UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EWERTON LUIZ BASTOS CEARENSE

TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO: O CÁLCULO DE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS COM USO DO GEOGEBRA

Belém - Pará
2023

EWERTON LUIZ BASTOS CEARENSE

TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO: O CÁLCULO DE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS COM USO DO GEOGEBRA

.

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador(a) prof(a) Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Belém - Pará
2023

EWERTON LUIZ BASTOS CEARENSE

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO: O CÁLCULO DE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS COM USO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador(a) prof(a) Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma.

Data da apresentação:

Assinatura do(a) professor(a) orientador:
Prof. Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma

Assinatura do(a) professor(a) membro da banca:
Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Assinatura do(a) professor(a) membro da banca:
Prof. Dr. João Carlos Alves dos Santos

Belém – Pará

2023

Dedico este trabalho aos meus pais, pois, apesar das adversidades, em nenhum momento mediram esforços para que eu pudesse ter condições de acesso à educação de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e por sua graça que, no qual, é um presente imerecido. Sem dúvidas Ele esteve, e está, presente em minha vida desde meu nascimento, me protegendo e guardando. Durante o curso, pude sentir sua presença, principalmente durante os momentos mais difíceis, onde conduziu boas pessoas que puderam facilitar, de certa forma, o cumprimento de meus objetivos.

Aos meus pais, Edeney Luiz de Souza Cearense e Elizângela Suely Bastos Cearense, exímios conselheiros, que foram grandes incentivadores do estudo e me proporcionaram o melhor daquilo que poderiam oferecer. À minha avó Ana Célia Piquet Santana por todo amor e carinho. A todos meus tios e familiares que a todo instante torcem por meu sucesso.

Ao meu orientador professor Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma por prontamente aceitar a proposta inicial do pré-projeto que originou este trabalho. Além disso, me auxiliou oferecendo diversos materiais que enriqueceram tal pesquisa e me incentivou à medida que surgiam entraves durante os avanços da escrita deste projeto. Sem dúvida foi um prazer ser orientado por este grande profissional.

À equipe de professores do Instituto de Ciências Exatas e Naturais que é formada por excelentes profissionais. Aos funcionários pertencentes a Faculdade de Matemática que foram prestativos, dispostos a responder minhas indagações e sempre aptos a resolver transtornos quando surgiam. Aos amigos e colegas que fiz durante o curso por todo companheirismo e ajuda quando solicitei. Aos professores que fizeram parte de minha formação básica e, também, aos outros profissionais da educação que tive contato durante as disciplinas de Estágio Supervisionado.

“Compre a verdade, a sabedoria, a instrução e o bom senso, mas não venda nenhum deles. O pai que tem um filho correto e sábio ficará muito feliz e se orgulhará dele. Faça que o seu pai se alegre por causa de você; dê à sua mãe esse prazer.”

(Provérbios 23:23-25)

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo geral propor o uso do Geogebra para o cálculo de área de regiões poligonais. Para isso, no primeiro momento, trazemos alguns aspectos do desenvolvimento histórico do cálculo de área do antigo Egito até a era moderna. Em seguida, mostramos as definições, Teoremas e Postulados da geometria plana que fundamentam o cálculo de área. Além disso, falamos sobre o contexto em que vivemos demonstrando porquê usar o Geogebra e tecnologias digitais na educação. Apresentamos um tutorial de como calcular área de regiões poligonais no software Geogebra assim como aplicar a Fórmula de Pick no mesmo programa. Por fim, visando a aplicação no ensino básico, deixamos um exemplo de atividade usando o Geogebra para determinar a área aproximada de uma região contida em um mapa.

Palavras-chave: Cálculo de área. Geogebra. Regiões poligonais. Tecnologias digitais na educação.

ABSTRACT

This Course Completion Work has the general objective of proposing the use of Geogebra to calculate the area of polygonal regions. To do this, firstly, we bring some aspects of the historical development of area calculation from ancient Egypt to the modern era. Next, we show the definitions, theorems and postulates of plane geometry that underlie the area calculation. Furthermore, we talk about the context in which we live, demonstrating why to use Geogebra and digital technologies in education. We present a tutorial on how to calculate the area of polygonal regions in the Geogebra software as well as apply the Pick Formula in the same program. Finally, aiming for application in basic education, we leave an example of an activity using Geogebra to determine the approximate area of a region contained on a map.

Keywords: Area calculation. Geogebra. Polygonal regions. Digital technologies in education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

a.C.	Antes de Cristo
a.E.C.	Antes da Era Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
d.C.	Depois de Cristo
DNC	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
LBD	Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos e discutimos nesta pesquisa os aspectos relativos à inserção das tecnologias digitais da educação para o ensino do cálculo de área de regiões poligonais por meio do *software* Geogebra.

Geogebra é um *software* educacional gratuito que permite aos seus usuários desenvolver diversas tarefas envolvendo matemática. Dentre suas funcionalidades, podemos citar a criação de gráficos de funções, gerar sólidos geométricos, criar figuras geométricas planas, calcular o conjunto solução de equações algébricas, desenvolver aplicativos através da linguagem Javascript, entre outras atividades. Sendo assim, devido sua versatilidade, seu uso pode ser aplicado desde a educação básica até em cursos de nível superior.

Neste viés, Sagica (2022), deixa claro que quando o professor propõe o uso das tecnologias em sala, as aulas tendem a se tornar mais atrativas e didáticas, proporcionando um considerável desenvolvimento cognitivo dos alunos. Portanto, no decorrer deste texto, apresentaremos a importância do uso das tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem dos alunos do ensino fundamental.

O desenvolvimento desta pesquisa foi realizado de acordo com os objetivos estipulados. Nesse contexto, o objetivo geral consiste em propor o uso do Geogebra para o cálculo de área de regiões poligonais.

Para isso, faremos um breve resumo histórico do cálculo de áreas de regiões poligonais, retratando desde o antigo Egito até a Era Moderna. Em seguida, mostraremos os aspectos relacionados a tecnologias digitais na educação detalhando o software Geogebra e suas funcionalidades. Por fim, com embasamento da BNCC, sugerimos uma atividade que pode ser empregada no ensino fundamental com a utilização deste software.

2 UMA HISTÓRIA DAS FIGURAS POLIGONAIS

Neste capítulo, fizemos um breve resumo sobre a história do cálculo de área. Assim, começamos a analisar desde os primórdios das civilizações, no Egito e Babilônia, indo para o desenvolvimento da geometria na Grécia, destacando o papel de Euclides na estruturação da geometria com seu livro Elementos, chegando até a matemática moderna com o surgimento de outros pensamentos em torno de mensurar área de uma região poligonal.

2.1 Egito e Babilônia

Eves (2011) destaca que o começo da civilização humana, por volta de cinco milhões de anos a.C., no período Paleolítico, foi marcado por povos situados em torno da África, sul Europeu, sul Asiático e América Central. Até então, eram caçadores e coletores vivendo em intensa mudança na busca por sobrevivência. Devido às características desses povos, pouca contribuição científica foi constatada. Após vários anos, agora, no período Neolítico, o homem iniciou a troca de seus costumes pela agricultura e domesticação de animais criando sociedades que ficavam em torno de rios para ter proveito da presença da água e solo fértil. Isso posto, iniciou-se a construção do saber científico e desenvolvimento da matemática.

Assim, devido aos novos hábitos, surgiram necessidades relacionadas a contagem (para mensurar a quantidade de grãos coletados), área (para o plantio de sementes), volume, entre outras. Sobre o surgimento da geometria, temos alguns relatos que nos dão noções de como, e onde ocorreu.

De acordo com Lintz (2007, p.189),

> Segundo nos conta Heródoto [58], II, 110, a geometria nasceu do problema da área quando Sesóstris, rei do Egito, dividiu todo o país em quadrados de igual área que foram distribuídos entre a população e, de acordo com a produção de cada um, eram cobrados os impostos. Ora, quando o Nilo trasbordava, parte das terras ficava inaproveitável e, então, seus proprietários poderiam deduzir dos impostos a quantia proporcional à área inundada. Daí, o interesse em comparar as várias áreas e a invenção dos métodos apropriados. (LINTZ, 2007, p.189)

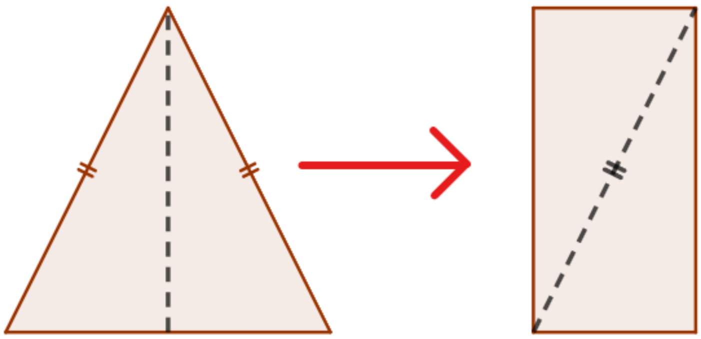
É válido ressaltar que, apesar de Heródoto alegar que a geometria surgiu no Egito, sabemos que existem provas de que possivelmente conhecimentos relacionados a este ramo da matemática possuem raízes antepassadas. Segundo Boyer (1974), o homem neolítico já apresentava provas de que fazia uso de características como simetria e congruência ao criar seus utensílios.

Retomando, é evidente que problemas relacionados a área de regiões poligonais fazia parte da vivência do povo egípcio além da noção de proporcionalidade ligada a este raciocínio, já que constantemente conviviam com as cheias do Rio Nilo. Então, saber distribuir área entre figuras equivalentes atribuía aos cidadãos o embasamento para tomar a melhor decisão possível. Além do problema destacado, podemos citar outros que estão descritos em papiros que nos apontam o amplo domínio de geometria por parte dessa sociedade.

No problema 49 do Papiro de Ahmes, ocorre o cálculo de área do retângulo com 10 jet de comprimento e 1 jet e largura (jet correspondia a uma unidade de comprimento, onde um jet representava cem meh que, convertendo, equivale aproximadamente 0,457 metros). Para isso, usavam procedimentos similares aos que temos hoje multiplicando a medida da base pela altura. Note que, a partir desse momento, os egípcios já detêm um método para encontrar a área de retângulos. Esse passo foi fundamental para que pudessem determinar área de outras figuras geométricas por meio de decomposição.

Ainda nesse mesmo papiro, no problema 51, Boyer (1974, p.13) afirma que "a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamamos base e multiplicando isso pela altura". De fato, pelo o que foi exposto no parágrafo anterior, podemos entender como tal processo funciona. Observe a Figura 1, note que podemos dividir um triângulo isósceles em dois triângulos retângulos e transformá-lo num retângulo com mesma área do triângulo inicial e, enfim, determinar a área procurada multiplicando a medida da base pela altura.

Figura 1 - Área do Triângulo Isósceles no Egito



Fonte: Autoria própria.

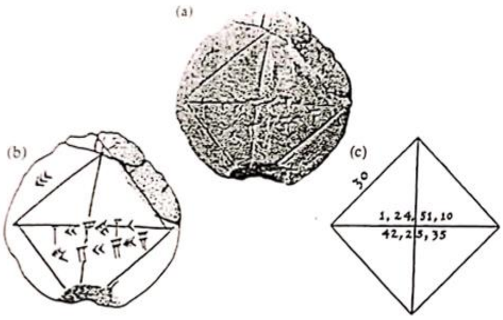
Esse método se tornava viável pois os egípcios acreditavam que figuras geométricas poderiam ser decompostas de modo a formar retângulos e, assim, era possível a obtenção da respectiva área. Logo, fica evidente o fato de que podemos estabelecer relações entre figuras de modo que tenhamos caso de congruência entre elas.

O conhecimento geométrico desse período estava, sobretudo, ligado a questões territoriais, se tornando indispensável para o desenvolvimento de tal sociedade. Em um certo momento, eles já detinham tanto conhecimento sobre cálculo de área de polígonos, que deduziram, ainda naquela época, um método aproximado para obtenção da área do círculo. Isso é evidente no problema 48 presente no Papiro de Ahmes, onde,

> Neste problema, o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades, dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo áreas 4 1 / 2 unidades. A área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito num quadrado, é sessenta e três unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. (BOYER, 1974, p. 13)

Assim como no Egito, a Babilônia também se destacou por avanços matemáticos. Além do que diz respeito ao desenvolvimento em álgebra, os babilônios também criaram métodos de comparação e cálculo de área. Mesmo não sendo totalmente o foco desse povo, nos deixaram, como vestígios, textos matemáticos cunhados em uma espécie de tabletes de argila que continham problemas, dentre eles, associados a geometria. Podemos mencionar a obtenção da medida aproximada para $\sqrt{2}$ que estava interligado ao cálculo da diagonal de um quadrado de lado 30 (Figura 2). Também é nítido o uso do Teorema de Pitágoras para mensurar a diagonal.

Figura 2 - Problema da Diagonal do Quadrado



Fonte: Aaboe (2002).

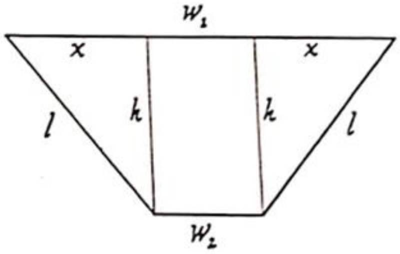
Observe que considerando l e d a medida do lado do quadrado e da sua diagonal, respectivamente, temos, pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = l^2 + l^2$ e, após algumas manipulações, $d = l\sqrt{2}$. Vemos na figura acima (Figura 2) a escrita $1{,}24{,}51{,}10$ que, na base sexagesimal, é uma aproximação de $\sqrt{2}$. Também note a escrita $42{,}25{,}35$ que, por sua vez, é aproximadamente $42{,}426388$ se assemelhando da medida da diagonal do quadrado de lado 30 já que, usando $d = l\sqrt{2}$, temos $d = 30\sqrt{2} \approx 42{,}426406$.

Existe o registro do problema do cálculo de área do trapézio isósceles (Figura 3), como descrito por Aaboe (2002, p.28-29),

> [em] Um trapézio 30 é o comprimento, 30 o segundo comprimento, 50 a largura superior, 14 a largura inferior. 30 vezes 30 é 15,0. Subtraia 14 de 50 e o resultado é 36. Metade disso é 18. 18 vezes 18 é 5.24. Subtraia 5,24 de 15,0 e o resultado é 9,36. O que deveríamos multiplicar por sí próprio para que o resultado seja 9,36? 24 vezes

24 é 9,36. 24 é a reta divisora. Adicione 50 e 14, as larguras, e [o resto é] 1,4. Metade disso é 32. Multiplique por 24, a reta divisora, por 32, e o [resultado] é 12,48...

Figura 3 - Problema da Área do Trapézio Isósceles



Fonte: Aaboe (2002).

Explicando melhor, sejam l, w_1, w_2, nessa ordem, as medidas dos lados, base maior e menor. Segundo a citação anterior, $l = 30, w_1 = 50$ e $w_2 = 14$. Perceba que $w_1 = x + w_2 + x \Rightarrow x = \frac{w_1 - w_2}{2}$. Substituindo w_1 e w_2, obtemos $x = \frac{50-14}{2} = 18$. Agora, precisamos encontrar a medida h. Tomando um dos triângulos retângulos laterais, pelo Teorema de Pitágoras, $l^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - x^2$, consequentemente, $h^2 = 30^2 - 18^2$. Usando o sistema sexagesimal, $30^2 = 15{,}0$ e $18^2 = 5{,}24$ daí segue $h^2 = 15{,}0 - 5{,}24 \Rightarrow h = \sqrt{9{,}36} = 24$. Sendo A a área do trapézio isósceles, $A = \frac{(w_1 + w_2)}{2} h = 32 \cdot 24 = 768$, como $768 = 12{,}48$ (no sistema sexagesimal), logo $A = 12{,}48$ unidades de área.

Com aquilo que foi apresentado até agora, podemos dizer que os egípcios e babilônios conseguiram apenas determinar medidas para casos particulares vinculados a cada problema. Portanto não temos uma generalização ou formulação geral para solução de outros. No tocante a isso, sabemos que devido à ausência de regras pré-estabelecidas, eles não tinham a preocupação com a formalidade em provar o raciocínio matemático por volta das questões que resolviam. Devido a esse fator, não sabiam distinguir quando estavam trabalhando com exatidão ou aproximação de um dado valor que poderia estar relacionado a área, comprimento, largura, dentre outros.

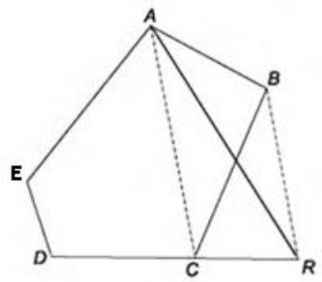
2.2 Grécia Antiga

Certo tempo depois, o progresso de Egito e Babilônia sofreu declínio dando espaço para o fortalecimento de outras civilizações que se fundaram por intermédio do crescimento do comércio. A Grécia, nesta época, era dividida em pequenas cidades-Estado e sediaram o crescimento do racionalismo. Com isso, o homem começou a se relacionar em sociedade discutindo e questionando sobre cultura, religiosidade, organização política, dentre outros assuntos. Não se diferenciando dos demais quesitos, vários resultados matemáticos foram colocados a prova, o que impulsionou o desenvolvimento desta ciência. Na ilha grega de Samos, existia um homem chamado Pitágoras que foi o responsável por demonstrar o teorema famoso que leva seu nome, estabelecendo que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Pitágoras atribuiu resultado geométrico para equações quadráticas (chamado de álgebra geométrica) utilizando, principalmente, proporções e o método de aplicação de áreas que consistia em determinar a área de um polígono dado por meio da transformação deste em outra figura plana mais simples – como retângulo ou triângulo - que, no qual, poderiam encontrar trivialmente sua área. Eves (2007, p.113), apresenta o que seria uma das soluções para este problema

> Considere um polígono qualquer ABCD... (Ver Figura 3). Trace BR paralela a *AC*, sendo R a intersecção com DC. Então, como os triângulos *ABC* e *ARC* têm base comum *AC* e alturas iguais relativas a essa base comum, esses triângulos têm áreas iguais. Segue-se então que os polígonos *ABCD...* e *ARD...* têm áreas iguais. Mas o polígono derivado tem um lado a menos que o polígono original. Repetindo-se esse processo, chega-se ao fim a um triângulo com mesma área do polígono dado.

Figura 4 - Método de Aplicação de Áreas



Fonte: Eves (2007).

Ainda na Grécia, a preocupação em estabelecer uma coerência na ordem dos fundamentos que constituem a matemática tomava conta dos filósofos. Certo tempo depois, “Aristóteles desenvolverá uma lógica, na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração” (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p.51). Platão também foi um dos que se questionou sobre a informalidade da matemática e iniciou a busca pelo rigor descrito acima, estabelecendo, na Academia Platônica, um caráter criterioso que impulsionou esta tendência pela Grécia e, mais tarde, Euclides levaria em conta ao escrever seu livro, Elementos.

Por volta de 430 e 410 a.E.C., a matemática pré-euclidia lidava com o problema da incomensurabilidade. Segundo Roque e Pitombeira (2012, p.59), “o fato de dois segmentos não serem comensuráveis significa que não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos". Perceba que, quando medimos, na verdade, estamos fazendo uma comparação com uma dada unidade de medida considerada padrão. Lima (1992) expõe que, devido a existência de segmentos incomensuráveis, não podiam fazer, por exemplo, a medição de comprimentos e, ocasionalmente, seria inviável relacionar um número em que se possa representar a grandeza área. Grande parte dos escritores sobre história da matemática afirmam que o descobrimento de grandezas incomensuráveis surgiu a partir do problema geométrico de se encontrar a medida da diagonal do quadrado.

Eves (2011) nos deixa claro que em 338 a.C., as cidades-Estado pertencentes ao território grego perderam força e foram anexadas, por Filipe II, ao império macedônico. Após falecer, seu filho, Alexandre, o Grande, assumiu o império. Visando o crescimento da influência da Macedônia sobre outras regiões, Alexandre conquistou o império Persa que já contava com regiões do Egito e Babilônia. No Egito, em 332 a.C., fundou a cidade de Alexandria que, devido à localização privilegiada em rotas comerciais, se tornaria, tempos depois, uma das cidades mais promissoras da época.

Ainda segundo Eves (2011), depois da morte de Alexandre, o território babilônico foi dividido e Ptolomeu assumiu o Egito. Sendo assim, o mesmo não mediu esforços para dar continuidade ao crescimento da cidade. Então, visando isso, promoveu a criação da universidade de Alexandria e convidou diversos intelectuais para auxiliar no gerenciamento da instituição. Dentre os convidados estava o Grego Euclides, escolhido para coordenar o departamento de matemática.

Escrita por volta de 300 a.E.C., sendo composto por treze livros, os Elementos, contém, além de grande parte de conceitos relacionados a geometria, informações sobre teoria dos números e álgebra. Muitos autores classificam esta obra da seguinte forma: Geometria Plana (livros I-VI), Aritmética (livros VII-IX) e Geometria Espacial (livros XI-XIII). Na época de Euclides, grande parte dos problemas geométricos giravam em torno da quadratura de figuras planas e construção de polígonos com o uso de régua e compasso. Assim, "no Livro IV de seus *Elementos*, discute a construção com régua e compasso de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 15 lados" (EVES, 2011, p.178). Sua obra foi importante pois definiu um marco nos métodos de ensino até então. Assim, a matemática ensinada passou a ser fundamentada em uma ordem lógica.

No texto, será perceptível que, em nenhum momento, Euclides afirma que a medida da área de uma determinada figura pode ser obtida por uma fórmula. O próprio nem mesmo define área em seu livro. Tudo que está presente em sua obra, a respeito do assunto, até o livro II, consiste em comparações entre figuras congruentes. No livro VI começa a ser explorado o conceito de semelhança entre polígonos e o que é relativo à razão entre figuras semelhantes. Isso posto, faremos uma breve exposição sobre os principais pontos dos livros I e II efetuando comentários referente ao tema desta pesquisa.

No livro I, ocorre a apresentação das definições, postulados e noções comuns. Sobre a primeira, Euclides (2009, p.97) define

> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
> 2. E linha é comprimento sem largura.
> 3. E extremidades de uma linha são pontos.
> 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
> 5. Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
> 6. E extremidades de uma superfície são retas.
> 7. Superfície plana é a que está posta por igual sobre sí mesma.
>
> (...)
>
> 13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
> 14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

Até a definição 14, já sabemos o é superfície (o que nos remete a área) e figuras planas. Note também a presença da noção de fronteira que, nesse caso, exercerá o papel de delimitar a parte interior e exterior uma figura plana. Assim, continua definindo círculo, triângulo e quadriláteros. Após isso, Euclides faz a descrição dos postulados e das chamadas “noções comuns”. Segundo ele, sobre noções comuns,

> 1. As coisas iguais são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
>
> [4. E, caso iguais sejam adicionadas as desiguais, os todos são desiguais.
>
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo [é] maior do que a parte.
> 9. E duas retas não contêm área. EUCLIDES (2009, p.99)

O autor, Euclides, faz uso da palavra “igual” para se referir a congruência ou para indicar que duas figuras possuem a mesma área. Sendo assim, ressaltamos que, a partir de agora, usaremos também a palavra “igual” como o mesmo sentido adotado por ele. Note que na noção comum 1 e 7 temos uma lacuna para que possamos compreender um método chamado equivalência de áreas. Se pudéssemos decompor uma figura qualquer em outras iguais entre si, conseguimos realizar a adição entre elas e a área da soma das figuras formadas é igual a área da figura que foi decomposta. Sobre este método, sabemos, assim como foram expostos no presente texto, que egípcios e babilônios já praticavam esquemas similares.

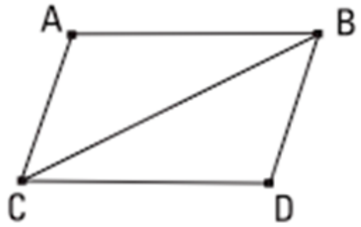
Euclides se propôs a sistematizar os cálculos comparando uma figura com a outra utilizando congruência de triângulos e equivalência de figuras planas tratadas entre as proposições 33 a 48, do livro I, assim como praticamente todo o livro II. Sobre isso, Roque e Pitombeira (2012, p.73) afirmam que

> Por exemplo, dadas duas regiões planas S_1 e S_2, elas são transformadas em quadrados equivalentes Q_1 e Q_2, respectivamente. É então fácil saber se as áreas dessas regiões são iguais, ou qual é a que tem menor área, ou se áreas de uma delas é múltipla uma da outra.
>
> Este processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente denomina-se "fazer quadratura" da região.

Portanto, no decorrer do texto Os Elementos, há uma preparação para o método descrito acima por Roque e Pitombeira. Faremos a apresentação das proposições que dão base a esta ideia. Na proposição 34 do livro I afirma que "das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas" (EUCLIDES, 2009, p.123).

Em outras palavras, significa que os lados opostos de um paralelogramo são iguais assim como seus ângulos opostos, além disso, sua diagonal o divide em duas partes. É trivial demonstrar isso justificando que, ao traçar a diagonal do paralelogramo, teremos dois triângulos congruentes pelo caso ALA. Logo, devido a isso, os lados opostos serão iguais tal como os ângulos opostos (Figura 5).

Figura 5 - Proposição 34



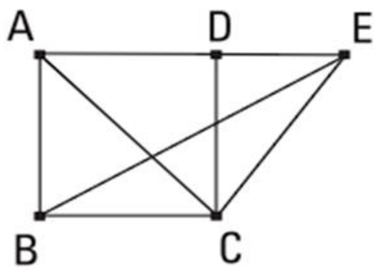
Fonte: Euclides (2009).

Entre as proposições 35 a 40 Euclides continua retratando sobre áreas paralelogrâmicas até chegar nas propriedades referentes a equivalência de áreas de triângulos. Enunciando tais proposições, na ordem descrita, temos

> “Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si”
>
> “Os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si”
>
> “Os triângulos que estão sobre mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si”
>
> “Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si”
>
> “Os triângulos iguais, que estão sobre mesma base, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas”
>
> “Os triângulos iguais, que estão sobre as bases iguais, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas” (EUCLIDES, 2009, p.124-127).

Chegando na proposição 41, Euclides (2009, p.128) afirma que “caso um paralelogramo tenha tanto mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo”. Perceba que agora trabalhamos com multiplicidade entre áreas. Na figura abaixo (Figura 6) temos um paralelogramo ABCD com área igual ao dobro do triângulo BEC. A demonstração é feita utilizando as proposições 34 e 37. Os triângulos BAC e BEC possuem mesma base e estão nas mesmas paralelas, logo são iguais. Em seguida, a diagonal AC do paralelogramo ABCD divide o mesmo em BAC e DAC que são, também, triângulos iguais. Dessa forma, o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC.

Figura 6 - Proposição 41



Fonte: Euclides (2009).

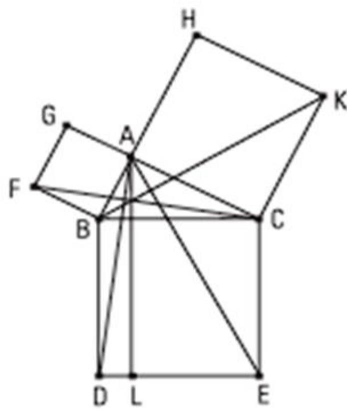
Continuando, temos as proposições 42 a 46, respectivamente, que abordam principalmente problemas relacionados a construção de paralelogramos

> “Construir um paralelogramo igual ao triângulo dado, no ângulo retilíneo dado”
>
> “Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo são iguais entre si”
>
> “Aplicar à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado”

> "Construir, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à retilínea dada"
> "Descrever um quadrado sobre a reta dada" (EUCLIDES, 2009, p.128-132).

Ao chegar na proposição 47, temos que "nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto" (EUCLIDES, 2009, p.132). Note que este é o Teorema de Pitágoras que é demonstrado sem qualquer uso de proporções. Aqui, Euclides usa somente equivalência de áreas para prová-lo. Agora sabemos adicionar a área de dois quadrados cujos lados estão contidos nos catetos do triângulo retângulo e a soma deles resulta no quadrado cujo o lado está compreendido na hipotenusa desse mesmo triângulo. Na figura abaixo (Figura 7), a soma dos quadrados AGFB e AHKC resulta no quadrado BCED.

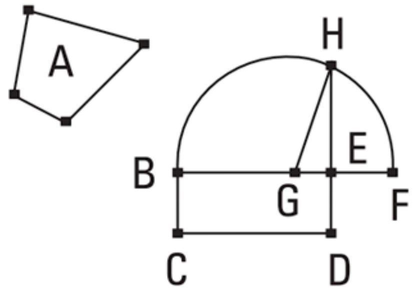
Figura 7 - Teorema de Pitágoras Segundo Euclides



Fonte: Euclides (2009).

No livro II, ocorre a exposição de definições, construções geométricas (como o quadrado da soma e da diferença) e propriedades de triângulos. Lá, Euclides propõe um problema que remete ao método de quadratura que Roque e Pitombeira descreveram. Na proposição 14 temos: "construa um quadrado igual à retilínea dada." (EUCLIDES, 2009, p.149). Para resolver o problema, Euclides sugere que, dada a retilínea A, devemos transformar A em um retângulo igual BEDC. Se após isso BEDC é quadrado, o problema está resolvido. Caso contrário, prolongamos BE tal que tenhamos EF igual a ED. Cortamos BF em um ponto G gerando partes iguais. Em G, traçamos um semicírculo de raio GB e prolongamos ED até H obtendo EH. Trace GH. O problema é solucionado aplicando as relações de equivalências descritas acima e o Teorema de Pitágoras, onde, após algumas manipulações envolvendo figuras semelhantes, é concluído que o quadrado de lado HE corresponde ao lado do quadrado igual ao retângulo BEDC que é igual a retilínea dada A.

Figura 8 - Quadratura de Uma Região Poligonal



Fonte: Euclides (2009).

Dando prosseguimento aos fatores históricos, posteriormente a Euclides, outro matemático que teve destaque foi Heron de Alexandria, que viveu no século I d.C., sendo um dos primeiros matemáticos que se dedicou ao que chamamos de matemática aplicada. Em sua obra Métrica expõe estudos sobre "medida de segmentos, figuras geométricas, volumes, massa etc. que aparecem em problemas de agronomia, construção civil, construção de máquinas etc. que caiam dentro de sua especialidade" (LINTZ, 2007, p.283). Heron deu uma característica puramente numérica para problemas que Euclides trava de forma geométrica. Assim, foi possível deduzir uma fórmula para o cálculo de área de triângulos quando conhecemos as medidas de seus respectivos lados, cuja é dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo obtido por $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

2.3 Era moderna

Segundo Roque e Pitombeira (2012), ainda no século XVII a matemática era extremamente ligada aos resultados gregos e ao conhecimento geométrico estabelecido no livro Os Elementos. Portanto, aos poucos houve a necessidade de criar métodos referentes a aplicação do saber constituído até então. Agora, a sociedade cria consciência de que o conhecimento técnico poderia agregar melhorias no aspecto social. O caráter demonstrativo da matemática grega foi concebido como uma das formas de se resolver problemas práticos. Inclusive, René Descartes, neste aspecto, apropriou-se disso para o estudo da chamada óptica geométrica.

Descartes defendia que deveria haver preocupação com aquilo que pode ser quantificado e relacionado a problemas práticos. Assim, a matemática desenvolvida em tal período histórico era vista como uma ferramenta para compreender os fenômenos físicos que cercavam o mundo. Ressaltamos que grande parte dos avanços foi no estudo de curvas que estava relacionado à física para entender, por exemplo, o movimento. Sobre isso,

> Podemos dizer que a época é marcada por uma concepção geral das curvas que não se limitava ao estudo de curvas particulares, ampliando o universo dos objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p.192)

Inclusive, nesse momento, há a preocupação em se determinar a área compreendida entre curvas assim como a reta tangente à curva dada, o que ocasiona a mudança de perspectiva em relação a polígonos, como exposto abaixo.

> Nos trabalhos do fim do século XVII, o conceito de curva recobre três concepções: a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e curva como polígono com número infinito de lados. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p.193)

Outro matemático que desempenhou um papel significativo na expansão do conhecimento sobre área foi Cavalieri, pois o mesmo criou uma ferramenta chamada Método dos Indivisíveis que consistia em subdividir polígonos em tiras indivisíveis. Portanto, “a área de uma figura seria dada pela soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelos” (ROQUE, 2012, p.129). Posteriormente, esse método ganhou uma nova roupagem onde passaria a considerar área como a soma de um número indefinido de retângulos. Com isso, diferentemente dos gregos antigos, o resultado do cálculo de área passou a ter um caráter puramente analítico e não transformado em uma outra área como sugerido por Euclides. Esses resultados foram importantes para a evolução do cálculo. Pascal e Fermat nos dão exemplos de como isso poderia ser feito

> Para calcular a área da parábola $y= x^2$ entre dois pontos O e B, constroem-se retângulos sobre as abscissas de pontos de distância d, 2d, 3d,..., nd. Há n retângulos cujas bases medem sempre d, e suas alturas, de acordo com a equação da parábola, serão dadas, respectivamente, por d^2, $4d^2$, $9d^2$,..., n^2d^2. (ROQUE, 2012, p.130)

A partir dos fatos citados acima, podemos concluir que a atribuição do caráter analítico à matemática permitiu que, na era moderna, fosse possível garantir uma maior generalidade do conceito de área. Além disso, percebemos que, diferentemente da matemática grega, com o conceito dos métodos infinitesimais foi possível expandir o cálculo de área para curvas.

2.4 Polígono e o atual conceito de área

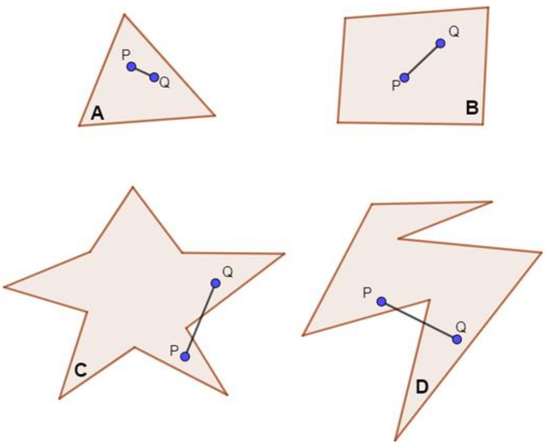
Nessa seção, faremos a apresentação da definição dos polígonos que serão construídos com o auxílio do Geogebra. Para isso, haverá a exibição de definições primárias que dão suporte para as vindouras. Começaremos por conjunto convexo até, enfim, definir os respectivos polígonos. Em seguida, abordaremos o atual conceito de área e demonstraremos as fórmulas para o cálculo de área das principais figuras poligonais planas. Deixamos claro que usaremos constantemente definições, postulados e teoremas presentes no livro Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas dos autores Rezende e Queiroz (2008), mantendo, esporadicamente, as numerações atribuídas por eles. É válido ressaltar que às vezes algumas consequências das definições tratadas não serão descritas. Portanto, novamente, recomendamos a leitura do livro citado para que o leitor fique a par dos assuntos aqui abordados.

2.4.1 Conjunto convexo

Precisamos definir conjunto convexo para que possamos, posteriormente, falar sobre polígono convexo. Então, Rezende e Queiroz (2008, p. 20), definem que "um conjunto é convexo se, para todo par de pontos distintos P e Q desse conjunto, o segmento $\overline{PQ}$ está inteiramente contido nele".

Na figura abaixo (Figura 9), temos os conjuntos A e B convexos, onde $\overline{PQ}$ é segmento contido em cada um deles. Vemos o oposto disso nos conjuntos C e D, onde é possível traçar $\overline{PQ}$ com parte do segmento fora dos conjuntos correspondentes.

Figura 9 - Conjunto Convexo



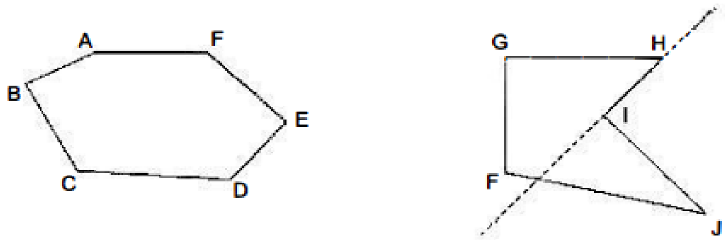
Fonte: Autoria própria.

2.4.2 Definição de Polígono

> Definição. Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:
>
> (a) nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.
>
> (b) nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.
>
> A união de segmentos $\overline{A_1A_2}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ é chamada polígono, o qual denotamos por $A_1A_2...A_n$.
>
> Os pontos $A_1, \dots, A_n$, são chamados *vértices* do polígono e os segmentos são seus *lados*.
>
> A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada perímetro do polígono. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.26)

Com a definição supracitada podemos classificar polígonos como convexo e não convexo. Ainda segundo Rezende e Queiroz (2008, p.27), "um polígono é dito convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados". Obviamente, caso aconteça o contrário o polígono será não convexo. Assim, podemos imaginar a representação de um polígono convexo e não convexo a partir da figura abaixo.

Figura 10 - Polígono Convexo e Não Convexo



Fonte: Rezende e Queiroz (2008, p.26).

Acima, temos o polígono $ABCDEF$ convexo. Perceba que o polígono $FGHIJ$ não é convexo pois F e G estão em semiplanos opostos em relação a reta que contém o lado $\overline{HI}$. Em cada um dos vértices do polígono, teremos ângulos. Logo, Rezende e Queiroz (2008, p.26-27) afirmam que

> Os *ângulos* do polígono convexo são $A_{i-1}\hat{A}_i \ldots A_{i+1}$, $i = 2, \ldots, n - 1$, e os ângulos $A_{n-1}A_nA_1$ e $A_nA_1A_2$.
>
> São chamados *ângulos externos* do polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_n$ cada um dos ângulos $B_iA_iA_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n-1$, $B_nA_nA_1$ e $B_1A_1A_2$ em que B_i, distinto de A_i, é um ponto qualquer da semirreta oposta a $\overrightarrow{A_\iota A_{\iota-1}}$; B_n, distinto de A_n, está na semi-reta oposta à $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$; e B_1, distinto de A_1, está na semi-reta oposta $\overrightarrow{A_1A_n}$, ou também os seus correspondentes ângulos opostos pelo vértice. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.26-27)

Sobre a nomenclatura dos polígonos, temos que os mesmos são denominados com a quantidade de seus lados.

> Dessa forma, um polígono de 3 lados é chamado *triângulo*; um de 4 lados, *quadrilátero*; um de 5 lados *pentágono*, um de seis lados, *hexágono* e, assim, um de *n* lados é chamado *n-ágono*.
>
> Um polígono regular é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p. 27)

Com isso, Rezende e Queiroz (2008) supõem que se um ponto P está na interseção dos interiores dos ângulos do polígono convexo, então, este ponto é chamado ponto interior do polígono. Além disso, chamamos de região poligonal convexa a união do polígono com o conjunto dos pontos interiores a ele.

2.4.3 Sobre Congruências

Como já mencionado, Euclides utilizava o termo "igual" para se referir a figuras congruentes. Hodiernamente, usamos o termo "congruência" para reportar sobre quando, por exemplo, dois segmentos possuem mesmo comprimento, duas figuras têm mesma área, dentre outras comparações. Nesse sentido, Rezende e Queiroz (2008, p.31) afirmam que

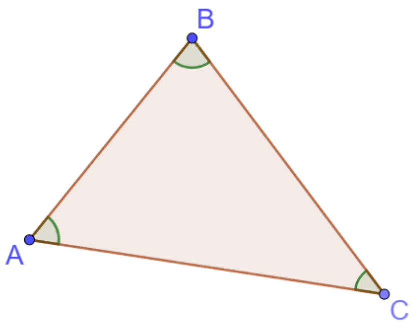
> a) Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida.
>
> b) Dois ângulos são congruentes quando possuem mesma medida.
>
> De maneira geral, de modo intuitivo, duas figuras planas são congruentes se uma delas puder ser deslocada, sem que sejam modificadas sua forma nem suas medidas até que passe a coincidir com a outra.

Ainda, podemos incluir o fato de que figuras planas congruentes detém propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

2.4.4 O Triângulo e Suas Classificações

Rezende e Queiroz (2008) definem triângulo como o polígono que contém três lados. Além disso, dado um triângulo ABC (Figura 11), o mesmo é composto por alguns elementos como vértices, lados, e ângulos internos. Portanto, neste caso, os vértices sãos os pontos: A, B e C. Os lados são os segmentos de reta que o constituem: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Já os ângulos internos, são $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$.

Figura 11 - Triângulo e Seus Elementos



Fonte: Autoria própria.

Dito isso, um triângulo pode ser classificado quanto ao seu lado ou quanto à medida de seus ângulos. Portanto,

> Quanto à medida de seus lados um triângulo pode ser chamado:
>
> (1) **triângulo equilátero**, quando possui os três lados dois a dois congruentes.

> (2) **triângulo isósceles**, quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado *base* do triângulo isósceles.
>
> (3) **triângulo escaleno**, aquele que em qualquer dois lados têm medidas diferentes.
>
> Quanto à medida de seus ângulos um triângulo pode ser:
>
> (1) **triângulo retângulo**, quando possui um ângulo reto. Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa* e os outros dois são chamados *catetos*.
>
> (2) **triângulo acutângulo**, quando possui três ângulos agudos.
>
> (3) **triângulo obtusângulo**, quando possui um ângulo obtuso.
>
> (4) **triângulo equiângulo**, quando possui os três ângulos dois a dois congruentes. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.32)

2.4.5 Quadriláteros

Agora, temos um grupo de polígonos chamado quadriláteros. Conforme Rezende e Queiroz (2008, p. 59), temos

> Definição. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.
>
> *Lados opostos* de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.
>
> Dois lados são *consecutivos* se têm um vértice comum.
>
> Uma *diagonal* é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

Neste contexto, existem os chamados quadriláteros notáveis que comumente são classificados como: paralelogramo, losango, retângulo e quadrado. Enunciamos a respectiva definição de cada um deles.

2.4.5.1 Trapézio

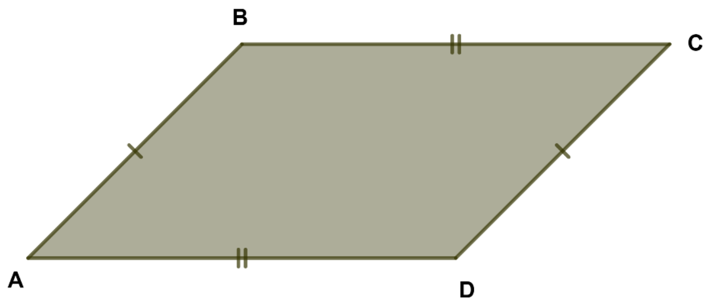
Definição. “Um **trapézio** é um quadrilátero em que dois lados são paralelos. Os lados paralelos são chamados *bases* do trapézio e os outros dois são chamados *laterais*” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.71).

2.4.5.2 Paralelogramo

Definição. “Um **paralelogramo** é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos, isto é, as retas que contém esses lados são paralelas” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.60).

Na figura abaixo (Figura 12), temos o paralelogramo *ABCD* composto por lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Nele, os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, assim como $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$.

Figura 12 - Paralelogramo *ABCD*



Fonte: Autoria própria.

2.4.5.3 Losango, Retângulo e Quadrado

> Definições. a) Um **losango** é um paralelogramo cujos lados são congruentes.
>
> b) Um **retângulo** é um paralelogramo cujos ângulos são retos.
>
> c) um **quadrado** é um retângulo cujos lados são congruentes. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.61)

Observe que os quadriláteros citados acima são derivados da definição de paralelogramo.

2.4.6 Área

Primeiramente, sobre a definição de setor circular, temos

> Definição. Seja AB um arco de circunferência de centro O e raio r. Chamamos setor circular, ou simplesmente setor, à reunião de todos os pontos OP, onde P é um ponto qualquer de AB. O arco AB é chamado *arco de setor* ou *arco fronteira* e *r* é o seu raio. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p. 107)

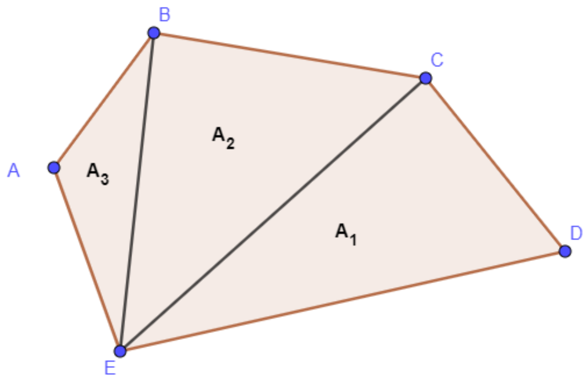
Para definir área, Rezende e Queiroz (2008) consideram a existência de uma classe regiões M tal que M contenha pelo menos todas as regiões poligonais e todos os setores circulares e círculos.

Assim, o temos alguns postulados e definições

> Postulado 14: A cada região de M corresponde um único número real positivo.
>
> Definição. A área de uma região é o número real que lhe corresponde pelo Postulado 14.
>
> Postulado 15. Se R e S são duas regiões de M, com $R \subset S$, então àrea R $\leq$ àrea S.
>
> Postulado 16. Se uma região R, de M, é a união $R_1 \cup R_2$, com R_1 e R_2 regiões de M que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de R é igual a soma das áreas de R_1 e R_2.

Com a definição e postulados acima, podemos pensar em área como uma grandeza que está associada a uma região poligonal do plano. A partir dos postulados 15 e 16, concluímos que, dada uma região A, podemos subdividi-la em outras cuja a área da região A é igual a soma das áreas das regiões decompostas. Geralmente, trabalhamos com área de região triangular pois dada a área de uma figura poligonal, podemos entender como sendo a união de finitas regiões triangulares.

Figura 13 - Área de Regiões Triangulares



Fonte: Autoria própria.

Observe a figura acima (Figura 13). Considere que a área da região poligonal $ABCDE$ é A. Assim, traçando as diagonais $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$ formamos regiões triangulares chamadas A_1, A_2 e A_3. Logo, A é dada pela soma de A_1, A_2 e A_3. Esse raciocínio garantirá que possamos mensurar a área de qualquer polígono utilizando regiões previamente conhecidas.

> Postulado 17. Se dois triângulos são congruentes, então suas regiões triângulares tem a mesma área.
>
> Postulado 18. Se uma região quadrada tem lado de comprimento a, então sua área é a^2. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.108)

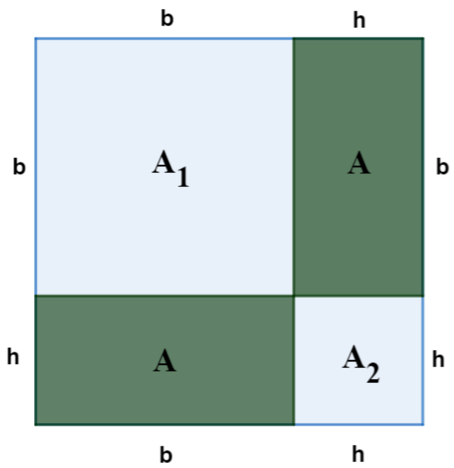
2.4.6.1 Área do Retângulo

"7.3 Teorema. A área de um retângulo é o produto das medidas de dois de seus lados não paralelos" (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.109).

Para demonstrar o teorema utilizaremos algo parecido com o que Euclides fez na proposição 4 do livro II.

Demonstração. Já sabemos, pelo Postulado 18, que a área de uma região quadrada é dada por a^2. Utilizaremos esta informação. Então, seja um retângulo de área A, com lados não paralelos b e h (Figura 14).

Figura 14 - Área do Retângulo



Fonte: Autoria própria.

A partir desse retângulo construa um quadrado de lado $b + h$. Note que, além de possuir dois retângulos de área A, o quadrado construído é composto por quadrados de lados b e h. Denotamos por A_1 e A_2 , respectivamente, a área do quadrado de lado b e h. Pelo postulado 18, $A_1 = b^2$ e $A_2 = h^2$. Pelo Postulado 16, temos que a área A_q do quadrado construído é dada por

$$A_q = A_1 + 2A + A_2 = b^2 + 2A + h^2$$

pelo Postulado 18, $A_q = (b + h)^2$. Então,

$$A_q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2$$

daí, igualando as relações anteriores, resulta

$$b^2 + 2bh + h^2 = b^2 + 2A + h^2$$

dessa forma,

$$A = bh.$$

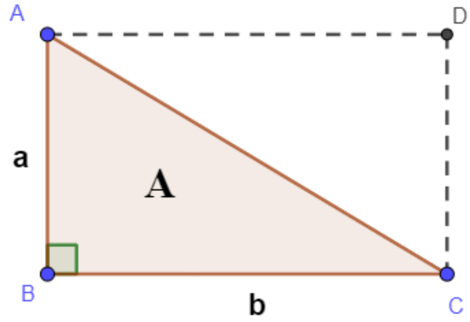
Assim, concluímos a demonstração.

2.4.6.2 Área do Triângulo

"7.4 Teorema. A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos" (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.109).

Demonstração. Seja ABC triângulo retângulo em B, com área A e catetos a e b (Figura 15). Considere um ponto D pertencente a intersecção da reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ passando por A, e da paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto C.

Figura 15 - Área do Triângulo



Fonte: Autoria própria.

Assim, por consequência do último passo da demonstração, o quadrilátero $ABCD$ formado é retângulo. Observe que a diagonal $\overline{AC}$ divide o retângulo em dois triângulos ABC e CDA que são congruentes pelo caso L.L.L.. Como supomos que o triângulo inicial ABC era retângulo de área A, então o triângulo CDA possui mesma área (consequência do Postulado 17). Nesse aspecto, temos que a área $ABCD = 2A$. Pelo Teorema 7.3, temos área$ABCD = ab$. Daí, igualando ambos resultados, concluímos que

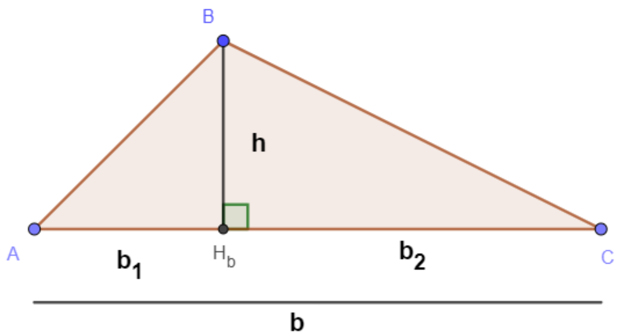
$$ab = 2A \Rightarrow A = \frac{ab}{2}.$$

“7.5 Lema. Num triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a esse lado é constante.”

“7.6 Teorema. A área de um triângulo é a metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.110).

Demonstração. Considere o triângulo ABC, com área A, e $\overline{BH}$ sendo altura relativa ao lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{BH} = h$. (Figura 16).

Figura 16 - Demonstração do Teorema 7.6



Fonte: Autoria própria.

Note que o ponto H_b divide o lado $\overline{AC}$ em dois segmentos, $\overline{AH_b}$ e $\overline{H_bC}$. Supondo $\overline{AC} = b$, $\overline{AH_b} = b_1$ e $\overline{H_bC} = b_2$, temos $b = b_1 + b_2$. Como, por hipótese, $\overline{BH_b}$ é altura relativa ao lado $\overline{AC}$, então ocorre a formação dos triângulos ABH_b e CBH_b ambos retângulos no vértice H_b. Seja A_1 área do triângulo ABH_b e A_2 área do triângulo CBH_b. Pelo postulado 16, temos

$$A = A_1 + A_2$$

também, como consequência do Teorema 7.4, resulta

$$A = \frac{1}{2} b_1 h + \frac{1}{2} b_2 h$$

$$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$$

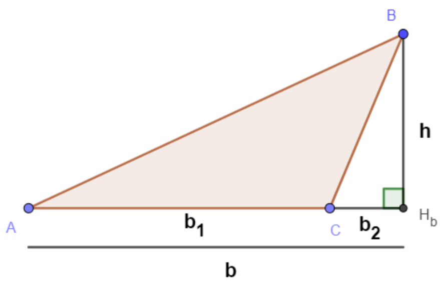
como $b = b_1 + b_2$,

$$A = \frac{1}{2} bh \, .$$

Demonstramos acima o caso em que H_b está entre A e C. Entretanto, temos outros casos: H_b coincide com A ou C, C está entre A e H_b, e quando B está entre H_b e C.

No caso em que H_b coincide com A ou C, é trivial pois basta aplicar o Teorema 7.4. Caso C esteja entre A e H_b (Figura 17), considere H_b sendo ponto de interseção entre o prolongamento da reta que contém $\overline{AC}$ com a altura do triângulo ABC baixada pelo vértice B.

Figura 17 - Outro Caso: Teorema 7.6



Fonte: Autoria própria.

Supondo $\overline{AH_b} = b$, $\overline{AC} = b_1$ e $\overline{CH_b} = b_2$, temos $\overline{AH_b} = \overline{AC} + \overline{CH_b} \Rightarrow b = b_1 + b_2$. Note que foram formados os triângulos ABH_B e CBH_B, retângulos em H_B, e possuem mesma altura h do triângulo inicial ABC. Considere que A_1 e A_2 sejam, respectivamente, as áreas dos triângulos ABH_B e CBH_B. Pelo Postulado 16,

$$A_1 = A + A_2 \Rightarrow A = A_1 - A_2$$

pelo Teorema 7.4, $A_1 = \frac{1}{2}bh$ e $A_2 = \frac{1}{2}b_2h$. Portanto,

$$A = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}b_2h$$

$$A = \frac{1}{2}h\,(b - b_2)$$

como $b = b_1 + b_2$, resulta

$$A = \frac{1}{2}h\,(b_1 + b_2 - b_2)$$

e concluímos que

$$A = \frac{1}{2}b_1h.$$

No caso em que B está entre H_b e C, a demonstração é análoga.

2.4.6.3 Equivalência de áreas

“7.7 Corolário. Dado um triângulo ABC, qualquer outro triângulo tendo lado $\overline{BC}$ e o terceiro vértice pertencente à reta r, paralela a $\overline{BC}$ passando por A, terá área igual à área de ABC” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.111).

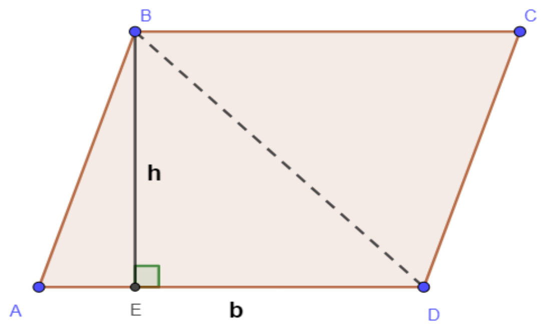
Definição. “Duas figuras planas que possuem a mesma área são chamadas figuras equivalentes. Dizemos que dois polígonos são equivalentes quando suas regiões poligonais correspondentes possuírem mesma área” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.111).

2.4.6.4 Área do Paralelogramo

“7.9 Teorema. A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente” (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.110).

Demonstração. Seja $ABCD$ paralelogramo com base b e altura $h = \overline{BE}$. Trace a diagonal $\overline{BD}$ do paralelogramo. Note que $\overline{BD}$ divide $ABCD$ em dois triângulos congruentes ABD e CDB, onde cada um deles possui, respectivamente, área A_1 e A_2.

Figura 18 - Área do Paralelogramo



Fonte: Autoria própria.

Pelo Postulado 16, a área A do paralelogramo $ABCD$ é dada por

$$A = A_1 + A_2$$

mas, os triângulos ADB e CDB são congruentes. Portanto,

$$A = A_1 + A_1 \Rightarrow A = 2A_1$$

e pelo Teorema 7.6, $A_1 = \frac{1}{2}bh$. Logo,

$$A = 2(\frac{1}{2}bh)$$

$$A = bh.$$

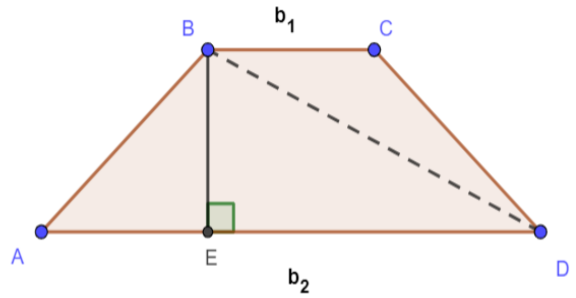
2.4.6.5 Área do Trapézio

Nesta seção vamos utilizar alguns teoremas, descritos em Rezende e Queiroz (2008), para determinar a área de um trapézio. No que segue, em alguns casos, mantemos a numeração original.

"7.10 Teorema. A área de um trapézio é a metade do produto de sua altura pela soma de suas bases" (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.112).

Demonstração. Seja $ABCD$ trapézio com bases $b_1 = \overline{AD}$ e $b_2 = \overline{BC}$, altura $h = \overline{BE}$, e área A (Figura 19).

Figura 19 - Área do Trapézio



Fonte: Autoria própria.

Trace a diagonal $\overline{BD}$ obtendo os triângulos ABD e BCD com áreas A_1 e A_2, respectivamente. Pelo Postulado 16,

$$A = A_1 + A_2$$

pelo Teorema 7.4, $A_1 = \frac{1}{2}b_1h$ e $A_2 = \frac{1}{2}b_2h$. Então,

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$$

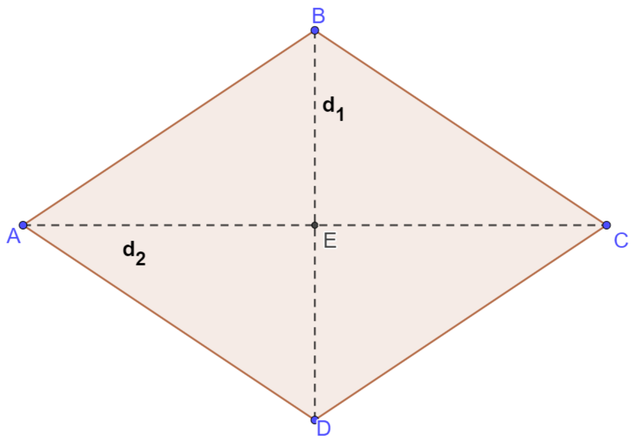
$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2).$$

2.4.6.6 Área do Losango

"7.10 Teorema. A área de um losango é a metade do produto de suas diagonais" (REZENDE e QUEIROZ, 2008, p.112).

Seja $ABCD$ losango de área A. Trace as diagonais $d_1 = \overline{BD}$ e $d_2 = \overline{AC}$ se interceptando num ponto E (Figura 20).

Figura 20 - Área do Losango



Fonte: Autoria própria.

Sabemos que E divide d_1 e d_2 em seus respectivos pontos médios. Além disso, d_1 e d_2 são perpendiculares entre si. Ocasionalmente, o triângulo ABC é congruente ao triângulo ADC pelo caso L.L.L. Observe o triângulo ABC, sua área A_1 é dada por

$$A_1 = \frac{d_2\left(\frac{1}{2}d_1\right)}{2}$$

como ABC é congruente ao triângulo ADC, então a área A do losango é dada por

$$A = 2A_1$$

logo,

$$A = 2\left(\frac{d_2\left(\frac{1}{2}d_1\right)}{2}\right)$$

daí, concluímos que

$$A = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

3 CONSTRUINDO UM TUTORIAL PARA O CÁLCULO DE ÁREAS COM O USO DE TECNOLOGIAS

"A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p.271). Com base no que foi exposto no segundo capítulo desta pesquisa, percebemos que a geometria desempenhou relevante papel desde os primeiros estágios de nossa sociedade. Assim, nota-se que o estudo desse ramo da matemática nos proporciona o conhecimento necessário para ter uma interpretação do espaço em que vivemos, podendo interferir, neste, para o cálculo de área, distâncias, dentre outras necessidades.

A partir do processo de globalização, ocorreram grandes avanços tecnológicos e informacionais em nosso mundo, onde a implementação da tecnologia afetou a forma de como nos relacionamos. Dito isso, com tais progressos na área da comunicação, surgiram diversos aparelhos eletrônicos que, em pouco tempo, se tornaram comuns em nossa sociedade e posteriormente adentraram a sala de aula. Por conseguinte, isso afetou a maneira de que o docente apresenta a matéria aos seus alunos. Seguindo o raciocínio, torna-se fundamental o uso de equipamentos tecnológicos como estratégia de ensino, para que o discente tenha outra forma de experiência e relação com a matéria.

De acordo com Nascimento (2012, p.122),

> A proposta do uso de softwares de geometria dinâmica, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

Outrossim, observa-se que, nem sempre, tais instrumentos foram inseridos como ferramenta pedagógica nas instituições de ensino o que propicia um certo distanciamento do conteúdo estudado pois o aluno não vê utilidade ou importância daquilo que tem contato na escola com o ambiente em que vive.

Para Kenski (2007, p.45), sobre a aplicação de tecnologias na educação, são "encaradas como *recursos* didáticos, elas ainda estão muito longe de serem usadas em todas as suas possibilidades para uma melhor educação". Então, através desta afirmação, concluímos que ainda existe muito a ser explorado sobre o uso pedagógico de tecnologias em sala de aula e sua utilização detém uma grande potencialidade no ramo educacional.

Complementando, posso citar minha experiência como discente do ensino básico pois, durante esse período, percebi a quase inexistência da exploração das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem. No que tange ao assunto de geometria, quando o professor entrava em sala para falar sobre área de figuras planas, as aulas se limitavam a decoração de fórmulas para resolver os problemas propostos. Quando ingressei na Universidade Federal do Pará (UFPA), tive o contato com o Geogebra na disciplina de Geometria Plana. Logo, através da aplicação desse *software*, consegui aprimorar meu desempenho na matéria e, consequentemente, compreender melhor o cálculo de área. Essa perspectiva em relação ao uso da tecnologia na educação entra em concordância com o pensamento de Kenski (2007, p.45), no qual, afirma que "quando bem utilizadas, provocam a alteração dos comportamentos de professores e alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento do conteúdo estudado".

De acordo com Sagica (2022, p. 10),

> [...], é possível notar que a importância do aplicativo *Geogebra* como instrumento pedagógico de ensino pode impactar direta ou indiretamente instituições de ensino juntos aos professores da área da matemática em propor essa metodologia de ensino aos discentes, e dessa forma aprimorarem sua compreensão sobre o conteúdo. Ademais, pontuar a facilidade de obter o aplicativo *Geogebra*, por ser grátis e ter suporte para computadores, tabletes, celulares e outros, o que facilita o seu acesso por meio dos alunos.

Sendo assim, podemos concluir que a utilização deste *software* como ferramenta de ensino tende a facilitar o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno em relação a matemática, proporcionando uma melhor formação educacional ao discente da educação básica. Destarte, é perceptível que a aplicação das tecnologias digitais na educação exerce um importante papel na formação do discente, podendo oferecer a este indivíduo uma nova percepção matemática aplicada em seu contexto de vida onde, constantemente, está em contato com objetos eletrônicos tais como: o celular, *tablet* e computador.

Além disso, foi visto que o uso da tecnologia na educação ainda é pouco presente em sala de aula e, também, insuficientemente explorada. O que caracteriza um problema, já que conhecemos, agora, suas respectivas potencialidades. Assim, propomos o uso das tecnologias na educação como ferramenta didática para o cálculo de regiões poligonais e, dessa maneira, promover uma educação de qualidade para os discentes pertencentes a educação básica, formando seres repletos de saberes e concisos de sua realidade.

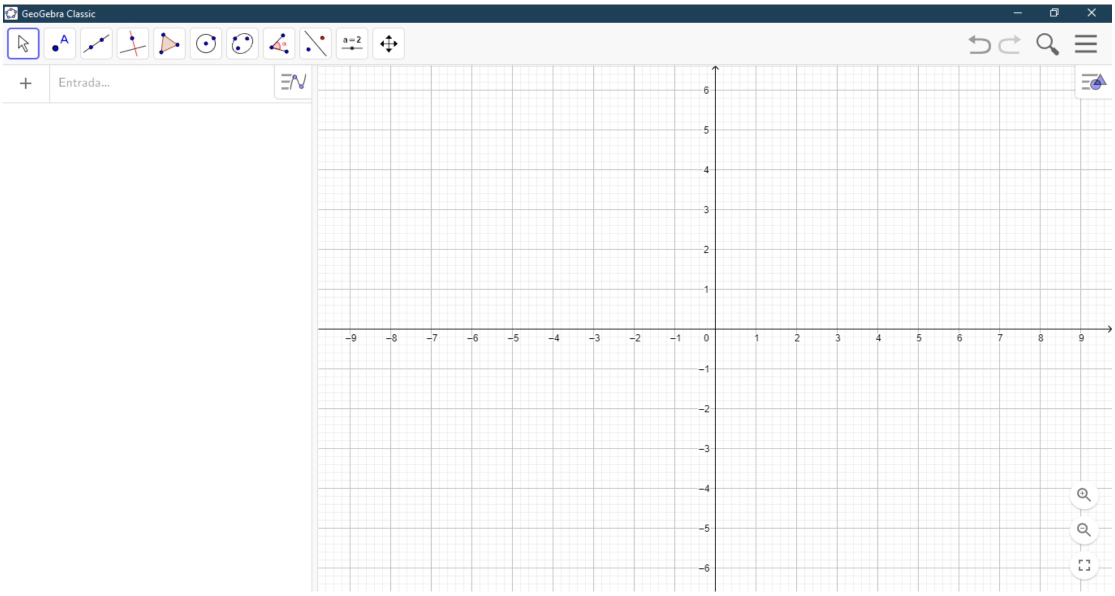
3.1 O Software Geogebra

Geogebra é um *software* de geometria dinâmico que nos permite a construção, visualização e movimentação de figuras poligonais. Além disso, conta com outras funções relacionadas à álgebra, aritmética, geometria espacial, estatística e até mesmo a programação por meio da linguagem *Javascript*. A escolha deste *software* se deu devido à facilidade de seu manuseio e grande acessibilidade, possibilitando o uso *online* e *offline* por meio da instalação em diversos dispositivos. Ainda, podemos destacar sua plataforma que possui uma gama de recursos compartilhados pela comunidade de usuários.

3.1.1 A Interface do Geogebra

Ao abrirmos o Geogebra, temos contato com sua interface. De início, podemos perceber que temos a composição de duas janelas de visualização, a primeira, tomando maior parte da interface, também, sendo formada por malha e eixos cartesianos, é chamada *Janela de Visualização 2D* e a segunda (ao lado esquerdo) é a chamada *Janela de Álgebra*. Ao ter as duas abertas, podemos plotar equações algébricas e, assim, visualizar sua respectiva representação geométrica no plano cartesiano.

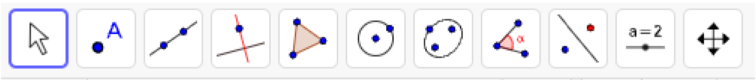
Figura 21 - Interface do Geogebra



Fonte: Geogebra (Geogebra Clássico 6, 2023).

Além disso, na parte superior da tela, podemos ver alguns ícones que correspondem às ferramentas que nos auxiliam no uso do *software*. Essa, é a chamada *Barra de Ferramentas*.

Figura 22 - Barra de Ferramentas



Fonte: Geogebra (Geogebra Clássico 6, 2023).

3.1.2 Ferramentas do Geogebra que serão utilizadas nessa pesquisa

Dentre inúmeras ferramentas contidas no *software*, podemos citar as principais que, no qual, são:

- Ângulo
- Área
- Compasso
- Interseção de Dois Objetos
- Polígono
- Reta Paralela
- Reta Perpendicular
- Segmento

Para utilizar cada uma dessas ferramentas, basta que o usuário deslize o mouse em direção à *Barra de Ferramentas* e clique na função desejada. Assim, conseguirá usufruir da ferramenta pretendida.

Como intuito desta pesquisa é propor o uso do Geogebra para o cálculo de área, a principal ferramenta que faremos uso chama-se *Polígono*. Ela, como o próprio nome já nos sugere, nos permite criar polígonos na *Janela de Visualização 2D*.

3.2 Materiais

Utilizaremos o *software* Geogebra Clássico 6 disponível para *download* em seu site oficial www.geogebra.org.

3.3 Usando o Geogebra

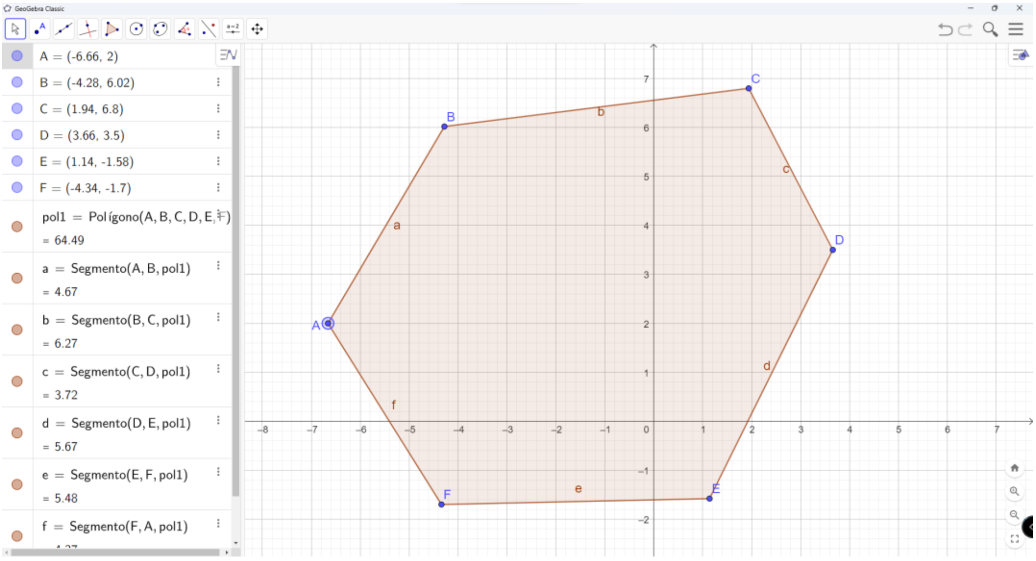
3.3.1 Construindo Polígono Arbitrário

Aqui, usaremos o termo *polígono arbitrário* para nos referirmos a um polígono qualquer, sem nos prendermos às definições de polígonos citadas anteriormente.

Posto isso, é trivial a construção de um polígono no Geogebra pois podemos fazer uso da ferramenta *Polígono* e, desta maneira, traçar o polígono desejado. Neste sentido, selecione a função anteriormente citada e clique em quantas regiões desejar da *Janela de Visualização 2D* para determinar os vértices que constituem o polígono. É valido ressaltar que para efetivar a construção em questão, devemos clicar com o ponteiro do *mouse* sobre primeiro ponto que foi gerado. Por exemplo, suponhamos que se deseja criar um polígono de seis lados, ou seja, um hexágono. Para tal feito, selecionamos a ferramenta *Polígono* e clicamos sobre a *Janela de*

Visualização 2D seis vezes, formando os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* que são nomeados automaticamente pelo *Software*. Por fim, conforme exposto, após criar *F*, clicamos sobre *A*. Dessa forma, criamos o hexágono indicado na figura abaixo (Figura 23).

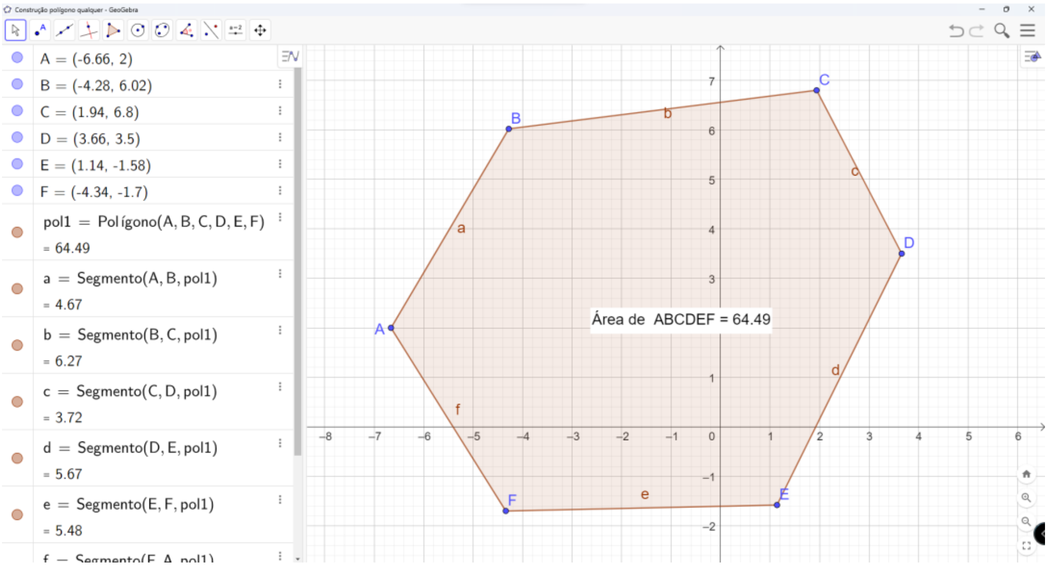
Figura 23 – Polígono Arbitrário



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Com o polígono criado, podemos calcular sua área com o emprego da função *Área*. Basta selecionar tal ferramenta e clicar sobre o polígono construído. No caso do hexágono construído acima, temos que sua área é 64,49 unidades de área.

Figura 24 - Área de Um Polígono Arbitrário



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

3.3.2 Construindo Trapézio

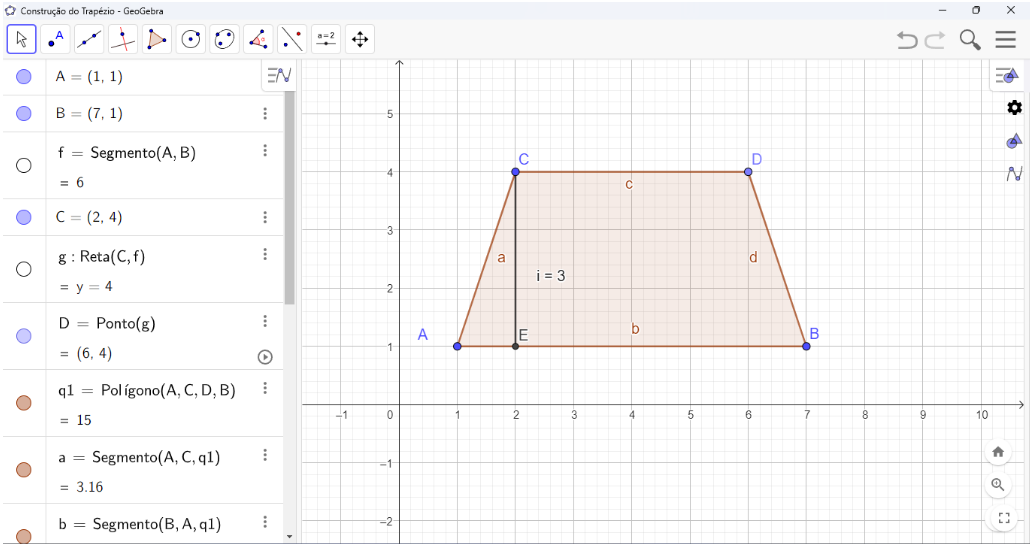
Faremos a construção de um trapézio *ABCD* com bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sendo $\overline{AB} > \overline{CD}$. Conforme a definição de trapézio, devemos construir um quadrilátero com dois lados paralelos. Sendo assim, para criá-lo, precisamos inicialmente construir uma estrutura com as características de tal quadrilátero e depois aplicar a ferramenta *Polígono*. Portanto, com a função *Segmento*, clique em dois lugares distintos da *Janela de Visualização 2D*, criando, dessa forma, um segmento $\overline{AB}$ que será a base maior de nosso trapézio.

Em seguida, faça o emprego da função *Reta Paralela* clicando em $\overline{AB}$, arraste o *mouse* de tal modo que seu ponteiro não esteja sobre $\overline{AB}$ e clique em qualquer região da *Janela de Visualização 2D*, assim criamos uma reta *g* paralela a $\overline{AB}$ passando por *C*. Selecione a ferramenta *Ponto* e clique sobre a reta *g* formando, assim, um ponto *D* tal que este ponto seja distinto de *C*. Caso após o último passo $\overline{CD}$ seja maior que $\overline{AB}$, movimente um dos pontos (C ou D) para que tenhamos $\overline{AB} > \overline{CD}$. Pronto, estamos com a estrutura do trapézio criada.

Para facilitar a visualização da construção, vamos esconder o traço do segmento $\overline{AB}$ deixando visível apenas os pontos *A* e *B*. Então, clique com o botão direito do *mouse* sobre $\overline{AB}$. Se o último passo estiver correto, abrirá uma caixa de opções. Selecione a opção *Exibir Objeto*. Consequentemente o traço do segmento $\overline{AB}$ será oculto. Repita o mesmo processo ocultando a reta *g* que passa pelos pontos *C* e *D*. Finalmente, com a função *Polígono* clique sobre os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, não esquecendo de finalizar selecionando o primeiro ponto criado. Deste modo, temos um trapézio *ABCD*.

Para complementar a construção, podemos traçar sua respectiva altura. Usando a ferramenta *Reta Perpendicular*, clique sobre $\overline{AB}$ (base maior) e sobre *C*, assim, temos uma reta *h* perpendicular a $\overline{AB}$, passando por *C*. Com a função *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre $\overline{AB}$ e *h*. Um ponto *E* será criado. Agora, oculte a reta *h*. Com a ferramenta *Segmento*, crie o segmento $\overline{CE}$. Agora, selecione a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre $\overline{CE}$. Sendo assim, temos a medida de $\overline{CE}$ que corresponde a altura do trapézio *ABCD*.

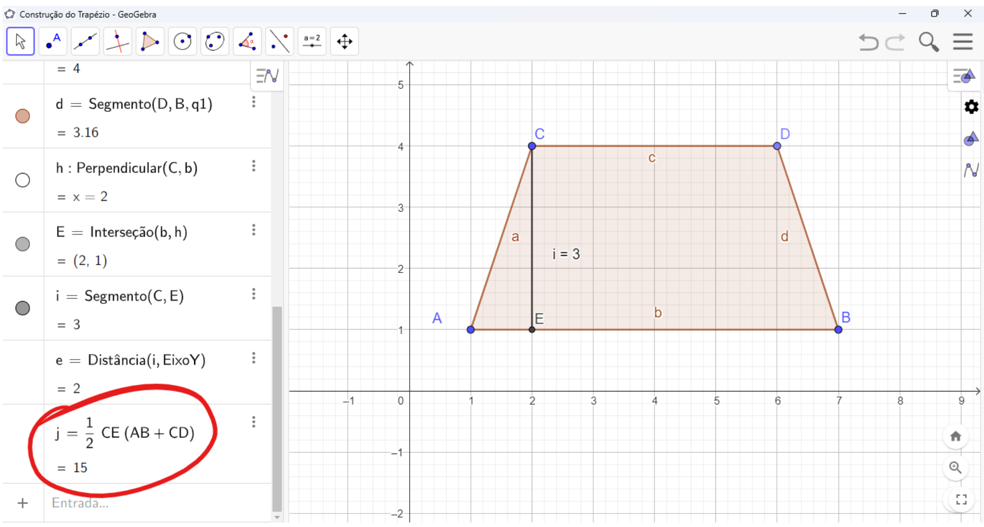
Figura 25 - Construção do Trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Com a finalidade de calcular a área de nosso polígono recém construído, podemos utilizar a *Janela de Álgebra* ou a ferramenta *Área*. Ensinaremos os dois modos. Sobre o primeiro, direcione o ponteiro do *mouse* sobre a *Janela de Álgebra* e no campo *Entrada* escreva $\frac{1}{2} * \overline{CE} * (\overline{AB} + \overline{CD})$ (ou podemos escrever $\frac{1}{2} * i * (b + c)$, pois note que o *software* tomou automaticamente $\overline{AB} = b, \overline{CD} = c$ e $\overline{CE} = i$) e tecle *Enter*. Observe que $\frac{1}{2} * \overline{CE} * (\overline{AB} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, que corresponde a fórmula do cálculo de área do trapézio. Ao término do último passo, temos como resultado a área de nossa construção na *Janela de Visualização 2D* que, neste caso, é 15 unidades de área.

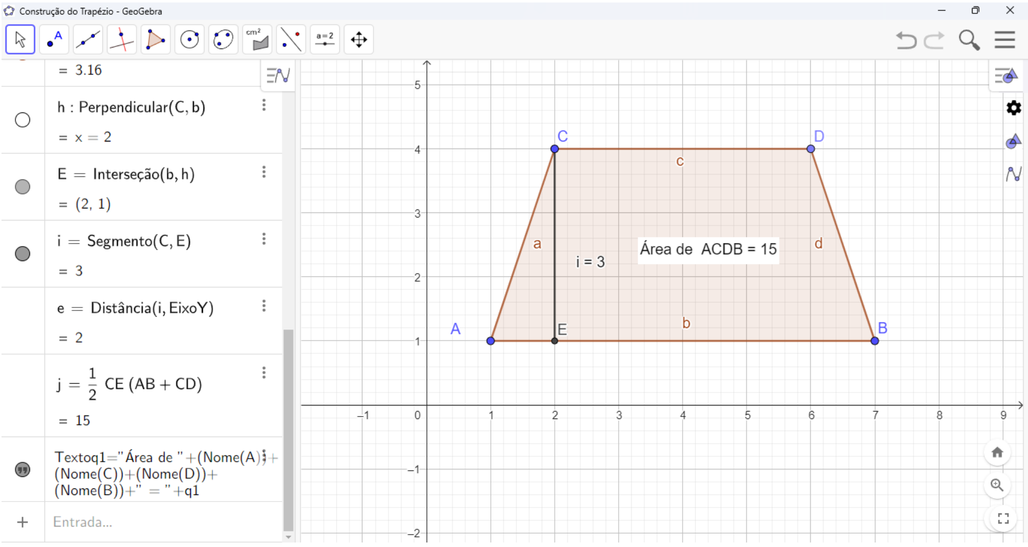
Figura 26 – Calculando Área Por Meio da *Janela de Álgebra*



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Sobre o segundo método, é bem trivial obter a área da figura desejada. Basta selecionar a ferramenta *Área* na *Barra de Ferramentas* e clicar sobre o polígono que se deseja obter sua área. Ressaltamos que é preciso ter usado primeiramente a função *Polígono* e assim aplicar a ferramenta *Área* sobre a região poligonal desejada.

Figura 27 – Usando a Ferramenta *Área*



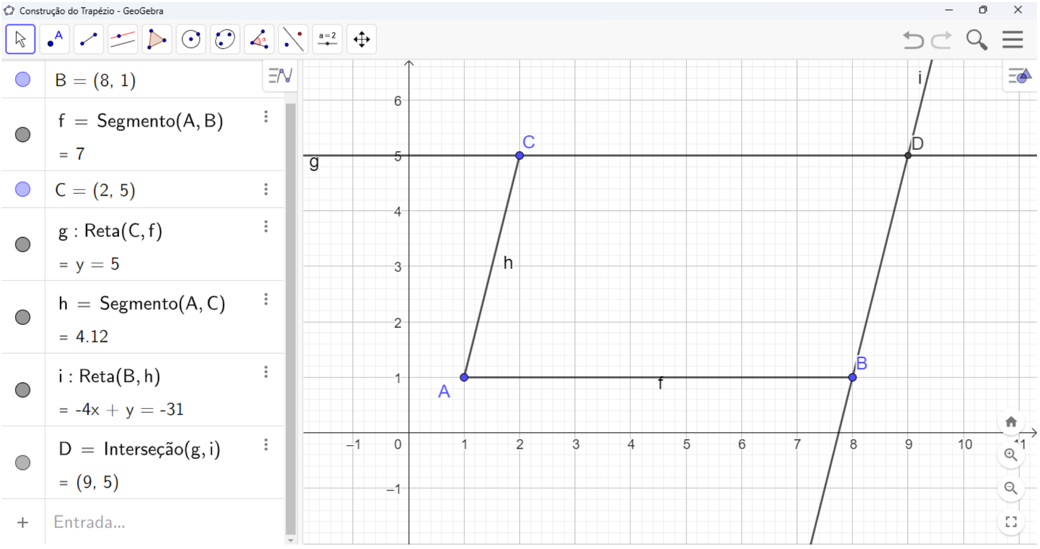
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Como já esperado, não houve distinção das áreas calculadas pelos dois modos. Todos eles foram eficientes e deram, obviamente, o mesmo resultado que, nesse caso, corresponde a 15 *u.a.*. O interessante aqui é o fato de que podemos movimentar os vértices do trapézio e observar que sua área muda ao final de cada movimento dado. Logo, temos praticamente uma calculadora de área de trapézio ao nosso dispor.

3.3.3 Construindo Paralelogramo

O processo de criação de um paralelogramo se semelha em partes com nossa última construção. Usando a definição de paralelogramo, temos que construir um quadrilátero que possui seus lados opostos paralelos. Então, com a ferramenta *Segmento*, crie $\overline{AB}$. Vá até a *Barra de Ferramentas*, selecione *Reta Paralela*, clique sobre $\overline{AB}$, movimente o cursor do *mouse* de tal forma que não coincida com $\overline{AB}$ e clique em qualquer região da *Janela de Visualização 2D*. Com isso, temos uma reta g paralela a $\overline{AB}$ passando por C. Com a ferramenta *Segmento* clique sobre A e posteriormente sobre C e teremos criado $\overline{AC}$. Repita o processo fazendo novamente uso da função *Reta Paralela* e trace a reta i, paralela ao segmento $\overline{AC}$, passando por B. Observe que i e g se interceptam, sendo assim, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, marcaremos um ponto D nesta interseção.

Figura 28 - Construção do Paralelogramo



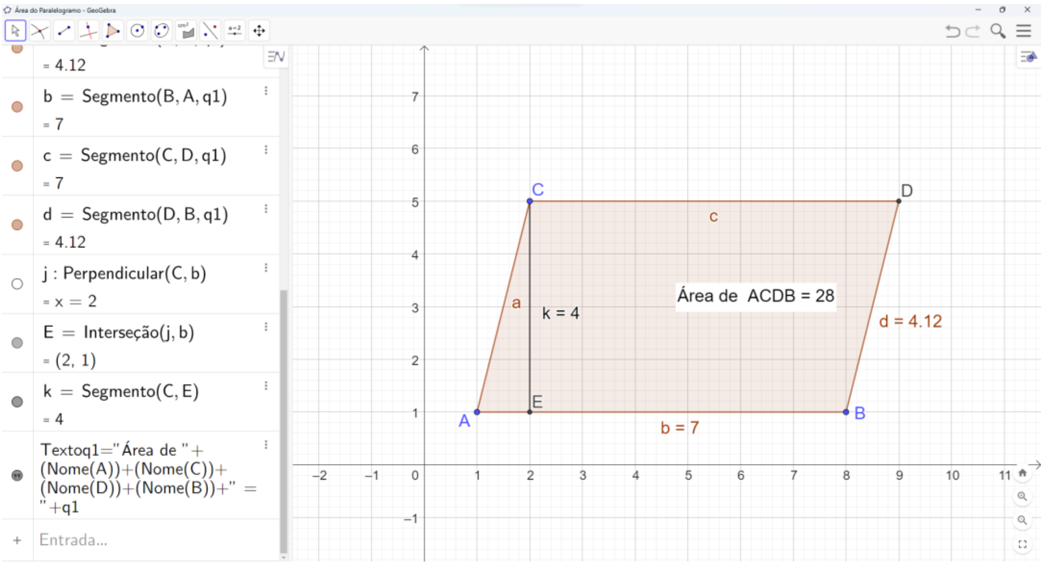
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Vamos ocultar a reta g. Para isso, clique com o botão direito do mouse sobre g e, após abrir a caixa de opções, escolha a opção *Exibir Objeto*. Após esse passo, a reta g ficará oculta. Repita o processo ocultando a reta i e os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ficando somente com a exibição dos pontos A, B, C e D. Agora, selecione a ferramenta *Polígono* e clique sobre os pontos anteriormente citados (não esquecendo de realizar os passos conforme fizemos no item 3.3.2, onde finalizamos o polígono selecionando o primeiro ponto adotado), formando o paralelogramo $ABCD$.

Podemos melhorar tal construção criando um segmento correspondente à sua altura, além de poder expor as medidas de cada lado. Para traçar a altura do paralelogramo criado, use a ferramenta *Reta Perpendicular*, clique sobre $\overline{AB}$, e posteriormente em C, então, será criada uma reta j perpendicular a $\overline{AB}$, passando por C. Agora, com a função *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre $\overline{AB}$ e a reta perpendicular criada recentemente para marcar um ponto E. Iremos ocultar a reta j realizando os passos já informados no parágrafo anterior. Vá até a *Barra de Ferramentas*, selecione a função *Segmento* e trace o segmento $\overline{CE}$ correspondendo a altura do paralelogramo. Para que a medida de $\overline{CE}$ seja visível, selecione a opção *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre $\overline{CE}$. Repita o processo exibindo as medidas dos lados da figura em questão.

Perceba que não precisamos exibir a medida de todos os lados, basta aplicar a função *Distância, Comprimento ou Perímetro* sobre dois de seus lados não paralelos, pois o paralelogramo possui uma propriedade particular que, no qual, garante que a medida de seus lados opostos são congruentes. Da mesma maneira que na seção 3.3.2, temos dois modos de realizar o cálculo de área. Nesse caso, usaremos a ferramenta *Área*. Para isso, selecione a mesma na *Barra de Ferramentas* e clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre a região poligonal criada. Enfim, concluímos nossa construção, tendo a medida da área procurada.

Figura 29 - Área do Paralelogramo Construído



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

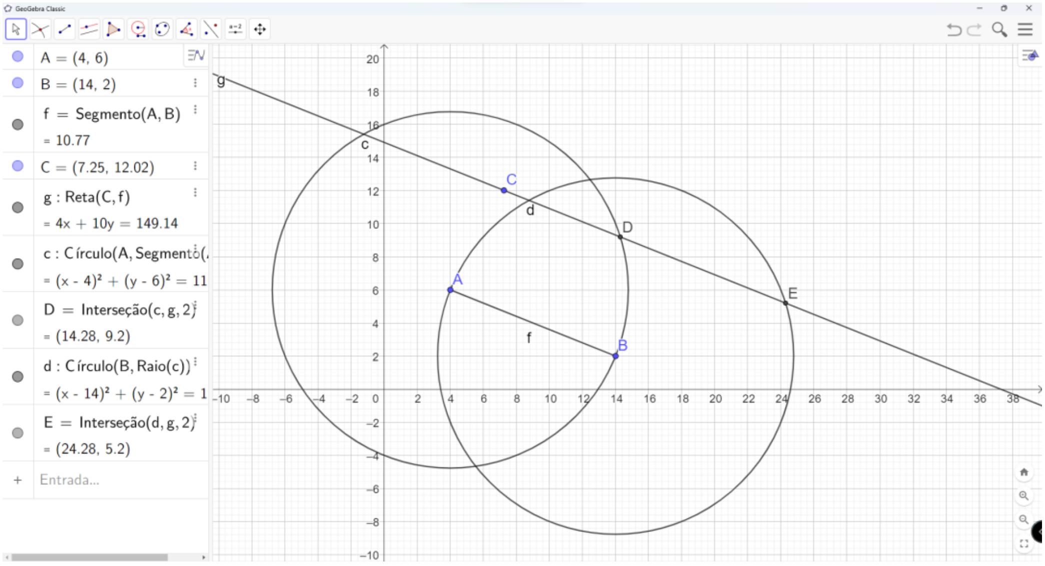
A partir desta construção, se torna simples a criação dos demais quadriláteros notáveis já que os mesmos são praticamente uma reprodução dos passos já tomados. Por exemplo, para construir um losango (que ensinaremos a seguir) basta que seus lados possuam mesma medida.

3.3.4 Construindo Losango

Precisamos construir um paralelogramo com a medida de seus lados iguais, assim como definimos losango.

Então, crie o segmento $\overline{AB}$ e uma reta g paralela a tal segmento passando por C conforme fizemos nas construções anteriores. Dirija o *mouse* até a *Barra de Ferramentas*, escolha a função *Compasso*, clique em A e posteriormente em B para que o raio do compasso tomado tenha medida $\overline{AB}$, por fim, clique sobre A para tornar esse ponto como centro da circunferência. Observe que, após isso temos que a circunferência traçada intercepta a reta g. Marcaremos um ponto nesta interseção. Com a função *Interseção de Dois Objetos*, selecione g e, logo após, a circunferência de raio $\overline{AB}$, originando *D*. Repita o processo traçando uma outra circunferência de raio $\overline{AB}$ com o centro em *B*, e marque um ponto *E* na interseção desta circunferência com a reta *g*.

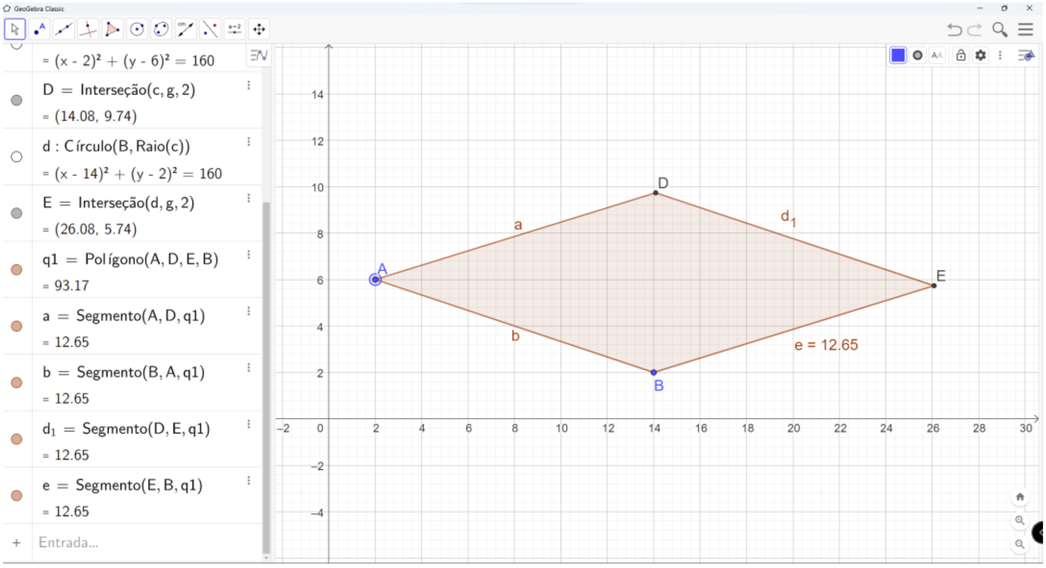
Figura 30 - Construção do Losango



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

É importante deixar claro que se deve escolher uma medida razoável para a distância de *g* até $\overline{AB}$ para que no momento de traçar as circunferências de raio $\overline{AB}$, tenhamos as interseções destas circunferências com a reta *g*. Voltando à construção, oculte $\overline{AB}$, *g*, *C*, e as circunferências que interceptam *g*, deixando visível somente os pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Com a função *Polígono*, crie o losango *ABCD*. Finalizamos a construção. Para complementar, vamos exibir as medidas de seus lados. Use a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clique sobre um dos lados do losango (caso queria verificar que seus lados possuem mesma medida, basta aplicar este processo em todos seus respectivos lados). Para calcular sua área, utilize a função *Área* e clique sobre tal polígono.

Figura 31 - Losango Finalizado



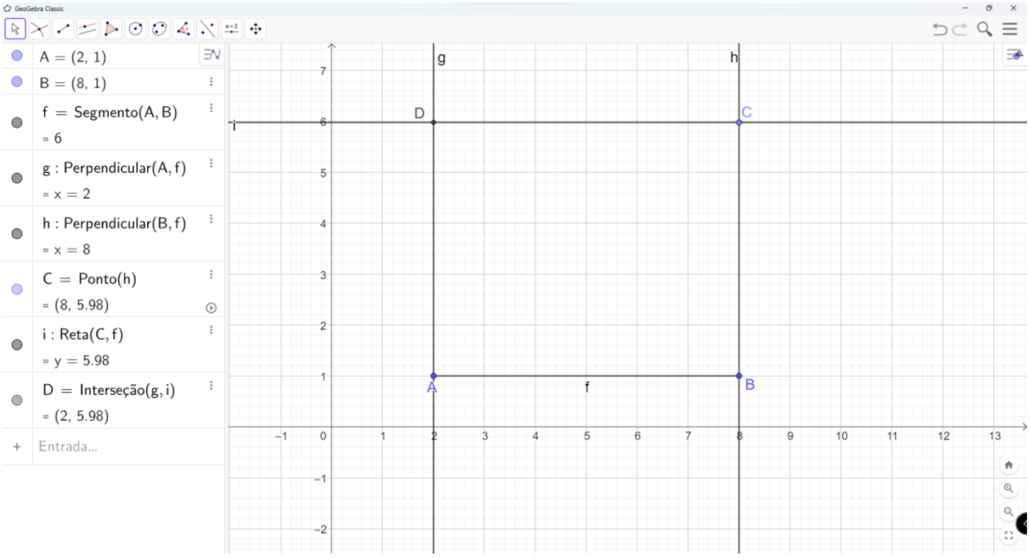
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

3.3.5 Construindo Retângulo

Conforme a definição dada na seção 2.4.8, devemos construir um paralelogramo cujos seus ângulos são retos.

Sendo assim, crie um segmento $\overline{AB}$ com o recurso *Segmento*. Criaremos duas retas perpendiculares a $\overline{AB}$, com uma delas passando por A e a outra passando por B. Para isso, use a ferramenta *Reta Perpendicular* crie duas retas perpendiculares, com uma delas passando por A e a outra passando por B. Prosseguindo, use a função *Reta Paralela*, clique sobre $\overline{AB}$ e depois em A. Repita o procedimento traçando outra reta passando por B. Agora, com a função *Reta Paralela*, clique sobre $\overline{AB}$, arraste o ponteiro do *mouse* de tal forma que não fique sobre $\overline{AB}$ e clique sobre a reta perpendicular que passa por B (ressaltamos que escolhendo qualquer umas das retas perpendiculares criadas, o procedimento estará correto, mas, para fins didáticos, escolhemos a que intercepta B). Agora, com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique sobre a interseção da reta paralela a $\overline{AB}$ para que tenhamos um ponto D.

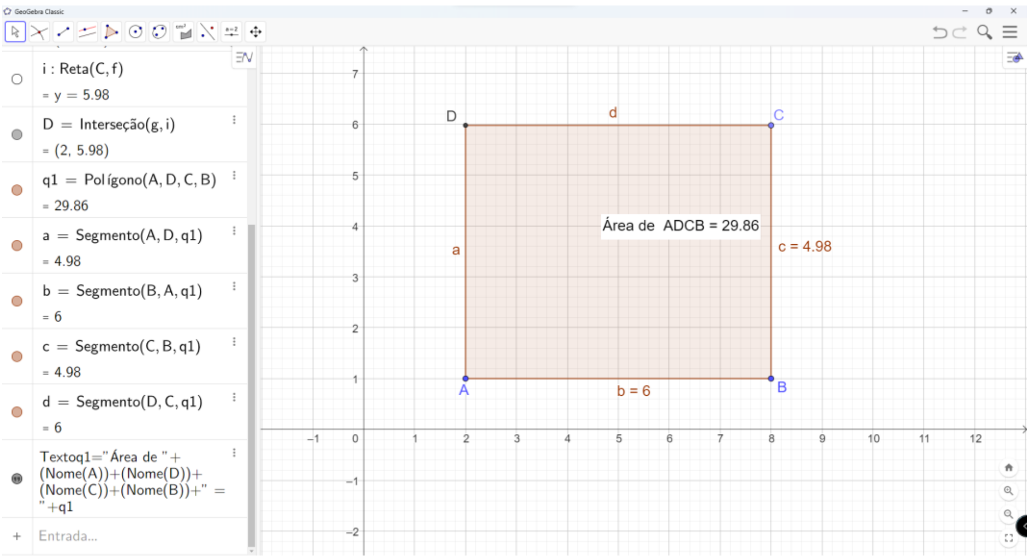
Figura 32 - Construção Após as Instruções Acima



Fonte: A Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Vamos ocultar o as retas e o segmento $\overline{AB}$ de tal forma que tenhamos visível somente os pontos A, B, C e D. Então, clique com o botão direito do mouse sobre cada item que se deseja ocultar e, após abrir a caixa de opções, clique sobre *Exibir Objeto*. Use a ferramenta *Polígono* e crie o retângulo $ABCD$ conforme fizemos nas construções anteriores. Dessa maneira, temos o retângulo criado. Com a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*, clique sobre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ deixando visível a medida desses lados. Por fim, com a função *Área*, selecione o polígono criado para que seja exibido a medida de sua respectiva área.

Figura 33 - Retângulo Finalizado

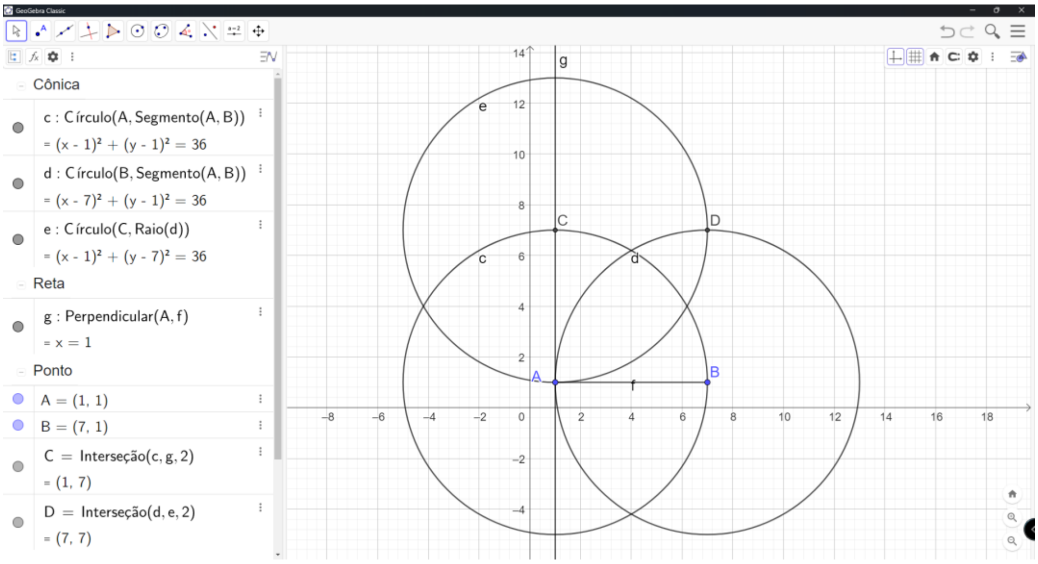


Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

3.3.6 Construindo Quadrado

Chegamos em nossa última construção. Com o a ferramenta *Segmento*, crie um segmento $\overline{AB}$. Usando *Reta perpendicular*, clique sobre $\overline{AB}$ e posteriormente A. Com a função *Compasso*, clique sobre os pontos A e B para demarcar a abertura do compasso e selecione o ponto A. Portanto, temos uma cirferência de raio $\overline{AB}$ com centro em A. Fazendo uso da ferramenta *Ponto* clique na interseção da reta perpendicular a $\overline{AB}$ e a circunferência recém criada. Agora, repita o processo traçando duas outras circunferências de raio $\overline{AB}$, sendo que uma delas deve ter centro em B e outra com centro em C. Observe a Figura 34.

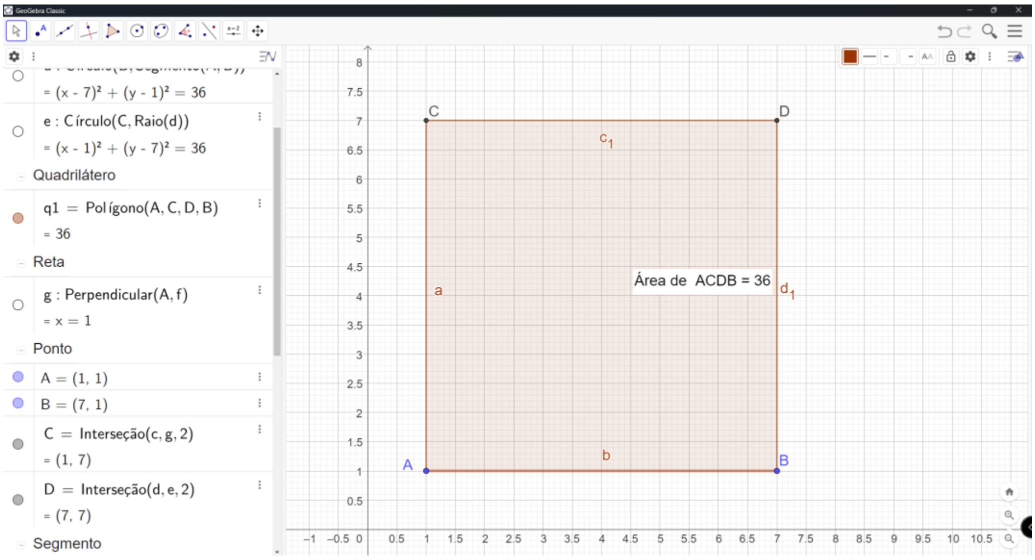
Figura 34- Construção do Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, marque um ponto D na interseção das circunferências de centro B e C. Assim como nas construções anteriores, oculte a todas as circunferências criadas e o traço do segmento $\overline{AB}$, deixando somente os pontos A, B, C e D. Usando *Polígono*, clique sobre os pontos A, B, C e D. Para calcular a área do quadrado criado, selecione a ferramenta *Área* e clique sobre o polígono.

Figura 35- Quadrado Finalizado



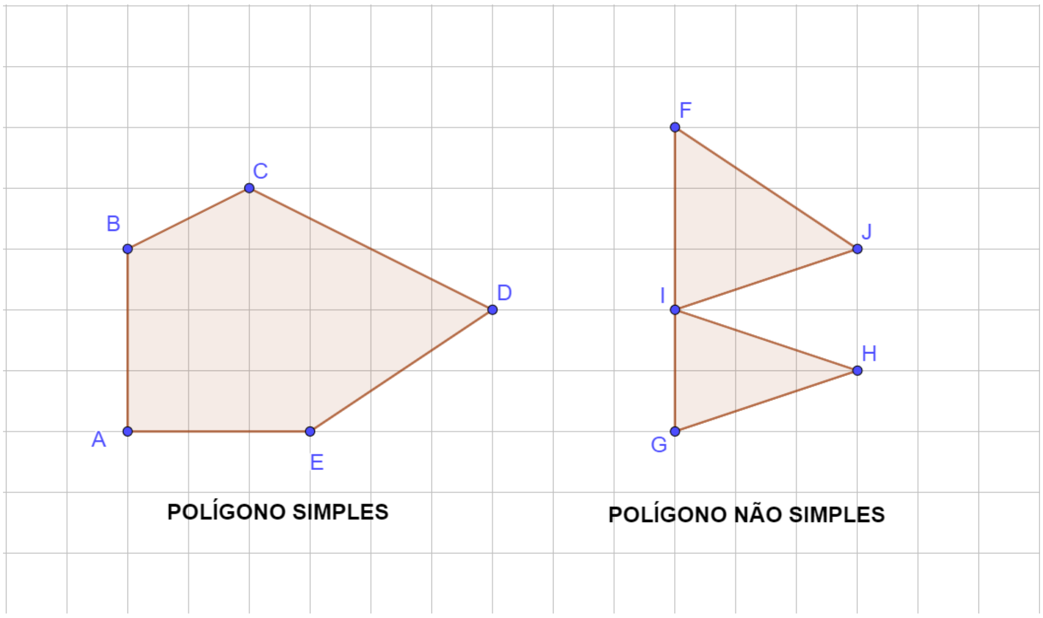
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

3.4 Outra Maneira de Calcular Área

Além da maneira ensinada na seção 3.3, podemos utilizar a chamada Fórmula de Pick para calcular área de polígonos no Geogebra. A Fórmula de Pick foi desenvolvida por Georg Alexander Pick e estabele uma relação entre o conceito de área, da geometria plana, com a teoria dos números. Diversos autores afirmam que apesar de Georg Alexander Pick ter elaborado esta fórmula antes do início do século passado, sua popularização ocorreu a partir de 1950 quando o matemático H. Steinhaus fez uso em um de seus trabalhos publicados.

O uso da Fórmula de Pick será útil somente quando estamos diante do chamado Polígono Simples, ou seja, quando o polígono em questão possui borda (fronteira) caracterizada por uma poligonal fechada que não intercepta duas vezes o mesmo vértice. Caso o polígono não seja um Polígono Simples, temos um Polígono Não Simples. Na Figura 36 temos uma representação dos tipos de polígonos citados nesse parágrafo. Assim, podemos calcular a área desse tipo de polígono apenas contando a quantidade de pontos internos juntamente com os pontos de sua borda (fronteira).

Figura 36 - Polígono Simples e Não Simples



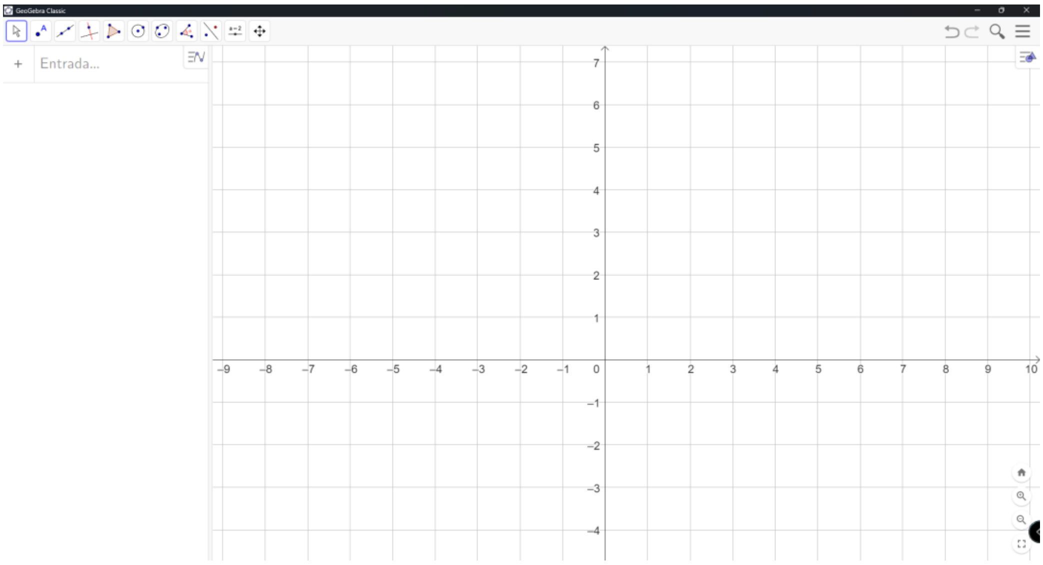
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

3.4.1 Fórmula de Pick

Definição. “Uma *rede* do plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.” (LIMA, 1991, p.102)

No Geogebra, temos a chamada malha quadriculada e podemos adaptá-la para uma rede de pontos do plano. Para isso, com o Geogebra aberto, direcione o cursor do *mouse* para qualquer região da *Janela de Visualização 2D* e clique com o botão direito do *mouse* para que uma aba de opções seja aberta. Logo depois, selecione *Janela de Visualização*, clique na opção *Malha* na parte superior da tela. Em *Tipos de Malha*, provavelmente estará selecionado *Malhas Principais e Secundárias* então, clique sobre essa opção e selecione *Malha Principal*. Por fim, marque a caixa *Distância* escolhendo a distância 1 nos eixos x e y. Dessa maneira, teremos preparado uma rede do plano.

Figura 37 - Rede de Pontos no Geogebra



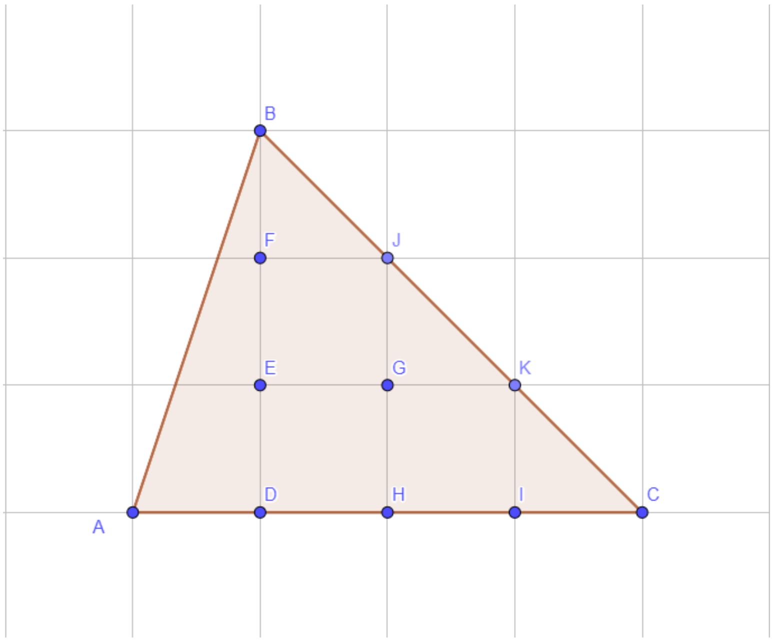
Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Ressaltamos que caso não tivéssemos realizado essas instruções não teríamos uma rede pontos pois note que a definição toma como princípio que a distância de cada ponto disposto no plano é igual a um. Nesse sentido, é muito provável que no momento de calcular área com a Fórmula de Pick o resultado obtido será equivocado.

Fórmula de Pick. “A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão $\frac{B}{2}+I-1$, onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.” (LIMA, 1991, p.102)

Seja um triângulo ABC dado assim como na figura abaixo (Figura 38) onde deseja-se calcular sua área.

Figura 38 - Calculando Área com a Fórmula de Pick



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Observe que o triângulo acima possui seus vértices A, B, C na rede do plano. Também é nítido que os pontos A, B, J, K, C, I, H, D fazem parte da borda e F, E, G, são pontos internos do triângulo. Assim, podemos calcular sua área com o uso da Fórmula de Pick. Então,

$$Area(ABC) = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$= \frac{8}{2} + 3 - 1$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6\ u.a.$$

logo, o triângulo possui 6 $u.a.$

Note que esse método facilita ainda mais a obtenção de área de polígonos e, apesar de simples, a utilização da Fórmula de Pick pode se tornar uma ótima aliada no ensino. Essa ideia pode ser adaptada para outras ocasiões e, assim, o docente terá diversas formas de explorar o cálculo de área.

4 SOBRE A BNCC E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento criado pelo Governo com o intuito de estipular normas que definem aquilo considerado essencial para a formação do aluno pertencente ao ensino básico de instituições de ensino público e privado. Contendo parâmetros para todas as áreas do conhecimento, a BNCC se baseia na Lei nº 9.394/1996 conhecida como Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LBD) e no princípio de igualdade de acesso e permanência determinado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DNC). Neste viés, a BNCC apresenta habilidades e competências que sustentam o desenvolvimento pedagógico do ensino básico.

Na BNCC,

> [...], competência é definida como a mobilização de conhecimentos (Conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo de trabalho. (BRASIL, 2018, p.8)

Então, de acordo com o que foi supracitado, entendemos competência como tudo aquilo que se relaciona com a capacidade de associar os conteúdos que são apresentados em sala com os problemas do cotidiano. Sobre habilidades, interpretamos como os conhecimentos aprendidos ao desenvolver cada competência. Para melhor compreensão, podemos entender as competências como o objetivo geral de uma pesquisa acadêmica e as habilidades sendo os objetivos específicos da mesma. Acerca do uso de tecnologias na educação, nas competências gerais da educação básica 2, 4 e 5 temos que

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p.9)
>
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital – bem como conhecimentos linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (BRASIL, 2018, p.9)
>
> 5. Compreender, utilizar, e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo escolares) pra se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p.9)

Note que as competências gerais acima deixam subentendido que as tecnologias no âmbito educacional podem ser empregadas de diversas formas: como ferramenta de investigação, como meio de facilitar a acessibilidade (com o uso de projetores de imagem para alunos com baixa visão, aplicativos que funcionam como tradutores de Libras, dentre outros meios de garantir acesso), até mesmo como forma de fomento do discernimento do aluno para com o mundo que está inserido.

No ensino fundamental, a BNCC enfatiza o uso da matemática não só para resolver atividades de fins puramente abstratos e sim como ferramenta para a resolução de problemas reais do ambiente em que o discente está inserido (Brasil, 2018). Aqui também o professor pode utilizar o caráter da experimentação dos conceitos que estão sendo estudados para que o aluno tire suas próprias conclusões. Portanto, o emprego da matemática se faz necessário para compor parte da construção do pensamento crítico do cidadão que está sendo formado.

A BNCC divide o conteúdo matemático em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Sobre a primeira unidade, trata-se da formação do conhecimento aritmético do aluno como a apresentação do conceito de número, conjuntos numéricos e as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Em álgebra, é desenvolvido o pensamento algébrico, dando ao discente a oportunidade de analisar e compreender, por exemplo, o resultado de uma expressão. Assim, “As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade” (BRASIL, 2018, p.270).

Em Geometria, é ensinado os conceitos referentes a geometria plana e espacial. Temos a exposição dos aspectos referentes a movimentação de figuras no plano, conceito de simetria, congruência, semelhança, equivalência, planificação de sólidos, dentre outros. Outrossim, é válido destacar o vínculo da geometria com a álgebra, principalmente quando nos referimos ao cálculo de área que, no qual, pode ser obtido por equações. Já na unidade Grandezas e Medidas, temos a reunião de grande parte dos assuntos evidenciados nas unidades anteriores, como a ideia de número, expressões algébricas e geometria. Inclusive, é destacado o caráter da interdisciplinaridade envolvendo os conceitos de matemática com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, o cálculo de velocidade que se relaciona com o assunto de cinemática (na disciplina de física).

Chegando na última unidade, há o fomento da abordagem do conteúdo matemático através de situações-problema, com a capacidade do aluno compreender um dado estatístico, e a lidar com incertezas por meio do uso da probabilidade.

> Merece destaque o uso de tecnologias – como calculadoras, para avaliar e comparar resultados, e planilhas eletrônicas, que ajudam na construção de gráficos e nos cálculos das medidas de tendência central. A consulta a páginas de institutos de pesquisa – como a do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) – pode oferecer contextos potencialmente ricos não apenas para aprender conceitos e

> procedimentos estatísticos, mas também para utilizá-los com o intuito de compreender a realidade. (BRASIL, 2018, p.274)

De acordo com o a citação acima, utilizar artifícios elaborados pelo IBGE em sala de aula contribui para que aluno sinta que o conteúdo estudado em sala tem aplicação concreta em sua realidade. Não podemos esquecer de mencionar o uso de tecnologias nesta unidade, então o uso de *softwares* como o Geogebra e Excell podem ajudar o entendimento do assunto quando for trabalhado o estudo/criação de gráficos.

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p.276)

Logo, constatamos que a BNCC trata da matemática de maneira bem particular, priorizando, acima de tudo, a formação de um indivíduo conciso de sua realidade. Tudo que lhe é ensinado deve ser apresentado como um meio que lhe possa oferecer a capacidade de conclusão própria, ou seja, ele mesmo irá analisar o conteúdo e, de forma crítica, ter suas próprias deduções. Assim, o mesmo faz parte da construção do seu conhecimento.

4.1 Exemplo de Aplicação no Ensino Básico

Salientamos que o exemplo de aplicação exposto neste trabalho é uma adaptação da atividade desenvolvida por Junior e Micena (2014) e Oliveira e Assis (2018). Dito isso, a partir da leitura dos trabalhos acadêmicos desses autores, aperfeiçoei as técnicas usadas por eles detalhando ao máximo os passos tomados para chegar no objetivo geral descrito abaixo.

Objetivo Geral: Calcular a área aproximada da região de um mapa com o uso do Geogebra.

Habilidades e Competências

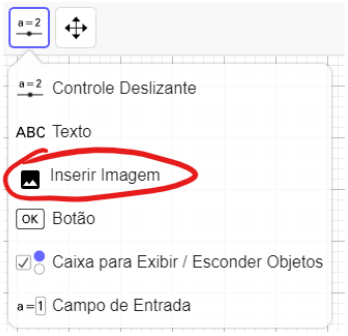
Competência específica 5: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.” (BRASIL, 2018, p.267)

Habilidade EF08MA19: “Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de áreas de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.” (BRASIL, 2018, p.315)

Suponha que se deseja calcular a área do Estado do Pará ou de qualquer outra região. Para isso, vamos precisar de um mapa que pode ser obtido por meio do site do IBGE, Google Maps, Google Earth, dentre outros fornecedores de mapas. Aqui usaremos um mapa do site https://baixarmapas.com.br/ que são elaborados a partir da base cartográfica do IGBE.

Sendo assim, entre no site e realize o download do mapa do Pará. Agora, faremos a importação do arquivo baixado para o *software*. Então, com o Geogebra aberto, direcione o ponteiro do *mouse* sobre a opção indicada na Figura 39, selecione *Inserir Imagem*, vá até diretório da imagem baixada e clique sobre a mesma. Se preferir, ajuste o tamanho da imagem conforme achar apropriado.

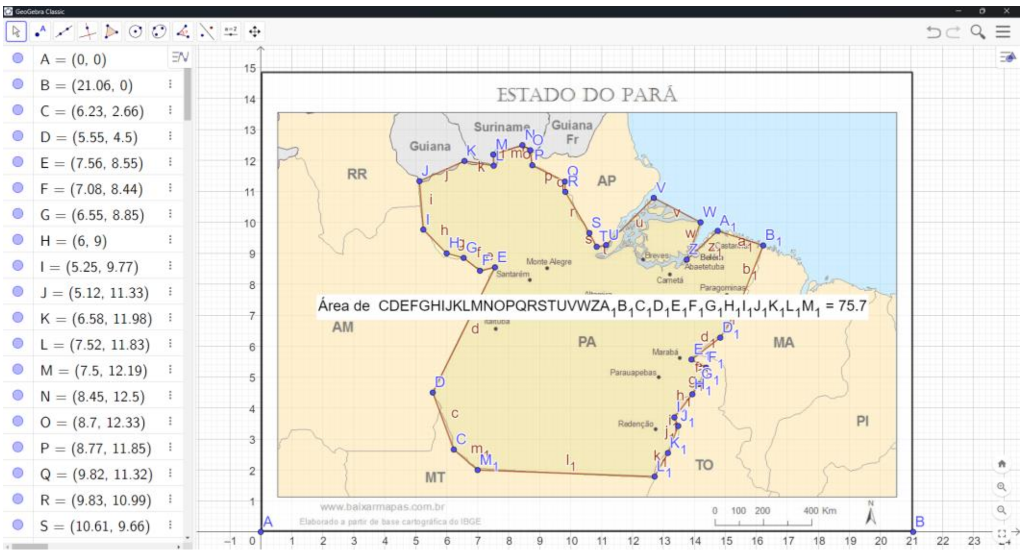
Figura 39 - Opção Inserir Imagem



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Com a função *Polígono*, marque a região do Estado do Pará. Usando *Área*, clique sobre o polígono criado. Observe (Figura 40) que a área obtida não corresponde a área real. Para que possamos obter a medida real, precisamos fazer alguns cálculos usando a escala do mapa.

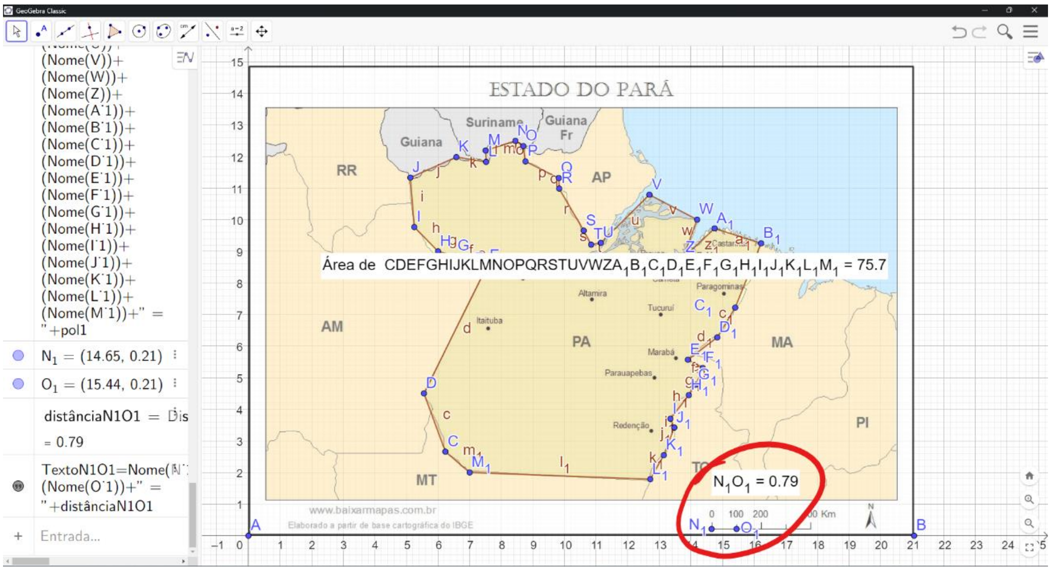
Figura 40 - Área do Estado do Pará



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Com a ferramenta *Ponto*, direcione o cursor do *mouse* para a escala do mapa presente no canto inferior direito, criando um ponto sobre 0 e outro sobre 100. Com *Distância, Comprimento ou Perímetro* clique sobre um dos pontos e posteriormente sobre o outro. Logo, temos a medida do Geogebra que é equivalente a 100 km do mapa.

Figura 41 - Escala do Mapa do Estado do Pará



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do Geogebra.

Como estamos trabalhando com área, precisamos elevar ao quadrado 100 km e a medida obtida equivalente a 100 km no Geogebra que, no caso, é 0,79. Dessa forma, $(0{,}79)^2 = 0{,}6241$ e $(100)^2 = 10.000\ km^2$. Assim, sendo x a área real do mapa, podemos fazer a seguinte proporção

$$\frac{0{,}6241}{75{,}7} = \frac{10.000}{x}$$

desenvolvendo, temos

$$0{,}6241x = 10.000 \cdot 75{,}7$$

$$x = \frac{10.000 \cdot 75{,}7}{0{,}6241}$$

$$x \approx 1.212.946\ km^2.$$

Dessa maneira, a área real do Estado do Pará corresponde a aproximadamente $1.212.946\ km^2$. Ao acessar o site oficial do IBGE (https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/pa.html) verificamos que a área do Estado do Pará é igual a $1.245.870{,}704\ km^2$ um valor bem próximo do que foi encontrado usando o Geogebra. Sendo mais específico, o valor encontrado por meio dessa atividade apresentou um percentual de erro próximo de 2,64%. Isso nos mostra que o procedimento adotado, ainda que relativamente simples, é bastante eficaz.

É nítido que essa atividade exige um certo conhecimento prévio do conceito de área e do Geogebra. Sendo assim, sua aplicação necessita, de antemão, da exposição dos principais conceitos da geometria plana. Assim, o *software* se torna apenas uma das ferramentas no auxílio do ensino do cálculo de área e não substitui, por exemplo, o método do ensino clássico da matemática. Nesse contexto, o Geogebra possibilita uma outra visualização geométrica do problema, potencializando o pensamento crítico do aluno inclusive fazendo com que o mesmo crie outras conjecturas de como se chegar no resultado por meio de diferentes métodos. Também podemos destacar a relação do problema proposto com outros temas da própria matemática como Grandezas e Medidas tendo até contato com o assunto de cartografia que, no qual, tem conexão com a disciplina de Geografia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o que foi exposto nessa pesquisa, concluímos que a geometria foi uma construção humana e se estruturou com o passar do tempo de acordo com cada sociedade até chegarmos nos conhecimentos atuais desse ramo da matemática. Com isso, também é nítido que o cálculo de área foi resultado de tal evolução onde, primeiramente, foi usado pelos cobradores de impostos do Egito, depois pelos babilônios que usaram métodos para calcular área do trapézio isósceles, passando pela estruturação grega realizada, sobretudo, por Euclides, chegando até a era moderna com a implementação do cálculo de área sobre o gráfico de funções.

Evidenciamos que, em um mundo cada vez mais atrelado ao desenvolvimento tecnológico, é primordial que a educação acompanhe essa evolução, então a incorporação das tecnologias digitais na educação abre a possibilidade de enriquecer a experiência do discente do ensino básico. Nesse contexto, elas são poderosas ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. O estudo que conduzimos sobre o uso do Geogebra no cálculo de área de regiões poligonais é uma clara evidência desse potencial, podendo contribuir para um aprendizado dinâmico, interativo e eficaz. Também, vimos que a aplicação desse *software* necessita de um estudo prévio sobre os principais conceitos da geometria plana sendo tratado como um incremento nas aulas de matemática, não substituindo os principais métodos de ensino.

Dessa forma, objetivo geral dessa pesquisa foi atingido pois conseguimos propor o uso do Geogebra para o cálculo de área de regiões poligonais, uma vez que apresentamos o porquê do uso dessa ferramenta, como construir os principais polígonos e calcular sua área, debatemos sobre as recomendações da BNCC na implementação das tecnologias digitais na educação, e, por fim, deixamos um exemplo de aplicação do uso do Geogebra no ensino básico. Acreditamos que o conteúdo desta pesquisa pode contribuir para a popularização desse *software* nas escolas e melhoria no ensino da matemática, essencialmente em geometria plana. Assim, poder-se-á formar cidadãos repletos de saber, críticos e a par de sua realidade.

Também, esperamos que o tema possa inspirar educadores a testar a aplicação dos procedimentos aqui descritos e, quem sabe, posteriormente, expor os resultados obtidos em algum trabalho acadêmico como: artigo, dissertação, dentre outros. Isso certamente contribuirá para o avanço da ciência em nosso país e, consequentemente, melhoria na educação.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática;** Trad. João Bosco Pitombeira de Carvalho. 2ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

BOYER, C. B. **História da matemática;** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação (2018). **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

DOROTÉIO, P. H. **Teorema Pick e Suas Aplicações.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2021. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6167&id2=171054502>. Acesso em: 14 de dezembro de 2023.

EUCLIDES. **Os Elementos;** Tradução e introdução Irineu Bicudo. -São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática;** Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERNANDES, M. P. M. **Relações Matemáticas:** Uma ferramenta no combate ao desinteresse dos alunos. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1201.3546>. Acesso em: 14 de junho de 2022.

JUNIOR, F. S. da S.; MICENA, F. P. Sugestões para Aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v.3, p. 41-58, dez. 2014. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v03a05-sugestoes-para-aplicacao-do-teorema.pdf>. Acesso em: 06 de agosto de 2023.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** O novo ritmo da informação. Campinas – São Paulo: Papirus, 2007.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 1992.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 1991.

LINTZ, R. G. **História da Matemática.** - 2ª ed. ver. – Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007. (Coleção CLE; v.45)

MEDEIROS, M. C. de. **O Uso do Teorema de Pick no Ensino de Geometria e na Resolução de problemas de Olimpíadas**. TCC (Curso de licenciatura em matemática). João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/27278>. Acesso em: 06 de agosto de 2023.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do Uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola.** Conferência Latioamericana de GeoGebra. Montevideo, de 8 a 10 de novembro do 2012. Disponível em: <https://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>. Acesso em: 09 de dezembro de 2023.

OLIVEIRA, J. S. de; ASSIS, C. F. C. de. Aplicações do Geogebra e as Figuras Planas Irregulares: Encontrando a Área do Estado da Paraíba**.** *In:* III Congresso sobre Tecnologia na Educação, 2., 2018, Fortaleza – CE. **Anais...** Fortaleza: CEUR-WS, 2018, p. 204-214.

Disponível em: <https://ceur-ws.org/Vol-2185/CtrlE_2018_paper_49.pdf >. Acesso em: 03 de dezembro de 2023.

PAULO, F. D. da S. **O Uso do Geogebra no Cálculo de Área:** um produto educacional no cálculo de área do Lago Azul de Araguaína-TO. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2020. Disponível em: <https://repositorio.uft.edu.br/bitstream/11612/4368/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20final%20-%20Djalma%20-%20Profmat%20%281%29-compactado.pdf>. Acesso em: 20 de setembro de 2023.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** 2ª Edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: RJ, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SAGICA, F. M. **O software GeoGebra em conceitos básicos da geometria plana:** uma metodologia de ensino para o fundamental maior. Monografia (Graduação em Matemática: Ensino Superior). 52p. Abaetetuba, Universidade Federal do Pará, 2022. Disponível em: <https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/handle/prefix/3929>. Acesso em: 7 de março de 2023.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. de. **A prática pedagógica em geometria plana nos primeiros anos do ensino fundamental:** construindo significados. **REVISTA VALORE**, Volta Redonda, 3, (I): 388-407, jan./jun. 2018. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/85>. Acesso em: 12 de junho de 2023.

SANTOS, K. C. B. **Construções Geométricas e Equivalências de Área.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2017. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/9359/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Constru%C3%A7%C3%B5esGeom%C3%A9tricasEquival%C3%AAncia.pdf>. Acesso em: 09 de dezembro de 2023.