UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CAPANEMA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

BÁRBARA DE NAZARÉ SOUZA SANTOS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS APLICAÇÕES

CAPANEMA – PA
2022

BÁRBARA DE NAZARÉ SOUZA SANTOS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática como pré-requisito à obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Marly dos Anjos Nunes

CAPANEMA – PA

2022

BÁRBARA DE NAZARÉ SOUZA SANTOS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática como pré-requisito à obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Data da defesa: ____/____/________

Banca Examinadora

____

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Marly dos Anjos Nunes
Orientadora – UFPA

____

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Edilene Farias Rozal
Examinadora Interna – UFPA

____

Prof. M.Sc. Oséas Guimarães Ferreira Neto
Examinador Externo – SEDUC/PA

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus por ter me concedido a dádiva da vida, por derramar suas benções sobre mim, por me dar força, determinação, sabedoria e capacidade para concluir este trabalho em meio a tantas dificuldades e obstáculos que foram superados para estar agora proporcionando este momento célebre.

Agradeço imensamente aos meus pais, Maria Celina e Augusto Carlos, por todo o apoio e compreensão, por serem os principais incentivadores dos meus estudos, meus pais não mediram esforços para me ajudar em meio as dificuldades que existiram no decorrer do curso, fizeram o possível e o impossível para que meu sonho fosse realizado, por não medirem esforços em meio as dificuldades para que eu não desistisse, sempre acreditando no potencial de sua filha.

Ao meu ex namorado Andrey Schwanke, que apesar de neste momento não fazer mais parte da minha vida, mas me apoiou imensamente durante boa parte do curso, me estimulando a ser sempre melhor a cada dia.

Aos meus grandes amigos do Coração de Mãe, as melhores e mais especiais pessoas que a universidade me presenteou, sempre unidos seja na alegria ou tristeza, amigos que se tornaram uma família, cada um com suas peculiaridades, que em situações inesperadas e desesperadoras deram apoio, conselho, amor e carinho. Pessoas que quero ter para sempre ao meu lado.

A todos os professores da FAMAT do Campus de Bragança que ministraram aulas em Capanema, onde se disponibilizaram a repassar seus conhecimentos acadêmicos com maestria, sempre procurando a melhor forma de ensinar, e preocupados em nos tornar os melhores profissionais, sendo além de professores, amigos de seus alunos. À estes professores que fizeram parte da minha vida, meu sinceros agradecimentos e desejo muito sucesso.

Em particular, gostaria de agradecer a excelentíssima Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes, minha orientadora, por ter aceito este desafio em me orientar, até então uma desconhecida que havia lhe pedido ajuda. Gostaria de agradecer por toda sua dedicação, determinação, comprometimento, conhecimentos e conselhos repassados, tenha certeza que eles foram muito válidos e essenciais para o desenvolvimento deste trabalho acadêmico. Éis uma professora e uma mulher incrível, de uma personalidade forte e detentora de um conhecimento sem igual e uma das ou porque não dizer a melhor professora da UFPA, um exemplo a ser seguido.

Por fim, gostaria de agradecer aqueles que me ajudaram direta e indiretamente na minha jornada da graduação, em especial, a Dona Francisca que me recebeu em sua casa em vários semestres sem querer nada em troca, por pura e simples generosidade. Aos meus colegas de trabalho que me apoiaram nesta reta final, e todas as demais pessoas que contribuíram, o meu muito obrigado.

"Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim prepara a mente para pensar"

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho visa expor uma abordagem das equações diferenciais ordinárias com aplicações de modelos matemáticos muito importantes voltados para a vida real, tais aplicações utilizaram a resolução de problemas de outras áreas de conhecimento como: física, química e biologia. Além disso, o mesmo também pode ser utilizado como recurso didático-teórico em forma de nota de aula para estudos posteriores de Cálculo Diferencial e Integral. O presente documento aborda as aplicações de Datação por Rádio Carbono, Lei de Resfriamento de Newton, Movimento Harmônico Amortecido e o Crescimento de Peixe (Von Bertalanffy), para alcançar este objetivo, foram necessários uso das seguintes ferramentas de estudo: Um breve estudo teórico sobre Equações diferenciais onde estará contido as definições, classificações e soluções, com ênfase nas equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem e seus métodos de resoluções. Para a elaboração deste trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas com fontes impressas e eletrônicas.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Aplicações. Movimento Harmônico Amortecido

ABSTRACT

This work aims to expose an approach to ordinary differential equations with applications of very important mathematical models focused on real life, such applications used the resolution of problems in other areas of knowledge such as: physics, chemistry and biology. In addition, the same tool can also be used as a didactic-theoretical resource in the form of a class note for later studies of Differential and Integral Calculus. This document addresses the applications of Radio Carbon Dating, Newton's Cooling Law, Harmonic Movement Damped and Fish Growth (Von Bertalanffy), to achieve this goal,the following study tools were used: A brief theoretical study on Differential Equations containing definitions, classifications and solutions, with emphasis on differential equations ordinary, 1st and 2nd order ordinary differential equations and their resolution methods. For the elaboration of this work, bibliographical searches were carried out with printed and electronic sources.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Applications. Damped Harmonic Movement

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais competem em uma das áreas de maior importância da matemática, pois seu estudo possibilita modelar fenômenos estudados nas mais diversas áreas do conhecimento, como física, química, biologia e engenharias. De acordo com [4] (p. 1), no decorrer dos três últimos séculos, as equações diferenciais obtiveram a atenção dos maiores matemáticos do mundo que a usaram como ferramenta para descrever e solucionar matematicamente os problemas da vida real.

Sendo assim, segundo Bassanezi:

> O objetivo fundamental do "uso"da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de menor importância. (BASSANEZI, 2014, p.18).

Diante dessas informações e dentre outras adquiridas durante o período da graduação, desencadearam uma estima pelo tema que motivou o desenvolvimento deste trabalho. Desse modo, procuramos nos aprofundar no tema e com isso repassar os conhecimentos adquiridos sobre as equações diferenciais ordinárias e suas aplicabilidades em situações do cotidiano, considerando o interesse em permitir estudos posteriores, onde este trabalho servirá como recurso em forma de nota de aula sobre o assunto. Contudo, acreditamos que esse estudo será de suma influência para a vida profissional.

O presente trabalho tem como finalidade a abordagem de algumas principais modelagens das equações diferenciais, em particular das equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem, tais como: Datação por Radiocarbono, Lei de Resfriamento de Newton, Movimento Harmônico Amortecido e O Crescimento de Peixes (Von Bertalanffy). Assim, mostrando ao leitor um conhecimento teórico-prático. Para tais abordagens fez-se o uso de conceitos, teoremas e fundamentos teóricos explanados nos capítulos iniciais.

A estrutura do trabalho está fragmentada em cinco capítulos: O primeiro capitulo é composto pela introdução onde esta presente o resumo de todo o trabalho realizado adiante.

O segundo capítulo aborda alguns conceitos teóricos básicos sobre equações diferenciais, tais como definição; classificação quanto ao tipo, ordem e linearidade; soluções, dentre elas a solução de um Problema de Valor inicial. Desse modo, tais informações servirão como alicerce para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, visto que, são pré-requisitos essenciais para haver uma melhor compreensão do tema abordado neste trabalho.

O terceiro capítulo discorre sobre as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem que expressa as diversas formas de representação de uma equação diferencial juntamente com seus respectivos métodos de resolução, tais como: a resolução de equações exatas e lineares através do fator integrante, bem como de equações importantes como as equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut. Descreve-se detalhadamente cada caso de modo a proporcionar um melhor entendimento dos processos de modelagem das equações ordinárias de primeira ordem.

O quarto capítulo explana sobre as equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem, que engloba o estudo das Equações Lineares Homogêneas e seus respectivos casos, geral e particular, em que os coeficientes são constantes, e as Equações Lineares Não-Homogêneas com ênfase nos Métodos de Coeficientes Indeterminados e Variação de Parâmetros. Também é abordado de forma breve o Problema de Valor inicial e de Contorno referente ao grau das equações mencionadas. O conhecimento matemático desenvolvido acerca de tais informações, assim como no capítulo anterior, apresenta modelagens que serão expressas a seguir.

Finalmente, o quinto e último capítulo, é dedicado especialmente a algumas aplicações, no qual será ápice de todo o trabalho. Compreende na modelagem de primeira ordem: a Datação por Radiocarbono, que utiliza os cálculos de meia vida do Carbono 14 para datar com relativa precisão o tempo em que sedimentos orgânicos, ossos, conchas marítimas e madeira viveram, através da quantidade de carbono 14 existentes após a morte destes organismos. Outra aplicação, é a Lei de Resfriamento de Newton, que consiste em demonstrar a variação de temperatura de um corpo quando colocado em contato com um determinado ambiente, sendo assim, possível prever a temperatura de um objeto após decorrer um determinado tempo.

No que se refere a equações de segunda ordem, tem-se como aplicação o Movimento Harmônico Amortecido, que basicamente é um sistema massa-mola que recebe influência de forças dissipativas arbitrarias que amortecem o movimento até estagnar, ou seja, forças de atritos como fluidos viscosos. As oscilações neste sistema são amortecidas pela presença do fluido, gerando um movimento oscilatório amortecido, se o amortecimento for pequeno a amplitude das oscilações diminui lentamente com o tempo. Para exemplificar de forma clara essa aplicação, durante a apresentação será exibido um vídeo explicativo de um experimento prático mostrando como ocorre o movimento harmônico amortecido em fluidos viscosos. E por fim o Crescimento de Peixe de Von Bertalanffy, método que auxilia na exploração de determinadas espécies, estabelecendo um controle e condições viáveis para melhorar o crescimento e a eficiência na produção de peixes, em que relaciona a idade com o peso, ou seja, descrever a chamada curva de crescimento. Dessa maneira, os cálculos da equação de Von Bertalanffy, tem uma importante credibilidade, pois podem ser aplicados não apenas a peixes, mas para quaisquer espécies de produção, criando um padrão de metabolismo para cada animal, entretanto o foco deste trabalho será somente em relação ao crescimento de peixes.

2 UM BREVE ESTUDO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 Equação Diferencial

Uma equação é dita diferencial, quando compreende determinadas funções (incógnitas) e suas derivadas, ou seja, toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, denominamos como equação diferencial.

Em termos matemáticos

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

é uma equação diferencial, onde F é uma função, t é a variável independente, $x(t)$ função e $x^i(t), i = 1, ..., n-1$ são as derivadas da função $x(t)$

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1 \tag{1}$$

$$y'' + 3y' + 6y = \sin x \tag{2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0 \tag{3}$$

2.2 Classificação

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com o Tipo, Ordem e Linearidade.

2.2.1 Tipo

As equações diferenciais fragmentam-se em dois tipos: equações diferenciais ordinárias (EDO) e equações diferenciais parciais (EDP).

Definição 2.2.1 (EDO)**.** *Equações diferenciais ordinárias, são aquelas que apresentam derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente.*

Exemplo:

- $\frac{dy}{dt} + 5y = e^x$ é uma equação que apresenta uma variável dependente y e uma variável independente t, sendo assim uma equação diferencial ordinária;

- $\dfrac{d^2y}{dx} - \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^3 - 5y = 0$, apresenta duas variáveis dependentes y e v, e apenas uma variável independente x, caracterizando-se como uma equação diferencial ordinária.

Note que, não importa a quantidade de variáveis dependentes que uma equação pode apresentar, se a mesma possuir apenas uma variável independente, será sempre uma equação diferencial ordinária.

Definição 2.2.2 (EDP)**.** *Equações diferenciais parciais, são aquelas que apresentam derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.*

Exemplo:

- Nesta equação $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ nota-se que existem duas variáveis dependentes u e v, e também duas variáveis independentes y e x. Logo é uma equação diferencial parcial por apresentar mais de uma variável independente;
- Na equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial w^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t}$, apresenta apenas uma variável dependente u e duas variáveis independentes w e t.

Observe que tanto nesses exemplos apresentados assim como na Equação Diferencial Ordinária, a equação diferencial parcial independe do número de variáveis dependentes, o que as difere é que uma equação para ser caracterizada parcial deve possui mais de uma variável independente.

2.2.2 Ordem

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é caracterizada pela derivada de mais alta ordem que ocorre na equação. Por exemplo

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = ye^x \tag{4}$$

é uma equação diferencial de terceira ordem (ou ordem três), pois podemos observar que a derivada de maior ordem é $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, haja vista que $\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2$ trata-se de uma derivada de primeira ordem elevada a segunda potência. Desse modo, por definição, temos uma equação de terceira ordem. Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem pode ser expressa na seguinte forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{5}$$

onde F é uma função de valores reais de $n+2$ variáveis e onde $\left(\dfrac{d^n y}{dx^n}\right) = y^{(n)}$. Assim, explicitando $y^{(n)}$, temos

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{6}$$

onde (6) é conhecida como a forma normal de uma equação diferencial ordinária de ordem n.

Exemplos:

- $y' = 2x$, é uma equação ordinária de ordem 1;
- $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0$, é uma equação diferencial parcial de ordem 2;
- $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$, é uma equação diferencial ordinária de ordem 3.

2.2.3 Linearidade

As equações dividem-se em linear e não-linear. A equação linear é toda equação que pode ser colocada na forma,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

e ainda obedecer às seguintes propriedades que caracterizam uma equação linear:

I. A variável dependente e suas derivadas devem ser de primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo envolvendo a variável dependente é 1.

II. Cada coeficiente depende apenas da variável independente.

Equações não-lineares são aquelas que não apresentam as propriedades das equações lineares.

Exemplos:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y(y')^2 = 0 \tag{7}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 0 \tag{8}$$

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{9}$$

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 7y = e^{2x} \tag{10}$$

As equações (8) e (10) são equações diferenciais lineares de segunda e terceira ordem respectivamente, e obedecem às propriedades mencionadas sobre linearidade. As equações (7) e (9) são equações diferenciais não-lineares de quarta e terceira ordem, respectivamente. Observe que a equação (7) por possuir uma derivada elevada a segunda potência, desobedece a primeira propriedade no qual o expoente é diferente de um, sendo assim, não-linear. Note que a equação (9) também não é linear, pois um de seus coeficientes está em função de y (variável dependente), quando na verdade deveria ser em função de x (variável independente), assim violando a segunda propriedade.

2.3 Soluções

A solução de uma equação diferencial é toda e qualquer função $y = \phi(t)$ derivável ao menos de ordem n, em algum intervalo I, que quando substituída em uma equação diferencial seja capaz de reduzir a mesma a uma equação identidade. Assim, uma solução para equação diferencial ordinária

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\dots,\, y^{(n-1)}\right) = 0$$

é uma função ϕ que satisfaz a equação com no mínimo n derivadas, ou seja, $\forall t \in I$,

$$F\left(t,\, \phi(t),\, \phi'(t),\, \phi''(t),\dots,\, \phi^{(n)}(t)\right) = 0.$$

Exemplo: Dada a equação $y'' - 2y' + y = 0$, verificaremos se a função $y = xe^x$ é solução da equação.

Solução: Para isso, deve-se calcular primeiramente as derivadas de y em relação a x. Assim,

$$y' = xe^x + e^x \;\text{ e }\; y'' = xe^x + 2e^x$$

substituindo y' e y'', temos:

$$y'' - 2y' + y = 0 \Longrightarrow (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x$$

aplicando a distributiva,

$$xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x \Longrightarrow 2xe^x + 2e^x - 2xe^x + 2e^x = 0.$$

Logo, $y = xe^x$ é solução para $y'' - 2y' + y = 0$. Existem vários tipos de soluções de uma equação diferencial, dentre elas solução geral, solução particular, solução explícita e solução implícita.

2.3.1 Solução Geral

É uma solução que contém constantes arbitrárias independentes entre si, tal que dependem da ordem n de cada equação, ou seja, uma equação de 1ª ordem contém uma constante arbitraria; de 2ª ordem, duas constantes e assim sucessivamente. Resumindo, é o conjunto de todas as soluções, geometricamente, representa uma família de curvas, chamadas curvas integrais.

Exemplo: Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = 2(1-x) \tag{11}$$

encontre a solução geral.

Solução: Afirmação:

$$y = 2x + Ce^x, \quad \text{com} \quad C \in \mathbb{R} \tag{12}$$

é a solução da equação dada.

Com efeito, primeiramente derivamos y em relação a x, obtendo:

$$\frac{dy}{dx} = 2 + Ce^x,$$

substituindo y e $\frac{dy}{dx}$ na equação inicial, temos

$$\begin{gathered}
\frac{dy}{dx} - y = 2(1-x) \\
2 + Ce^x - (2x + Ce^x) = 2(1-x) \\
2 + Ce^x - 2x - Ce^x = 2(1-x) \\
2(1-x) = 2(1-x) \\
0 = 0.
\end{gathered}$$

Logo, é verídico que $y = 2x + Ce^x$ é a solução geral da equação dada, pois C é a constante arbitrária e todos os valores atribuídos a C serão soluções da equação diferencial, sendo assim uma família de curvas.

2.3.2 Solução Particular

É uma solução obtida da solução geral que satisfaz uma condição inicial, ou condição de contorno dada, através de valores impostos as constantes arbitrarias.

Exemplo: Na equação anterior obtivemos como solução geral a equação (12) dada esta solução, agora encontraremos a solução particular na seguinte condição inicial $y(0) = 3$.

Solução: Para $x = 0$ e $y = 3$ segue de (12) em que

$$y = 2x + Ce^x$$

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 0 + Ce^0 \\ C &= 3 \end{aligned} \tag{13}$$

substituindo (13) em (12),

$$y = 2x + 3e^x,$$

é uma solução particular e também faz parte da família de soluções.

2.3.3 Solução Explícita

É uma solução em que a variável dependente é apresentada somente em termos de variáveis independentes e constantes, isto é, soluções expressas na forma $y = f(x)$, que quando substituida na equação diferencial a reduz a uma identidade. **Observação**: Como as soluções explícitas não diferem das demais soluções como uma solução isolada, a mesma só está empregada na forma como é escrita.

Exemplo: Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x \tag{14}$$

determine a solução explícita.

Solução: Temos como solução $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$, onde c é uma constante.

Substituindo $y(x)$ em (14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) &= x \\ x &= x \end{aligned}$$

que é uma identidade.

2.3.4 Solução Implícita

Uma solução implícita é uma função na forma $f(x, y)$ do conjunto de variáveis dependentes e independentes que por meio da derivação implícita reduz a solução à equação diferencial inicial.

Exemplo: Seja a equação diferencial ordinária

$$2x + \cos y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Solução: A função $f(x, y) = x^2 + \sin y - 2 = 0$ é solução implícita da equação diferencial dada.

Para verificarmos, devemos derivar $f(x, y)$ em relação à variável x

$$\frac{d}{dx}(f(x, y)) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y - 2) = \frac{d}{dx}(0) \Longrightarrow 2x + \cos y \frac{y}{dx} = 0$$

que é a equação diferencial inicial.

2.4 Problema de Valor Inicial (PVI)

Um **problema de valor inicial (PVI)** ou **Problema de Cauchy**[1], consiste em uma equação diferencial onde são impostas condições iniciais sobre a função incógnita e suas derivadas, desde que essas condições iniciais sejam restritas a um mesmo valor fixado da variável independente. Tomemos por exemplo, a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

submetida a condição inicial $y(x_0) = y_0$, no qual x_0 é um número em um determinado intervalo e y_0 é um número real arbitrário. Ou seja, um PVI pode apresentar-se na seguinte situação

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Tomando por exemplo a equação (11) e aplicando a condição inicial imposta na secção 2.3.1 temos o seguinte Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y = 2(1 - x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

cuja solução encontra-se na mesma secção.

A solução de um PVI possibilita obter uma das várias soluções de uma EDO, isto é, uma função entre as diversas funções que satisfazem a equação em circunstâncias específicas, ou seja, em um intervalo I, contendo a condição inicial x_0. Porém para identificar a solução de uma EDO, deve-se comprovar sua existência e unicidade.

Ao tratarmos de um problema de valor inicial, surgem duas perguntas fundamentais:

(i) O problema tem solução?

(ii) Se existir solução, ela é única?

Para responder tais perguntas lançaremos mão de um teorema que nos mostra a Existência e Unicidade de uma solução.

[1] **Augustin Louis Cauchy**(1789-1857) matemático francês, suas grandes contribuições foram a introdução do rigor na analise matemática e a sistemática criação da teoria dos grupos

2.4.1 Teorema de Existência e Unicidade de Solução de uma EDO

Teorema 2.4.1 (Existência e Unicidade)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto e* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *função contínua com* $f_y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *também contínua. Dado* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, existe um intervalo aberto* $x_0 \in I$ *e uma única função diferenciável* $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ *com* $(x, \phi(x)) \in \Omega$*, para todo* $x \in I$*, que é solução do problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(Ver demonstração em [10] p. 6)

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

Neste capítulo será abordado as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, que são equações escritas da seguinte forma

$$F(x, y, y') = 0$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

onde f é uma função de duas variáveis dadas, sendo a solução, qualquer função diferenciável que satisfaça a equação para todo x em algum intervalo, mais precisamente em seguida será visto se essas funções existem, e se caso existam quais os métodos para encontra-las.

3.1 Equações Separáveis

As equações separáveis ou variáveis separáveis são equações de primeira ordem que podem ser escritas na seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \tag{15}$$

Dar-se a nomenclatura "separável" pelo fato de que é possível separar as funções de modo que cada membro da igualdade possua uma função com apenas uma variável. Assim pode-se escrever a equação:

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx$$

sendo $f(y) \neq 0$. Desse modo podemos aplicar a integração direta em ambos os lados da equação. Assim, temos

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\, dx.$$

Portanto, a equação (15) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis.

Exemplo: Resolva a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6y.$$

Solução: Inicialmente, separamos as variáveis

$$\frac{dy}{dx} = 6y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = 6\, dx$$

em seguida, devemos integrar ambos os lados da equação,

$$\int \frac{dy}{y} = \int 6\,dx \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = 6\int dx$$

resolvendo as integrais, aplicando suas regras básicas, temos

$$\ln y + C_1 = 6(x + C_2)$$

simplificando,

$$\ln y + C_1 = 6x + 6C_2 \Longrightarrow \ln y = 6x + 6C_2 - C_1 \Longrightarrow \ln y = 6x + C_3$$

$$e^{\ln y} = e^{6x+C_3} \Longrightarrow y = e^{6x} \cdot e^{C_3} \Longrightarrow y = C_4 \cdot e^{6x} \Longrightarrow y = C \cdot e^{6x}$$

é a solução da equação dada.

Exemplo: Resolva a equação

$$y' = \frac{y}{x^2+1}.$$

Solução: Podemos reescrever da seguinte forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2+1}$$

separando as variáveis, temos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2+1}$$

e integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2+1} \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \Longrightarrow \ln y = arctgx + C$$

$$e^{\ln y} = e^{\mathrm{arctgx+C}} \Longrightarrow y = e^{\ \mathrm{arctgx}} \cdot e^{C}$$

logo, a solução geral é

$$y = k \cdot e^{arctgx}$$

onde

$$k = e^{C}.$$

3.2 Equações Exatas

As equações diferenciais exatas são equações que podem ser escritas na forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{16}$$

onde,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y) \tag{17}$$

e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y) \tag{18}$$

para uma função qualquer de duas variáveis $\Psi(x, y) = C$, tal que C é uma constante qualquer. Apresentaremos o seguinte teorema que nos dará um critério para identificar se uma equação é exata ou não.

Teorema 3.2.1 (Critério para Diferencial Exata)**.** *Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $\alpha < x < \beta$; $\delta < y < \theta$. Então, uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

seja uma diferencial exata é

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{19}$$

em cada ponto de R. Ou seja, existe uma função Ψ que satisfaz as equações (17) *e* (18)*, se e somente se, M e N satisfazem a equação* (19)*.*

Demonstração:

Para demonstrar esse teorema devemos primeiramente mostrar que, se existe uma função Ψ tal que as equações (17) e (18) são verdadeiras, assim a equação (19) é satisfeita. De fato, calculando M_y e N_x das equações (17) e (18) obtemos:

$$M_y(x, y) = \Psi_{xy}(x, y) \text{ e } N_x(x, y) = \Psi_{yx}(x, y). \tag{20}$$

Como M_y e N_x são contínuas, por hipótese, segue que Ψ_{xy} e Ψ_{yx} também são contínuas, portanto, isso garante a igualdade da equação (19).

Desse modo, precisamos mostrar que se M e N satisfazem a equação (19) então a equação (16) é exata. Para validar essa condição, devemos supor uma função Ψ tal que satisfaça as equações (17) e (18).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y)$$

Integrando a primeira equação em relação a x, mantendo y constante, obtemos

$$\int \Psi_x(x,y)dx = \int M(x,y)dx$$

$$\Psi(x,y) = Q(x,y) + g(y) \tag{21}$$

onde $Q(x,y)$ é uma função qualquer diferenciável tal que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$.

Como por exemplo, escolhendo

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)ds$$

sendo x_0 uma constante especificada com $\alpha < x_0 < \beta$. Perceba que a função g na equação (21) é uma função diferenciável arbitrária de y, que neste sentido é uma constante de integração. Diante disso, devemos mostrar que é possível escolher $g(x)$ de modo que a equação (18) seja satisfeita, isto é, que $\Psi_y = N$. Sendo assim, derivando a equação (21) em relação a y e igualando o resultado a $N(x,y)$, temos

$$\Psi_y(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + g'(y) = N(x,y)$$

resolvendo para $g'(x)$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \tag{22}$$

derivando o segundo membro da equação (22) em relação a x, temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \tag{23}$$

e trocando a ordem das derivadas na segunda parcela da equação, tem-se

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

como $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$, temos pela equação (19) que

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 0$$

logo,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y).$$

Sendo assim, podemos analisar que a expressão à direita da equação (22) não depende de x. Assim, integrando a equação (22) encontramos $g(x)$ que substituindo na equação (21) encontramos a função desejada $\Psi(x,y)$ onde podemos obter uma solução implícita dada por

$$\Psi(x,y) = C$$

onde C é uma constante arbitrária. Logo a demonstração do teorema está concluída.

■

3.2.1 Fator Integrante

Quando uma equação diferencial não é exata é possível transforma-la em uma equação exata, para isso é necessário multiplicá-la por uma função $\mu(x, y)$ chamada **Fator de Integração**.

$$\mu M(x, y)\, dx + \mu N(x, y)\, dy = 0$$

Encontrar um fator de integração não é uma tarefa fácil, mas existem duas maneiras importantes e muito úteis na obtenção de fatores de integração simples, isto é, quando μ for uma função de apenas uma das variáveis x ou y, em lugar de ambas. Para isso existem condições necessárias a M e N de modo que $M\, dx + N\, dy = 0$, tenha um fator integrante que dependa somente de x. Tendo em vista que $\mu = \mu(x)$, temos

$$(\mu M)y = \mu My \text{ e } (\mu N)x = \mu Nx + N\frac{d\mu}{dy}$$

assim, para que $(\mu M)y$ seja igual a $(\mu N)x$, é necessário que

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

se $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ é uma função apenas de x, então existe um fator integrante μ que também depende apenas de x. De maneira análoga podemos determinar a condição em que $\mu = \mu(y)$.

Exemplo: Resolva a equação

$$(3x^2 + 2y)\, dx + (2x + 2y)\, dy = 0.$$

Solução: Primeiramente, precisamos mostrar que a EDO é exata, para isso, devemos identificar

$$M(x, y) = 3x^2 + 2y \text{ e } N(x, y) = 2x + 2y$$

em seguida mostramos $M_x = 2 = N_y$, logo a equação é exata pelo teorema, existe uma função $F(x, y)$, tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y \tag{24}$$

e

$$N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y \tag{25}$$

tomemos a equação (24) e integrando em relação a variável x,

$$\int F(x, y)\, dx = \int (3x^2 + 2y)\, dx = x^3 + 2xy + g(y)$$

derivando o resultado em relação a variável y, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + g'(y) \tag{26}$$

igualando (26) a (25), temos

$$2x + g'(y) = 2x + 2y \Longrightarrow g'(y) = 2y$$

integrando a equação acima em relação a y, obtemos

$$g(y) = y^2$$

portanto, segue que,

$$F(x,y) = x^3 + 2xy + g(y) \text{ e } F(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 + k.$$

Logo, a solução implícita para a equação exata dada será

$$x^3 + 2xy + y^2 = C$$

Exemplo: Resolva a equação diferencial

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{y}\right) dx + \frac{1}{y}\, dy = 0, \tag{27}$$

usando o fator de integração $\mu(x) = xy$.

Solução: Como na própria questão já vem determinado o fator integrante, isso nos indica que ela não é exata, porém vamos verificar.

Sejam,

$$M(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{y} \text{ e } N(x,y) = \frac{1}{y}$$

daí,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\sin(x)}{y^2} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Vemos que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, então essa EDO não é exata, porém vamos verificar se o fator integrante $\mu(x) = xy$ pode solucioná-la.

Multiplicando (27) por xy, obtemos:

$$xy\left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{y}\right) dx + xy\frac{1}{y}\, dy = 0$$

simplificando,

$$(y - x\sin(x))\, dx + x\, dy = 0.$$

Nos deparamos com uma outra equação diferencial ordinária, devemos fazer o mesmo processo anterior para saber se a equação acima é exata. Sendo

$$M(x,y) = y - x\sin(x) \tag{28}$$

e

$$N(x, y) = x \tag{29}$$

segue que,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo, confirmamos que é exata. Portanto vamos encontrar a sua solução. Tomando a equação (28) e integrando em relação a variável x,

$$\int M(x, y)\, dx = \int (y - x\sin(x))\, dx \Longrightarrow f(x, y) = \int y\, dx - \int x\sin(x)\, dx$$

utilizando integração por partes, obtemos

$$f(x, y) = yx + x\cos(x) - \sin(x) + g(y) \tag{30}$$

derivando a equação em relação a y, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) \tag{31}$$

igualando (29) à (31),

$$x = x + g'(y) \Longrightarrow g'(y) = 0$$

integrando $g'(y)$ para encontrar $g(y)$, tem-se

$$\int g'(y)\, dy = \int 0\, dx \Longrightarrow g(y) = 0,$$

substituindo $g(y)$ em (30), obtem-se

$$f(x, y) = yx + x\cos(x) - \sin(x) + 0,$$

consequentemente solução é dada por $f(x, y) = C$, fazendo a substituição, obtemos

$$yx + x\cos(x) - \sin(x) = C,$$

que é solução implícita da equação dada.

3.3 Equações Lineares

Considere a equação diferencial linear de ordem n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Se $n = 1$, temos uma equação linear de 1ª ordem,

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

dividindo a equação pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos algum intervalo em que,

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

tomando $P(x) = \dfrac{a_0 x}{a_1 x}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_1 x}$, desse modo, substitui-se na equação e obtemos uma forma usual de uma equação linear,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{32}$$

Em busca de técnicas matemáticas para encontrarmos as soluções da equação linear (32), temos que há certos casos em que $P(x) = 0$. Na equação (32), com $P(x) = 0$ a equação torna-se

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

que pode ser resolvida facilmente integrando ambos os lados no qual a solução geral é dada por

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Entretanto, esse método direto de solução não se aplica em todos os casos de equações lineares, por exemplo, quando $P(x) \neq 0$. Desse modo, para um caso geral devemos utilizar o método do fator integrante da equação linear.

3.3.1 Fator Integrante

Para encontrarmos a solução da equação (32) em um intervalo I em que $P(x)$ e $f(x)$ sejam funções contínuas, devemos utilizar o método de Leibinz[1], que consiste em multiplicar a equação diferencial por uma função $\mu(x)$ chamado de fator integrante, escolhida para facilitar a integração da equação resultante.

Assim, dada a equação linear de primeira ordem geral definida por (32).

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x),$$

multiplicando (32) por uma função indeterminada $\mu(x)$ obtemos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = \mu(x)f(x). \tag{33}$$

Perceba que o primeiro membro da igualdade é a derivada do produto de $\mu(x)y$, desde que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = P(x)\mu(x) \tag{34}$$

[1] **Gottfried Wilhelm Leibniz** foi um proeminente polímata e filósofo alemão e figura central na história da matemática e na história da filosofia. Sua realização mais notável foi conceber as idéias de cálculo diferencial e integral, independentemente dos desenvolvimentos contemporâneos de Isaac Newton.

que é também uma equação diferencial linear, no entanto com $f(x) = 0$.

Tomando $\mu(x) \neq 0$ e multiplicando (34) por $\dfrac{1}{\mu(x)}$, temos

$$\frac{1}{\mu(x)} \cdot \frac{d\mu}{dx}(x) = P(x),$$

como $\dfrac{1}{\mu(x)} = \dfrac{d}{d\mu}(\ln|\mu(x)|)$, temos

$$\frac{d}{d\mu}(\ln|\mu(x)|)\frac{d\mu}{dx} = P(x)$$

pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{d}{d\mu}(\ln|\mu(x)|) = P(x),$$

integrando ambos os membros,

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + k$$

aplicando a exponencial em ambos os membros

$$\mu(x) = e^{k_1} \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = k \cdot e^{\int P(x)dx}.$$

Como buscamos encontrar apenas um fator integrante tomamos $k = 1$, e assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Segue da equação (33),

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)f(x)$$

assim,

$$\mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx + c$$

onde c é uma constante arbitrária.

Exemplo: Encontre a solução da equação

$$x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^6e^x.$$

Solução: Observe que a equação dada não está na forma,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

sendo assim, devemos dividir a equação por x para que ela se torne linear

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x, \tag{35}$$

como $P(x) = \dfrac{-4}{x}$, vamos encontrar o fator de integração $\mu(x)$,

$$\mu(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}\,dx} = e^{-4\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{-4\ln|x|}.$$

Vale lembrar neste caso, o uso da propriedade do logaritmo $b^{\log_b N} = N$,

$$\mu(x) = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

agora multiplicamos (35) pelo fator de integração $\mu(x) = x^{-4}$,

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

simplificando,

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^x$$

aplicando a integral por partes

$$\int \frac{d}{dx}(x^{-4}y)\,dx = \int xe^x\,dx \Longrightarrow x^{-4}y = xe^x - e^x + C.$$

logo,

$$y(x) = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

é solução da equação dada.

Exemplo: Considere a equação dada $y' = x + 5y$ e encontre a solução geral.

Solução: Inicialmente devemos colocar a equação na forma padrão

$$y' - 5y = x \tag{36}$$

sendo $P(x) = -5$, vamos determinar o fator de integração,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int -5,dx} = e^{-5x}$$

multiplicando a equação (36) pelo fator integrante encontrado, temos

$$(y' - 5y)e^{-5x} = xe^{-5x} \Longrightarrow (y'e^{-5x} - 5ye^{-5x}) = xe^{-5x} \Longrightarrow y'e^{-5x} + y(-5e^{-5x}) = xe^{-5x}$$

a equação acima pode ser escrita como,

$$\frac{d}{dx}(ye^{-5x}) = xe^{-5x}$$

integrando ambos os lados da expressão, temos

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{-5x})\,dx = \int xe^{-5x}\,dx \Longrightarrow ye^{-5x} = \int xe^{-5x}\,dx$$

aplicando a integração por partes no segundo membro,

$$ye^{-5x} = -\frac{1}{5}xe^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C$$

simplificando o resultado,

$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + Ce^{5x}.$$

Portanto, temos que $y(x) = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + Ce^{5x}$ é a solução da equação.

3.4 Equações Homogêneas

Para definirmos o que é uma equação diferencial ordinária homogênea, precisamos à princípio falar sobre o conceito de função homogênea. Uma função $f(x, y)$ é homogênea de grau n, se satisfazer a seguinte relação, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Se $f(x, y)$ for homogênea de grau 0, então

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

sendo assim, uma equação na forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{37}$$

é denominada Homogênea de 1ª ordem, se os coeficientes de M e N apresentarem o mesmo grau, ou seja

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \;\text{ e }\; N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

3.4.1 Método de Substituição

Para resolver esse tipo de equação é essencial o uso de uma substituição algébrica, transformando a equação em uma equação separável. De forma mais específica, a substituição pode ocorrer sendo $y = ux$ ou $x = vy$ em que u e v são as novas variáveis independentes. Para isso, tomemos $y = ux$ e sua diferencial como sendo $dy = udx + xdu$. Daí,

$$\frac{dy}{du} = x + u\frac{dx}{du}$$

e ainda,

$$M(x,y) = M(x,ux) = x^n M(1,u) \ \text{ e } \ N(x,y) = N(x,ux) = x^n N(1,u)$$

substituindo na equação homogênea, temos

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$x^n M(1,u)\,dx + x^n N(1,u)\,(udx + xdu) = 0$$

$$[M(1,u) + uN(1,u)]\ dx + xN(1,u)\,du = 0$$

assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)\,du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0.$$

Exemplo: Resolva a equação homogênea $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

Solução: Temos que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são homogêneas de grau 2, portanto tomaremos $y = ux$ para transformá-la em uma equação diferencial de 1ª ordem e separável, assim

$$y = ux \ \text{ e } \ dy = udx + xdu$$

$$(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

$$(x^2 + (ux)^2)\,dx + (x^2 - x(ux))\,dy = 0$$

colocando os termos em evidência, temos

$$x^2(1+u)\,dx + x^2(1-u)\,dy = 0$$

$$\frac{1-u}{1+u}du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\left[-1 + \frac{2}{1+u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0$$

aplicando a integral,

$$\int \left(-1 + \frac{2}{1+u}\right)\,du + \int \frac{dx}{x} = 0 \Longrightarrow -u + 2\ln|1+u| + \ln|x| = -\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = 0$$

utilizando as propriedades de logaritmo, podemos escrever a solução precedente como

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x}$$

logo, temos que $\dfrac{y}{x}$ é a solução da equação.

Exemplo: Dada a equação $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, resolva.

Solução: Antes de encontrarmos a solução precisamos testar se a equação é homogênea, para isso devemos saber se satisfaz a relação $f(tx, ty) = f(x, y)$. Então

$$\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{t^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y),$$

agora vamos resolver a equação diferencial homogênea, tomaremos $y = xv$, assim: $y' = xv' + v$, substituindo na equação homogênea temos:

$$xv' + v = \frac{x^2 + (xv)^2}{x(xv)} = \frac{x^2 + x^2v^2}{x^2v} = \frac{x^2(1 + v^2)}{x^2v} = \frac{1 + v^2}{v}$$

separando a fração, obtemos

$$xv' + v = \frac{1}{v} + v$$

e simplificando, tem-se

$$xv' = \frac{1}{v}$$

como $v'(x) = \dfrac{dv}{dx}$, podemos escrever como

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

separando os termos

$$vdv = \frac{dx}{x}$$

integrando ambos os membros, teremos

$$\int v\,dv = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow v^2 = 2\ln|x| + C$$

portanto, teremos a relação

$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C).$$

3.5 Equação de Bernoulli

Uma *Equação de Bernoulli*[2], corresponde a uma equação diferencial de 1ª ordem, se estiver no seguinte formato

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{38}$$

onde P e Q são constantes ou funções contínuas, n é um número real qualquer diferente de zero ($n \neq 0$ e $n \neq 1$), caso contrário, $n = 1$ e $n = 0$ torna-se uma equação linear. Para

[2] **Jakob Bernoulli** foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que foi feito por Newton e Leibniz e também desenvolveu o método de separação de variáveis.

resolvermos esse tipo equação, devemos transformá-la em uma equação linear, para isso, devemos dividir toda a equação por y^n, assim

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Seja $w = y^{1-n}$,

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{1}{1-n}$$

aplicando a substituição das variáveis temos

$$\frac{dw}{dx}\cdot\frac{1}{1-n} + P(x)w = Q(x)$$

assim, para transformar a equação obtida em uma equação linear, basta multiplicar ambos os membros por $(1-n)$, assim

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)Q(x)$$

uma equação diferencial ordinária linear, que pode ser resolvido como foi visto na sessão (3.3).

Exemplo: Resolva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2. \tag{39}$$

Solução: Observe que para $n = 2$, temos uma equação diferencial de Bernoulli não-linear. Para transformar em linear dividiremos toda a equação (39) por y^2,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x \tag{40}$$

aplicando uma mudança de variável, denotamos

$$w = y^{-1}$$

derivando w pela regra da cadeia, obtemos

$$w' = -y^{-2}y'$$

multiplicando w' por -1, obtemos

$$-w' = y^{-2}y'$$

desse modo, podemos realizar a mudança de variável.

assim substituindo w e $-w'$ na equação (40)

$$-w' + \frac{1}{x}w = x \tag{41}$$

multiplicando (41) por (-1) para modificar o sinal negativo da variável, tem-se

$$w' - \frac{1}{x}w = -x \tag{42}$$

Diante da equação linear, identificamos $P(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f(x) = -x$. O fator integrante para esta equação linear no intervalo $(0, -\infty)$ é

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

multiplicando (42) pelo fator integrante, temos

$$w'x^{-1} - \frac{1}{x}wx^{-1} = xx^{-1}$$

assim,

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}w] = -1$$

integrando ambos os membros, obtemos

$$x^{-1}w = -x \Longrightarrow w = -x^2$$

como $w = y^{-1}$, então

$$y = \frac{1}{w} \Longrightarrow y = \frac{1}{-x^2}$$

temos, então, uma solução para a equação dada.

Exemplo: Resolva a equação diferencial

$$y' - 2xy - 4xy^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Solução: Reescrevendo a equação na forma de Bernoulli e dividindo-a por $y^{\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$$

$$y'y^{-\frac{1}{2}} - 2xy^{\frac{1}{2}} = 4x \tag{43}$$

usando a mudança de variável, obtemos

$$w = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow w' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \Rightarrow 2w' = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$$

substituindo na equação (43), tem-se

$$2w' - 2xw = 4x$$

simplificando,

$$w' - xw = 2x \tag{44}$$

é uma equação linear no formato de $w' + P(x)w = G(x)$.Vamos resolver a equação linear (44). Calculando o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -xdx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

então,

$$\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

calculando $\displaystyle\int \mu(x)g(x)\,dx$, temos

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 2x\,dx = 2\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

como temos

$$w = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)\,dx + C\right)$$

$$w = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left(-2e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-2e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right) = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 2.$$

voltando à variável y e sabendo que $t = y^{\frac{1}{2}}$,

$$y^{\frac{1}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 2 \Rightarrow y = \left(Ce^{\frac{x^2}{2}} - 2\right)^2.$$

que é a solução da EDO.

3.6 Equação de Riccati

A *Equação de Riccati*[3] é uma equação diferencial ordinária não-linear de 1ª ordem.

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{45}$$

em que P, Q e R são funções que dependem de x. Para sua solução é imprescindível ter conhecimento de uma determinada solução particular y_1, para que possamos fazer substituições e manipulações transformando a equação de Riccati em uma equação de Bernoulli que já sabemos seus métodos de resoluções. Assim, sendo

$$y = y_1 + u \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

substituindo na equação acima, temos

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P + Q(y_1 + u) + R(y_1 + u)^2 \tag{46}$$

desse modo, a equação (46), resulta em

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2 \tag{47}$$

[3] **Jacopo Francesco Riccati**(1676-1754) foi um matemático e físico italiano que efetuou trabalhos sobre hidráulica e também considerou diversas classes de equações diferenciais, mas é conhecido principalmente pela Equação de Riccati, da qual fez um elaborado estudo e deu soluções em alguns casos especiais

que é uma equação de Bernoulli, cujo $n = 2$, onde pode ser encontrada a seguinte equação linear,

$$\frac{dw}{dx} - (Q + 2y_1 R)w = -R$$

onde pode ser solucionada fazendo a substituição de $w = u^{-1}$.

Exemplo: Resolva a equação

$$y' = 9 + 6y + y^2,$$

com solução particular $y_1 = -3$.

Solução: Aplicando a substituição $y = z + y_1$, então $y = -3 + z$

$$(z-3)' = 9 + 6(z-3) + (z-3)^2 \Rightarrow z' = 9 + 6z - 18 - 6z + 9 + z^2 \Rightarrow z' = z^2.$$

que trata-se de uma equação de Bernoulli.

$$z' + 0z = z^2$$

resolvendo Bernoulli

$$z' = z^2$$

dividindo a equação por z^2

$$z^{-2}z' = 1$$

aplicando a substituição $u = z^{-1}$ e $u' = -z^{-2}z' \Longrightarrow -u' = z^{-2}z'$, assim a equação fica

$$-u' = 1 \Leftrightarrow u' = -1$$

que trata-se de uma equação linear que trivialmente nos leva a $u = -x$. Portanto, a solução geral é

$$u = -x + C$$

retornando para a variável z

$$z^{-1} = -x + C \Leftrightarrow z = \frac{1}{-x + C}$$

e finalmente voltando para a variável y

$$y = z - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{-x + C} - 3$$

temos, a solução da equação.

Exemplo: Resolva a equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2,$$

tendo como solução particular $y_1 = x$.

Solução: Faremos a substituição de $y = z + y_1$ que equivale a $y = z + x$, assim,

$$(z+x)' = 2x^2 + \frac{1}{x}(z+x) - 2(z+x)^2 \Rightarrow z' + 1 = 2x^2 + \frac{z}{x} + 1 - 2(z^2 + 2zx + x^2)$$

simplificando,

$$z' = -1 + 2x^2 + \frac{z}{x} + 1 - 2z^2 - 4zx - 2x^2 \Rightarrow z' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) z = -2z^2$$

que trata-se de uma equação de Bernoulli. Analogo ao exemplo anterior,

$$z' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) z = -2z^2$$

dividindo toda a equação por z^2

$$z^{-2}z' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) z^{-1} = -2$$

fazendo a substituição $u = z^{-1}$ e $u' = -z^{-2}z' \Longrightarrow -u' = z^{-2}z'$

$$-u' + \left(4x - \frac{1}{x}\right) u = -2$$

multiplicando a equação por (-1), temos

$$u' - \left(4x - \frac{1}{x}\right) u = 2$$

que é uma equação linear, para resolve-la calcularemos $\mu(x)$.

$$\mu(x) = e^{\int\left(-4x + \frac{1}{x}\right)\,dx} = e^{-\frac{4x^2}{2} + \ln|x|} = e^{-2x^2 + \ln|x|}$$

então

$$\mu(x) = e^{-2x^2 + \ln|x|} = e^{-2x^2} \cdot (e^{\ln|x|}) = xe^{-2x^2}$$

calculando $\displaystyle\int \mu(x)g(x)\,dx$, temos

$$\int xe^{-2x^2} \cdot 2\,dx = 2\int xe^{-2x^2}\,dx$$

para resolver a integral usaremos o método de substituição simples tomando $a = 2x^2$ que resulta em

$$2\int xe^{-2x^2}\,dx.$$

Como temos que,

$$u = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)\,dx + C\right)$$

assim, a solução será

$$u = \frac{1}{xe^{-2x^2}}\left(-\frac{e^{-2x^2}}{2} + C_1\right) = -\frac{1}{2x} + \frac{C_1 e^{2x^2}}{x}$$

voltando para a variável z, temos

$$z^{-1} = -\frac{1}{2x} + \frac{C_1 e^{2x^2}}{x} = \frac{-1 + 2C_1 e^{2x^2}}{2x} \Rightarrow z = \frac{2x}{-1 + 2C_1 e^{2x^2}}$$

e finalmente voltando para a variável y,

$$y = z + x \Rightarrow y = \frac{2x}{-1 + 2C_1 e^{2x^2}} + x$$

encontramos assim, o resultado da EDO de Riccati

3.7 Equação de Clairaut

Uma equação diferencial ordinária não-linear do tipo

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

é chamada de *Equação de Clairaut*[4]. A fim de encontrar sua solução devemos seguir algumas etapas. Inicialmente, denota-se $\frac{dy}{dx} = p(x)$. Obtendo

$$y(x) = xp(x) + \varphi p(x) \tag{48}$$

posteriormente, devemos derivar a equação encontrada em relação a x

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p(x))\frac{dp}{dx}$$

organizando,

$$p(x) = p(x) + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p(x))\frac{dp}{dx} \Longrightarrow \frac{dp}{dx}\left[x + \varphi'(p(x))\right] = 0.$$

Através da propriedade do produto nulo que afirma se $ab = 0$, logo $a = 0$ ou $a = 0$. Portanto, podemos concluir que

$$\frac{dp}{dx} = 0 \;\text{ ou }\; x + \varphi'(p(x)) = 0,$$

se $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p(x) = C$, temos assim como solução geral da equação, substituindo na equação (48):

$$y(x) = Cx + \varphi(C).$$

[4] **Alexis Claude de Clairaut** foi um matemático francês brilhante que apresentou seu primeiro trabalho para a Academia de Ciências de Paris aos 13 anos. Foi precursor da geometria diferencial e realizou estudos fundamentais sobre as curvas no espaço

Exemplo: Resolva a equação de Clairaut

$$y = xy' + \ln(y').$$

Solução: Primeiramente em uma equação de Clairaut devemos derivar em relação a x.

$$y' = xy'' + y' + \frac{1}{y'}y''$$

reorganizando a equação temos,

$$y''\left(x + \frac{1}{y'}\right) = 0$$

pela propriedade do produto nulo, devemos ter pelo menos um dos fatores iguais a 0. Resolvendo $y'' = 0$, temos

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C$$

substituindo na equação de Clairaut

$$y = xC + \ln(C)$$

obtemos, a solução da equação.

Exemplo: Resolva a equação de Clairaut

$$y = xy' + (y')^3.$$

Solução: Derivamos primeiramente a equação em relação a x

$$y' = xy'' + y' + 3(y')^2y''$$

reorganizando a equação

$$y''\left(x + 3(y')^2\right) = 0$$

pela propriedade do produto nulo, devemos ter pelo menos um dos fatores deve ser igual a 0. Resolvendo $y'' = 0$,

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C$$

substituindo na equação de Clairaut

$$y = xC + C^3$$

obtemos uma família de retas.

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2ª ORDEM

As equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem são representadas da seguinte maneira

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \tag{49}$$

onde P, Q, R, e $G\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas definidas em um intervalo aberto (a,b), com uma variável independente x e outra dependente y, com $y = y(x)$. É valido ressaltar que se G for identicamente nula, a equação é denominada equação linear homogênea, caso contrário será não-homogênea.

4.1 Equações Homogêneas

São equações lineares de 2ª ordem homogêneas, equações do tipo

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \tag{50}$$

Para solucionar tais equações lineares, é necessário estabelecer duas condições básicas que possibilitam sua resolução.

A primeira condição, determina que se houver o conhecimento de duas soluções particulares y_1 e y_2 da equação, a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ será também uma solução da equação. Assim, segue o teorema

Teorema 4.1.1 (Princípio da Superposição)**.** *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ambas soluções da equação linear homogênea* (50) *e c_1 e c_2 constantes quaisquer, então a função*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é também solução da equação (50)*.*

Demonstração: : Considere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0.$$

desde que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções, temos

$$\begin{aligned} P(x)y_1'' &+ Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0 \\ P(x)y_2'' &+ Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, usando as regras básicas de derivação obtemos

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y$$

$$P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$c_1\left[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1\right] + c_2\left[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2\right]$$
$$c_1(0) + c_2(0) = 0$$

Logo, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é uma solução da equação (49). ■

A segunda condição, afirma que se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes, então a combinação linear de ambas $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é a solução geral. Assim seguem as definições e o teorema que regem essa afirmação.

Definição 4.1.1. *Dizemos que duas funções f e g são **Linearmente Dependente (LD)** em um intervalo I se existe constantes c_1 e c_2 não nulas simultaneamente, tal que*

$$c_1f(x) + c_2g(x) = 0, \tag{51}$$

para todo x em um intervalo I. Assim, as funções f e g devem ser múltiplas uma da outra.

Definição 4.1.2. *Se a única solução da equação (51) for $c_1 = c_2 = 0$, então f e g são **Linearmente Independente (LI)**.*

Exemplos:
As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes.
As funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

Teorema 4.1.2. *Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da equação (49) em um intervalo I, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. (Ver demonstração em [18] p. 150)

Em outras palavras, o Teorema 4.1.2 admite que se conhecermos duas soluções particulares linearmente independentes, logo conheceremos todas as soluções. Entretanto, a maioria das funções não são tão fáceis de identificar sua linearidade, ou seja, se é L.D. ou L.I. Desse modo, como artifício para determinar a linearidade temos o seguinte determinante

O determinante

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

é chamado de Wronskiano[1] onde é utilizado para determinar se um conjunto de funções diferenciáveis são linearmente dependentes ou independentes, em um dado intervalo.

Teorema 4.1.3. *Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial*

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

num intervalo (a,b) e se $W[y_1,y_2](t_0) \neq 0$ num ponto do intervalo, então y_1 e y_2 são linearmente independentes, caso contrário, se o $W[y_1,y_2](t) = 0$ para todo t em (a,b) as soluções y_1 e y_2 serão linearmente dependentes. (Ver demonstração em [18] p. 156)

4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Partindo da equação homogênea (50), se P, Q e R forem constantes, escritas no seguinte formato

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{52}$$

sendo $a \neq 0$, temos uma equação linear homogênea com coeficientes constantes.

Como solução para esta equação existe a função exponencial $y(x) = e^{rx}$, onde r é uma constante, que por propriedade da derivada, temos: $y'(x) = re^{rx}$ e $y''(x) = r^2e^{rx}$.

De fato, substituindo $\dfrac{dy}{dx} = re^{rx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$ em (52), temos

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0,$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Sabendo que $e^{rx} \neq 0$, logo $y(x) = e^{rx}$ é solução particular de (52) se, e somente se, r é uma raiz da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

tal equação é denominada **equação característica** ou **equação auxiliar**.

É perceptível que a equação característica é uma equação algébrica em que pode ser obtida da equação diferencial através da substituição de y'' por r^2, y' por r e y por 1. Como a equação característica é uma equação do 2º grau, existe três casos de acordo com o valor do discriminante $b^2 - 4ac$.

[1] Definição dada por **Josef Maria Hoené Wronsk**(1778-1853),filósofo e matemático na Polônia, conhecido por seu trabalho na matemática em relação às equações diferenciais e a linearidade de funções, atrás do cálculo de determinantes de matrizes, denominado **Wronskiano**

CASO I. Raízes Reais e Distintas $(b^2 - 4ac > 0)$

Considerando que a equação característica tenha raízes reais e distintas r_1 e r_2, com $b^2 - 4ac > 0$, como, $y_1(x) = e^{r_1x}$ e $y_2(x) = e^{r_2x}$ são soluções particulares linearmente independentes, pelo Teorema 4.1.2, temos como solução geral

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

Verificando, temos que

$$y'(x) = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x} \;\text{ e }\; y''(x) = c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x}$$

substituindo y'', y' e y na equação (52), obtemos:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$a(c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x}) + b(c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x}) + c(c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}) = 0$$
$$c_1(ar_1^2 + br + c)e^{r_1x} + c_2(ar_2^2 + br + c)e^{r_2x} = 0,$$

assim, se r_1 e r_2 são raízes da equação característica $ar_1^2 + br + c = 0$, vemos que

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

é solução geral de (52).

Exemplo: Resolva a equação

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

Solução: Observe que a equação característica é

$$r^2 - 3r - 10 = 0 \;\text{ e }\; (r-1)(r+3) = 0$$

no qual as raízes são $r = 1$ e $r = -3$. Portanto pelo Caso I, temos que a solução geral da equação diferencial dada é

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x}.$$

CASO II. Raízes Reais e Iguais $(b^2 - 4ac = 0)$

Considerando agora, o caso em que as duas raízes reais r_1 e r_2, são iguais, ocorrendo quando $b^2 - 4ac = 0$. Logo

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}. \tag{53}$$

Note que neste caso,

$$y_1 = y_2 = e^{rx} = e^{-\frac{b}{2a}x} \tag{54}$$

Assim, $y_1(x) = e^{rx}$ é solução da equação (52). Em vista disso, devemos encontrar uma segunda solução.

Na busca para encontrar a solução geral da equação diferencial, precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de $y_1(x)$. Para encontrá-la usaremos o método de D'Alembert[2].

Considerando $y_1(x)$ sendo uma solução da equação diferencial, então $cy_1(x)$ também é solução para qualquer constante c. O Método, usado por D'Alembert, foi generalizar essa observação, substituindo c por uma função $v(x)$ e depois determinar essa função de modo que o produto $v(x) \cdot y_1(x)$ também seja solução da equação diferencial.

Neste sentido, considerando (54), supomos que

$$y(x) = v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \tag{55}$$

devemos encontrar $y''(x)$ e $y'(x)$, usando a derivada do produto

$$y'(x) = v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \tag{56}$$

$$y''(x) = v''(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a} \cdot v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \tag{57}$$

substituindo $y''(x)$, $y'(x)$ e $y(x)$ na equação diferencial (52), para encontrarmos $v(x)$, teremos

$$\begin{aligned} a\left(v''(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a} \cdot v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x}\right) &+ \\ +b\left(v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x}\right) + c\left(v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x}\right) &= 0 \\ av''(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} - b \cdot v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} b \cdot v'(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} &- \\ -\frac{b^2}{2a} \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} + c \cdot v(x) \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \end{aligned}$$

$$e^{-\frac{b}{2a}x}\left(av''(x) + \frac{b^2}{4a} \cdot v(x) - \frac{b^2}{2a} + c \cdot v(x)\right) = 0$$

como $e^{-\frac{b}{2a}x} \neq 0$ para qualquer valor de x. Então,

$$av''(x) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) v(x) = 0 \tag{58}$$

[2] **Jean Le Rond d'Alembert**(1717-1783) foi um matemático e físico francês que desenvolveu as primeiras fases do cálculo, formalizou a nova ciência da mecânica, e foi o editor de ciência da Enciclopédia de Diderot

simplificando a expressão entre parênteses, temos

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a}$$

porém, por hipótese do problema $b^2 - 4ac = 0$, logo, $\dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = 0$ e retornando à (58), temos que

$$av''(x) = 0$$

desde que $a \neq 0$. Tem-se

$$v''(x) = 0 \tag{59}$$

integrando ambos os lados da igualdade

$$\int v''(x)\,dx = \int 0\,dx \Rightarrow v'(x) = c_1 \tag{60}$$

novamente integrando os termos, obtemos

$$\int v'(x)\,dx = \int c_1\,dx \Rightarrow v(x) = c_1 x + c_2, \tag{61}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Portanto, substituindo (61) em (55) concluímos que

$$y(x) = c_1 x e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

é a solução geral da equação dada, sendo obtida através uma combinação linear de duas soluções,

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \ \text{ e } \ y_2(x) = x e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Para verificar que essas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes, basta calcular o determinante wronskiano,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & x e^{-\frac{b}{2a}x} \\ -\dfrac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}x} & \left(1 - \dfrac{b}{2a}x\right) e^{-\frac{b}{2a}x} \end{vmatrix} = e^{-\frac{b}{2a}x} \neq 0$$

logo, y_1 e y_2 é linearmente independente.

Exemplo: Resolva a equação diferencial

$$y'' - 14y' + 49y = 0.$$

Solução: Temos que a equação característica da equação dada é

$$r^2 - 14r + 49 = 0$$

observe que o discriminante da equação é

$$\begin{aligned}\Delta &= (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49\\ \Delta &= 196 - 196\\ \Delta &= 0\end{aligned}$$

logo, a equação possui apenas uma raiz real $r = 7$. Portanto, pelo Caso II, a solução geral é dada pela equação

$$y(x) = c_1 x e^{7x} + c_2 e^{7x}.$$

CASO III. Raízes Complexas $(b^2 - 4ac < 0)$

Neste caso, consideraremos a equação característica, quando seu discriminante for negativo, ou seja, $b^2 - 4ac < 0$. Desse modo, a equação possuirá as raízes com números complexos conjugados, isto é,

$$r_1(x) = \alpha + i\beta \ \text{ e } \ r_2(x) = \alpha - i\beta,$$

onde α e β são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Para atribuir significados a essas expressões definiremos a função exponencial complexa, para isso recorremos ao cálculo, onde utilizaremos a série de Taylor, dada pela equação

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty$$

desse modo, vamos introduzir ix na definição, sendo $i^2 = -1$,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Para valores em que n é par, ou seja, para $n = 2k$, sendo k um inteiro qualquer, temos

$$i^n = i^{2k} = i^{2(k)} = (-1)^k$$

por outro lado, quando n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$, sendo k um inteiro qualquer, temos

$$i^n = i^{2k+1} = i^{2(k)} i = (-1)^k i$$

sendo assim,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{62}$$

Note que a série de Maclaurin[3]

$$p_{(2k)}(x) = 1 \mp \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

é a função de aproximação de $\cos(x)$. E que a série

$$p_{(2k+1)}(x) = x \mp \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

é a função de aproximação de $\sin(x)$. Assim, separando (62) em partes real e imaginária e pela série de Taylor[4], temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x) \ \text{ e } \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x),$$

portanto, substituindo temos

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

equação conhecida como *fórmula de Euler*[5].

A partir de agora, ao escrevermos e^{ix} estaremos nos referindo a $\cos(x) + i\sin(x)$ e, portanto, devemos levar em consideração as variantes da fórmula de Euler, como por exemplo substituindo x por $-x$ e lembrando que $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\sin(-x) = -\sin(x)$, temos

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Considerando as propriedades da função exponencial para expoentes complexos, temos que

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{(\alpha x+i\beta x)} = e^{(\alpha x)}e^{(i\beta x)}$$

como $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$, obtemos

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{(\alpha x)}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) = e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) + ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x)$$

assim as expressões correspondentes para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são

$$y_1(x) = e^{(\alpha x)}\left[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right] \ \text{ e } \ y_2(x) = e^{(\alpha x)}\left[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right].$$

---

3 **Colin Maclaurin** foi um matemático escocês, professor na Faculdade de Marischal Aberdeen e na Universidade de Edinburgh. Fez um trabalho notável em geometria, particularmente estudando curvas planas. Ele escreveu uma memória importante na chamada teoria das marés.

4 **Frederick Taylor** foi um engenheiro mecânico norte-americano considerado o pai da Administração Científica do Trabalho. Autor da série de Taylor, ferramenta com a qual podem ser moldadas funcões trigonométricas, exponenciais e logarítmicas em polinômios.

5 **Leonhard Euler** foi um importante matemático e cientista suíço, foi considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época. Sua contribuição teve como um dos pilares a Introdução à Análise dos Infinitos, obra que constitui um dos fundamentos da matemática moderna.

Partindo do fato de que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação a $y'' + by' + c = 0$, então qualquer combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ também é solução, assim,

$$\begin{aligned} y_1(x) + y_2(x) &= e^{(\alpha x)}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) + e^{(\alpha x)}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right) = \\ &= e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) + ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x) + e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) - ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x) = \\ &= 2e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= e^{(\alpha x)}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) - e^{(\alpha x)}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right) = \\ &= e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) + ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x) - e^{(\alpha x)}\cos(\beta x) + ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x) = \\ &= 2ie^{(\alpha x)}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

assim, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$ respectivamente, obtemos um par de soluções reais,

$$u(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \ \text{ e } \ v(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

e a solução geral da equação $y'' + by' + c = 0$, com r_1 e $r_2 \notin \mathbb{R}$ será

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e podem ser escritas desde que sejam conhecidos os valores de α e β.

Exemplo: Resolva a equação

$$y'' + 4y' + 7y = 0.$$

Solução: Temos que a equação característica da equação é

$$r^2 + 4r + 7 = 0$$

calculando o discriminante temos

$$\begin{aligned} \Delta &= (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 \\ \Delta &= 16 - 28 \\ \Delta &= -12 \end{aligned}$$

logo, suas raízes reais são

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} \Rightarrow r_1 = -2 + \sqrt{3}i \ \text{ e } \ r_2 = -2 - \sqrt{3}i,$$

onde $\alpha = -2$ e $\beta = \sqrt{3}$, logo a solução geral da equação diferencial é

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ y(x) &= c_1 e^{-2x}\cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-2x}\sin(\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

4.3 Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores de Contorno

Um **Problema de Valor Inicial (PVI)** da equação diferencial de 2ª ordem, baseia-se em determinar a solução y da equação diferencial que satisfaça as condições iniciais da forma.

$$\begin{cases} a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(a) = y_0, \quad y'(b) = y'_0 \end{cases}$$

onde y_0 e y_1 são constantes.

Em outros termos, podemos encontrar uma solução partindo somente da equação diferencial e de um ponto x_0 do valor inicial. Na sessão **2.4** enunciamos um teorema de existência e unicidade de uma solução de problema de valor inicial de primeira ordem.

Agora para garantir a existência e unicidade de uma solução de uma equação de 2ª ordem segue o teorema que rege essa afirmação.

Teorema 4.3.1 (Existência e Unicidade)**.** *Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de valor inicial deste intervalo.*

Exemplo: Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0$$

sabendo que,

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solução: Temos que a equação característica da equação é $r^2 + r - 6 = 0$ cujas raízes são $r = 2$ e $r = -3$.

Assim pelo Caso I, a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

derivando essa solução temos:

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

desse modo, para satisfazermos as condições iniciais é necessário que

$$\begin{cases} y_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ y'_0 = 2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema encontramos $c_1 = \dfrac{3}{5}$ e $c_2 = \dfrac{2}{5}$. Portanto, a solução do P.V.I é

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}.$$

Um **Problema de Valor de Contorno (PVC)** para a equação diferencial de 2ª ordem, consiste em encontra uma solução y da equação, no qual a variável dependente y e suas derivadas são específicas em pontos diferentes, assim

$$\begin{cases} a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

temos que os valores específicos $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ são chamados de *condições de contorno ou de fronteira*. Entretanto, este problema nem sempre tem uma solução.

Exemplo: Resolva o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0$$

sabendo que,

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3$$

Solução: A equação característica da equação é $r^2 + 2r + 1 = 0$ cuja raiz é

$$r = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Assim a solução geral pelo Caso II é

$$y(x) = c_1xe^{-x} + c_2e^{-x}$$

temos que as condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 0 e^0 + c_2e^0 \Rightarrow c_2 = 1$$

e

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

multiplicando a equação por e temos

$$c_1 + 1 = 3e$$

$$c_1 = 3e - 1$$

portanto, a solução da equação é

$$y(x) = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}.$$

4.4 Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial não homogênea, apresenta-se da seguinte maneira

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x), \tag{63}$$

onde a, b e c são números reais, sendo $a \neq 0$ e $g(x)$ uma função contínua. Considerando a equação homogênea associada a (63),

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \tag{64}$$

é denominada *equação complementar*, onde exerce um papel significativo da resolução na equação (63).

Os dois teoremas a seguir exprimem a estrutura da solução não homogênea e fornecem uma base para a solução geral da equação.

Teorema 4.4.1. *Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não homogênea* (63), *então a diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea complementar* (64). *Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação* (63), *então*

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

Demonstração: Partindo da hipótese de que Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação (63), temos que:

$$Y_1 = aY_1'' + bY_1' + cY_1 = g(x) \tag{65}$$

$$Y_2 = aY_2'' + bY_2' + cY_2 = g(x) \tag{66}$$

subtraindo ambas as equações (65) e (66),

$$(Y_1 - Y_2) = (aY_1'' + bY_1' + cY_1) - (aY_2'' + bY_2' + cY_2) = g(x) - g(x) = 0 \tag{67}$$

no entanto,

$$a\left(Y_1'' - Y_2''\right) + b\left(Y_1' - Y_2'\right) + c\left(Y_1 - Y_2\right) = (aY_1'' + bY_1' + cY_1) - (aY_2'' + bY_2' + cY_2)$$

assim,

$$a\left(Y_1'' - Y_2''\right) + b\left(Y_1' - Y_2'\right) + c\left(Y_1 - Y_2\right) = 0.$$

Logo, a solução $Y_1 - Y_2$ é solução geral da equação (64).

Sendo assim, como todas as soluções de (64) podem ser expressas como uma combinação linear de funções em um conjunto fundamental de soluções, assim, segue que $Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 4.4.2. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação homogênea*
$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$$
e seja $y_p(x)$ qualquer solução particular da equação não-homogênea (63)*. Então, toda solução $y(x)$ de* (63) *deve ser da forma*
$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x).$$

Demonstração: Sejam $y(x)$ e $y_p(x)$ soluções quaisquer de (63), a função denominada $y_c(x)$, sendo $y_c(x)=y(x)-y_p(x)$ é uma solução geral da equação homogênea (64). Mas, segundo o Teorema 4.1.1, toda função $y_c(x)$ da equação homogênea (64) é da forma $y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ para alguma escolha das constantes c_1 e c_2. Logo,
$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x).$$
■

Portanto, o Teorema 4.4.2 é significativamente importante, uma vez que ele reduz o problema de encontrar todas as soluções da equação não homogênea, em encontrar somente a solução geral da equação homogênea (64) e uma solução da equação não homogênea (63).

Vimos anteriormente que a resolução da equação complementar y_c, agora de acordo com Teorema 4.4.2, há a necessidade de encontrar uma solução particular y_p da equação não homogênea, para obtermos a solução geral não homogênea. Mediante a isso, existem dois métodos que nos permitem encontrar a solução particular, que vamos apresentar a seguir: o Método dos Coeficientes Indeterminados e o Método de Variação dos Parâmetros.

4.4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados ou método dos coeficientes a determinar consiste em determinar a solução particular y_p de uma equação linear não homogênea, a partir de um determinado tipo de função $f(x)$, com coeficientes não especificados. Porém esse método se limita apenas a uma determinada classe de equações não homogêneas, nas quais:

- Os coeficientes sejam constantes;
- E que $g(x)$ seja uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\sin(\beta x)$, $\cos(\beta x)$ ou somas e produtos dessas funções.

Esse método é visto como o mais vantajoso, pois é de fácil execução e não envolve integrações, além de ser útil para a resolução de aplicações importantes. Assim, ilustraremos a seguir os métodos indeterminados através de alguns exemplos expressando tais limitações.

- Quando $g(x)$ apresentar-se como um polinômio de grau 2, suponhamos por tentativa uma solução na forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Exemplo: Encontre a solução particular e a solução geral para a equação

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1. \tag{68}$$

Solução: A equação homogênea correspondente à equação não homogênea é $y''-3y'+2y = 0$, em que sua equação característica apresenta-se na forma, $r^2 - 3r + 2 = 0$ cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Assim a solução da equação homogênea associada é

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Desse modo, sabendo que $g(x) = x^2 + 1$ é um polinômio de grau 2, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

derivando, encontramos

$$y_p'(x) = 2Ax + B \;\text{ e }\; y_p''(x) = 2A$$

substituindo y_p, y_p' e y_p'' na equação (68), obtemos:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$$

agrupando os termos, temos

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C = x^2 + 1$$

segue que

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 6A = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{3}{2}$ e $C = \dfrac{9}{4}$.

Portanto a solução particular da equação não homogênea será

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

e pelo Teorema 4.4.2, a solução geral é

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

- Quando $g(x)$ for uma função exponencial no formato ce^{kx}, com c e k constantes, procura-se uma solução na forma

$$y_p(x) = Ae^{kx}.$$

Exemplo: Resolva a equação não homogênea

$$y'' + 4y = e^{3x}. \tag{69}$$

Solução: Sabemos que a equação homogênea associada é $y'' + 4y = 0$. Desse modo a equação característica será $r^2 + 4 = 0$, com raízes $r = \pm 2i$. Então a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Uma vez que $g(x) = e^{3x}$, para encontrar a solução particular tentaremos uma solução da seguinte forma

$$y_p(x) = Ae^{3x} \tag{70}$$

então,

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x} \text{ e } y_p''(x) = 9e^{3x}$$

substituindo na equação diferencial (69), ficamos com

$$9e^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x} \Rightarrow 13Ae^{3x} = e^{3x}$$

assim, $A = \dfrac{1}{13}$ Substituindo em (70), temos como solução particular

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}.$$

assim a solução geral será

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{13}e^{3x}.$$

- Quando $g(x)$ é $c \cos kx$ ou $c \sin kx$, tentamos como solução particular, uma função no aspecto

$$y_p(x) = A \cos kx + B \sin kx.$$

Exemplo: Encontre a solução geral da equação não-homogênea

$$y'' - 9y = \cos 3x. \tag{71}$$

Solução: Observe que a equação homogênea associada é $y'' - 9y = 0$, dessa forma a solução da equação característica $r^2 - 9 = 0$ tem como raízes $r = \pm 3$. Assim a solução homogênea complementar, será da seguinte maneira

$$y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Doravante, como $g(x) = \cos 3x$, para encontrar a solução particular não homogênea, devemos encontrar uma solução no formato

$$y_p(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$$

derivando, temos

$$y_p'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x \ \text{ e } \ y_p''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

substituindo os valores de y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial (71), obtemos:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 9(A\cos 3x + B\sin 3x) = \cos 3x$$

$$-18A\cos 3x - 18B\sin 3x = \cos 3x$$

daí, segue que

$$-18A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{18} \ \text{ e } \ B = 0$$

então, a solução particular é

$$y_p(x) = -\frac{1}{18}\cos 3x,$$

logo a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{18}\cos 3x.$$

- Quando $g(x)$ apresentar-se como um produto de funções dos formatos anteriores, assim, tentamos uma solução do mesmo tipo, ou seja, um produto de funções

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos kx + (Cx + D)\sin kx.$$

Exemplo: Encontre a solução geral da equação não homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x\cos 2x. \tag{72}$$

Solução: A equação característica $r^2 - 3r - 4 = 0$, relativo a equação homogênea associada da equação acima, tem como raízes $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$, portanto a equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}.$$

Neste caso, como $g(x) = -8e^x \cos 2x$, ou seja, um produto de função cosseno, assim supomos que a solução particular seja da seguinte estrutura

$$y_p(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$$

assim,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x \\ y_p'(x) &= (A + 2B)e^x \cos 2x + (-2A + B)e^x \sin 2x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x - 2Ae^x \sin 2x - 4Ae^x \cos 2x + \\ &+ Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x + 2Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x \\ y_p''(x) &= (-3A + 4B)e^x \cos 2x + (-4A - 3B)e^x \sin 2x \end{aligned}$$

substituindo y_p, y_p' e y_p'' em (72), encontramos

$$\begin{aligned} (-3A + 4B)e^x \cos 2x &+ (-4A - 3B)e^x \sin 2x - 3\left[(A + 2B)e^x \cos 2x + \right. \\ &+ \left. (-2A + B)e^x \sin 2x\right] - 4\left(Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x\right) = \\ &= -8e^x \cos 2x \end{aligned}$$

$$(-10A - 2B)e^x \cos 2x + (2A - 10B)e^x \sin 2x = -8e^x \cos 2x$$

isto é,

$$\begin{cases} 10A + 2B = 8 \\ 2A - 10B = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \dfrac{10}{13}$ e $B = \dfrac{2}{13}$.

Logo, a solução particular da equação (72) é

$$y_p(x) = \frac{10}{13}e^x \cos 2x + \frac{2}{13}e^x \sin 2x.$$

Para encontrar a solução geral tomaremos a equação homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

cuja equação característica é $r^2 - 3r - 4 = 0$, com $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$, assim a solução é do tipo

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$$

portanto, a solução geral da equação (72) será

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + \frac{10}{13}e^x \cos 2x + \frac{2}{13}e^x \sin 2x.$$

- Quando $g(x)$ for uma soma de funções do mesmo tipo do caso anterior, usa-se o princípio da superposição, em que afirma se temos y_{p1} e y_{p2} na forma

$$ay'' + by' + cy = g_1(x) \text{ e } ay'' + by' + cy = g_2(x)$$

assim, a solução será $y_{p1} + y_{p2}$.

Exemplo: Encontre a solução particular e a solução geral da equação não homogênea

$$y'' + 2y' + y = \sin x + 3\cos(2x). \tag{73}$$

Solução: A equação homogênea associada

$$y'' + 2y' + y = 0$$

e sua respectiva equação característica é $r^2 + 2r + 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = -1$. Assim, sua equação complementar será,

$$y_c(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}.$$

Afim de encontrar a solução particular da equação, devemos separar (73)

$$y'' + 2y' + y = \sin x \tag{74}$$

$$y'' + 2y' + y = 3\cos(2x) \tag{75}$$

Temos duas funções trigonométricas $g_1(x) = \sin x$ e $g_2(x) = 3\cos(2x)$ com argumentos diferentes. Dessa forma devemos considerar a solução particular em duas partes

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

considerando como solução tentativas

$$y_{p1}(x) = A\sin x + B\cos x \text{ e } y_{p2}(x) = C\sin(2x) + D\cos(2x)$$

daí, partindo de $y_{p1}(x)$ para encontrar sua solução particular

$$y'_{p1}(x) = A\cos x - B\sin x$$

$$y''_{p1}(x) = -A\sin x - B\cos$$

substituindo y_{p1}, y'_{p1} e y''_{p1} na equação (74)

$$y'' + 2y' + y = \sin x$$

$$-A\sin x - B\cos x + 2(A\cos x - B\sin x) + A\sin x + B\cos x = \sin x$$

$$2A\cos x - 2B\sin x = \sin x$$

isto é,

$$\begin{cases} 2A = 0 \\ -2B = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 0$ e $B = -\dfrac{1}{2}$

portanto

$$y_{p1}(x) = A\sin x + B\cos x$$

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{2}\cos x$$

analogamente, buscando a solução particular $y_{p2}(x)$, segue que

$$y'_{p2}(x) = 2C\cos(2x) - 2D\sin(2x)$$

$$y''_{p2}(x) = -4C\sin(2x) - 4D\cos(2x)$$

substituindo y_{p2}, y'_{p2} e y''_{p2} na equação (75), temos

$$-4C\sin(2x) - 4D\cos(2x) + 2(2C\cos(2x) - 2D\sin(2x)) + C\sin(2x) + D\cos(2x) = 3cos(2x)$$

$$-4C\sin(2x) - 4D\cos(2x) + 4C\cos(2x) - 4D\sin(2x) + C\sin(2x) + D\cos(2x) = 3cos(2x)$$

agrupando os termos semelhantes, temos

$$(-4C - 4D + C)\sin(2x) + (-4D + 4C + D)\cos(2x) = 3\cos(2x)$$

$$(-3C - 4D)\sin(2x) + (-3D + 4C)\cos(2x) = 3\cos(2x)$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} -3C - 4D = 0 \\ 4C - 3D = 3 \end{cases}$$

cuja solução é $C = \dfrac{12}{25}$ e $D = -\dfrac{9}{25}$.

daí

$$y_{p2}(x) = C\sin(2x) + D\cos(2x)$$

$$y_{p2}(x) = \frac{12}{25}\sin(2x) - \frac{9}{25}\cos(2x)$$

ou seja, nossa solução particular será

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\sin(2x) - \frac{9}{25}\cos(2x),$$

assim, teremos como solução geral

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$
$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\sin(2x) - \frac{9}{25}\cos(2x).$$

Observação: Existem casos em que a solução tentativa sugerida para y_p coincide com a solução da equação homogênea complementar, consequentemente não pode ser uma solução de uma equação não homogênea. Nestes casos, aconselha-se, multiplicar a mesma solução tentativa sugerida por x ou x^2 (caso necessário), de forma que nenhum termo de y_p seja uma solução da equação complementar.

Exemplo: Resolva a equação

$$y'' + y = \sin x. \tag{76}$$

Solução: A equação característica é $r^2 + 1 = 0$, com raízes complexas $r = \pm i$, logo temos que a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Observe que seria conveniente usarmos a solução tentativa

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

porém, observe que ela é uma solução da equação complementar. Sendo assim, tentaremos a solução

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

então, derivando temos

$$y_p'(x) = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\sin x$$
$$y_p''(x) = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x$$

substituindo na equação (76) temos

$$-2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x$$
$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

assim,

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases}$$

logo $A = -\dfrac{1}{2}$ e $B = 0$, então a solução particular será

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos x$$

e a solução geral será,

$$y(x) = c_1\cos x + c_2 senx - \frac{1}{2}x\cos x.$$

4.4.2 Método de Variação de Parâmetros

O método de variação de parâmetros surgiu através dos cálculos de variações de Lagrange[6] o qual complementa o método anterior, pois tem como principal vantagem a sua generalidade, onde pode ser aplicado em qualquer equação e não precisa de nenhuma hipótese detalhada sobre a forma da solução, entretanto exige alguns cálculos de integrais.

O método consiste em substituir as constantes (ou parâmetros) da solução geral da equação homogênea complementar por funções de variáveis independentes, no qual a nova função seja a solução particular da equação diferencial ordinária.

Em outros termos, temos a seguinte equação linear de 2ª ordem,

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \tag{77}$$

colocando a equação na forma padrão, temos

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{78}$$

e como solução da equação homogênea complementar

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

através do teorema 1.3.2, escrevamos como solução,

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes. Assim, substituindo as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$, procuramos uma solução particular da equação não homogênea na forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

derivando a equação usando a regra do produto temos

$$y_p'(x) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'(x) = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2').$$

Afim de reduzir os nossos cálculos, como $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são funções arbitrarias, podemos impor duas condições sobre estas funções, a primeira é que y_p é uma solução

[6] **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813), nascido em Giuseppe Lodovico Lagrangia, foi um matemático italiano, professor da academia militar de Turim. Sua maior contribuição é o cálculo das variações, um novo ramo da matemática, cujo nome se origina de notações usadas por Lagrange a partir de cerca de 1760

da equação diferencial e a outra podemos escolher uma condição que possa simplificar os cálculos. Assim, impondo que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{79}$$

e

$$y_p'(x) = u_1y_1' + u_2y_2'$$

então,

$$y_p''(x) = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$
$$y_p''(x) = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

substituindo y_p, y_p' e y_p'' em (78) e reagrupando os termos, obtemos:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' + P(u_1y_1' + u_2y_2') + Q(u_1y_1 + u_2y_2) = f(x)$$

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Como y_1 e y_2 forma um conjunto fundamental de soluções em (77) da equação homogênea complementar, logo

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$$

e

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$$

assim,

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{80}$$

As equações (79) e (80) formam um sistema linear de equações a fim de determinar as derivadas u_1' e u_2'. Pela regra de Cramer[7], a solução para o sistema

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

pode ser expressa em termos determinantes:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{y_2f(x)}{W} \tag{81}$$

e

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1f(x)}{W} \tag{82}$$

[7] A regra de Cramer é um teorema em álgebra linear, que dá a solução de um sistema de equações lineares em termos de determinante. Essa regra foi assim chamada em homenagem a Gabriel Cramer (1704-1752), um matemático suíço que primeiro publicou esse resultado em 1750. Ver demonstração em [18] p. 167

em que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{83}$$

As funções u_1 e u_2 são encontradas integrando os resultados em (81) e (82) respectivamente e o determinante W é o wronskiano de y_1 e y_2. Através da independência linear de y_1 e y_2, sabemos que $W = (y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para todo x no intervalo.

Portanto, integrando u_1' e u_2' , temos como solução particular

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

logo, a solução geral para a equação será:

$$y(x) = y_c + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2.$$

Exemplo: Resolva a equação

$$y'' + y = \tan x. \tag{84}$$

Solução: A equação homogênea complementar

$$y'' + y = 0$$

tem como equação característica $r^2 + 1 = 0$, com raízes $r = \pm i$. Assim, temos como solução

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

usando o metodo de variação de parâmetros de Lagrange, buscamos uma solução na forma

$$y_p(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

então, derivando:

$$y_p'(x) = (-u_1 \sin x + u_2 \cos x) + (u_1' \cos x + u_2' \sin x)$$

tomando

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \tag{85}$$

temos

$$y_p'(x) = -u_1 \sin x + u_2 \cos x$$

assim,

$$y_p''(x) = (-u_1 \cos x - u_2 \sin x) + (-u_1' \sin x + u_2' \cos x)$$

substituindo y_p'' e y_p em (84) temos

$$-u_1 \cos x - u_2 \sin x - u_1' \sin x + u_2' \cos x + u_1 \cos x + u_2 \sin x = \tan x$$

simplificando

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \tan x. \tag{86}$$

As equações (85) e (86) constituem o seguinte sistema linear de equações, que pode ser resolvido pela regra de Cramer

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \tan x \end{cases}$$

daí, calculando o Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

como a equação diferencial já está na forma padrão, identificamos $f(x) = \tan x$. Assim, por (83) obtemos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \tan x$$

e

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

e então, por (81) e (82),

$$u_1' = -\sin x \cdot \tan x$$

e

$$u_2' = \sin x$$

integrando,

$$u_1 = \sin x - \ln |secx + \tan x|$$

e

$$u_2 = -\cos x$$

portanto, a solução particular será

$$y_p(x) = (\sin x - \ln |secx + \tan x|) \cos x - \cos x \sin x$$

$$y_p(x) = \sin x \cos x - \ln |secx + \tan x| \cos x - \cos x \sin x$$

simplificando,

$$y_p(x) = -\ln |secx + \tan x| \cos x,$$

logo, a solução geral será

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \ln |secx + \tan x| \cos x.$$

5 APLICAÇÕES

5.1 Datação por Radiocarbono

A datação por carbono 14 ou radiocarbono é um dos métodos mais conhecidos e utilizados para datar a idade cronológica de artefatos, fósseis, conchas marítimas e madeira. Este método foi desenvolvido por cientistas na universidade de Chicago, dirigidos pelo químico norte-americano Willard F. Libby em 1949, que observou que a quantidade de ^{14}C (carbono 14) de um tecido orgânico morto diminui constantemente com o passar do tempo, e alem disso notou que através da quantidade de carbono em um objeto poderia revelar pistas de sua idade, sendo útil principalmente na arqueologia.

O método de datação por radiocarbono, baseia-se no decaimento do carbono 14, este carbono é gerado a partir de raios cósmicos que entram em contato com a atmosfera terrestre, onde liberam nêutrons que colidem com moléculas de nitrogênio ^{14}N abundante na atmosfera da Terra, consequentemente produzindo ^{14}C (Carbono 14) que combinado com o oxigênio do ar, forma o gás carbônico (CO_2). Assim a terra é composta por três isótopos de carbono ^{12}C, ^{13}C e ^{14}C, sendo os dois primeiros estáveis e o ultimo radioativo.

A matéria orgânica da Terra é um grande reservatório de carbono, os vegetais absorvem o radiocarbono através de processos fotossintéticos integrando-os à sua composição e em contrapartida os animais consomem os vegetais conforme a cadeia alimentar, desse modo todos aqueles seres vivos que fazem parte dessa cadeia alimentar irão ingerir ^{14}C. Devido essa relação constante, os animais e vegetais mantem uma quantidade de carbono semelhante à atmosfera. Após a morte desses seres vivos, essa relação deixa de ocorrer e a quantidade de ^{14}C presente no organismo passa então a diminuir de forma exponencial, que implica em um decaimento radioativo e com isso a idade do ser morto pode ser calculada.

Entretanto, esse método possui um limite, não é possível medir datas bastante longas nem datas muito curtas, acima de 100 anos e no máximo até 50 mil anos, passados 50 mil anos a radiação emitida terá reduzido a praticamente zero. Alem disso, um objeto com 100 mil anos aproximadamente não poderá ser datado, pois a radiação emitida terá tido uma redução mínima, que não seria possível detectar alguma diferença (Pozzo 2002) isso advem da radioatividade do ^{14}C ser muito pequena e cair pela metade a cada 5.730 anos, o que é denominada "meia-vida" do carbono 14, assim pesquisadores concluíram que o método é eficaz até 10 meias-vidas do ^{14}C.

Segundo [2] (p. 38) observações empíricas mostram que a taxa de desintegração de um elemento radioativo, como o carbono 14, em dado instante é proporcional à quantidade do elemento presente naquele instante. Em termos matemáticos, pode ser expresso como

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{87}$$

onde $y = y(t)$ é a quantidade de carbono 14 no material em função do tempo t e $k > 0$ é a constante de desintegração. Note que trata-se de uma equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem, podendo ser resolvida pelo método do fator integrante, assim reescrevendo a equação,

$$y' + ky = 0 \tag{88}$$

comparando a equação (88) com o formato da equação linear, temos que $P(t) = k$ e $f(t) = 0$. Encontrando o fator integrante, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} \Longrightarrow \mu(t) = e^{\int kdt} \Longrightarrow \mu(t) = e^{kt}$$

multiplicando a equação (88) pelo fator integrante, temos

$$e^{kt}.y' + e^{kt}.ky = 0$$

simplificando,

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}.y) = 0$$

integrando ambos os lados, obtemos

$$e^{kt}.y = C \tag{89}$$

dividindo a equação (89) por e^{kt}, temos,

$$y(t) = C \cdot e^{-kt} \tag{90}$$

onde C é o numero inicial de núcleos radioativos. Logo (90) é a solução geral da equação.

Há casos em que não se sabe o material radioativo para encontrar o valor da constante de desintegração, mediante a isso, é necessário utilizar a meia vida do material. Neste sentido utilizando a meia-vida do ^{14}C que é de 5730 anos, podemos determinar a constante de desintegração do carbono 14.

Tomando $y(0) = y_0$ como a quantidade inicial do material radioativo, no qual a equação (90) pode ser reescrita como,

$$y(t) = y_0.e^{-kt} \tag{91}$$

para $t = 5730$ anos, e $Q(5730) = \frac{1}{2}y_0$, substituindo na equação (91), temos

$$\frac{1}{2}y_0 = y_0e^{-5730k}$$

$$e^{-5730k} = \frac{1}{2}$$

aplicando o logarítmo

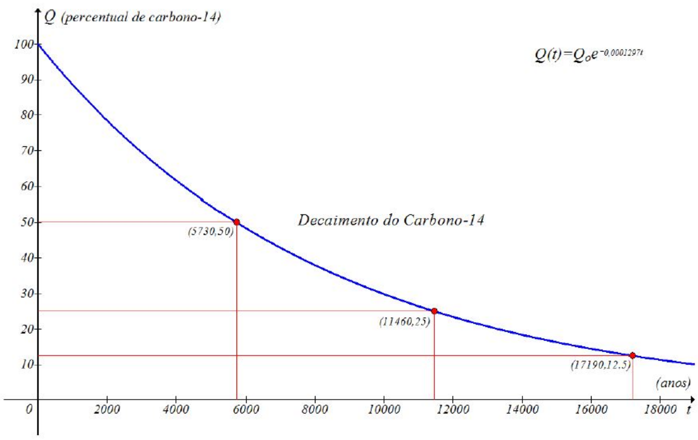
$$\ln e^{-5730k} = \ln(\frac{1}{2}) \Longrightarrow -5730k = \ln(\frac{1}{2}) \Longrightarrow k = -\frac{(\ln \frac{1}{2})}{5730}$$

onde obtemos como resultado $k \approx 1,20968094.10^{-4}$/ano e substituindo na (91) obtemos a função do ^{14}C em relação ao tempo,

$$y(t) = y_0.e^{-0,00012097t}$$

cujo gráfico está sendo expresso na Figura 1

Figura 1 – Decaimento Radioativo



Fonte: [2]

Exemplo:

Em um pedaço de madeira é encontrado $\dfrac{1}{300}$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é 5730 anos, ou seja, que em 5730 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.

Solução:

Tomando $y(t)$ como a quantidade de ^{14}C presente em um instante t, sendo y_0 a quantidade inicial de ^{14}C onde o problema nos informa que $\frac{1}{300}$ é o valor encontrado da quantidade inicial e ainda que k é a proporção de ^{14}C em relação ao ^{12}C.

Organizando os dados,

$$y(t) = y_0 \cdot \frac{1}{300} \Longrightarrow \frac{y_0}{300} \tag{92}$$

sabendo que

$$y(5730) = \frac{y_0}{2} \tag{93}$$

substituindo (92) e (93) na equação diferencial (91), temos

$$y(5730) = y_0 e^{-k5730} \Longrightarrow \frac{y_0}{2} = y_0 \cdot e^{-5730k} \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-5730k}.$$

.

Devemos agora encontrar o valor de k, desse modo, aplicando o logaritmo obtemos,

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-5730k} \Longrightarrow \ln 1 - \ln 2 = -5730k$$

assim segue que,

$$-\ln 2 = -5730k \Longrightarrow k = \frac{-\ln 2}{5730}$$

partindo da equação (91) seguimos substituindo o valor encontrado de k,

$$y(t) = y_0.e^{-kt} \Longrightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{5730}}$$

organizando pela propriedade de potência

$$y(t) = y_0 \cdot (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{5730}}$$

$$y(t) = y_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}} \tag{94}$$

substituindo (92) em (93),

$$\frac{y_0}{300} = y_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}} \Longrightarrow \frac{1}{300} = 2^{\frac{-t}{5730}}$$

aplicando novamente o logaritmo,

$$\ln\frac{1}{300} = \ln 2^{-\dfrac{t}{5730}} \Longrightarrow \ln 1 - \ln 300 = -\frac{t}{5730} \cdot \ln 2 \Longrightarrow \frac{\ln 300}{\ln 2} = \frac{t}{5730}$$

organizando,

$$t = \frac{\ln 300}{\ln 2} \cdot 5730 \Longrightarrow t = 47.151 \,\text{anos}\,.$$

Portanto, conclui-se que a idade do pedaço de madeira é 47.151 anos.

5.2 Lei do Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento é uma lei empírica que trata sobre troca de calor de um corpo com o meio ambiente, ou seja, uma transferência de energia térmica de um corpo de maior temperatura para outro a temperatura mais baixa. De acordo com [18] (p. 23) a lei de resfriamento de Newton afirma que, "a taxa de variação da temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional a diferença entre a temperatura atual do corpo e a temperatura constante do meio ambiente", podendo ser descrita como uma equação diferencial da seguinte forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{95}$$

onde $T = T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente e k é a constante de proporcionalidade que depende do material em que o corpo é constituído. A equação (95) pode ser resolvida através do método de separação de vaiáveis, no qual obtemos

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = kdt$$

integrando o primeiro membro em relação a T e o segundo membro em relação a t, tem-se

$$\int \left(\frac{dT}{T - T_m} \right) = \int kdt$$

$$\ln (T - T_m) = kt + C$$

aplicando a função exponencial a ambos os membros e tomando as constantes embutidas em uma só, obteremos

$$T - T_m = Ce^{kt},$$

a solução geral da equação é

$$T(t) = T_m + Ce^{kt}.$$

Tendo em vista que a temperatura inicial do corpo é $T(0) = T_0$, então substituindo $t = 0$ na solução da equação, podemos obter a constante C que aparece na solução, pois

$$T_0 = T_m + C$$

a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{(T - T_m)} = kdt \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

será dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}.$$

Para a elaboração do exemplo a seguir foram utilizados dados fornecidos pelo grupo Equatorial Energia da cidade de Capanema PA, por meio de uma solicitação oficial ao técnico da empresa. Perante os dados, tivemos acesso à norma técnica da empresa Equatorial, no entanto foram usadas apenas algumas informações. Consideremos as informações específicas referente a rede de média tensão, rede esta utilizada na área urbana da cidade. Dentre as informações: a distância do fio entre os postes de energia denominado de vão, que corresponde à medida de 80 m e o coeficiente de dilatação linear do material utilizado no fio condutor, o qual na referida empresa é o alumínio, ou seja, o coeficiente de dilatação linear do alumínio que equivale a $23 \cdot 10^{-6} {}^{\circ}C^{-1}$

Vale ressaltar que não foram realizadas medições diretas, foram utilizados somente os dados adquiridos na Equatorial e informações através de pesquisas bibliográficas, além disso, as temperaturas que serão citadas foram simuladas, tanto a temperatura do ambiente quanto a do fio condutor para melhor exemplificar a proposta do problema elaborado.

Exemplo:

Em um dia de inverno um condutor da rede elétrica com comprimento de 80 m foi aquecido pelo sol durante o dia até uma temperatura de $75°C$. Durante a noite a temperatura ambiente era de $5°C$, a partir das 21 horas. Às 23 horas mediu-se a temperatura no condutor e esta passou e ser 17 $°C$. Supõe-se que o condutor voltará a ser aquecido pelo sol às 7 horas da manhã seguinte, sendo assim, busca-se calcular a dilatação térmica causada pela variação de temperatura no condutor durante a noite (21 horas - 7 horas). (Utilizar o coeficiente de dilatação linear do alumínio $23 \cdot 10^{-6} °C^{-1}$)

Solução:

Dadas as informações do problema, obtemos condições restritivas de um sistema de equações diferenciais

$$21 \text{ horas} \Longrightarrow T_0 = 75° \tag{96}$$

$$23 \text{ horas} \Longrightarrow T_2 = 17° \tag{97}$$

assim, da Lei do resfriamento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

separando os termos e integrando, obtemos

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = -\int kdt \Longrightarrow \ln|T - T_m| = -kt + C \Longrightarrow |T - T_m| = e^{-kt+c}$$

aplicando os dados da condição (96) do problema,

$$T = 5 + C \cdot e^{-kt} \tag{98}$$

daí,

$$T_0 = 5 + C \cdot e^{-kt}$$

$$75 = 5 + C \cdot e^{-k \cdot 0}$$

$$C = 70$$

usando a condição (97)

$$T_2 = 5 + 70 \cdot e^{-k2} \Longrightarrow 17 = 5 + 70 \cdot e^{-k2} \Longrightarrow 12 = 70 \cdot e^{-k2} \Longrightarrow \frac{12}{70} = e^{-k2} \Longrightarrow 0,17 = e^{-k2}$$

aplicando o logarítmo e suas propriedades em ambos os membros

$$\ln|0,17| = -2k \Longrightarrow -1,77 = -2k \Longrightarrow \frac{-1,77}{-2} = k \Longrightarrow k = 0,885$$

substituindo na equação da temperatura

$$T(t) = 5 + 70 \cdot e^{-0,885t}$$

assim, a temperatura final é dada por

$$T(10) = 5 + 70 \cdot e^{-0,885t}$$

$$T(10) = 5 + 70 \cdot e^{-0,885 \cdot 10}$$

$$T(10) = 5,01003$$

calculando a variação de temperatura, ou seja, a dilatação térmica, temos

$$\Delta T = T_{Final} - T_{Inicial}$$

$$\Delta T = 5,01003 - 75$$

$$\Delta T = -69,9899$$

calculando a variação no comprimento do fio em relação à variação térmica ocorrida sobre o fio

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

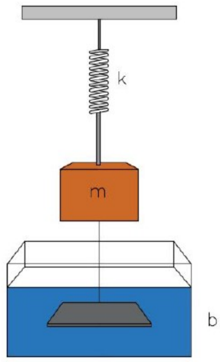
$$\Delta L = 23 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 69,9899$$

$$\Delta L = 128,781416\ m$$

5.3 Movimento Harmônico Amortecido

O movimento harmônico amortecido é um sistema massa-mola, no qual está submetido a forças externas dissipativas que atuam sobre um oscilador harmônico reduzindo a velocidade do movimento gradativamente até cessar, essas forças podem ser a resistência do ar e fluidos viscosos, por exemplo.

Figura 2 – Movimento Harmônico Amortecido



Fonte: [15]

Um sistema como na figura acima é composto por um corpo de massa m preso a uma mola espiral de constante elástica k, imerso em um fluido viscoso. Dessa forma, quando a placa horizontal imersa no líquido mover-se para cima e para baixo ocorrerá o movimento oscilatório e por existir este líquido ocorrerá uma força de atrito nesse sistema. Em vista disso, ao passar do tempo a energia mecânica do sistema massa-mola diminuirá, à medida que a energia é transformada em energia térmica no líquido e na placa, ocasionando um amortecimento e gerando assim um movimento harmônico amortecido [15] p. 12.

Um oscilador harmônico corresponde a um sistema que quando retirado da posição de equilíbrio apresenta uma força elástica F_{el}, proporcional ao deslocamento x de acordo com a Lei de Hooke[1],

$$F_{el} = -kx$$

onde k é uma constante dita elástica. Quando há uma força de amortecimento F_a contrária ao movimento que é proporcional a velocidade v, pode ser expressa como,

$$F_a = -bv$$

[1] **Robert Hooke**(1635-1703) foi um cientista inglês, nascido em Freshwater, autor da lei de Hooke, que é uma lei da física que determina a deformação sofrida por um corpo elástico através de uma força, ou seja, a distensão de um objeto elástico é diretamente proporcional à força aplicada sobre ele.

sendo b a constante de amortecimento que depende das características do corpo e do fluido onde o corpo oscila. Assim, de acordo com a 2ª Lei de Newton, a Força Resultante é a soma das forças, ou seja,

$$F_R = F_a + F_{el}$$

bem como,

$$F_R = -bv - kx$$

sabendo ainda que $F_R = m.a$. Assim,

$$m.a = -bv - kx.$$

Perceba que a aceleração a é definida como a segunda derivada temporal do deslocamento x e a velocidade v é a derivada primeira de x em relação ao tempo, obtemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

esta equação é conhecida como a equação do movimento, reorganizando pode ser escrita como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ou,

$$mx'' + bx' + kx = 0. \tag{99}$$

Dispomos agora de uma EDO homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Supondo que a solução para a equação (99) é $x(t) = e^{rt}$ onde r é uma constante. Desse modo tem-se:

$$\left(mr^2 + br + k\right) e^{rt} = 0 \tag{100}$$

onde $x(t) = e^{rt} \neq 0$. Assim, da equação (100), vem que,

$$r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

dessa forma, encontrando suas raízes através da fórmula de Bhaskara

$$r = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

e considerando $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ e $\gamma = \dfrac{b}{2m}$, para facilitar as manipulações,

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

podemos distinguir três caso possíveis, conforme o sinal de $\gamma^2 - \omega^2$.

Caso I: $\gamma^2 - \omega^2 < 0$. Nesta situação, o sistema é dito **subcrítico**, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno em comparação a constante de elasticidade. Assim, obtemos uma solução complexa com r_1 e r_2,

$$r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$x = e^{-\gamma t}e^{\pm i\sqrt{\omega^2-\gamma^2 t}}$$

assim, través da utilização da formula de Euler reescrevendo $x(t)$, tem-se:

$$x(t) = e^{-\gamma t}e^{\pm i\sqrt{\omega^2-\gamma^2 t}} = e^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t} \pm e^{-\gamma t} i \sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t}$$

utilizando o princípio de superposição,

$$x_1 + x_2 = 2e^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t}$$

$$x_1 - x_2 = 2ie^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t}$$

neste sentido, se desprezarmos os fatores 2 e $2i$, obtemos um par de soluções reais,

$$u(t) = c_1 e^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t}$$

$$v(t) = c_2 e^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t}$$

sendo c_1e c_2 são constantes. Portanto, temos como solução para este caso

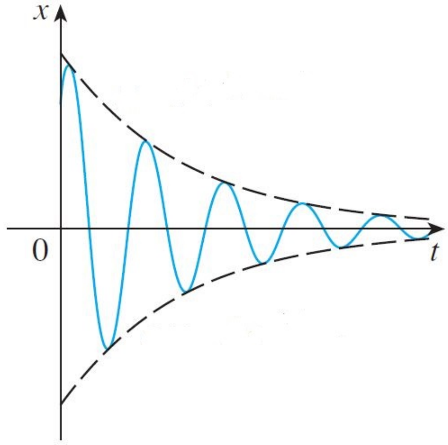
$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1\cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t} + c_2\sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 t})$$

como c_1 e c_2 são dadas pelas condições iniciais $x(0)$ e $x'(0)$, podemos reescrever a solução como

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi)$$

sendo A e ϕ constantes que dependem das condições iniciais.

Figura 3 – Subcrítico



Fonte: [17]

A figura 3 é um gráfico característica do sistema subcrítico.

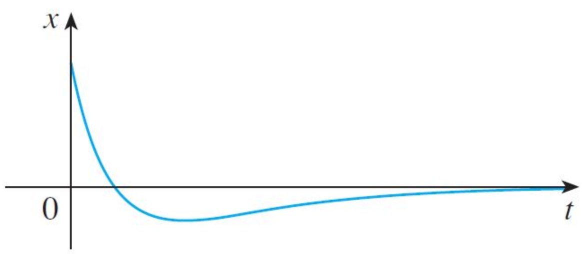
Caso II: $\gamma^2 - \omega^2 = 0$. É o sistema dito **crítico**, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. Neste caso, obtemos apenas uma raiz,

$$r = -\gamma$$

tendo a solução geral:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t).$$

Figura 4 – Crítico



Fonte: [17]

A figura 4 apresenta o gráfico típico do movimento do sistema crítico

Caso III:$\gamma^2 - \omega^2 > 0$. Neste caso, trata-se de um sistema dito **supercrítico**, pelo fato de que o coeficiente de amortecimento b é maior em comparação à constante de elasticidade k. Para isso temos,

$$r_1 = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

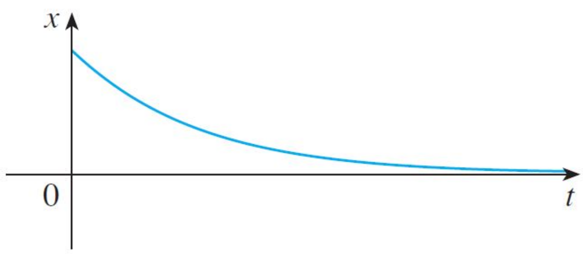
e a solução correspondente é dada por

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

ou

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2 t}} + C_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2 t}}\right).$$

Figura 5 – Supercrítico



Fonte: [17]

A figura 5 mostra graficamente a característica de x como função de t para o sistema supercrítico.

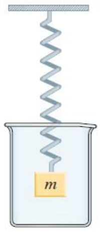
Exemplo

Na figura 6 o bloco possui uma massa de $1,50$ kg e a constante elástica é 800 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b\dfrac{dx}{dt}$, onde $b = 230\, g/s$. O bloco é puxado 12.0 cm para baixo e liberado.

(a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude das oscilações resultantes diminua para um terço do valor inicial.

(b) Quantas oscilações o bloco realizará nesse intervalo de tempo?

Figura 6 – Exemplo



Fonte: [17]

Solução: Sabemos que somente a força de amortecimento é responsável por diminuir a amplitude do movimento. Desse modo, partindo da equação característica

$$r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

e, calculando o Δ

$$\Delta = \left(\frac{0,23}{1,5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{8}{1,5}\right) \Longrightarrow \Delta = -21,3.$$

Temos por definição um amortecimento crítico, que tem como solução geral

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\cos(\omega t + \phi)$$

onde A é a amplitude inicial do movimento e $\gamma = \dfrac{b}{m}$.

(a) Como o termo $A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ é a amplitude do movimento t, temos que

$$A(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{1}{3}A$$

logo,

$$-\frac{\gamma}{2}t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow t = \frac{2\ln 3}{\frac{0,23}{1,5}}$$

$$t = 14,3\,s.$$

Portanto, a amplitude das oscilações resultantes diminuirá para um terço do valor inicial em $14,3\,s$.

(b) Para determinar quantas oscilações o bloco realizará em 14,3 s perceba que

$$\omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\sqrt{\frac{8}{1,5} - \frac{0,23^2}{4 \cdot 1,5^2}} \Longrightarrow \omega = 2,31\,\mathrm{rad/s}$$

assim obtemos a velocidade angular, mediante a esse dado, podemos obter o período que é dado por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{2,31} \Longrightarrow T = 2,72\,\mathrm{s}$$

e o número de oscilações será

$$n = \frac{t}{T} = \frac{14,3}{2,72} \Longrightarrow n = 5,27\,\mathrm{rev}$$

como n deve ser um número inteiro, podemos usar

$$n \cong 5\,\mathrm{rev}\,.$$

Exemplo

Um corpo é pendurado de uma mola, colocando em vibração vertical e imerso em um béquer com o óleo. Suponha que o corpo tenha massa $m = 375$ g e que a mola tenha constante de força $k = 100N/m$ e $b = 0,100N \cdot s/m$.

(a) Quanto tempo leva para a amplitude cair para metade de seu valor inicial?

(b) Quanto tempo leva para a energia mecânica cair para a metade de seu valor inicial?

(c) Demonstre que, de maneira geral a taxa à qual a amplitude diminui em um oscilador harmônico amortecido é metade da taxa a qual a energia mecânica diminui

Solução:

(a) Para encontrarmos a solução desta pergunta é necessário saber de que sistema o enunciado se refere, sendo assim, através dos dados da questão temos

$$\gamma = \frac{c}{m} = \frac{0,1}{0,375} = 0,27N_s/kg\,m$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{100}{0,375} = 266,7\,rad/s$$

calculando Δ

$$\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 = -1066,7$$

como $\Delta < 0$, trata-se de um sistema subcrítico. Sendo assim, pelo caso I, a solução geral é dada pela seguinte expressão

$$x(t) = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi). \tag{101}$$

Conforme o enunciado da questão nos pede somente o tempo em que a amplitude cai à metade de seu valor. Tomamos (101) e desprezando a parte do cosseno, obtemos

$$A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{A}{2} \Longrightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{\gamma}{2}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \frac{\gamma}{2}t = \ln(2)$$

usando $\gamma = \dfrac{b}{m}$

$$t = \frac{2m}{b}\, \ln(2)$$

substituindo os valores do enunciado,

$$t = \frac{(2 \cdot 0,375)}{0,100}\, \ln(2) = 5,2\,\mathrm{s}$$

assim, a amplitude cairá para metade de seu valor inicial após $5,2\,\mathrm{s}$

(b) O cálculo da energia mecânica é dada por

$$E_M = \frac{k\, A^2}{2}$$

assim, sua metade é

$$E'_M = \frac{k\, A^2}{4} = \frac{k\, A^2}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Entretanto, devemos escrever essa nova energia mecânica em função de uma nova amplitude A'

$$E'_M = \frac{k\, A'^2}{2} = \frac{k\, A^2}{4} \Longrightarrow A'^2 = \frac{A^2}{2} \Longrightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

novamente desprezando o termo do cosseno, temos

$$A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Longrightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow -\frac{\gamma}{2}t = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow \frac{\gamma}{2}t = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\gamma}{2}t = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \Longrightarrow \gamma t = \ln(2) \Longrightarrow t = \frac{m\, \ln(2)}{b}$$

substituindo os valores

$$t = \frac{0,375 \cdot \ln(2)}{0,100} = 2,6\,\mathrm{s}\,.$$

portanto, a energia mecânica cairá para a metade de seu valor inicial em $2,6\,\mathrm{s}$.

(c) Seja a derivada de energia mecânica em relação ao tempo

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{1}{2} \cdot k\, A^2\right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot k(2A)\, \frac{dA}{dt}\right)$$

para isorlarmos $\dfrac{dA}{dt}$ devemos calcular uma taxa relativa, para isso, é necessário dividir ambos os lados por E

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

$$\frac{\frac{dE}{dt}}{E} = \frac{\frac{1}{2 \cdot k\,(2A) \cdot \frac{dA}{dt}}}{\frac{k \cdot A^2}{2}} = \frac{\frac{dA}{dt}}{A}$$

assim, isolando $\dfrac{dA}{dt}$, temos

$$\frac{\frac{dE}{dt}}{E} = 2\frac{\frac{dA}{dt}}{A} \Longrightarrow \frac{\frac{dA}{dt}}{A} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{dE}{dt}}{E}\right)$$

com isso, mostramos que taxa à qual a amplitude diminui em um oscilador harmônico amortecido é metade da taxa a qual a energia mecânica diminui, como queríamos demonstrar.

5.4 Modelo de Crescimento de Peixes de Von Bertalanffy

Esse modelo bastante utilizado foi desenvolvido pelo biólogo austríaco Ludwig Von Bertalanffy[2] (1983) com o intuito de analisar a variação de crescimento em peso de peixes, levando em consideração os processos de anabolismo e catabolismo. O Anabolismo é um processo metabólico que sintetiza moléculas complexas por meio de substâncias simples, que é responsável pela construção de tecido orgânico a partir do consumo de energia, por exemplo, a síntese de proteínas no organismo que ocasiona a produção e aumento do tecido muscular. O Catabolismo, em contrapartida, é o processo metabólico que decompõe moléculas complexas, transformando-as em moléculas menores, dessa forma, ocorre uma liberação energética para o organismo, por exemplo, a digestão onde há degradação de matéria orgânica absorvida pelos series vivos que é transformada em energia. O modelo de crescimento de peixe que Von Bertalanffy formulou matematicamente é uma equação diferencial que define a massa do peixe em função do tempo.

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^{\frac{2}{3}} - \beta P \tag{102}$$

$$P(0) = P_0$$

onde $P(t)$ é a massa do peixe em função do tempo, α é a constante de anabolismo, β é a constante de catabolismo, P_0 é a massa inicial do peixe em $t = 0$. Note que se trata de

[2] **Karl Ludwig von Bertalanffy** foi um biólogo austríaco criador da teoria geral dos sistemas, autor do livro de mesmo nome. Fez seus estudos em biologia e interesso-se cedo pelos organismos e pelos problemas do crescimento.

uma equação diferencial de Bernoulli não linear e também de um problema de valor inicial (P.V.I). Sendo assim, vamos reescrever a equação dada para formato de uma equação de Bernoulli linear. Reescrevendo a equação dada temos

$$\frac{dP}{dt} + \beta P = \alpha P^{\frac{2}{3}}. \tag{103}$$

Observe que (103) já está no formato da equação de Bernoulli não linear, para transformar em linear é necessário dividir toda a equação pelo termo não linear da equação

$$\frac{P'}{P^{\frac{2}{3}}} + \frac{\beta P}{P^{\frac{2}{3}}} + \frac{\alpha P^{\frac{2}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}} \tag{104}$$

simplificando (104), temos

$$P'P^{-\frac{2}{3}} + \beta P P^{-\frac{2}{3}} = \alpha \tag{105}$$

usando a mudança de variável, Consideremos

$$v = PP^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow v = P^{\frac{1}{3}} \tag{106}$$

sendo,

$$v' = \frac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}P'$$

daí,

$$3v' = P^{-\frac{2}{3}}P' \tag{107}$$

substituindo (106) e (107) em (105) e dividindo por 3, temos:

$$3v' + \beta v = \alpha$$

$$v' + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}. \tag{108}$$

Obtida a equação linear de Bernoulli, deve-se determinar o valor do fator integrante para equação (108)

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \Longrightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{\beta}{3}dt} \Longrightarrow \mu(t) = e^{\frac{\beta t}{3}}$$

multiplicando o fator integrante em (108), temos

$$e^{\frac{\beta t}{3}}v' + \frac{\beta}{3}e^{\frac{\beta t}{3}}v = \frac{\alpha}{3}e^{\frac{\beta t}{3}} \tag{109}$$

reescrevendo (109),

$$\left(e^{\frac{\beta t}{3}}v\right)' = \frac{\alpha}{3}e^{\frac{\beta t}{3}}$$

integrando ambos os lados, obtemos

$$\int (e^{\frac{\beta t}{3}}v)'dt = \int \frac{\alpha}{3}e^{\frac{\beta t}{3}}$$

resolvendo as integrais,

$$e^{\frac{\beta t}{3}} v = \frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta t}{3}} + C \tag{110}$$

dividindo (110) por $e^{\frac{\beta t}{3}}$

$$v = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}$$

voltando para variável P, obtemos

$$P^{\frac{1}{3}} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\dfrac{\beta t}{3}}$$

que é a solução implícita da equação dada. Com o intuito de simplificar a função encontrada, tem-se

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\dfrac{\beta t}{3}} \right)^3 \tag{111}$$

logo, (111) é a solução explícita e simplificando-a temos a solução geral da equação (102) é dada por

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \cdot \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta t}{3}} \right)^3 . \tag{112}$$

Devido ao problema de valor inicial (102) devemos definir o valor da constante C, quando tomando $t = 0$ e o valor $P(0) = 0$ é desprezível, considerando $P_0 \approx 0$, temos

$$0 = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^0$$

$$C = -\frac{\alpha}{\beta}$$

substituindo o valor de C em (112), obtemos

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \cdot \left(1 + \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{\beta}{\alpha} e^{-\dfrac{\beta t}{3}} \right)^3$$

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \cdot \left(1 - e^{-\dfrac{\beta t}{3}} \right)^3 , \tag{113}$$

Aplicando o limite tendendo para o infinito na $P(t)$, obtemos

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \cdot \left(1 - e^{-\dfrac{\beta t}{3}} \right)^3 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \Longrightarrow P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 . \tag{114}$$

Portanto o peso máximo P_∞ é dado em função dos parâmetros de α e β. Assim, através da substituição de (114) em (113), obtemos

$$P(t) = P_\infty \left(1 - e^{-\dfrac{\beta t}{3}}\right)^3$$

daí, vale a seguinte relação,

$$P(t) = P_\infty \left(1 - e^{-kt}\right)^3$$

onde $P_\infty = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3$ é massa máxima atingida e $k = \dfrac{\beta}{3}$ é a constante. Portanto, a solução encontrada da equação diferencial Von Bertalanffy nos dará a massa do peixe em função do tempo.

Como sugestão e incentivo para o leitor que esteja interessado em aplicar este modelo de crescimento de peixe em casos reais é necessário obter uma série de dados para estabelecer parâmetros interpretáveis biologicamente válidos, que possam ser ajustados ao modelo, de modo que possamos descrever todo o período de crescimento da vida animal, variando conforme a espécie de peixe escolhida para a pesquisa.

Dentre esses dados, deve-se englobar o comprimento e peso médio em função do tempo e o consumo de ração, onde é indispensável avaliações continuas por meses para obtenção de um parâmetro adequado. Além disso, é essencial obter os valores de catabolismo e anabolismo, em relação ao catabolismo com o utilização do método dos mínimos quadrados podemos encontrar um ajuste exponencial que nos dará o valor de uma constante, no qual o triplo desta constante será a taxa de catabolismo, quanto ao anabolismo é necessário conhecer o peso máximo e a taxa de catabolismo onde utiliza-se uma relação envolvendo esses dados, em que obtemos assim a taxa de anabolismo. Portanto com os dados em mãos, aplica-se no modelo de Von Bertalanffy.

Contudo, a determinação da idade e crescimento é um dos aspectos biológicos mais importantes, por ser um quesito indispensável aos cálculos de mortalidade e avaliação de recursos pesqueiros (Cousseau Cotrina, 1975). Estudos de crescimento de peixes podem fornecer informações básicas sobre a estratégia de vida, estrutura de populações e mudanças no crescimento destas, devido a perturbações ambientais ou pela pesca, o que aumenta a compreensão da biologia dos peixes e forma a base dos modelos de dinâmica de populações (Radtke Hourigan, 1990).([9] p. 22).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo apresentar os estudos das equações diferenciais com enfoque nas equações diferenciais ordinárias, mais precisamente nas suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Foi mostrado o quão importante é seu estudo para o cotidiano e para a resolução de fenômenos reais bem como sua aplicabilidade é variada, sendo abordado neste apenas uma parte de sua flexibilidade de estudo.

Além disso, é notório que este trabalho será útil para estudos teóricos sobre Cálculo Diferencial e Integral em cursos de graduação, visto que aborda boa parte da ementa da referida disciplina, sendo assim, podemos constatar que o desenvolvimento do mesmo pode ser um satisfatório recurso à ser ser utilizado facilmente como nota de aula.

Como embasamento para melhor entendimento do assunto, fez-se o uso de definições, teoremas, exemplos e aplicações de primeira e segunda ordem. Em cada capitulo procurou-se discernir sobre os conceitos básicos e suas ramificações como classificação, tipo, ordem, linearidade, bem como os principais métodos de resolução, que foram utilizados nas modelagens apresentadas no capítulo das aplicações.

Seguindo essa metodologia foram apresentadas algumas das varias aplicações presentes nos estudos das Edo's relacionados a física, química e biologia: Datação por Radiocarbono, Lei de Resfriamento de Newton, Movimento Harmônico Amortecido e o Crescimento de Peixe de Von Bertalanffy. No qual, foram apresentados exemplos que refletem questões da realidade e concluímos que podemos representar estas questões através das equações diferenciais ordinárias.

Em especial, para a elaboração do exemplo sobre a Lei do Resfriamento de Newton foi necessário realizar uma pesquisa de campo para a obtenção de dados reais para aplicar no cálculo de Edo's. No Movimento Harmônico Amortecido procurou-se mostrar como o movimento amortecido se comporta de acordo com determinadas variáveis e mostrar quais as possíveis questões que podem ser solucionadas através de seu cálculo.

Dada a importância das equações diferenciais, vimos o quanto a matemática está em nosso cotidiano e que vem desmistificando a mesma como apenas um objeto de exercício de raciocínio mas como algo que pode ir muito além do que se espera, desde cálculos simples aos mais complexos e talvez até desconhecidos.

Neste sentido, espera-se que este trabalho contribua significativamente em estudos posteriores daqueles interessados em aprofundar-se no tema abordado. Desse modo, é notório que as equações diferenciais não é um assunto isolado, ou seja, engloba vários assuntos da matemática em sua área, podendo ir mais afundo em suas discussões sobre o que se refere às aplicações, no qual não se limita apenas às mencionadas neste trabalho. Portanto, acredita-se que este material é de grande valia para o aprendizado e pode auxiliar no aprimoramento dos conhecimentos sobre o tema em questão.

REFERÊNCIAS

[1] ABUNAHMAN, S. A. **Equações Diferenciais**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora Didática e Científica, 1989.

[2] ALVES, W. B. **Sobre a datação por decaimento radioativo**. 2019. Artigo eletrônico. Disponível em: https://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTI-ONLINE/article/view/122. Acesso em: 22 nov. 2019.

[3] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações.** São Paulo: Editora Harbra, 1988.

[4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, C. R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[5] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[6] BRONSON, R.; COSTA, G. **Equações Diferenciais - Coleção Schaum**. 3ª ed. Porto Alegre Bookmam, 2008.

[7] ÇENGEL, Y. A.; PALM III, W. J. **Equações Diferenciais**. Tradução: Marco Elisio Marques. São Paulo: AMGH Editora, 2014.

[8] HALLIDAY, D. R.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 2**. 4ª ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1996.

[9] NASCMENTO, R. M. **Diferenciação Numérica de Dados Experimentais Aplicados. em Estudos de Crescimento de Peixes**. 1989. Dissertação (Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2015. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7252 Acesso em: 24 dez. 2019.

[10] NOTA DE AULA. **Existência de soluçãp para EDO de primeira ordem**. Doherty Andrade. Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática.

[11] MARINHO, E. R. M. **Modelagem matemática**: aplicações do cálculo diferencial e integral à resolução de problemas relacionados às ciências da vida e da natureza. 2019. Artigo eletrônico. Disponível em: https://www.unifieo.br/files/0728matem.pdf. Acesso em: 29 nov. 2019.

[12] PEREIRA, I. M. N.; BARBOZA, C. M. **Teoria e prática na lei de resfriamento de newton**. 2019. Artigo eletrônico. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/. Acesso em: 29 nov. 2019.

[13] PEZZO, MARIANA. **Datação por carbono - 14**. Artigo Eletrônico. Disponível em: http://www.univerciencia.ufscar.br/n_2_a1/carbono.pdf. Acesso em: 29 nov. 2019.

[14] RESPONDE AÍ. **Movimento Harmônico Amortecido**. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/conteudo/fisica/mhs-e-mha/movimento-harmonico-amortecido/469#resumo. Acesso em: 06 jan. 2020.

[15] SANTOS, E. R. **Estudo dos Osciladores Harmônicos em Sistemas Acoplados**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Centro de Ciências exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2017.

[16] SOUSA, J. E. **Teorema de Picard e o Modelo de Von Bertalanffy**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Bragança PA, 2018.

[17] STEWART, J. **Cálculo, Vol 2**. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[18] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.