	95700	93562	96528	94695	94492	95220	95094	94792	94469	96137	95371	94161	95012,6
	7,67	6,18	6,25	6,1	5,99	6,67	6,78	6,14	6,12	6,3	5,75	6,35	6,01	6,13	5,94	6,4	6,04	5,85	5,95	6,79	6,2705
10	93548	92751	93795	93528	95313	95265	93982	93440	93449	94478	93632	94036	94216	92399	93383	94342	94301	94141	93280	93878	93857,85
	6,01	6,3	6,17	6,13	5,86	5,94	5,93	6,41	5,99	6,11	6,08	6,16	6,11	5,86	6,91	6,21	6,02	6,09	5,96	5,99	6,112
11	93239	92262	92218	92863	91692	93331	93564	93511	92340	92491	92787	93076	94094	95252	91918	93412	91563	93255	92054	93345	92913,35
	6,85	6,42	6,91	6,77	6,72	6,85	6,38	6,81	7,05	7,1	7,03	6,57	6,74	7,04	6,45	7,37	6,67	7,28	7,29	7,16	6,873
12	90585	91345	91705	90406	91065	90867	91736	91417	92387	91931	91217	91419	90082	90643	91213	92633	91185	90290	90820	93125	91303,55
	8,03	7,12	6,64	6,51	6,45	6,87	7,38	7,38	6,92	6,88	6,56	7,13	6,65	6,75	6,69	6,62	7,2	6,75	6,96	6,65	6,907
13	93229	93596	92615	94380	94049	93580	92884	94747	93109	93126	93620	92935	94860	93994	92890	93162	93800	93702	92812	94839	93596,45
	6,52	6,29	6,98	6,32	6,56	6,57	6,41	6,59	6,53	6,49	6,66	6,39	6,58	6,6	6,43	6,34	6,63	8,06	6,61	6,39	6,5975
14	92732	93652	92878	93524	93550	92658	92614	93022	92701	93216	94455	93822	91863	93577	93556	93199	92990	93244	92011	92651	93095,75
	8,51	6,75	6,63	6,34	6,51	6,39	6,64	6,6	6,48	6,65	6,82	6,5	6,52	6,9	6,86	6,57	6,43	6,38	6,45	6,39	6,666
15	92872	93945	93482	94721	91674	93388	93739	93795	93204	92878	93196	92545	93651	93460	93777	93164	94228	94175	92282	92993	93358,45
	6,43	8,62	6,42	6,41	6,87	6,5	6,61	6,42	6,43	6,25	6,26	6,3	6,29	6,39	6,4	6,7	6,41	6,56	6,44	6,65	6,568

Fonte: O autor