



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Elson José Monteiro Costa

A INTEGRAL E O CÁLCULO DE ÁREAS

Belém

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Elson José Monteiro Costa

A INTEGRAL E O CÁLCULO DE ÁREAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para a obtenção de grau de Licenciado em
Matemática da Faculdade de Matemática da
Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof^o Dr^o Juaci Picanço da Silva.

Belém

2023

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Elson José Monteiro Costa

A INTEGRAL E O CÁLCULO DE ÁREAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof^o Dr^o Juaci Picanço da Silva.

Prof^o Dr^o Juaci Picanço da Silva
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof^a. Dr^a. Joelma Morbach
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena
Faculdade de Matemática, UFPA

Conceito: _____

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e pela saúde.

A minha mãe Josielma Célia que me criou e me sustentou para que eu pudesse concluir o meu curso.

Ao meu pai Euson Oliveira e à minha irmã Josielly Monteiro que sempre estiveram comigo

Ao orientador doutor Juaci Picanço

A todos os professores com carinho.

RESUMO

Neste trabalho realizaremos um estudo acerca da utilização da integral no cálculo de áreas. Iniciaremos falando sobre alguns conceitos que posteriormente irão definir o que será a integral de Riemann. O estudo continua com a relação da integral com o cálculo de várias áreas como as de superfície de revolução e em coordenadas polares. Por fim, iremos verificar que as fórmulas ensinadas no ensino básico podem ser encontradas utilizando a integral de Riemann e suas propriedades.

Palavras-chave: Cálculo, Áreas, Fórmulas

ABSTRACT

In this work we will carry out a study about the use of the integral in the calculation of areas. We will start by talking about some concepts that will later define what the Riemann integral will be. The study continues with the relation of the integral with the calculation of several areas such as the surface of revolution and in polar coordinates. Finally, we will verify that the formulas taught in basic education can be found using the Riemann integral and its properties.

Keywords: Calculus, Areas, Formulas

“Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e o discernimento.”

Provérbios 2:6

Lista de Figuras

2.1	Área de $R_i = f(c_i)\Delta x_i$	15
2.2	Área de $R_i = -f(c_i)\Delta x_i$	15
2.3	$\sum_{i=1}^6 f(c_i)\Delta x_i$	16
3.1	O conjunto A no plano cartesiano	21
3.2	Área em falta	22
3.3	Área em excesso	22
3.4	Área de $A = -\int_a^b f(x) dx$	22
3.5	O conjunto B no plano cartesiano	23
3.6	Área entre duas funções num intervalo $[a, b]$	23
3.7	Cone e sua área lateral	24
3.8	Cone de raio R e geratriz $g + g'$	25
3.9	Triângulos formados pela altura, pelas geratrizes e pelos raios	26
3.10	Tronco de cone	27
3.11	Triângulos destacados	27
3.12	Triângulos congruentes	27
3.13	Tronco de cone com a circunferência gerada pela rotação do ponto médio da geratriz	28
3.14	Representação de uma função f contínua e positiva em um intervalo $[a, b]$.	28
3.15	Eixo polar e pólo	31
3.16	Pontos no plano cartesiano	32
3.17	$\rho > 0$ e $\rho < 0$, respectivamente	32
3.18	Função $\rho = \rho(\theta)$	33
3.19	$\rho = \rho(\theta)$ contínua e positiva no intervalo $[\alpha, \beta]$	33
3.20	Função em coordenadas cartesianas	34

3.21	Área delimitada pela função em coordenadas polares	34
4.1	Retângulo	36
4.2	Triângulo	37
4.3	Círculo	39
4.4	Trapézio	41
4.5	Elipse	43

Conteúdo

1	Introdução	12
1.1	Linha de pesquisa	12
1.1.1	Orientador	12
1.2	Problema	12
1.3	Tema	13
1.4	Objetivos	13
1.4.1	Objetivo geral	13
1.4.2	Objetivos específicos	13
2	Integral de Riemann	14
2.1	Partição de um intervalo	14
2.2	Soma de Riemann	15
2.3	Integral de Riemann: Definição	17
2.4	Propriedades da Integral	18
2.5	1º Teorema Fundamental do Cálculo	18
2.6	Mudança de variável na integral	19
3	Cálculo de Áreas	21
3.1	Área de superfície de revolução	24
3.2	Área em coordenadas polares	31
4	Dedução das fórmulas de cálculo de áreas utilizando integral	36
4.1	Área do Retângulo	36
4.2	Área do Triângulo	37
4.3	Área do círculo	39
4.4	Área do trapézio	41

4.5	Área da Elipse	43
5	Considerações finais	45

Capítulo 1

Introdução

O trabalho falará sobre a relação da integral de Riemann com o cálculo de áreas. A integral de Riemann, além de ser a primeira definição rigorosa de uma função em um intervalo, é uma das definições mais simples de integral. Ela pode ser usada para calcular a área de regiões sendo estas mais comuns, ou até mesmo mais complexas. Com isso o trabalho oferecerá uma forma de demonstrar algumas fórmulas utilizadas para calcular as áreas de figuras planas utilizando a integral de Riemann.

1.1 Linha de pesquisa

Cálculo

1.1.1 Orientador

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

1.2 Problema

A integral de Riemann ser uma das ferramentas utilizadas para calcular áreas é um assunto relevante?

O estudo de matemática no nível superior é diferente do mesmo estudo no ensino básico, seja por complexidade ou por assuntos diferentes. O cálculo de áreas de figuras planas é um dos assuntos estudados no ensino básico. Este mesmo assunto pode ser visto novamente no ensino superior de diversos pontos de vista e neste trabalho será mos-

trado com mais detalhes esse cálculo utilizando a integral de Riemann como ferramenta. Também será feita uma relação com o que é ensinado no ensino básico ao verificar que conseguimos deduzir algumas fórmulas utilizadas no estudo de áreas de figuras planas.

1.3 Tema

A utilização da integral de Riemann como ferramenta no cálculo de áreas.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

Mostrar a importância do estudo da integral de Riemann para calcular áreas.

1.4.2 Objetivos específicos

Apresentar os conceitos e definições sobre a integral de Riemann.

Apresentar de que forma o cálculo de áreas e a integral de Riemann se relacionam.

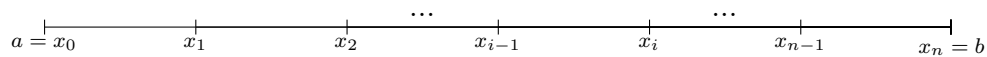
Apresentar a integral de Riemann como uma ferramenta de demonstração das fórmulas utilizadas para calcular as áreas de figuras planas.

Capítulo 2

Integral de Riemann

2.1 Partição de um intervalo

A *partição de um intervalo* $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ e pode ser representado gráficamente da seguinte forma:



Sendo assim, temos que uma partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n intervalos menores e que podem ser escritos de forma arbitrária como: $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

A *amplitude do intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ será dada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_0, \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1, \\ &\vdots \\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1}.\end{aligned}$$

Essas amplitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ podem ou não ter valores iguais. Para a maior amplitude damos o nome de *amplitude da partição* P em relação ao intervalo $[a, b]$ e será indicado por $\max \Delta x_i$. Indica-se uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de um intervalo $[a, b]$ por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

2.2 Soma de Riemann

Sejam uma função f definida em $[a, b]$ e uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

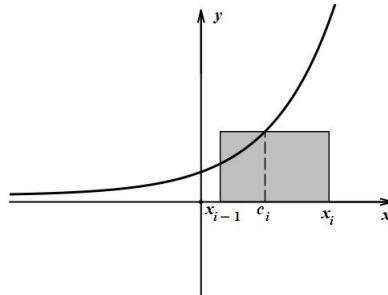
do intervalo $[a, b]$. Seja um $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$ um elemento escolhido de forma arbitrária obtendo assim um novo conjunto $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ chamado de *conjunto admissível à partição P* . Teremos que o número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n,$$

será chamado de *soma de Riemann* de f relativa a partição P e ao conjunto admissível A .

Quando $f(c_i) > 0$ como na figura 2.1., podemos notar que $f(c_i)\Delta x_i$ será a área do retângulo R_i determinado pelas retas $x = x_i$, $x = x_{i-1}$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$.

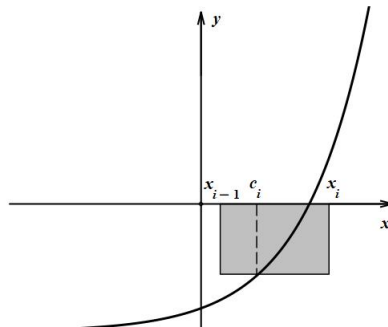
Figura 2.1: Área de $R_i = f(c_i)\Delta x_i$



Fonte: Elaboração própria

Quando $f(c_i) < 0$, figura 2.2, a área de R_i será $-f(c_i)\Delta x_i$.

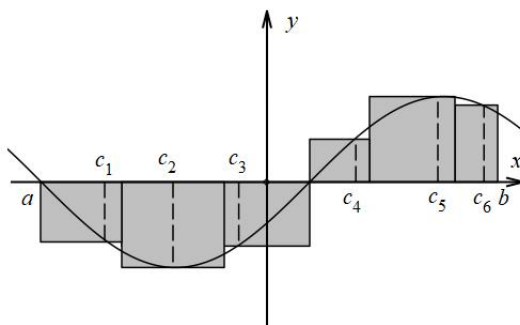
Figura 2.2: Área de $R_i = -f(c_i)\Delta x_i$



Fonte: Elaboração própria

Geometricamente interpretaremos a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ como a *diferença* entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x . Temos um exemplo disso na figura 2.3

Figura 2.3: $\sum_{i=1}^6 f(c_i)\Delta x_i$



Fonte: Elaboração própria

Seja uma função F definida em $[a, b]$ e $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uma partição de $[a, b]$. Ao efetuar o acréscimo $F(b) - F(a)$, iremos observar que ao passar de $x = a$ para $x = b$ iremos obter a soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ com o $i = 1, 2, 3, 4$, sendo assim:

$$F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]$$

Isto também pode ser escrito como:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^4 [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Se generalizarmos para uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Com base neste resultado teremos que, dadas F e f duas funções definidas em $[a, b]$, sendo F uma primitiva de f em $[a, b]$, ou seja, $F' = f$. E sendo uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, podemos observar, como visto anteriormente, que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Pelo teorema do valor médio existe um $\bar{c}_i \in [x_i, x_{i-1}]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sendo assim, como $F' = f$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$$

Note que conforme Δx_i vai diminuindo, o $f(\bar{c}_i)$ vai começar a diferir pouco de um $f(c_i)$ onde $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ não foi escolhido convenientemente. Ou seja, teremos:

$$F(b) - F(a) \cong \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

2.3 Integral de Riemann: Definição

Seja uma função f definida em $[a, b]$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ que só depende de ϵ , mas não da particular escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda a partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i$. Tal número L será denominado de integral de Riemann de f em $[a, b]$, com $\max \Delta x_i$ e indica-se por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Com isso, diremos que se $\int_a^b f(x) dx$ existe, então a f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$ e também iremos nos referir à $\int_a^b f(x) dx$ como sendo a integral definida de f em $[a, b]$.

2.4 Propriedades da Integral

Teorema 2.1 *Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então*

a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

b) kf é integrável em $[a, b]$, então $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

c) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

d) Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

2.5 1º Teorema Fundamental do Cálculo

De acordo com a definição de integral, se f for integrável em $[a, b]$, o valor do limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

será sempre o mesmo independentemente da escolha dos c_i e igual a $\int_a^b f(x) dx$. Assim,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

então teremos $L = \int_a^b f(x) dx$.

Suponhamos que f seja integrável em $[a, b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Já vimos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Segue então, do teorema do valor médio, que para uma conveniente escolha dos \bar{c}_i em $[x_{i-1}, x_i]$, então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i) \Delta x_i$$

que também podemos escrever como

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \tag{2.1}$$

Se para cada P de $[a, b]$, os \bar{c}_i forem escolhidos como em (1.1), teremos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

isso implica que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

e isto conclui a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 2.2 (*1º teorema fundamental do cálculo*)

Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

e iremos indicar $F(b) - F(a)$ como $[F(a)]_b^a$, assim

$$\int_a^b f(x) dx = [F(a)]_b^a = F(b) - F(a)$$

2.6 Mudança de variável na integral

Toda função contínua num intervalo I admite, neste intervalo, uma primitiva. Sendo assim, temos o seguinte teorema

Teorema 2.3 *Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I . Seja $g : [a, b] \rightarrow I$, tal que $g(a) = c$ e $g(b) = d$. Nestas condições*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_c^d f(u) du$$

Demonstração: f é contínua em I então a f admite uma primitiva F em I . Temos que,

$$\int_c^d f(u) du = F(d) - F(c) \tag{2.2}$$

A função $H(x) = F(g(x))$, $x \in [a, b]$, é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$. De fato, pela regra da cadeia, temos que

$$H'(x) = [F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

O que implica em

$$H'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Pois, $F' = f$. Com isso, temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Por hipótese, $g(a) = c$ e $g(b) = d$. De (1.2) concluímos que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(d) - F(c) = \int_c^d f(u) du$$

Exemplo: Calcule $\int_1^2 (2x + 1)^7 dx$

Solução: Faremos a seguinte mudança de variável

$$2x + 1 = u$$

Temos que o nosso du será

$$du = 2dx$$

Pois

$$\frac{d}{dx}(2x + 1) = 2$$

Os limites de integração passarão a ser

$$x = 1; u = 3$$

$$x = 2; u = 5$$

Sendo assim, teremos que

$$\int_1^2 (2x + 1)^7 dx = \int_3^5 \frac{u^7}{2} du$$

Logo

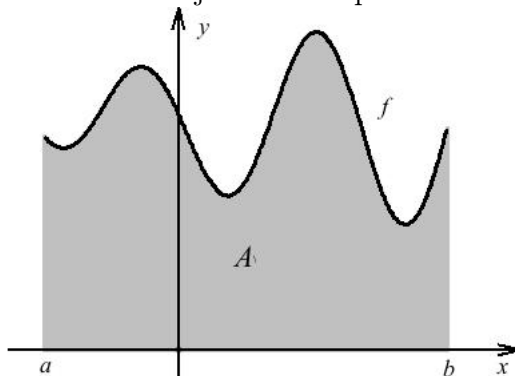
$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{u^7}{2} du &= \frac{1}{2} \int_3^5 u^7 du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^8}{8} \right]_3^5 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{5^8}{8} - \frac{3^8}{8} \right] \\ &= \frac{384064}{16} = 24004 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Cálculo de Áreas

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a, x = b$ e pelo gráfico de $y = f(x)$, como na figura 3.1.

Figura 3.1: O conjunto A no plano cartesiano



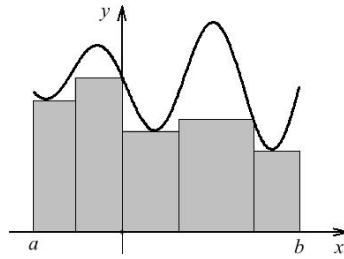
Fonte: Elaboração própria

Seja então $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam \bar{c}_i e $\bar{\bar{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ seja o valor mínimo de f e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$.

Uma boa definição para a *área de A* implicará que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ será uma aproximação para a referida área faltando algumas partes a serem medidas, como na figura 3.2. Já o $\sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i$ será uma aproximação com partes que foram medidas a mais, como na figura 3.3. Logo

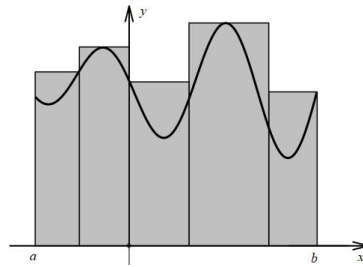
$$\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq \text{área de } A \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{\bar{c}}_i) \Delta x_i.$$

Figura 3.2: Área em falta



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.3: Área em excesso



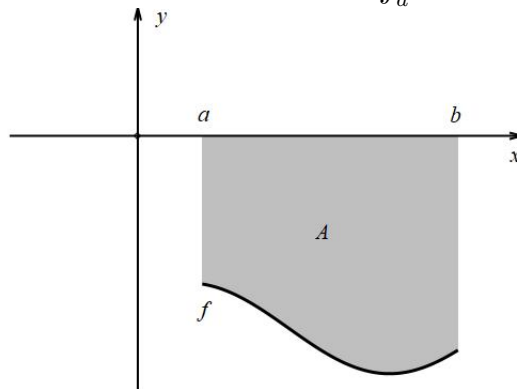
Fonte: Elaboração própria

Sabendo que as somas de Riemann tendem a $\int_a^b f(x) dx$ quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Teremos que a *área de A* será:

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x) dx$$

Podemos expandir este mesmo conceito para outros subconjuntos do \mathbb{R}^2 . Quando $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, figura 3.4, isto implicará que $\int_a^b f(x) dx \leq 0$, obtendo assim

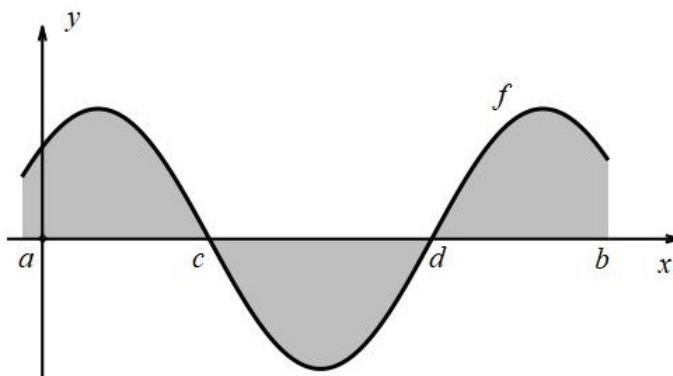
Figura 3.4: Área de $A = - \int_a^b f(x) dx$



Fonte: Elaboração própria

Seja B o conjunto hachurado na figura 3.5

Figura 3.5: O conjunto B no plano cartesiano



Fonte: Elaboração própria

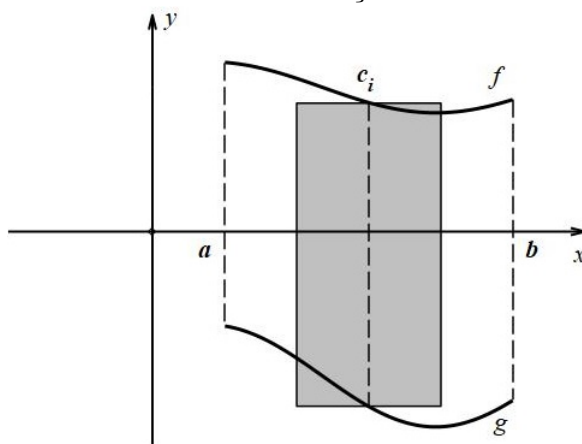
temos então que a área será

$$\text{Área} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Dadas duas funções f e g , ambas contínuas em um intervalo $[a, b]$. Temos que para calcular a área compreendida entre elas faremos o seguinte:

Dada uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. de $[a, b]$ e seja $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ o conjunto admissível à partição P , temos que $[f(c_i) - g(c_i)]\Delta x_i$ é a área do retângulo hachurado na figura 3.6. Logo:

Figura 3.6: Área entre duas funções num intervalo $[a, b]$



Fonte: Elaboração própria

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)]\Delta x_i = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \text{Área de } A$$

em que A é o conjunto limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$.

3.1 Área de superfície de revolução

Para entendermos melhor como iremos calcular a área de superfícies de revolução iremos primeiramente ver alguns conhecimentos na área de geometria.

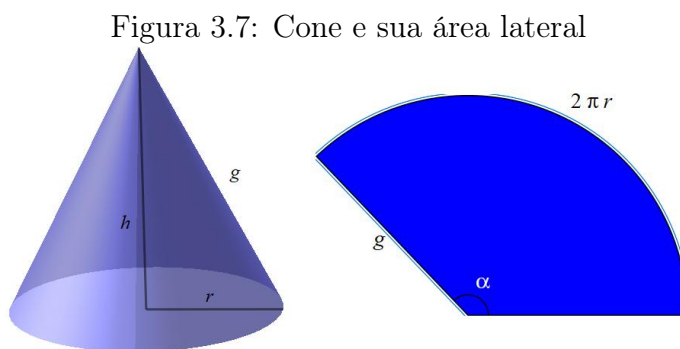
Sabendo que para calcular a área de um círculo utilizamos a fórmula πr^2 , temos que, para calcular a área do setor circular iremos utilizar a proporcionalidade entre o ângulo central de um círculo e a área que ele delimita. Ou seja, temos que quando o ângulo central for 2π , calcularemos a área com a fórmula πr^2 , e se o ângulo central for um $\alpha < 2\pi$ ele então delimitará a área de um setor circular que é proporcional à medida de α , ou seja, se o ângulo α dobrar sua medida, então a área do setor circular que ele delimita também dobrará. Logo, podemos fazer a seguinte regra de 3

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\alpha} &= \frac{\pi r^2}{\text{Área do setor circular}} \\ 2\pi(\text{Área do setor circular}) &= \alpha\pi r^2 \\ \text{Área do setor circular} &= \frac{\alpha r^2}{2}\end{aligned}$$

Essa proporcionalidade ocorre também com o comprimento da circunferência. Quando o ângulo central é 2π , calculamos o comprimento utilizando a fórmula $2\pi r$, sendo assim a regra de 3 ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\alpha} &= \frac{2\pi r}{\text{Comprimento do setor circular}} \\ \text{Comprimento do setor circular} &= \alpha r\end{aligned}$$

Dado um cone de raio da base r , altura h , geratriz g e comprimento do círculo da base $2\pi r$, figura 3.7. Então ao "abrirmos" o cone teremos que ele assumirá o formato de um setor circular de um círculo de raio g e comprimento do setor circular $2\pi r$.



Fonte: Elaboração própria

Sendo assim, utilizando as fórmulas do tópico anterior iremos calcular a área deste setor circular que conseqüentemente será a área lateral do cone.

Primeiramente vamos encontrar o ângulo central.

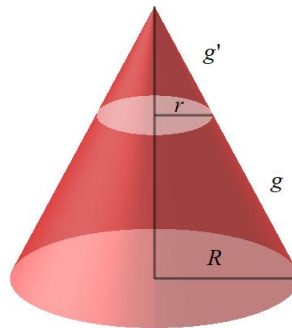
$$\begin{aligned} \text{Comprimento do setor circular} &= \alpha g \\ 2\pi r &= \alpha g \\ \alpha &= \frac{2\pi r}{g} \end{aligned}$$

Sabendo o ângulo central agora basta calcularmos a área do setor, que será a área lateral do cone

$$\begin{aligned} \text{Área lateral do cone} &= \frac{\alpha g^2}{2} \\ &= \frac{2\pi r g^2}{g \cdot 2} \\ &= \pi r g \end{aligned}$$

Dado um cone de raio R e geratriz $g + g'$, figura 3.8.

Figura 3.8: Cone de raio R e geratriz $g + g'$



Fonte: Elaboração própria

Temos que retirando a parte superior, que também é um cone só que de raio r e geratriz g' , teremos um tronco de cone com o raio da base maior R , raio da base menor r e geratriz g .

Sendo assim, temos que a área lateral do tronco do cone será a seguinte

Área lateral do tronco de cone = Área lateral do cone maior – Área lateral do cone menor

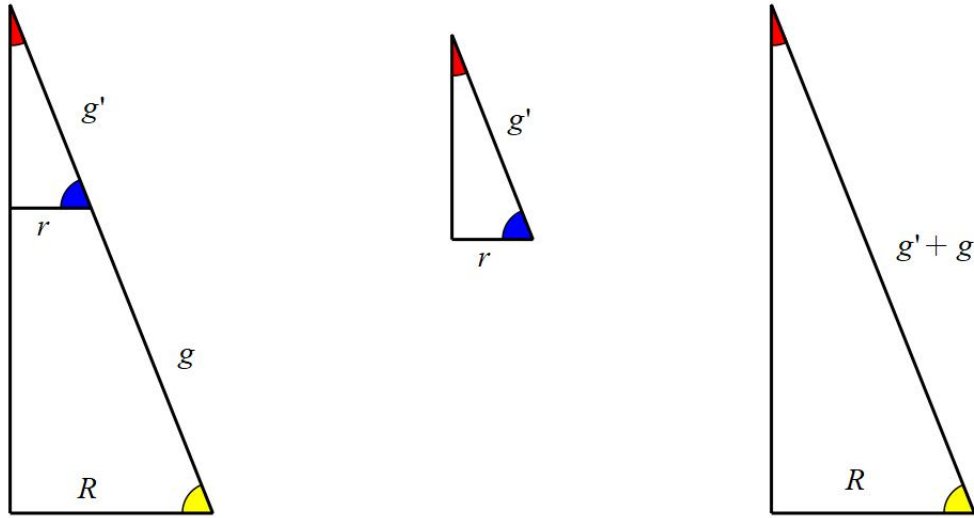
Logo, utilizando a fórmula anterior, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \text{Área lateral do tronco de cone} &= \pi R(g + g') - \pi r g' \\ &= \pi(R(g + g') - r g') \end{aligned}$$

$$\text{Área lateral do tronco de cone} = \pi(Rg + Rg' - rg') \quad (3.1)$$

Podemos destacar os seguintes triângulos da figura 3.9, cuja a medida do ângulo A(vermelho) é comum e os ângulos B(azul) e C(amarelo) são correspondentes. Sendo assim, temos que esses triângulos são semelhantes pelo fato deles terem dois ângulos com a mesma medida.

Figura 3.9: Triângulos formados pela altura, pelas geratrizes e pelos raios



Fonte: Elaboração própria

Logo, como os triângulos são semelhantes, então os seus lados correspondentes são proporcionais. Com isso, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{g'}{g + g'} \\ r(g + g') &= Rg' \\ rg + rg' &= Rg' \\ rg &= Rg' - rg' \end{aligned}$$

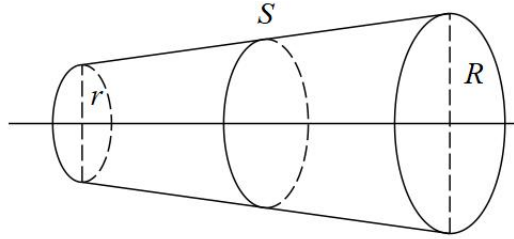
Substituindo na equação (1.3), obteremos que

$$\begin{aligned} \text{Área lateral do tronco de cone} &= \pi(Rg + Rg' - rg') \\ &= \pi(Rg + rg) \\ &= \pi g(R + r) \end{aligned}$$

Vamos verificar que a área lateral do tronco de cone é o produto do comprimento da geratriz pelo comprimento da circunferência gerada pela rotação do ponto médio da geratriz.

Dado o seguinte tronco de cone da figura 3.10

Figura 3.10: Tronco de cone

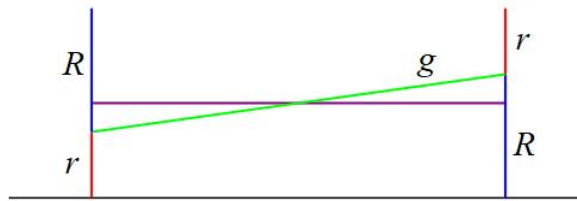


Fonte: Elaboração própria

Vejamos que ao projetarmos $\frac{R+r}{2}$ iremos interceptar o ponto médio da geratriz.

Acrescendo r (segmento vermelho) acima de R (segmento azul) e R acima de r , como na figura 3.11, iremos projetar a medida $\frac{R+r}{2}$ (segmento roxo), formando assim dois triângulos

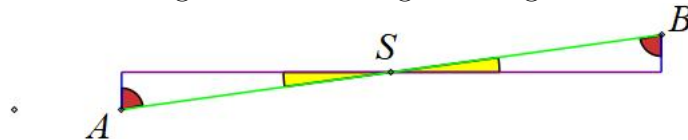
Figura 3.11: Triângulos destacados



Fonte: Elaboração própria

Esses triângulos, figura 3.12, tem um lado cuja a medida é comum $\left(\frac{R-r}{2}\right)$. Além disso, ambos também tem dois ângulos de mesma medida, laranjas (são alternos internos) e amarelos (são opostos pelo vértice).

Figura 3.12: Triângulos congruentes



Fonte: Elaboração própria

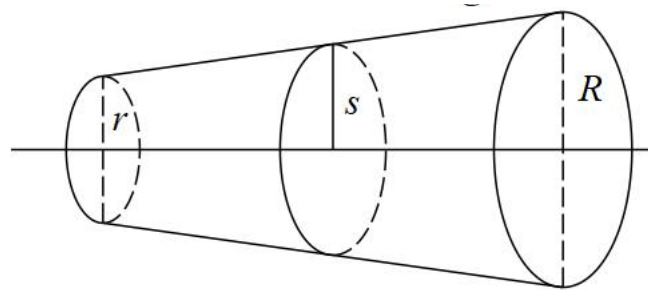
Logo, esses triângulos são congruentes, o que implica que a medida de \overline{AS} é igual a medida de \overline{BS} , tendo esse resultado se eu chamar de s a medida $\frac{R+r}{2}$, vemos que essa medida é exatamente o raio da circunferência gerada pela rotação do ponto médio da geratriz.

Sendo assim, substituindo s na fórmula da área lateral do tronco do cone, teremos

$$\text{Área lateral do tronco do cone} = 2\pi s g$$

Observe que, $2\pi s$ é exatamente o comprimento da circunferência de raio s , que é gerada pela rotação do ponto médio da geratriz, comprovando assim que a área lateral do tronco de cone é o produto do comprimento da geratriz pelo comprimento da circunferência gerada pela rotação do ponto médio da geratriz, tal circunferência aparece na figura 3.13.

Figura 3.13: Tronco de cone com a circunferência gerada pela rotação do ponto médio da geratriz

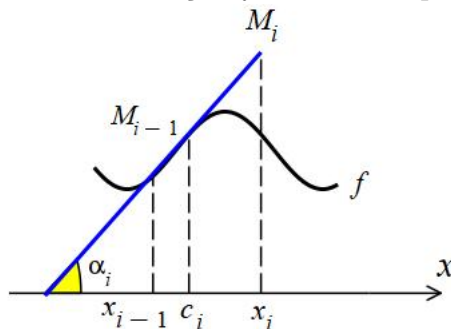


Fonte: Elaboração própria

Vamos agora estender esse conceito para calcular a área de uma superfície obtida pela rotação em torno do eixo x de uma função f que possui derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Figura 3.14: Representação de uma função f contínua e positiva em um intervalo $[a, b]$



Fonte: Elaboração própria

Observando a figura 3.14, temos que $f'(c_i) = \text{tg } \alpha_i$, pois o segmento $\overline{M_{i-1}M_i}$ é

tangente ao gráfico da f no ponto $(c_i, f(c_i))$. Isto implicará que

$$|\cos \alpha_i| = \frac{\Delta x_i}{\overline{M_{i-1}M_i}} \Rightarrow \overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = |\sec \alpha_i| \Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

Pelo que vimos anteriormente, a área da superfície gerada pela rotação do segmento $\overline{M_{i-1}M_i}$ em torno do eixo x será:

$$2\pi f(c_i) \overline{M_{i-1}M_i} = 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

Com isso, temos que quanto mais diminuirmos o intervalo $[x_i, x_{i-1}]$, mais iremos obter uma aproximação precisa da área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo x , apenas na parte do gráfico entre $x = x_i$ e $x = x_{i-1}$. A área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo y será obtida fazendo a substituição de $f(c_i)$ por c_i .

Vemos que a função $2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}$ é contínua em $[a, b]$, sendo assim

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

E aqui definimos que a área da superfície gerada pela rotação do gráfico da f em torno do eixo x será

$$\text{Área} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Da mesma forma que a área da superfície gerada pela rotação do gráfico da f , em torno do eixo y , será

$$\text{Área} = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Como exemplo iremos calcular a área da superfície de revolução gerada pela função $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[0, \pi]$. Sendo assim, temos que essa área será

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \int_0^\pi 2\pi \text{sen}(x) \sqrt{1 + [\cos^2(x)]} dx \\ &= 2\pi \int_0^\pi \text{sen}(x) \sqrt{1 + [\cos^2(x)]} dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \cos(x)$, então

$$\begin{aligned} du &= -\text{sen}(x) dx \\ x = 0 &\Rightarrow u = 1 \\ x = \pi &\Rightarrow u = -1 \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que

$$2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) \sqrt{1 + [\cos^2(x)]} dx = 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1 + [u]^2} du$$

Fazendo agora $u = \operatorname{tg}(\theta)$, então

$$\begin{aligned} du &= \sec^2 \theta d\theta \\ u = -1 &\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \\ u = 1 &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

O que implica em

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1 + [u]^2} du &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + [\operatorname{tg}(\theta)]^2} \sec^2(\theta) d\theta \\ 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + [\operatorname{tg}(\theta)]^2} \sec^2(\theta) d\theta &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2(\theta)} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int \sec^3(\theta) d\theta$ separadamente, temos que

$$\int \sec^3(\theta) d\theta = \int \sec(\theta) \sec^2(\theta) d\theta$$

Se tomarmos

$$\begin{aligned} u = \sec(\theta) &\Rightarrow du = \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) d\theta \\ dv = \sec^2(\theta) d\theta &\Rightarrow v = \operatorname{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Integrando por partes, teremos

$$\begin{aligned} \int \sec^3(\theta) d\theta &= \int \sec(\theta) \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) - \int \operatorname{tg}^2(\theta) \sec(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Temos que,

$$\operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \sec^3(\theta) d\theta &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) - \int \operatorname{tg}^2(\theta) \sec(\theta) d\theta \\ \int \sec^3(\theta) d\theta &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) - \int [\sec^2(\theta) - 1] \sec(\theta) d\theta \\ \int \sec^3(\theta) d\theta &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) - \int \sec^3(\theta) + \sec(\theta) d\theta \\ 2 \int \sec^3(\theta) d\theta &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) + \int \sec(\theta) d\theta \\ 2 \int \sec^3(\theta) d\theta &= \operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| \\ \int \sec^3(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} [\operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)|] \end{aligned}$$

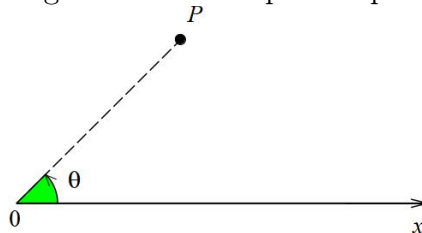
Temos que,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(\theta) d\theta &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) + \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \sec \left(-\frac{\pi}{4} \right) - \ln \left| \sec \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \right] \\ &= \pi [\sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1| + \sqrt{2} - \ln |\sqrt{2} - 1|] \\ &= \pi \left[2\sqrt{2} + \ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right| \right] \\ &= \pi \left[2\sqrt{2} + 2 \ln |\sqrt{2} + 1| \right] \\ &= 2\pi \left[\sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1| \right] \end{aligned}$$

3.2 Área em coordenadas polares

Ao se fixar no plano um semi-eixo Ox , onde denominamos o semi-eixo de *eixo polar* e o ponto O de *pólo*, figura 3.15.

Figura 3.15: Eixo polar e pólo



Fonte: Elaboração própria

Dessa forma os pontos são determinados por *coordenadas polares* (θ, ρ) , ρ é a medida

do segmento OP ($p \geq 0$) e θ é a medida do ângulo que se forma entre o eixo polar e o segmento OP , contando do eixo até o segmento no sentido anti-horário.

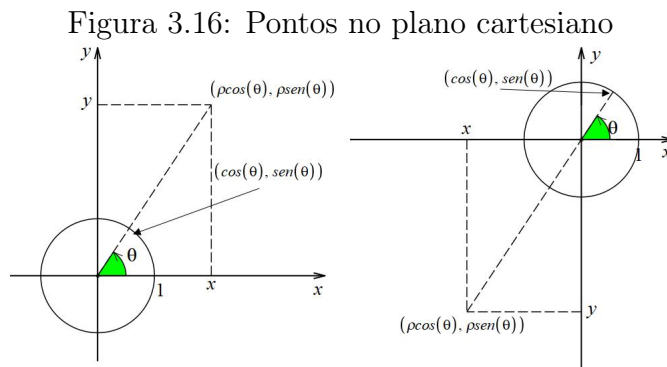
Se considerarmos o sistema de coordenadas cartesianas habitual onde a origem coincide com o polo e o eixo x coincide com o eixo polar, então as coordenada cartesianas de um ponto P com coordenadas polares (θ, ρ) serão

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Se P não coincide com o polo

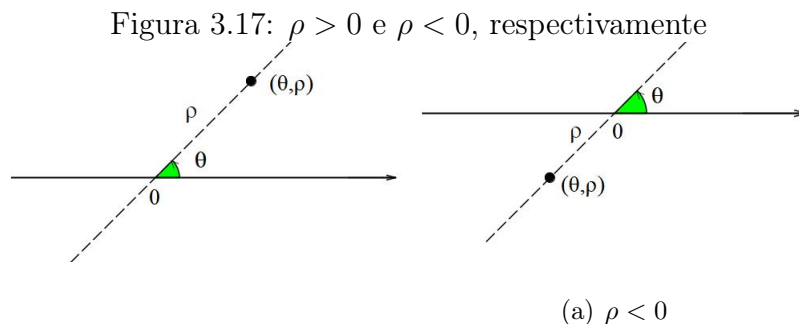
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Se $\rho < 0$, (θ, ρ) é simétrico em relação ao pólo, do ponto $(\theta, -\rho)$. Como na figura 3.16



Fonte: Elaboração própria

Olhando novamente para o eixo polar na figura 3.17, teremos

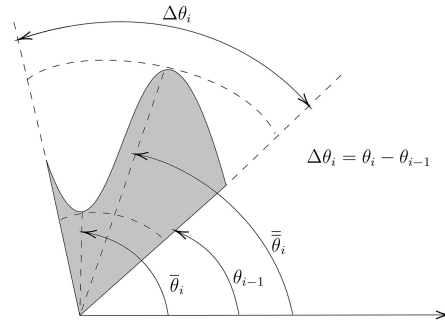


Fonte: Elaboração própria

Sabemos do estudo anterior sobre área de uma superfície de revolução que a área de um setor circular de abertura $\Delta\theta$ e raio R é $\frac{R^2}{2}\Delta\theta$. Com isso, dada uma função $\rho = \rho(\theta)$ contínua e positiva no intervalo $[\theta_i, \theta_{i-1}]$ com $\theta \in [\theta_i, \theta_{i-1}]$ e $\rho \in [0, \rho(\theta)]$.

Sendo $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta})$ o valor máximo de ρ no intervalo $[\theta_i, \theta_{i-1}]$ e $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta})$ o valor mínimo no mesmo intervalo, como na figura 3.2. Com isso, temos que a área delimitada pela $\rho = \rho(\theta)$ será

Figura 3.18: Função $\rho = \rho(\theta)$

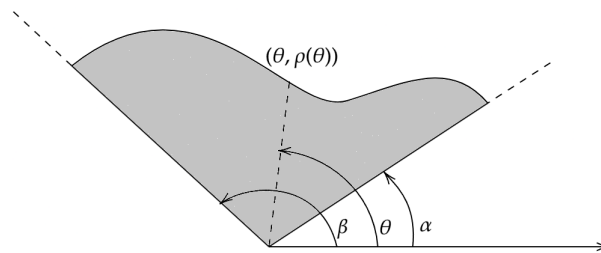


Fonte: Elaboração própria

$$\frac{\rho(\bar{\theta})^2}{2} \Delta\theta \leq \text{Área} \leq \frac{\rho(\bar{\theta})^2}{2} \Delta\theta$$

Agora, seja $\rho = \rho(\theta)$ contínua e positiva no intervalo $[\alpha, \beta]$ com $\beta - \alpha \leq 2\pi$, figura 3.19. Temos que, seja A o conjunto de todos os pontos do plano de coordenadas polares (θ, ρ) , tal que $\alpha \leq \theta \leq \beta$ e $0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$.

Figura 3.19: $\rho = \rho(\theta)$ contínua e positiva no intervalo $[\alpha, \beta]$



Fonte: Elaboração própria

Seja $P : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$ uma partição de $[\alpha, \beta]$, se tomarmos os $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta})$ o valor máximo de ρ no intervalo $[\theta_i, \theta_{i-1}]$ e $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta})$ o valor mínimo no mesmo intervalo. Pelo que vimos anteriormente, teremos que a área será

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho(\bar{\theta}_i)^2}{2} \Delta\theta_i \leq \text{Área} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\rho(\bar{\theta})^2}{2} \Delta\theta_i$$

Sabemos que quando $\Delta\theta_i$ for suficientemente pequeno, a área se tornará mais

precisa e isto implica em

$$\lim_{\text{máx } \Delta\theta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\rho(\theta_i)^2}{2} \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho \, d\theta$$

Isto é, a área delimitada por $\rho = \rho(\theta)$ será

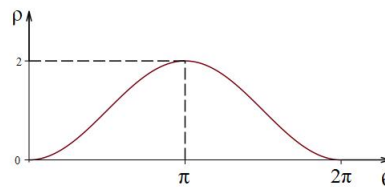
$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho \, d\theta$$

Exemplo 1. Desenhe o lugar geométrico em coordenadas polares da função dada por $\rho = 1 - \cos(\theta)$ e depois calcule a área delimitada por essa região onde, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solução: Para facilitar faremos primeiro o gráfico da função em coordenadas cartesianas com o plano cartesiano sendo o plano $\theta O\rho$, como na figura 3.20:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	1	2	1	0

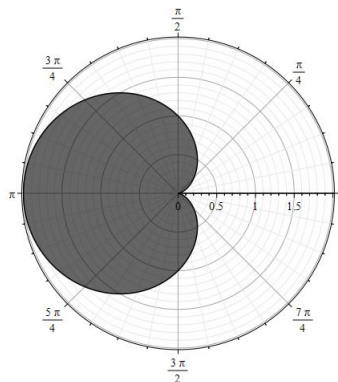
Figura 3.20: Função em coordenadas cartesianas



Fonte: Elaboração própria

Passando agora para coordenadas polares obteremos a figura 3.21

Figura 3.21: Área delimitada pela função em coordenadas polares



Fonte: Elaboração própria

A área delimitada por essa região será

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta)) \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - 2 \cos(\theta) + \cos(\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta - \int_0^{2\pi} 2 \cos(\theta) \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi - 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2\theta) \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi + \frac{1}{2} \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [2\pi + \pi] = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Capítulo 4

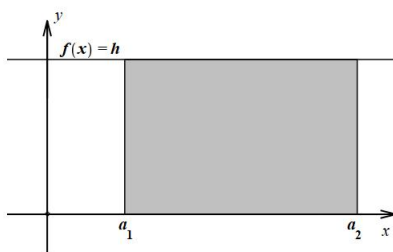
Dedução das fórmulas de cálculo de áreas utilizando integral

Primeiramente iremos posicionar as nossas formas geométricas em lugares específicos do plano cartesiano xOy apenas para facilitar os cálculos, mas garantindo que as fórmulas ainda irão valer, ou seja iremos colocar as figuras em locais específicos, mas mantendo as medidas genéricas.

4.1 Área do Retângulo

Seja $f(x) = h$ e as retas $x = a_1$, $x = a_2$ e $y = 0$. Podemos observar que h será a *altura* do retângulo e $a_2 - a_1$ será a *base*(b), como na figura 4.1.

Figura 4.1: Retângulo



Fonte: Elaboração própria

Vamos utilizar a integral de Riemann para calcular área desta região, da seguinte

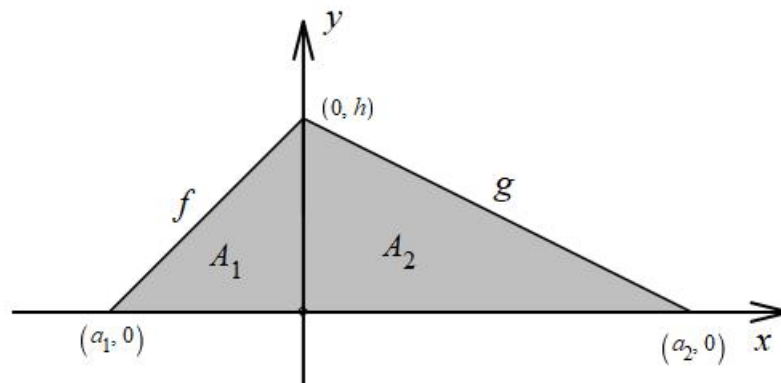
forma:

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_2} h \, dx &= h \int_{a_1}^{a_2} dx \\ &= h [x]_{a_1}^{a_2} \\ &= h [a_2 - a_1] \\ &= bh\end{aligned}$$

4.2 Área do Triângulo

Podemos representar um triângulo no plano cartesiano ao colocarmos 3 pontos arbitrários com dois deles estando sobre o eixo x e o terceiro no eixo y e ligarmos eles com segmentos de reta como na figura 4.2:

Figura 4.2: Triângulo



Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, podemos descrever um triângulo qualquer cuja medida dos seus lados e conseqüentemente a área que ele delimita estão variando. Vamos calcular a área dessa região, primeiramente dividindo esse triângulo em duas áreas menores (A_1, A_2) e calcularemos separadamente e depois somaremos ambas.

Para calcular a área de A_1 iremos calcular a integral no intervalo $[a_1, 0]$ e a função f será a reta que passa pelos pontos $(a_1, 0)$ e $(0, h)$, reta esta que ao substituirmos os

pontos em $f(x) = ax + b$, iremos obter $f(x) = -\frac{hx}{a_1} + h$:

$$\begin{aligned}
 \int_{a_1}^0 -\frac{hx}{a_1} + h \, dx &= \int_{a_1}^0 -\frac{hx}{a_1} \, dx + \int_{a_1}^0 h \, dx \\
 &= -\frac{h}{a_1} \int_{a_1}^0 x \, dx + h \int_{a_1}^0 dx \\
 &= -\frac{h}{a_1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{a_1}^0 + h[x]_{a_1}^0 \\
 -\frac{h}{a_1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{a_1}^0 + h[x]_{a_1}^0 &= -\frac{h}{a_1} \left[\frac{0}{2} - \frac{a_1^2}{2} \right] + h[0 - a_1] \\
 &= -\frac{h}{a_1} \left[-\frac{a_1^2}{2} \right] + h[-a_1] \\
 &= \frac{ha_1^2}{2a_1} - ha_1 \\
 &= \frac{ha_1}{2} - ha_1 \\
 &= \frac{ha_1 - 2ha_1}{2} \\
 \text{Área de } A_1 &= -\frac{ha_1}{2}
 \end{aligned}$$

De forma análoga, para calcular a área de A_2 iremos calcular a integral no intervalo $[0, a_2]$ e a função f será a reta que passa pelos pontos $(a_2, 0)$ e $(0, h)$ esta que ao substituirmos os pontos em $f(x) = ax + b$, iremos obter $f(x) = -\frac{hx}{a_2} + h$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{a_2} -\frac{hx}{a_2} + h \, dx &= \int_0^{a_2} -\frac{hx}{a_2} \, dx + \int_0^{a_2} h \, dx \\
 &= -\frac{h}{a_2} \int_0^{a_2} x \, dx + h \int_0^{a_2} dx \\
 &= -\frac{h}{a_2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a_2} + h[x]_0^{a_2} \\
 &= -\frac{h}{a_2} \left[\frac{a_2^2}{2} - \frac{0}{2} \right] + h[a_2 - 0] \\
 &= -\frac{h}{a_2} \left[\frac{a_2^2}{2} \right] + h[a_2] \\
 &= -\frac{ha_2^2}{2a_2} + ha_2 \\
 &= -\frac{ha_2}{2} + ha_2 \\
 &= \frac{-ha_2 + 2ha_2}{2} \\
 \text{Área de } A_2 &= \frac{ha_2}{2}
 \end{aligned}$$

Somando a área de A_1 e A_2 temos

$$\begin{aligned} -\frac{ha_1}{2} + \frac{ha_2}{2} &= \frac{-ha_1 + ha_2}{2} \\ &= \frac{h(a_2 - a_1)}{2} \end{aligned}$$

Como $a_2 - a_1$ corresponde à base (b) do triângulo, então temos que para calcular a área do triângulo basta multiplicarmos a base (b) pela sua altura (h) correspondente e depois dividir por 2, da seguinte forma:

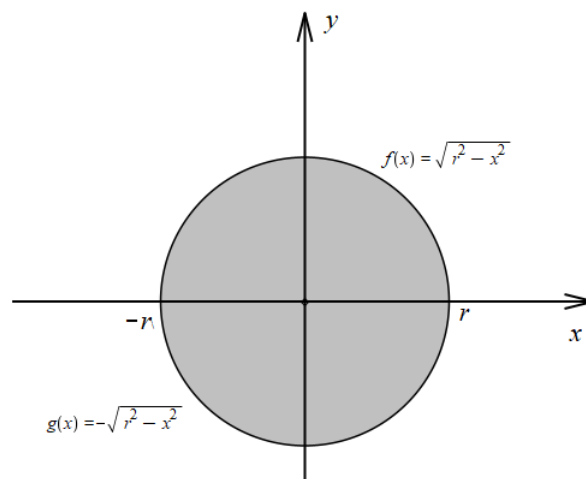
$$\text{Área do triângulo} = \frac{bh}{2}$$

4.3 Área do círculo

Temos que um círculo é a área delimitada por uma circunferência, que é um conjunto de pontos que distam (r) de um mesmo ponto O chamado de centro, figura 4.3.

Para calcularmos a área desta região utilizando a integral iremos tomar a parte superior do círculo como uma função ($f(x)$) e a parte inferior como outra função ($g(x)$) e a variação do x será de $-r$ até r . Logo, calcularemos a integral da seguinte forma:

Figura 4.3: Círculo



Fonte: Elaboração própria

Utilizando a propriedade $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ para calcular a área entre duas funções, teremos:

$$\int_{-r}^r \left[\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2}) \right] dx = \int_{-r}^r \left[\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\
&= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável de $x = r \operatorname{sen}\theta$ teremos que

$$dx = r \cos \theta \, d\theta$$

$$-r = x \Rightarrow -r = r \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$r = x \Rightarrow r = r \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen}\theta)^2} r \cos \theta \, d\theta &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta} r \cos \theta \, d\theta \\
2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta} r \cos \theta \, d\theta &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} \cos \theta \, d\theta \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \cos \theta \, d\theta \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta \, d\theta \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cos \theta \, d\theta \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{2r^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2\theta \, d\theta \\
&= r^2 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\
&= r^2 \left[\left(\theta\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\
&= r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\
&= r^2 \left[\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right]
\end{aligned}$$

Fazendo novamente uma mudança de variável, agora teremos que $u = 2\theta$, sendo assim

$$\begin{aligned} du &= 2 d\theta \Rightarrow \frac{du}{2} = d\theta \\ -\frac{\pi}{2} = \theta &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} = \frac{u}{2} \Rightarrow u = -\pi \\ \frac{\pi}{2} = \theta &\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{u}{2} \Rightarrow u = \pi \end{aligned}$$

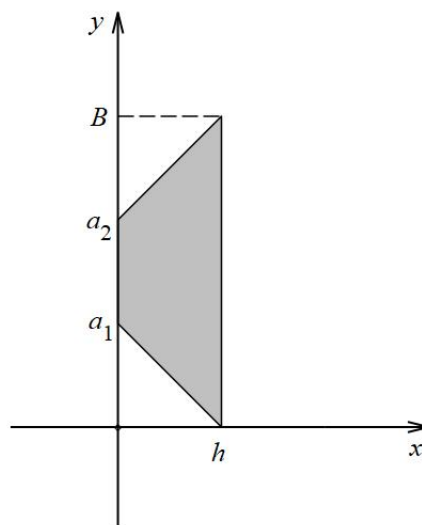
Logo,

$$\begin{aligned} r^2 \left[\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \right] &= r^2 \left[\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{2} du \right] \\ &= r^2 \left[\pi - \frac{1}{2} (\operatorname{sen} u)_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= r^2 \left[\pi - \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen}(-\pi)) \right] \\ &= r^2 [\pi] \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

4.4 Área do trapézio

Iremos colocar o trapézio no plano cartesiano, tal que, a base menor ($b = a_2 - a_1$) esteja sobre o eixo y e a base maior (B) seja a medida $x = h$ com y indo de 0 a B , figura 4.4

Figura 4.4: Trapézio



Fonte: Elaboração própria

Sendo assim para calcularmos a área dessa região iremos utilizar a integral da seguinte forma,

$$\int_0^h \left[\frac{(-a_2 + B)x}{h} + a_2 - \left(-\frac{a_1x}{h} + a_1 \right) \right] dx = \int_0^h \left[\frac{(-a_2 + B)x}{h} + a_2 + \frac{a_1x}{h} - a_1 \right] dx$$

Pois iremos calcular a área que está compreendida entre as retas

$$f(x) = \frac{(-a_2 + B)x}{h} + a_2 \text{ e } g(x) = -\frac{a_1x}{h} + a_1$$

A reta $f(x)$ passa pelos pontos $(0, a_2)$ e (h, B) e a reta $g(x)$ passa pelos pontos $(0, a_1)$ e $(h, 0)$.

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[\frac{(-a_2 + B)x}{h} + a_2 - \left(-\frac{a_1x}{h} + a_1 \right) \right] dx &= \int_0^h \left[\frac{(-a_2 + B)x}{h} + a_2 + \frac{a_1x}{h} - a_1 \right] dx \\ &= \int_0^h \frac{(-a_2 + B)x}{h} dx + \int_0^h a_2 dx \\ &\quad + \int_0^h \frac{a_1x}{h} dx - \int_0^h a_1 dx \\ &= \frac{(-a_2 + B)}{h} \int_0^h x dx + a_2 \int_0^h dx \\ &\quad + \frac{a_1}{h} \int_0^h x dx - a_1 \int_0^h dx \\ &= \frac{(-a_2 + B)}{h} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h + a_2 [x]_0^h \\ &\quad + \frac{a_1}{h} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h - a_1 [x]_0^h \\ &= \frac{(-a_2 + B)}{h} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{0}{2} \right] + a_2 [h - 0] \\ &\quad + \frac{a_1}{h} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{0}{2} \right] - a_1 [h - 0] \\ &= \frac{(-a_2 + B)}{h} \left[\frac{h^2}{2} \right] + a_2 h + \frac{a_1}{h} \left[\frac{h^2}{2} \right] - a_1 h \\ &= \frac{(-a_2 + B)h^2}{2h} + a_2 h + \frac{a_1 h^2}{2h} - a_1 h \\ &= \frac{(-a_2 + B)h}{2} + a_2 h + \frac{a_1 h}{2} - a_1 h \\ &= \frac{h}{2} [-a_2 + B + 2a_2 + a_1 - 2a_1] \\ &= \frac{h}{2} [B + a_2 - a_1] \end{aligned}$$

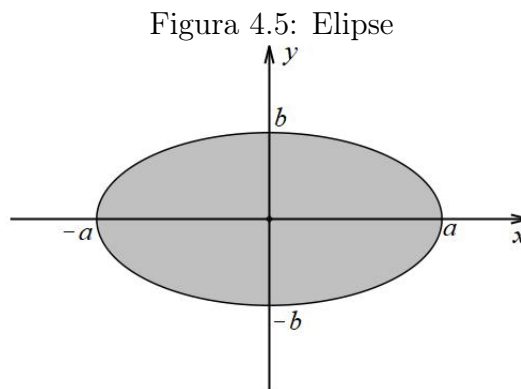
Como $a_2 - a_1$ corresponde à base menor (b) do trapézio, então temos que para calcular a sua área iremos somar as medidas da base maior B com a da base menor b ,

multiplicar pela altura h e dividir por dois, da seguinte forma:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(B + b)h}{2}$$

4.5 Área da Elipse

Para calcular a área da elipse iremos utilizar um método parecido com o que foi utilizado para calcular a área do círculo. Tomando uma elipse qualquer iremos utilizar um plano cartesiano, tal que a origem coincida com o centro da elipse como na figura 4.5.



Fonte: Elaboração própria

Sendo assim, temos que a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Isolando o y , teremos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Tomando agora a parte superior da elipse $\left(y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ como sendo uma função $f(x)$, a parte inferior $\left(y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ outra função $g(x)$ e o intervalo a ser utilizado será $[-a, a]$. Sendo assim, para calcular a área da elipse iremos calcular a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \left[\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \right] dx &= \int_{-a}^a 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável de $x = a \operatorname{sen}\theta$, teremos que

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$-a = x \Rightarrow -a = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$a = x \Rightarrow a = a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{2b}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen}\theta)^2} a \cos \theta \, d\theta &= \frac{2b}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} a \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} a \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{\cos^2 \theta} a \cos \theta \, d\theta \\ &= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ &= ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2\theta \, d\theta \\ &= ab \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\ &= ab \left[(\theta)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right] \end{aligned}$$

Vimos anteriormente que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta$ é igual a zero, portanto, temos que

$$\begin{aligned} ab \left[(\theta)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] &= ab \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= ab \left[\frac{2\pi}{2} \right] \\ &= ab \pi \end{aligned}$$

Logo, para calcular a área da elipse utilizaremos a fórmula $ab \pi$.

Capítulo 5

Considerações finais

O estudo da integral de Riemann e sua utilização como ferramenta para calcular áreas é importante para quem se interessa por tal assunto, tendo em vista que com a utilização da referida integral pode-se calcular as áreas de regiões complexas.

Além disso, no final do trabalho foi feita uma relação com o que é aprendido desde o ensino fundamental sobre o cálculo de áreas de figuras planas com o cálculo de áreas utilizando a integral. Essa relação mostra uma dedução de fórmulas de um ponto de vista que não envolve apenas geometria, mas o cálculo diferencial e integral.

Bibliografia

- [1] GUIDORIZZI, HAMILTON L **Um Curso de Cálculo**, Edição, LTC Editora , Vol. I, No. 5, (2001).
- [2] GOUVEIA, Rosimar. **Semelhança de Triângulos**. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos/>. Acesso em: 18 jun. 2023
- [3] SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Congruência e Semelhança de Triângulos**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/congruencia-e-semelhanca-de-triangulos.htm>. Acesso em 18 de junho de 2023.
- [4] GOUVEIA, Rosimar. **Áreas de Figuras Planas**. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/areas-de-figuras-planas/>. Acesso em: 18 jun. 2023
- [5] GOUVEIA, Rosimar. **Cônicas**. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/conicas/>. Acesso em: 18 jun. 2023