



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ROBSON AYRTON DA SILVA MATOS**

**FÍSICA, EXPERIMENTOS E MODELAGEM: um relato de experiência  
acadêmica.**

**CASTANHAL/PA  
2023**

**ROBSON AYRTON DA SILVA MATOS**

**FÍSICA, EXPERIMENTOS E MODELAGEM: um relato de experiência acadêmica.**

*Portfólio Acadêmico, produzido como Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à comissão examinadora da Faculdade de Matemática do Campus de Castanhal da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial de avaliação para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes.*

CASTANHAL/PA  
2023

**ROBSON AYRTON DA SILVA MATOS**

FÍSICA, EXPERIMENTOS E MODELAGEM: um relato de experiência acadêmica.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Defendido e aprovado em: 03/03/2023

**Banca Examinadora:**



Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes - **Orientador**  
UFPA – Campus de Castanhal



Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva - **Interno**  
UFPA – Campus de Castanhal



Profa. Dra. Roberta Modesto Braga - **Interno**  
UFPA – Campus de Castanhal

## AGRADECIMENTOS

Primeiro antes de tudo queria agradecer a minha mãe e minha namorada por todo o apoio e força, mesmo quando o sonho de ser professor de matemática era algo distante, não há palavras para expressar tamanho amor e respeito.

Ao professor Renato Germano, pela disponibilidade, esforço e dedicação, por repartir seus conhecimentos, vivências e experiências, e por compartilhar todos os ensinamentos necessários para me tornar um excelente professor.

Aos colegas de turma, que trilharam este caminho junto comigo, obrigada pelo convívio e pelas histórias.

A todos que acreditam que a educação faz o futuro parecer um lugar cheio de esperança e ao mesmo tempo um lugar de transformação.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”*

*Isaac Newton*

## RESUMO

Este trabalho é apresentado na estrutura de um portfólio acadêmico e tem como ênfase trabalho que mostram a minha evolução como acadêmico e experiência que tive com a modelagem matemática. Neste trabalho são apresentadas três produções científicas desenvolvidas durante minha trajetória acadêmica, entre os anos de 2018 a 2023, no curso de Licenciatura em Matemática, amparando-se na Resolução nº 5.044, de 17 de maio de 2018, que aprova a proposta do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática, do *Campus* Universitário de Castanhal, quanto a formulação do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) neste formato. O objetivo desse portfólio é integrar a modelagem matemática junto a experimentos de baixo custo e simulações envolvendo linguagem de programação para o ensino. A primeira produção mostra o início das experiências acadêmicas utilizando a física e a matemática, a evolução da escrita acadêmica e a gama de conhecimento adquirida. Já a segunda produção surge a partir de reflexões sobre a primeira produção, é um trabalho mais completo, com aplicação, uma versão aprimorada do primeiro. Por fim o último elemento desse portfólio é uma chance de poder mostrar que toda a minha caminhada como acadêmico foi valiosa, os primeiros trabalhos mostram o real amadurecimento como acadêmico, e isso aparece no último trabalho, um pouco de matemática, física e modelagem matemática.

**Palavras-chave:** Pesquisa. Produção Científica. Modelagem Matemática. Educação Matemática.

## **ABSTRACT**

This work is presented in the framework of an academic portfolio and emphasizes work that shows my evolution as an academic and the experiences I had with mathematical modeling. In this work, three scientific productions developed during my academic career, between the years 2018 to 2023, in the Degree in Mathematics course are presented, based on Resolution nº 5.044, of May 17, 2018, which approves the proposal of the Pedagogical Project of the Mathematics Degree Course (PPC), at the University Campus of Castanhal, regarding the formulation of the Course Completion Work (TCC) in this format. The objective of this portfolio is to integrate mathematical modeling with low-cost experiments and simulations involving programming language for teaching. The first production shows the beginning of academic experiences using physics and mathematics, the evolution of academic writing and the range of knowledge acquired. The second production arises from reflections on the first production, it is a more complete work, with application, an improved version of the first. Finally, the last element of this portfolio is a chance to show that all my journey as an academic has been valuable, the first works show the real maturity as an academic, and this appears in the last work, a little bit of mathematics, physics and mathematical modeling.

**Keywords:** Search. Scientific production. Math. Math education

## SUMÁRIO

<b><u>INTRODUÇÃO .....</u></b>	<b><u>9</u></b>
<b><u>I. METODOLOGIA CIENTÍFICA .....</u></b>	<b><u>10</u></b>
<b><u>II. UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES.....</u></b>	<b><u>12</u></b>
<b><u>III. UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE .....</u></b>	<b><u>13</u></b>
<b><u>IV. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON.....</u></b>	<b><u>14</u></b>
<b><u>CONCLUSÃO.....</u></b>	<b><u>15</u></b>
<b><u>REFERÊNCIAS .....</u></b>	<b><u>16</u></b>
<b><u>APÊNDICES.....</u></b>	<b><u>17</u></b>

## INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática no Ensino Superior atualmente é um tema de muitas pesquisas, além de que é utilizada amplamente como estratégias de ensino-aprendizagem. Tal modo que esse interesse possibilita uma estratégia de contribuir com a autonomia e independência do discente transformando sua posição à frente da Matemática.

A experiência com Modelagem pode propiciar aos professores o contato com novos aspectos da Matemática. Mas, principalmente, num ambiente reflexivo, os professores têm a oportunidade de questionar a própria natureza da Matemática.

De acordo com Barbosa (2001) “entendo Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Estas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia-dia; seus atributos e dados quantitativos existem em determinadas circunstâncias”.

Deste modo, proporcionar uma boa compreensão sobre a Modelagem Matemática e sua prática didática, é bem como promover uma discussão entre autores e a prática docente no Ensino Superior atendendo os anseios dos profissionais da educação no desenvolvimento de um ensino que possa permitir uma aprendizagem mais eficaz e significativa. A contribuição se dá na oportunidade em utilizar algumas habilidades e estratégias na investigação de problemas reais, de interesse do licenciando em matemática.

Segundo AMORIM (2016) *apud* Bassanezi (2009, p. 24) a modelagem consiste, essencialmente, na “arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” e que ela “se torna eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando representações de um sistema ou parte dele”.

## I. METODOLOGIA CIENTÍFICA;

Diante do cenário em que entendo a importância da produção científica no âmbito acadêmico, este de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é apresentado na modalidade publicações, e engloba a apresentação de produções acadêmicas desenvolvidas entre 2018 e 2023, como parte dos meus estudos realizados no curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade de Matemática, *Campus* Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará (UFPA).

O *portfólio* é visto como uma forma efetiva de autoavaliação, já que a partir dele “os alunos desenvolvem uma melhor compreensão do seu estilo particular de aprendizagem quando se auto avaliam e refletem sobre as evidências que selecionaram para inclusão em seu portfólio” (BRYANT; TIMMINS, 2002, p. 28).

Hernández (1998) define portfólio como sendo um "continente de diferentes classes de documentos (notas pessoais, experiências de aula, trabalhos pontuais, controle de aprendizagem, conexões com outros temas fora da escola, representações visuais, etc) que proporciona evidências do conhecimento que foi construído, das estratégias utilizadas e da disposição de quem o elabora em continuar aprendendo" (p. 100). Vilas Boas (1998), referindo-se ao processo de avaliação formativa, sugere o uso do portfólio ou pasta avaliativa como um instrumento eficaz para realização de tal avaliação. Visto que reúne as produções dos alunos e professores, para que, eles próprios e outras pessoas conheçam seus esforços, seus progressos e suas necessidades em uma determinada área.

Sá-Chaves (2000) referem-se ao portfólio reflexivo como sendo instrumentos de diálogo entre educador e educando, que não são produzidos só no término do período para fins avaliativos. São continuamente (re)elaborados na ação e partilhados de forma a recolherem, em tempo útil, outros modos de ver e de interpretar, que facilitem ao aluno uma ampliação e diversificação do seu olhar, levando-o à tomada de decisões, ao reconhecimento da necessidade de fazer opções, de julgar, de definir critérios, além de permitir as dúvidas e conflitos para deles poder emergir mais consciente, mais informado, mais seguro de si e mais tolerante quanto às hipóteses dos outros.

Já a definição de Tiernery (1991) *apud* Rodrigues (2009), o *portfólio*, porém, vai muito além da avaliação, podendo assumir outras funcionalidades “na medida em que pode assumir uma dimensão estruturante e organizadora, como assume uma função reveladora e estimulante nos processos de desenvolvimento pessoal e profissional” (p. 6).

Assim, este portfólio é composto por 3 (três) artigos científicos que considero relevantes na/para minha Formação como discente/docente questionador, bem como, na Constituição Profissional da Educação.

A primeira produção (UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES), surge de uma real afinidade com a física e pela oportunidade de estar em um grupo de estudos sendo voluntário de um projeto do professor Renato Germano, na qual depois de algum tempo estudando o referencial teórico passado pelo professor, ele teve a ideia de fazermos trabalhos sobre o movimento browniano.

Já a segunda produção (UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE) surge a partir do desenvolvimento do primeiro trabalho, agora com um maior aparato teórico e com o estudo de programação para a confecção de gráficos e histogramas.

A terceira e última produção (MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON), aparece de uma oportunidade como bolsista do LEMM (Laboratório Experimental de Modelagem Matemática), projeto que tinha como responsável a Professora Roberta Modesto Braga, tive muitas experiências boas sendo bolsista do LEMM, pois conseguir aumentar a minha gama de conhecimento sobre modelagem matemática e também desenvolver esse último trabalho em formato de pôster utilizando conhecimentos de programação aprendido nos trabalhos anteriores.

Neste contexto, este trabalho entra em consonância com a Resolução nº 5.044, de 17 de maio de 2018, que aprova a proposta do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática, do *Campus* Universitário de Castanhal, quanto a formulação do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) em que diz que este pode ser produzido “nas modalidades monografia, publicação ou desenvolvimento de produto sob a orientação de um professor da Faculdade” (UFPA, 2018).

## II. UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES;

O primeiro elemento que compõe o portfólio é intitulado “UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES” e neste trabalho foi realizado um estudo analítico e computacional da equação de Langevin, a qual descreve o movimento browniano ou também conhecido como passeio aleatório.

O Movimento browniano é um fenômeno pelo qual partículas pequenas suspensas em um líquido tendem a se mover em caminhos pseudoaleatórios ou estocásticos através do líquido, mesmo se o líquido em questão estiver calmo. É o resultado da assimetria nos impactos cinéticos das moléculas que compõem o líquido.

Este trabalho tem como origem os primeiros contatos com a física estocástica, que foi um grupo de estudos criado pelo professor Renato Germano durante o período de pandemia. Após estudarmos o referencial teórico ele orientou a todos a fazerem artigos, e como ele sabia a afinidade que eu tinha com a física e por estarmos estudando física estocástica, ele sugeriu que eu estudasse o movimento browniano.

Foi uma experiência muito boa, pois tive a oportunidade de conhecer um dos trabalhos de Einstein que o deixou muito famoso, e ao mesmo tempo tive a chance de fazer mais um trabalho que envolvesse movimento browniano.

O trabalho foi de natureza quantitativa e exploratória, pois foi feita uma varredura nos valores numéricos dos parâmetros da solução da equação de Langevin e posterior comparação com simulações computacionais do movimento aleatório em uma dimensão.

Vale ressaltar que este trabalho foi um estudo inicial da chamada dinâmica estocástica de sistemas irreversíveis e por isso as técnicas de soluções analíticas e computacionais ainda estavam em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa.

### **III. UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE;**

O segundo elemento que compõe o portfólio é intitulado “UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE”, aceito e aprovado como comunicação oral, no II simpósio nacional, sobre ensino de pesquisa de matemática no contexto da educação, ciência e tecnologia, esse trabalho é o desenvolvimento do primeiro trabalho sobre movimento browniano, o resultado de muito esforço e acúmulo de conhecimentos sobre a física estocástica.

Neste trabalho foi apresentado uma proposta experimental de baixo custo, e simples, para simularmos o passeio aleatório e consequentemente descrevê-lo através da equação de Langevin. Os resultados apresentados foram satisfatórios com as teorias vigentes.

Para simular o movimento browniano a fim de encontrarmos os parâmetros experimentais que possam ser comparados com os resultados teóricos, utilizamos um microfone para captar somente o ruído de fundo. Os materiais utilizados foram: um microfone; uma caixa de “isopor”, um secador de cabelo e um termômetro digital. O procedimento experimental consistiu nos seguintes passos: primeiramente colocou-se dentro do isopor gelo, o microfone e o sensor do termômetro. Depois do equilíbrio térmico foi realizada a gravação e o valor da temperatura de equilíbrio. Para a temperatura mais elevada, utilizou-se o secador de cabelo para esquentar o interior do isopor, colocando o microfone e o sensor do termômetro em seu interior. Depois do equilíbrio, fez-se a gravação do áudio e o valor da temperatura. Com este procedimento, esperou-se detectar as diferenças nos ruídos captados pelo microfone nas duas temperaturas.

E como resultado do experimento com a temperatura a  $9,1^{\circ}\text{C}$  e  $37,2^{\circ}\text{C}$  foi notório a diferença das intensidades dos ruídos para as duas temperaturas e que este comportamento é do tipo movimento browniano. Foram feitos gráficos do tipo gaussianas já que os ruídos se distribuíam em no formato de gaussianas e por perceber que esse formato se ajustava aos dois casos.

#### **IV. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON;**

O último elemento deste portfólio tem como título “MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON” aceito e apresentado como pôster no XIII EPAEM, este trabalho que foi fruto de estudos sobre modelagem matemática e programação, especificadamente a linguagem de programação Python.

O presente trabalho teve o objetivo de mostrar como as tecnologias estão cada vez mais próximas do ensino e como essas ferramentas podem ajudar tanto na aprendizagem, quanto no dia a dia. Desse modo, entendemos que ao abordar problemas reais e resolvê-lo usando programação temos um potencial para discussão de conteúdos matemáticos na Educação Básica. Este trabalho fez uso de um problema físico com objetivo de apresentar uma sequência didático-pedagógica propositiva de Modelagem Matemática para ensinar funções do segundo grau, usando linguagem de programação Python.

O desenvolvimento do trabalho foi basicamente ensinar funções do segundo grau e um pouco de programação, e assim depois desse aparato teórico partir para a produção do algoritmo de cálculo de raízes e das coordenadas dos vértices  $(Xv, Yv)$ , utilizando a programação. Após tudo isso é dado um problema de física sobre lançamento de um projétil que é descrita por uma função do segundo grau do tipo  $S = -9t^2 + 120t$ .

É claro que o algoritmo produzido é a própria fórmula de encontrar raízes e as coordenadas do vértice das funções de segundo grau, mas mostradas em Python, com suas diferenças na escrita de programação, e mostrando a aplicação de um problema usando computação.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se que a tecnologia, além de fazer parte do cotidiano das pessoas, está também fazendo parte das salas de aula, seja com o uso do Datashow, da TV, do notebook, do celular, entre outros. O uso de um recurso didático nas aulas leva os alunos a aprenderem o conteúdo de uma forma dinâmica e pensativa e não de uma forma já pronta e acabada, pois o recurso dispõe da capacidade de pensar do aluno, ou seja, é o momento em que o estudante coloca a mente para funcionar. O uso da tecnologia na sala de aula faz com que o aluno se sinta motivado a aprender de maneira dinâmica e que traga resultados positivos.

É notório que o ensino se torna mais significativo e concreto quando o profissional usa diferentes estratégias e ao mesmo tempo faz vínculos com problemas cotidianos. As tecnologias são aliadas do ensino e a modelagem matemática também, fazer experimento, trabalhos, entre outros modos de se ensinar matemática, onde o aluno é colocado para refletir e questionar a própria natureza matemática podem ser poderosas ferramentas para o ensino/aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

AMORIM, Wagner de Souza. A Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática na Ufpe. TCC, p. 9-48, 2016.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Temas e modelos*. 1ª ed. Campinas: Edição do autor UFABC, 2012.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3.ed. - São Paulo: Contexto 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

BRAGA, R.; MATOS, R. Estimativa de  $\pi$  pelo método de Monte Carlo, modelagem matemática utilizando linguagem de programação Python. *SEPEDUC*, 2022

BRYANT, S. L.; TIMMINS, A. A. **Portfolio assessment: instructional guide: Using Portfolio assessment to enhance student learning**, second edition. Hongkong Institute of Education. 2002.

EINSTEIN, A. *Annalen der Physik*. 322(8): 549-560 (1905).

Hernández, F. (1998). *Transgressão e mudança na educação: Os projetos de trabalho*. Porto Alegre: Artmed.

LANGEVIN, P. C. R. *Acad. Sci. Paris*. 146: 530-533 (1908).

PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. *Statistical Mechanics*, Elsevier, London, 2011.

PYTHON BRASIL. Python, 2021. Reúne grupos de usuários em todo o Brasil interessados em difundir e divulgar a linguagem de programação. Disponível em [. Acessado em 20 de outubro de 2021.](#)

PYTHON BRASIL. Ribeirão, 2019. Feito pela comunidade para a comunidade, tem o objetivo de difundir a linguagem, promover a troca de experiências e manter a comunidade crescendo igualmente em público e impacto social. Disponível em [. Acessado em 20 de outubro de 2021.](#)

Sá-Chaves, I. (2000). *Portfólios Reflexivos: estratégia de formação e de supervisão*. Aveiro: Universidade.

SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*, Edusp, São Paulo, 1997.

SMOLUCHOWSKI, M. M. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 202 (1906).

Tierney, R., J. (1991). *Portfolio Assessment in the Reading-Writing Classroom*. Norwood (MA):Christopher-Gordon.

Vilas Boas, B. M. F. (1998). O projeto Político-Pedagógico e a Avaliação. Em I. Veiga & L. Resende (orgs.) *Escola: Espaço do Projeto Político-Pedagógico*. Campinas SP: Papyrus.

## **APÊNDICES**

# UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES

Robson Ayrton<sup>1</sup> e Renato Germano<sup>2</sup>

O movimento aleatório de pequenas partículas submersas em meio aquoso, é um fenômeno conhecido como movimento browniano. Este comportamento foi observado primeiramente pelo botânico inglês Robert Brown, em 1828. Ele observou que pequenas partículas colocadas em meio líquido, não muito viscoso, adquiriam movimentos erráticos e incessante. Muitas tentativas foram feitas na tentativa de descobrir a natureza desse fenômeno. Experimentos mostraram que a intensidade do movimento estava diretamente ligada ao aumento da temperatura, assim como a diminuição da viscosidade do líquido e do tamanho das partículas. A explicação no movimento browniano foi elucidada por Albert Einstein em 1905, na sua tese de doutorado. Este é considerado um dos trabalhos intelectuais mais notáveis de todos os tempos, pois sua solução do fenômeno trouxe grandes avanços científicos nos estudos da estrutura da matéria. Uma das abordagens analíticas no estudo do movimento browniano é através da chamada Dinâmica Estocástica, mais especificamente da Equação de Langevin, a qual é uma equação diferencial estocástica para uma partícula na ausência de um campo de força conservativo.

Neste trabalho realizamos um estudo analítico e computacional da equação de Langevin, a qual descreve o movimento browniano.

A natureza deste trabalho é quantitativa e exploratória, pois foi feita uma varredura nos valores numéricos dos parâmetros da solução da equação de Langevin e posterior comparação com simulações computacionais do movimento aleatório em uma dimensão.

Os resultados preliminares se mostraram satisfatórios, pois foi possível comparar dados de simulação computacional (dinâmica estocástica) com resultados analíticos (equações diferenciais). Vale ressaltar que este trabalho é um estudo inicial da chamada dinâmica estocástica de sistemas irreversíveis e por isso as técnicas de soluções analíticas e computacionais ainda estão em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa. Porém, em trabalhos futuros pretende-se modificar o potencial de interação da equação de Langevin para sistemas mais complexos, tais como o oscilador harmônico simples e realizar comparações com dados experimentais de sistemas físicos simples.

**PALAVRAS-CHAVE:** Movimento Browniano. Equação de Langevin. Dinâmica Estocástica. Movimento Aleatório.

<sup>1</sup> Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal; [robsonayrton2015@gmail.com](mailto:robsonayrton2015@gmail.com).

<sup>2</sup> Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal; [rgermano@ufpa.br](mailto:rgermano@ufpa.br).

# IV SIMPÓSIO DE ENSINO PESQUISA E EXTENSÃO DA UFPA CASTANHAL

CIÊNCIA E INOVAÇÕES TECNOLÓGICAS  
PARA O DESENVOLVIMENTO DA AMAZÔNIA



## CERTIFICADO

Certificamos que o trabalho intitulado **UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN E SUAS APLICAÇÕES** foi apresentado, em forma de comunicação, durante o **IV SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO** realizado, *online*, no período de 25 a 27 de agosto de 2021 pelo *campus* de Castanhal da Universidade Federal do Pará – UFPA.

AUTORES: ROBSON AYRTON DA SILVA MATOS; RENATO GERMANO REIS NUNES.



*Francisco Valdinei dos Santos Anjos*

FRANCISCO VALDINEI SANTOS DOS ANJOS  
COORDENADOR ACADÊMICO UFPA- CASTANHAL



NAccess



GEPLISES



UFPA

ISSN: 2595 7856

# UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE

Robson Ayrton  
Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará – *Campus Castanhal*  
E-mail: [robsonayrton2015@gmail.com](mailto:robsonayrton2015@gmail.com)

Renato Germano  
Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará – *Campus Castanhal*  
E-mail: [rgermano@ufpa.br](mailto:rgermano@ufpa.br)

## RESUMO

Estudo de sistema que apresentam fenômenos fora do equilíbrio vem crescendo nas últimas décadas. Uma das abordagens utilizada nesses estudos é a chamada Dinâmica Estocástica, mais especificamente a equação da Langevin. Esta última possui aplicação nas mais diversas áreas desde sistemas biológicos, mercado financeiro e comportamento coletivo de pedestres. O movimento browniano foi explicado pelas teorias de Einstein (1905) e Smoluchowski (1906), independentemente, representando importantes avanços nas ideias atomistas da teoria cinética dos gases. No século que se seguiu, os estudos sobre movimento browniano formaram um forte elemento para estabelecer uma estrutura atômica da matéria. Neste trabalho apresentamos uma proposta experimental de baixo custo, e simples, para simularmos o passeio aleatório e conseqüentemente descrevê-lo através da equação de Langevin. Os resultados apresentados foram satisfatório com as teorias vigentes.

**Palavras-chave:** Equação de Langevin. Movimento Browniano. Intensidade Sonora. Aparato Experimental.

## 1. Introdução

O movimento aleatório de pequenas partículas submersas em meio aquoso é um fenômeno conhecido como *movimento browniano*, este foi primeiramente observado pelo botânico inglês Robert Brown em 1828. Ele observou que pequenas partículas colocadas em meio líquido não muito viscoso adquiriam movimentos erráticos e incessantes. Muitas tentativas foram feitas para tentar descobrir a natureza desse fenômeno. Experimentos mostraram que a intensidade do movimento estava diretamente ligada ao aumento da temperatura, assim como, a diminuição da viscosidade do líquido e do tamanho das partículas. Em 1860 o ponto de vista da existência de moléculas e que o movimento browniano estava ligado às colisões dessas moléculas com as partículas em meio fluido era bastante visível, mas até então não se tinha uma explicação concreta de que realmente fosse à existência de moléculas. A explicação finalmente foi elucidada por Einstein em 1905 na sua tese de doutorado. Considerado um dos trabalhos intelectuais mais notáveis de todos os tempos, pois sua solução do fenômeno trouxe grandes avanços

científicos nos campos da química e da física, tornando o modelo atômico-molecular uma parte fundamental da estrutura da matéria.

## 2. Equação de Langevin

Em 1908 Langevin apresentou uma equação diferencial para o movimento de uma partícula em suspensão, incluindo a força de Stokes, de caráter macroscópico, deduzida no contexto da mecânica dos fluidos e uma força aleatória  $\vec{F}_a$ , destinada a “manter a agitação da partícula, e em cuja ausência a força de atrito viscoso acabaria conduzindo ao repouso”. Essa força aleatória, de caráter microscópico, é atribuída ao bombardeio contínuo das partículas em suspensão pelas moléculas do fluido. Para uma partícula esférica de massa  $M$  e raio  $a$  temos a equação de movimento em uma dimensão da forma

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_a, \quad (1)$$

em que  $\eta$  é a viscosidade do fluido. Multiplicando os dois lados por  $x$  e fazendo uma pequena manipulação algébrica, temos.

$$\frac{M}{2} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) - M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -3\pi\eta a \frac{d}{dt}(x^2) + xF_a. \quad (2)$$

A média sobre as partículas em suspensão deve levar em conta o teorema da equipartição da energia, associado ao comportamento de um gás perfeito

$$\left\langle \frac{1}{2} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{R}{N_A} T. \quad (3)$$

Além disso, vamos supor que

$$\langle xF_a \rangle = 0, \quad (4)$$

devido ao caráter aleatório da força  $F_a$ . Assim, Para tempos suficientemente longos encontramos

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \rightarrow \frac{RT}{3\pi\eta a N_A}. \quad (7)$$

que é chamado resultado de Einstein. Este resultado também está relacionado com a solução da *equação da difusão*.

## 3. Aparato experimental

Para simularmos o movimento browniano a fim de encontrarmos os parâmetros experimentais que possam ser comparados com os resultados teóricos, utilizamos

um microfone para captar somente o ruído de fundo. Os materiais utilizados foram: um microfone; uma caixa de “isopor”, um secador de cabelo e um termômetro digital.

O procedimento experimental consistiu nos seguintes passos: primeiramente colocou-se dentro do isopor gelo, o microfone e o sensor do termômetro. Depois do equilíbrio térmico foi realizado a gravação e o valor da temperatura de equilíbrio. Para a temperatura mais elevada, utilizou-se o secador de cabelo para esquentar o interior do isopor, colocando o microfone e o sensor do termômetro em seu interior. Depois do equilíbrio, fez-se a gravação do áudio e o valor da temperatura.

Com este procedimento, esperou-se detectar as diferenças nos ruídos captados pelo microfone nas duas temperaturas.

#### 4. Resultados

As duas temperaturas de equilíbrio obtidas no experimento foram,  $9,1^{\circ}\text{C}$  e  $37,2^{\circ}\text{C}$ . Na Figura 1 vemos as séries temporais para as intensidades sonoras dos ruídos em ambas as temperaturas.

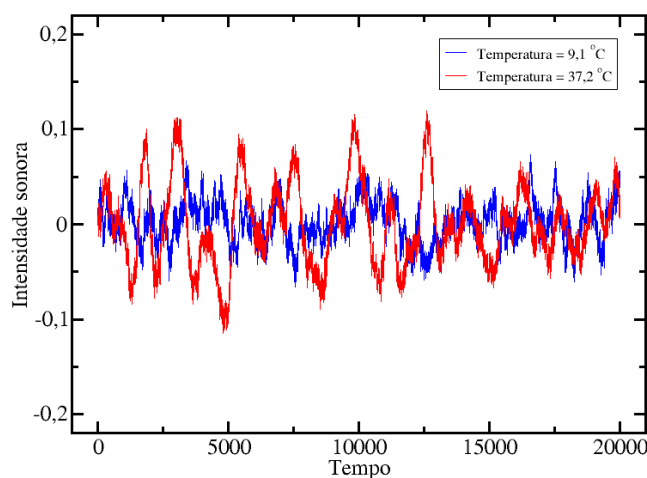


Figura 1: Série temporal das intensidades sonoras dos ruídos gravadas pelo microfone nas duas temperaturas distintas.

Notamos que há uma diferença clara nas intensidades dos ruídos para as duas temperaturas e que este comportamento é do tipo movimento browniano. Na Figura 2 vemos o histograma para as duas séries temporais.

Notamos que os ruídos se distribuem no formato de uma gaussiana, as linhas contínuas são ajustes gaussianos e percebe-se que estas se ajustam muito bem para os dois casos. Com estes ajustes foi possível obter os parâmetros que caracterizam a função gaussiana e como sabemos que esta é solução da equação

da difusão, pretende-se utilizar com o resultado de Einstein ou solução da equação de Langevin.

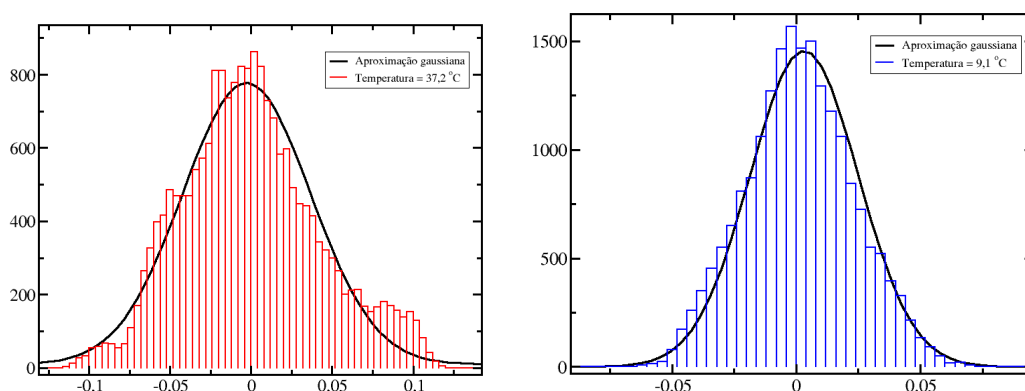


Figura 2: Histograma dos ruídos para as duas temperaturas distintas.

## 5. Considerações finais

Neste trabalho propomos um aparato experimental simples a fim de se estudar o movimento browniano. Com ele foi possível obter resultados preliminares satisfatórios, pois detectou-se as séries temporais das intensidades sonoras dos ruídos detectados por um microfone, se comportam de maneiras diferentes de acordo com a temperatura. Neste caso, espera-se se quanto maior a temperatura mais agitadas estarão as moléculas que compõem o ar e conseqüentemente maior será a flutuação na intensidade sonora dos ruídos detectados pelo microfone. Assim, como mostrado neste trabalho, os resultados obtidos corroboram com este comportamento. Em trabalhos futuros espera-se comparar os parâmetros obtidos dos resultados experimentais - ajuste gaussiano dos histogramas das intensidades – com a equação de Langevin e suas soluções.

## 6. Referências

- EINSTEIN, A. **Annalen der Physik**. 322(8): 549-560 (1905).  
LANGEVIN, P. **C. R. Acad. Sci. Paris**. 146: 530-533 (1908).  
PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. *Statistical Mechanics*, Elsevier, London, 2011.  
SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*, Edusp, São Paulo, 1997.  
SMOLUCHOWSKI, M. M. **Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie**, 202 (1906).



**INSTITUTO FEDERAL** | Campus  
Pará Belém

Diretoria de Pós-graduação, Pesquisa e Inovação  
Grupo Interdisciplinar para a Educação em Ciências e Matemática  
Coordenação de Matemática



EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA EM TEMPOS DE PANDEMIA

## CERTIFICADO DE SUBMISSÃO DE TRABALHO

Certificamos que o trabalho intitulado **UMA PROPOSTA DE ESTUDO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN UTILIZANDO UM MICROFONE** de autoria de Robson Ayrton da Silva Matos e Renato Germano Reis Nunes, foi submetido no evento **II SINEPEM**, realizado em 09/09/2021 a 10/09/2021, na cidade de Belém, contabilizando carga horária total de 20 horas.

Belém, 13 de setembro de 2021.

Fernando Cardoso de Matos  
Diretor da Sociedade Paraense de Matemática

Reginaldo da Silva  
Diretor de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação  
IFPA - Campus Belém  
Portaria 818/2019 - GAB/REITORIA

Raimundo Otoni Melo de Figueiredo  
Diretor Geral do IFPA - Campus Belém  
Portaria 1745/2019 - GAB/REITORIA



**INSTITUTO FEDERAL**  
Pará

Campus  
Belém

MINISTÉRIO DA  
EDUCAÇÃO





# MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON

*Robson Ayrton da Silva Matos*  
UFPA-Castanhal  
*robsonayrton2015@gmail.com*

*Roberta Modesto Braga*  
UFPA-Castanhal  
*robertabraga@ufpa.br*

## RESUMO

O presente trabalho vem mostrar como as tecnologias estão cada vez mais próximas do ensino e como essas ferramentas podem ajudar tanto na aprendizagem, quanto no dia a dia. Desse modo, entendemos que ao abordar problemas reais e resolvê-lo usando programação temos um potencial para discussão de conteúdos matemáticos na Educação Básica. Este trabalho fez uso de um problema físico com objetivo de apresentar uma sequência didático-pedagógica propositiva de Modelagem Matemática para ensinar funções do segundo grau, usando linguagem de programação Python.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Linguagem Python; Educação Básica.

## 1. Introdução

A Modelagem Matemática articulada a tecnologia, *software Python*, pode ser implementada a do uso de conceitos básicos como funções, na perspectiva de “desenvolvimento de habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução e problemas” (BRASIL, 2018, 529). As funções estão ligadas ao nosso dia a dia nas mais diversas áreas, as funções do segundo grau mais especificadamente, estão presentes, seja na biologia, física, contabilidade, etc. Na física envolvendo movimento uniforme variado, lançamento oblíquo; na Biologia, estudando processos de fotossíntese das plantas; na administração e contabilidade relacionado a custo, receita e lucro.

No âmbito do LEMM , Laboratório Experimental de Modelagem Matemática, espaço contemplado pelo LABINFRA<sup>1</sup> 2018, e as ações implementadas no mesmo constituem vivência de ambiente de investigação em Modelagem Matemática com

---

<sup>1</sup> LABINFRA – Subprograma de Apoio à Infraestrutura de Laboratórios de Ensino de Graduação e da Educação Básica, Técnica e Tecnológica.

tecnologias digitais ou não, seja por pesquisas programadas, experimentos simples ou bibliográfica a partir de bases de dados oficiais, a produção de textos acadêmicos, com submissões em eventos científicos, ao mesmo tempo em que se estimula os estudantes a desenvolverem atividades didático-pedagógicas com o uso da Modelagem Matemática (BRAGA e MATOS, 2022).

Essa última é a ação enfatizada nesse texto, com o objetivo de apresentar uma sequência didático-pedagógica propositiva de Modelagem Matemática para ensinar funções do segundo grau, usando linguagem de programação Python, seguindo as etapas de Modelagem Matemática sugeridas por Bassanezi (2012): a) Escolha do tema (problema): lançamento projétil; b) Coleta de dados: reconhecendo a função do movimento e suas variáveis; c) Análise de dados e formulação de modelos: função do segundo grau; d) Validação, simulação usando o software Python.

## 2. Desenvolvimento

Seja na Física, Contabilidade, Biologia, Administração, nos deparamos com vários problemas que utilizam equações do segundo grau como calcular a renda, lucro ou receita da sua empresa, calcular altura máxima ou alcance mínimo que uma bola pode atingir após ser lançada verticalmente para cima, o número de peças de um determinado item que pode ser vendido em um determinado tempo, entre outros.

Com as tecnologias esse processo de calcular e encontrar respostas para esses problemas se torna mais rápido e prático, programar para calcular raízes de uma determinada função faz com que os processos de resolução de determinado problema se tornem mais dinâmico. Em Python e em toda linguagem de programação vamos nos deparar com os comandos e tipos de comando, que são os códigos necessários para efetuar uma determinada ação em toda linguagem de programação.

Alguns comandos: *Strings* - Elas contêm uma sequência de caracteres e são usadas, em geral, para representar texto no código. (Sempre que for escrever textos coloque entre aspas duplas ou simples); *Int* - números inteiros; *Float* - números de pontos flutuantes ou números com casas decimais; *Complex* - números complexos ou imaginários; *Print* - mostrar o que se pede; *Input* – usada para comandos onde o usuário queira digitar algum valor ou texto. Sinais matemáticos: ( *\** ) multiplicação; ( *\*\** ) exponenciação; ( *-* ) subtração; ( *+* ) soma e ( */* ) divisão.

Importante observar que alguns sinais em Python são diferentes, como por exemplo ( = ) quando temos esse sinal em algum programa não quer dizer (igual) e sim (recebe) o sinal de igual e dado por (==), dois sinais de igual. O sinal ( , ) por exemplo também não pode ser usado para separar números com casas decimais, no lugar da virgula se coloca um ponto, vírgulas servem para separar um comando do outro, por esse motivo não se pode usar vírgulas em números com casas decimais. Com essas informações já se pode ser montada o programa para achar raízes e as coordenadas do vértice de uma função de segundo grau. XXXX1º passo: Definição de uma ação para pedir os valores dos 3 coeficientes de uma equação de segundo grau. 2º passo: definição de delta de acordo com a definição aprendida anteriormente, 3º passo: achar as raízes  $x'$  e  $x''$  e 4º passo: definir as coordenadas de  $Xv$  e  $Yv$ .

Figura 1: Passos para programação e implementação do código

```

função do segundo grau.py
1 a = float(input("digite o valor do coeficiente a: "))
2 b = float(input("digite o valor do coeficiente b: "))
3 c = float(input("digite o valor do coeficiente c: "))
4 delta = b**2 - 4*a*c
5 print("o valor de delta é: ", delta)
6 x1 = (-b - delta**0.5) / (2*a)
7 x2 = (-b + delta**0.5) / (2*a)
8 print("o valor de x1 é: ", x1)
9 print("o valor de x2 é: ", x2)
10
11 Xv = (-b) / (2*a)
12 Yv = (-delta) / (4*a)
13 print("o Xv é: ", Xv)
14 print("o Yv é", Yv)
    
```

```

digite o valor do coeficiente a:
digite o valor do coeficiente b:
digite o valor do coeficiente c:
o valor de delta é: 14400.0
o valor de x1 é: 13.333333333333333
o valor de x2 é: -0.0
o Xv é: 6.666666666666667
o Yv é 400.0
    
```

Fonte: os autores

Discutindo um problema físico propositivamente: Um canhão atira um projétil, descrevendo a função  $S = -9t^2 + 120t$ , sendo  $s$  em metros e  $t$  em segundos. Calcule o ponto máximo de altura atingida pelo projétil. Podemos, nesse caso discutir a função do movimento do projétil que descreve uma parábola decrescente, pois o valor de  $a$  é negativo, o ponto máximo da parábola será a altura máxima atingida pelo projétil. Usando a ferramenta anterior para responder o problema temos que a altura máxima atingida pelo projétil é 400m, figura 01. O processo de Modelagem possível de implementação em sala de aula pode seguir as seguintes etapas representadas na figura 02.

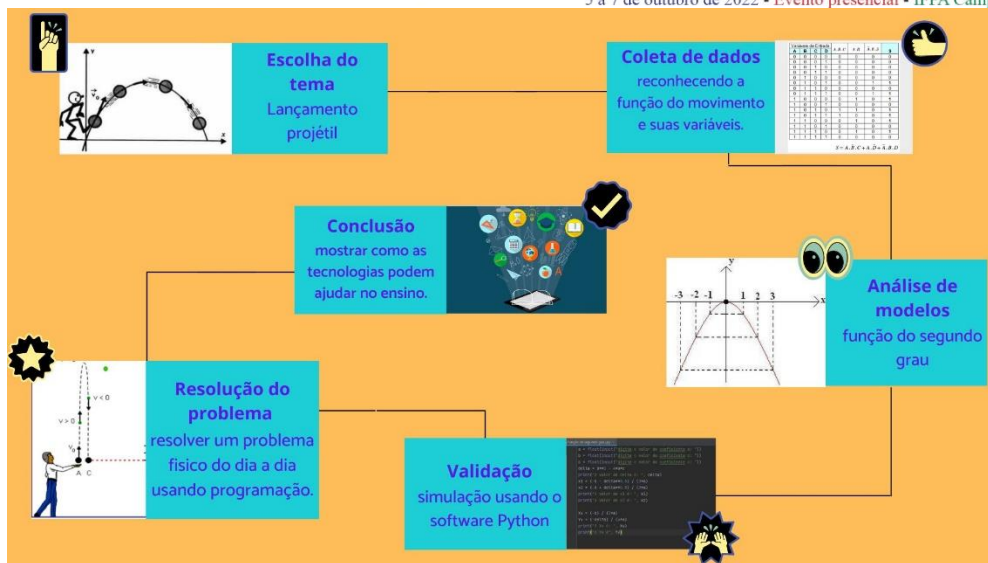


Figura 02: Processo de Modelagem Matemática proposto  
 Fonte: os autores

### 3. Considerações Finais

As tecnologias estão cada vez mais presentes no dia a dia, seja na sala de aula ou no mercado de trabalho, se pararmos para analisar as últimas décadas observamos que a informática ganha cada vez mais espaço nas diversas áreas da sociedade. A Modelagem Matemática com o uso da programação no ensino básico permite que os estudantes possam expandir seus conhecimentos e melhorar suas habilidades, servindo tanto para o mercado de trabalho quanto a sociabilidade.

### 4. Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Temas e modelos*. 1ª ed. Campinas: Edição do autor UFABC, 2012

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

PYTHON BRASIL. Python, 2021. Reúne grupos de usuários em todo o Brasil interessados em difundir e divulgar a linguagem de programação. Disponível em <<http://www.python.org.br>>. Acessado em 20 de outubro de 2021.

PYTHON BRASIL. Ribeirão, 2019. Feito pela comunidade para a comunidade, tem o objetivo de difundir a linguagem, promover a troca de experiências e manter a comunidade crescendo igualmente em público e impacto social. Disponível em <<http://www.pythonbrasil.org.br/>>. Acessado em 20 de outubro de 2021.

BRAGA, R.; MATOS, R. *Estimativa de  $\pi$  pelo método de Monte Carlo, modelagem matemática utilizando linguagem de programação Python*. SEPEDUC, 2022.



Certificamos que o trabalho intitulado **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU UTILIZANDO LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON** de autoria de Robson Ayrton da Silva Matos e Roberta Modesto Braga, foi submetido nos eventos **XIII EPAEM - Encontro Paraense de Educação Matemática e V SPDMAT - Seminário de Estudos e Pesquisas em Didática das Matemáticas**, realizado em 05/10/2022 a 07/10/2022, na cidade de Belém, contabilizando carga horária total de 21 horas.


Belém, 07 de outubro de 2022.




Fernando Cardoso de Matos  
Diretor da Sociedade Paraense de Matemática



José Messildo Viana Nunes  
Coordenador SPDMAT



Reginaldo da Silva  
Diretor de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação  
IFPA - Campus Belém  
Portaria 818/2019 - GAB/REITORIA



Raimundo Otoni Melo de Figueiredo  
Diretor Geral do IFPA - Campus Belém  
Portaria 1745/2019 - GAB/REITORIA