



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCUS VINÍCIUS FREITAS DE MORAES

**O *ERRO* E SUAS IMPLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS
MATEMÁTICOS**

Castanhal-PA
FEV/2022

MARCUS VINÍCIUS FREITAS DE MORAES

**O *ERRO* E SUAS IMPLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS
MATEMÁTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso,
apresentado à Faculdade de Matemática da
Universidade Federal do Pará, Campus de
Castanhal, como requisito parcial para
obtenção do Grau de Licenciado Pleno em
Matemática, sob a orientação da Profa. Dra.
Maria Lídia Paula Ledoux

Castanhal-PA
FEV/2022

MARCUS VINÍCIUS FREITAS DE MORAES

**O ERRO E SUAS IMPLICAÇÕES NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS
MATEMÁTICOS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática como
requisito parcial para obtenção do Grau de Licenciado Pleno em Matemática.

Aprovado em: ___/___/2022

Conceito: _____

BANCA EXAMINADORA:

Orientadora: _____
Profa. Dra. Maria Lídia Paula Ledoux/FACMAT/UFPA

Membro: _____
Profo. Dr. Fábio Collins/IEMCI/UFPA

Membro: _____
Profa. Dra. Andrea Silva/FACMAT/UFPA

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas inúmeras dádivas diariamente recebidas, não teria chegado até aqui sem ele.

Aos meus pais, Marcos José de Brito Moraes e Vaneide Freitas de Moraes, por serem os principais responsáveis por tudo que conquisto, por serem meu refúgio, fonte de amor, apoio, compreensão, por terem sonhado e se dedicado para dar os amparos necessários para eu concluir esta graduação.

A minha irmã, Vanessa Alessandra Freitas de Moraes, por ser fonte de inspiração, discernimento, assim como as inúmeras vezes que esteve disposta a me ajudar.

Aos amigos de curso, em especial Clebson e Thalles, que dividiram comigo momentos de muito aprendizado, descontração, assim como aflições e muitas descobertas na vida acadêmica. Eternamente amigos.

A profa. Dra. Paula Ledoux pela paciência, atenção dedicada e parceria no decorrer da graduação e no desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso.

A todos os amigos e aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram no decorrer da vida acadêmica e na conclusão deste trabalho, fica aqui meus agradecimentos.

RESUMO

Este trabalho é resultado de uma pesquisa de Revisão Bibliográfica, que tem como foco o estudo acerca do *ERRO* e suas implicações na construção de conceitos matemáticos na educação básica, com o objetivo de *compreender os obstáculos cognitivos que são provocados pelo erro na matemática, que implica no aprendizado matemático*. Deste modo, esta pesquisa se caracteriza como sendo de natureza básica utilizando procedimentos de análise bibliográficas, fundamentados por teorias acerca da temática investigada. Nesse sentido, foi realizado um levantamento de teóricos que discutem o erro e suas implicações no aprendizado de conceitos matemáticos. Posteriormente, foi discutido sobre os obstáculos cognitivos a partir das teorias de Jean Piaget e Vygotsky. A partir do estudo feito, pode-se perceber que o erro é uma ferramenta de grande potencial para a aprendizagem de conceitos matemáticos, se trabalhado com atenção pelo mediador, uma vez que a fase entre a adequação de conceitos e o pleno entendimento destes é carregada de ideias que muitas vezes são impactadas por obstáculos cognitivos, mas que se direcionadas de maneira objetiva pelo orientador podem potencializar o aprendizado de conceitos matemáticos.

Palavras-Chave: Erro. Obstáculos. Aprendizado. Matemático.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	7
2. <i>Erro Matemático: pressupostos epistemológicos</i>	10
3. <i>Erros Matemáticos que marcaram a história da humanidade</i>	23
4. Obstáculos Cognitivos na Aprendizagem de conceitos matemáticos.....	27
5. Reflexões de um professor em Formação.....	36
6. Referências.....	37

1. Introdução

A análise de erros é uma abordagem que já sofreu influência de várias concepções ao longo dos tempos, tanto na educação quanto na psicologia. Nesse sentido, com a crescente busca de uma educação de qualidade e igualdade, pesquisadores discutem sobre o potencial do erro no processo de ensino como meio de potencializar a aprendizagem significativa dos estudantes.

O processo de ensino, nesse sentido, para ser satisfatório deve contemplar a aprendizagem, mas para isso é preciso cautela por parte do mediador para que se possa conhecer a realidade a qual o aluno está inserido e, assim direcionar o ensino de maneira concomitante com os conhecimentos que este traz de seu meio. Diagnosticar o erro, analisar e discutir não é uma tarefa fácil para o professor, pois é preciso analisar o estudante de forma complexa levando em consideração um conjunto de elementos que estão inseridos nesse processo.

Estas reflexões são feitas a partir de avaliações e, sofrem distinções de ideias conforme as concepções de cada professor. Conforme Cury (1995), alguns professores realizam provas para verificar a aprendizagem de seus alunos com o objetivo de apenas identificar os erros “alertando os alunos quanto à sua ocorrência, para não haver repetição futura” (p. 40). Enquanto que outros professores, já veem no erro, um grande potencial para o aprendizado significativo, uma vez que o erro é causado por um obstáculo repleto de informações não consolidadas que podem ser corrigidas e direcionadas pelo orientador para que se tenha um pleno entendimento do aprendizado.

Dessa forma, o principal objetivo da avaliação deve ser do professor conhecer o seu aluno, assim como avaliar seus métodos de abordagem do conteúdo, refletindo de como está sendo seu ensino e dessa forma, traçar planos que satisfaçam as necessidades de seus alunos.

Para discorrer sobre o *ERRO* e, conhecer o que já se discute sobre esta temática e, na intenção de levantar conhecimentos já disponibilizados, realizamos um estudo de caráter bibliográfico, visando analisar as principais teorias sobre o tema, com a finalidade de apontar o que já se tem construído no cenário

Desta forma, esta pesquisa foi produzida a partir de material já existe e, publicado em fontes primárias (sites, revistas, artigos, dissertações, teses, livros e outros) sobre o erro matemático e, que por sua relevância, poderá contribuir com o

meio acadêmico, na perspectiva de atualizar e complementar o desenvolvimento do conhecimento.

Quando fazemos uma pesquisa desta natureza, precisamos ser vigilantes para que se busque fontes seguras, pois “na pesquisa bibliográfica, é importante que o pesquisador verifique a veracidade dos dados obtidos, observando as possíveis incoerências ou contradições que as obras possam apresentar (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

Para Lakatos e Marconi (2003), “a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras” (p.183).

Embasado nas teorias que fundamentam a Pesquisa Bibliográfica, realizamos este estudo a partir de cinco movimentos, como se observa no organograma.



FONTE: Elaborado pelo pesquisador baseado em Lakatos e Marconi (2003).

É importante destacar que, como professor de Matemática em formação, tenho total interesse em pesquisar sobre aspectos que vão estar presentes no ambiente em que vou desenvolver meu exercício profissional.

Neste sentido, esta pesquisa pode apontar resultados significativos que podem contribuir tanto para meu crescimento pessoal quanto para o desenvolvimento profissional do professor de Matemática.

Vale destacar que não intencionamos aqui, tecer críticas ao material selecionado, sejam elas internas ou externas, pois não é este o objeto da pesquisa, e sim, valorizar os estudos já realizados sobre a temática.

Desta forma, esta pesquisa é de abordagem qualitativa, na modalidade Pesquisa Bibliográfica, e está estruturada em quatro seções: 1. **Erro matemático:**

pressupostos epistemológicos. Nesta seção fizemos um levantamento dos teóricos que discutem o erro matemático, com objetivo de conhecer os fundamentos históricos que dizem respeito às implicações do erro no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. 2. **Obstáculos cognitivos na aprendizagem de conceitos matemáticos: o erro como elemento central**. Nesta seção realizamos um estudo acerca dos processos de aprendizagem em uma perspectiva psicológica, para entendermos os obstáculos cognitivos que são provocados pelo erro. 3. **Erros matemáticos que marcaram a história da humanidade**, em que apontamos quatro casos de situações reais que apontam o erro de cálculo como um dos elementos da causa do acidente.

E por fim, a seção 4 que traz uma breve reflexão sobre a minha experiência no processo de formação docente, baseando-me nas pesquisas realizadas sobre o erro e suas implicações na construção de conceitos matemáticos na Educação Básica.

2. **ERRO MATEMÁTICO:** *pressupostos epistemológicos*

Esta seção propõe fazer uma revisitação nas teorias que discutem o *ERRO* como uma ferramenta auxiliar no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Isso se faz pela necessidade de compreender os comportamentos que estão situados na ocorrência do erro. Para tanto, nos reportamos ao século XX, que em vários países do mundo (Estados Unidos, Alemanha, Rússia), essa busca ganhou força por parte de pesquisadores.

Nos Estados Unidos, as pesquisas foram impulsionadas pelo comportamentalismo, também conhecido por Behaviorismo, que tem como objeto de estudo o comportamento. Na Alemanha, os estudos ganharam força por meio da Psicologia Experimental, da Psicanálise e da Gestalt. Na Rússia, as pesquisas foram impulsionadas pelo marxismo que influenciou as mudanças escolares e das pesquisas na época (CURY, 2013, p. 28).

Dessa forma, pesquisadores sob realidades distintas, dedicados à análise de *erros*, contribuíram para o crescimento das pesquisas, sobre o *erro* na Matemática. Entretanto, é importante perceber que os teóricos que discutem o *erro*, apresentam pontos de vistas distintos, quanto às suas concepções de abordagem. Essas abordagens sobre o *erro*, sofreram influências de diferentes teorias no decorrer do tempo. Tanto da Pedagogia quanto da Psicologia (CURY, 1995, p. 41).

Ainda na perspectiva de compreender os comportamentos, apontamos teóricos – **Thorndike, Hadamard, Krutetskii, Brousseau, Borasi, Cury** - que foram considerados como precursores na discussão sobre o *erro* matemático. Estes fazem abordagens do tema a partir de concepções da Psicologia, Psicanálise, Processamento da informação, construtivismo, além do objetivo didático.

Edward L. Thorndike

Um Psicólogo que dedicou seus estudos para entender a maneira como se estabelece a aprendizagem. Em sua obra “A nova metodologia da Aritmética”, ele defende que o aluno aprenda conteúdos matemáticos com importância significativa para a vida. Além disso, é comum atribuir a ele a origem da Psicologia Educacional, sendo lembrado nos dias atuais pelas suas experiências envolvendo animais, no que diz respeito ao estudo do comportamento.

Da Rocha Falcão (2003, *apud* CURY, 2013), afirmam que o início da Psicologia da Educação Matemática, ocorreu a partir das experiências desenvolvidas por

Thorndike e Pavlov envolvendo animais, o que de fato, originou a perspectiva comportamentalista da aprendizagem e, se tornou essencial para o entendimento do *erro* matemático.

Desse modo, Thorndike dedicou parte de seus estudos, para encontrar meios que facilitasse ao aluno, o entendimento de conteúdos matemáticos, assim como, direcionar o professor de maneira que possa ensinar os conteúdos de forma objetiva. De acordo com o autor, aos métodos nos quais a matemática é ensinada de forma abstrata, falta cuidados e habilidades para que se possa organizá-lo, assim como, questões, que, o “desprezo da vida e dos interesses da criança, como muitas das vezes, com verdadeiro desrespeito aos interesses vitais das diferentes fases de evolução psicológica” (THORNDIKE, 1936, p. 38), não sejam evidenciados da forma principal e, sim o verdadeiro sentido da aplicação prática do conteúdo na vida da criança.

Nesse sentido, por meio de suas pesquisas, algumas implicações das metodologias encontradas por Thorndike para o aprendizado, baseiam-se no que ele chamou de “Lei do Exercício”. Esta lei baseia-se na formação de hábitos para a resolução de exercícios. Para o autor, “o uso fortifica e o desuso enfraquece as conexões mentais”, embora ainda seja de grande proveito no dia a dia, ela foi veementemente criticada por psicólogos (CURY, 2013).

Além da Lei do Exercício, houve destaque para a “Lei do Efeito” também desenvolvida por Thorndike. Esta lei baseia-se nas “conexões que são acompanhadas pelo estado de satisfação ou aborrecimento e, que geram respectivamente um fortalecimento ou um enfraquecimento das conexões, que levam ao aprendizado” (THORNDIKE, 1936, p. 78).

Dessa forma, o *erro* matemático pode ser observado com mais frequência em conteúdos em que o aluno não tenha afinidade ou, que seja ministrado pelo professor sem o devido cuidado a conteúdos que facilitam o aprendizado.

De modo geral, Thorndike culminou na pesquisa e no entendimento de como o comportamento expressa as dificuldades causadas pelo *erro* matemático. De acordo com o teórico, “o interesse do aluno é passível de ser alimentado com o fim de se obter resultados e, o domínio de suas dificuldades, para que, dessa forma, o professor ajude o aluno a ter consciência da meta a ser alcançada e facilite o conhecimento do próprio êxito” (THORNDIKE, 1936, p. 29).

Jaques Salomon Hadamard

Hadamard foi um matemático que morreu em 1963 e teve grande contribuição no estudo do erro matemático. Inspirado em Poincaré sobre o entendimento de como se dá a criação matemática. Em 1945, ele escreveu o livro “A psicologia da invenção no campo matemático”. Cury (2013) comenta que essa inspiração de Hadamard, ocorreu a partir de uma conferência que ocorreu na Sociedade de Psicologia de Paris, em que era abordado as relações do consciente e o inconsciente no processo de invenção matemática.

Para explicar como se estabelece o processo que ele chamou de criação matemática, Poincaré conta a própria experiência, vivenciada no desenvolvimento de uma espécie de função matemática inédita até então. Desse modo, ele entende que a criação matemática surge a partir do trabalho consciente e varia com estágios até o inconsciente. Além disso, ele ressalta que o trabalho inconsciente “é possível e com certeza só é proveitoso, se por um lado é precedido por outro, seguido por um período de trabalho consciente” (POINCARÉ, 2000, p. 6), em que este trabalho consciente, é exatamente o estudo direcionado para um determinado objetivo.

Por conseguinte, Poincaré (2000), se pergunta como é possível o erro em matemática, já que uma mente sã não deveria ser ocasionada por um deslize lógico. Daí, surgem algumas possíveis respostas, que podem satisfazer o erro em matemática.

Desse modo, Hadamard elenca quatro estágios da invenção matemática, os quais são: 1. *Preparação*, 2. *Incubação*, 3. *Iluminação*, 4. *Apresentação* (CURY, 2013, p.22). Diante desses estágios, podemos, portanto, buscar entender se a alternância entre o trabalho consciente e o inconsciente em um desses passos lógicos ocorre um lapso de ideias que fazem com que o estudante perca ou confunda determinada ideia em determinado momento podendo levar ao erro.

Nesse sentido, as ideias as quais nos reportamos anteriormente, são os aprendizados do estudante que nem sempre se estabelecem na hora do estudo e, que depende de inspirações. Essas inspirações súbitas “nunca acontecem, exceto após alguns dias de esforço voluntário que pareceu absolutamente infrutífero e de onde nada de bom parece ter chegado, onde o caminho tomado parece totalmente errado” (POINCARÉ, 2000, p. 8).

Em vista disso, Hadamard aponta que está lidando com um assunto complexo pelo fato de envolver duas ciências: a Matemática e a Psicologia. E destaca que para

se entender e tratar minuciosamente sobre tal, é preciso ser trabalhado por alguém que tenha domínio das duas áreas (CURY, 2013, p. 21).

Por conseguinte, Hadamard considera que o erro é visto pelos professores como objeto infrutífero, em que nada de proveitoso pode ser retirado e sendo uma fase do aprendizado obscura, já que não é admitida, de certa forma, por docentes no processo de ensino. Diante disso, o autor versa dizendo que “eu faço muito mais erros do que meus estudantes; só que eu sempre os corrijo, de forma que nenhum traço deles permaneça no resultado final” (HADAMARD, 1963, p. 49 *apud*, CURY, 2013, p. 22).

Hadamard foi, e, é reconhecido até os dias atuais como um dos precursores no estudo do erro matemático, contribuindo dessa maneira - para o aperfeiçoamento no ensino e na aprendizagem da Matemática. Outrossim, pode-se perceber que ele foi essencial à sua época para o intermédio da Matemática com a Psicologia, junto com as ideias de Poincaré, a qual o inspirou. Portanto, seus estudos são considerados de extrema importância para o entendimento e o desenvolvimento deste trabalho.

Vadim Andreyevich Krutetsky ou (Krutetskii)

Krutetskii foi um pesquisador russo, que se dedicou ao estudo na década de 1960 sobre as habilidades matemáticas. Seu trabalho mais conhecido é *The psychology of mathematical abilities in school children (A Psicologia das Habilidades Matemáticas em crianças em idade escolar)*. Para desenvolver sua pesquisa, Krutetskii formou uma equipe de 50 pesquisadores, que em um primeiro momento, conceituaram o “talento” matemático partindo do referencial de Vygotsky (GIORDION, 2010, p. 32).

Krutetskii e sua equipe, se dedicaram a caracterizar o que para eles vinha a ser um aluno talentoso em matemática, além de dar atenção para entender como se estabelecia o desenvolvimento das habilidades matemáticas em um aluno (GIORDION, p.32, 2010). Dessa forma, a pesquisa de Krutetskii começa sendo realizada por meio de pesquisa bibliográfica dos teóricos de sua época.

Ao realizar a pesquisa bibliográfica, Krutetskii entende que os psicólogos de sua época se baseavam na linha de pesquisa do behaviorismo e utilizavam métodos que não analisavam os processos ocorridos ou como ocorreu determinado resultado, considerando apenas o resultado final. Giordion (2010) - comenta que “essa

metodologia era falha, visto que fornecia apenas uma avaliação quantitativa e não continha elementos de análise dos processos ocorridos” (p.27).

Para Krutetskii, essa linha de raciocínio não era interessante, uma vez que, sua pesquisa focava no meio e, como acontecia a construção de um determinado resultado, não somente no produto final.

Desse modo, o processo utilizado pela equipe de Krutetskii, consistia em apresentar ao aluno um problema e, em seguida, pedir que o mesmo resolvesse e, simultaneamente comentasse sua resolução em voz alta, se por ventura o aluno não conseguisse resolver, era dado alguma dica ou então disponibilizado outro problema (GIORGION, 2010, p.33). Observa-se, portanto, que houve com Krutetskii, uma quebra na metodologia de pesquisa, já que até então as pesquisas eram realizadas a fim de avaliar o produto, deixando-se de lado o meio.

Nessa perspectiva, esse estudo era direcionado à descoberta de características que despertassem no aluno habilidades matemáticas e, que desse modo, facilitassem o seu aprendizado bem como seu desenvolvimento em matemática na sala de aula. Cazorla (2002), comenta que para se inferir a habilidade matemática, é necessário analisar/estudar o processo pelo qual o aluno executou a atividade e não apenas avaliar o resultado. “Muitas vezes, resultados iguais podem ter sido produto de processos mentais diferentes e não necessariamente significam a presença da habilidade” (CAZORLA, 2002, p. 132).

Destaca-se ainda, que Krutetskii se preocupou em buscar entender como a criatividade do aluno surge por meio de suas habilidades para solucionar problemas. Nesse sentido, Alvarenga (2017, p. 54), afirma que Krutetskii entende a criatividade em matemática como sendo a capacidade de o aluno encontrar meios para solucionar problemas, inventar ou até formular teoremas e fórmulas. Além disso, comenta que a aplicação dos problemas tem por objetivo avaliar a criatividade do sujeito de solução, e dá ênfase no processo pelo qual o discente venha utilizar para desenvolver seu raciocínio e não somente na resposta final (ALVARENGA, 2017, p. 54).

Dessa forma, Cury (2013, p. 23), acrescenta que a análise de forma qualitativa das respostas dos problemas, juntamente com uma discussão direcionada para as dificuldades dos alunos, possa ser a melhor maneira de se aproveitar o erro matemático - em um ambiente escolar - para questionar e auxiliar os estudantes de forma que possam vir a (re)construir o seu conhecimento. Pode-se ainda, observar que evidenciando a presença do erro, cabe ao professor utilizá-lo de maneira

investigativa e construtiva, de forma que instigue o estudante a ir além do lapso que o levou ao cometimento do tal erro e, a partir daí, dê início ao que Cury (2013) chamou de reconstruir/construir o seu conhecimento.

Dessa forma, diante da pesquisa de Krutetskii na busca de analisar, estudar e entender como se estabelece o que chamou de *Habilidade Matemática*, o autor destaca o processo na busca do entendimento das etapas que o estudante segue para solucionar problemas. Assim como, enfatiza a criatividade do aluno para que possa ser desenvolvida estratégias eficientes para o aproveitamento do erro matemático.

Guy Brousseau

Brousseau é um educador matemático francês e autor na área da educação matemática, que na linha da pesquisa dos obstáculos epistemológicos, é considerado pioneiro na introdução desta ideia na educação matemática, mais especificamente no estudo do erro. Cury (2013), comenta que a partir da apresentação em um evento internacional de Matemática, que ocorreu na Bélgica em 1976, as obras do autor foram sendo difundidas entre trabalhos da Didática da Matemática.

No que diz respeito ao erro, Brousseau defende que o erro não se trata somente do que as teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem expõem. Essas teorias pregam que o erro é efeito da ignorância, do acaso, assim como, da incerteza. Neste sentido, acrescentando nesse entendimento ele acredita que o erro é “o efeito de um conhecimento anterior que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso e termina dizendo que os erros desse tipo são constituídos em obstáculos” (BROUSSEAU, 1983, p. 171, *apud* CURY, 2013, p. 59).

No que diz respeito ao conhecimento prévio ou empírico, Bachelard (1996), afirma que “A experiência comum não é de fato construída; no máximo, é feita de observações justapostas” (p. 14). Nesse sentido, Costa (2017), acrescenta que esse conhecimento é composto por generalizações e pré-conceitos e, para superar esses obstáculos é necessário superar o conhecimento pré-estabelecido por meio de um novo conhecimento. Entretanto, para que se possa superá-los é necessário que o indivíduo saia da zona de conforto, na busca de um novo conhecimento de forma que venha ajudar a superar o conhecimento anterior e, desse modo, consiga prosseguir eliminando os entraves que venham aparecer no decorrer da aprendizagem.

Bachelard (1996), comenta que é em termos de obstáculos epistemológicos, que o conhecimento científico deve ser posto, já que para o indivíduo buscar o entendimento de um conteúdo, é necessário que se depre em obstáculos no decorrer da aprendizagem. Portanto, é válido entender que:

É no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnações e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17).

Nesse sentido, o autor se preocupa em mostrar que existe um conhecimento prévio, que a pessoa traz, e, é nesse entrave entre o conhecimento prévio e o conhecimento científico, que ocorre o que ele chama de lentidões e conflitos que geram, dessa forma, a inércia no processo do aprendizado e evidencia os obstáculos epistemológicos.

Dessa forma, em meio a esses conflitos, quando se conhece as verdades, fica fácil entender as construções racionais. Entretanto, quando se conhece os erros é possível entender os motivos que são obstáculos ao conhecimento científico. Da mesma forma, é a partir desses obstáculos que se pode entender como muitas vezes esses conflitos estão diretamente ligados ao processo de aprendizagem (LOPES, 1990, p. 65 *apud* COSTA, 2017, p. 42).

Diante disso, Brousseau entende, no que diz respeito à aprendizagem, que os obstáculos são um conjunto de dificuldades que interferem diretamente no aprendizado de determinado conhecimento. Além disso, o autor destaca quatro tipos de obstáculos presentes no aprendizado matemático (COSTA, 2017, p.47):

Tabela 1 - Obstáculos Epistemológicos da Aprendizagem Matemática

OBSTÁCULO	CONCEITUAÇÃO
Obstáculo Ontogenético	Este obstáculo diz respeito à maturidade da capacidade mental ou limitações neurofisiológicas do estudante que possam causar certa dificuldade na assimilação de determinado conteúdo.
Obstáculo Psicológico	Trata-se do conhecimento empírico do estudante. Isto é, o senso comum, conhecimento que o educando traz do meio em que vive além da afetividade dele com o assunto que esteja estudando.
Obstáculo Didático	Concerne em perca do real sentido do conceito matemático, bem como no tangenciamento das ideias provocadas pelo resumo na busca pela simplificação do aprendizado que implica na generalização equivocada de informações.
Obstáculo Epistemológico	Consiste na dificuldade do entendimento do conhecimento matemático residente na elaboração de conceitos, informações assim como na compreensão de processos históricos e da absorção de conhecimento.

FONTE: Elaborado pelo pesquisador com base na pesquisa bibliográfica.

Além dos obstáculos apontados na tabela 1, existe outros autores que destacam a existência de outros obstáculos, como Almouloud (2006) que aponta os *obstáculos linguísticos*, que consistem nas dificuldades do estudante em compreender determinado conteúdo, em virtude do desencontro da linguagem materna com a linguagem que o professor utiliza com significados distintos em aula. Outrossim, Miranda (2007), “evidencia a existência de *obstáculos emocionais* que tratam da indução ao erro devido à instabilidade emocional diante de determinados conteúdos” (p. 159).

Neste sentido, Bachelard (1996, p. 23), afirma que a crença dos professores de ciências, é utilizar a repetição de conteúdo com intuito de fazer o estudante entender uma demonstração, sem se darem conta que o discente entra na sala de aula trazendo conhecimentos empíricos, adquiridos no seu cotidiano. Dessa forma, acrescenta dizendo: “não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana” (BACHELARD, 1996, p. 23).

Dessa forma, Brousseau (1983), contribui de forma significativa, para o desenvolvimento do estudo das implicações do erro na Matemática, transcendendo sua concepção para a dimensão didática, possibilitando um amplo conhecimento nas abordagens do erro em sala de aula. Além disso, ao autor permite entender que o erro é construído de conhecimento e, que o estudo desse conhecimento, se faz de grande importância para a construção do aprendizado, já que o erro revela as dificuldades a serem enfrentadas com maior atenção e, como se estabelece a organização do conhecimento empírico do aluno, com significados repletos de representações, muitas vezes equivocadas, mas, de grande proveito para o progresso da aprendizagem.

Raffaella Borasi

Quando se trata da análise de erros no ensino e aprendizagem na Matemática, existem autores que não podem deixar de serem citados. Assim é com Raffaella Borasi, uma autora bastante reconhecida em virtude de sua excelente contribuição no estudo do erro matemático.

Raffaella Borasi graduou-se em Matemática na Itália e é doutora pela *State University of New York*, em Buffalo (CURY, 2013). Suas investigações abordam tópicos de conteúdos matemáticos, como por exemplo: geometria, frações, limites e

outros e, como estudantes realizam a resolução de questões propostas, visando mostrar a ideia da aplicação dos erros como estratégia pedagógica (RIZZON, 2018, p. 31-32).

Em seus trabalhos, Borasi utiliza com frequência a nomenclatura “*trampolins para aprendizagem*” que consiste no uso dos erros para “impulsionar” a aprendizagem do estudante. Com isso, a autora no seu trabalho *students’ constructive use of Mathematical Errors*, enumera uma série de benefícios que estão presentes quando se utilizam os erros como trampolins. Esses benefícios dizem respeito à utilidade dos erros para envolver estudantes em atividades matemáticas, instigar a atenção, ajudar em uma melhor compreensão de conceitos, facilitar a solução de problemas, instigar a discussão de questões com maior nível de abstração, dar origem a novas indagações, bem como, novos problemas, além de tornar alunos mais cautelosos em suas atividades (BORASI, 1989, p. 31-32).

Nesse sentido, Vaz (2013, p. 22), partilha da ideia de Borasi dizendo que quando o professor adota medidas didáticas adequadas, os erros como “trampolins” podem ser utilizados para um melhor proveito do processo de ensino e aprendizagem do aluno, ao invés de descartá-los. Além disso, acrescenta dizendo que para a autora, os alunos obtêm uma aprendizagem significativa a partir do momento que se utiliza a análise dos erros dos estudantes no processo de ensino.

É em vista dessa aprendizagem, que Borasi (1989), destaca em seus trabalhos, a importância do acompanhamento no processo de ensino pelo professor, de modo que não seja evidenciada apenas a nota como processo final, mas sim, a construção do conhecimento. Nesse sentido, Borasi (1989), considera que se a ênfase no processo de ensino e aprendizagem se desloca do produto para o processo, as chances de se aproveitar os erros cometidos se tornam maiores e, podem gerar novas aprendizagens.

É nessa linha de raciocínio que Rizzon (2018), afirma que, para Borasi (1989), quando existe a tentativa de se eliminar os erros ou quando há a repetição de uma mesma explicação não entendida anteriormente a capacidade de produtividade do estudante é diretamente atingida. Outrossim, para a autora, os erros são uma fonte fecunda de informações que levam ao entendimento de onde, como e o que levou ao problema no decorrer da aprendizagem.

Nesse viés, para que se possa ter proveito do erro, Borasi propõe a adequação e o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem onde o potencial do erro possa

ser aproveitado. Cury (2013) explica que, a ideia da autora é “usar determinado erro para questionar se o resultado incorreto pode verificar-se, ao invés de tentar eliminá-lo” (p. 68), e dessa forma, tirar o máximo de proveito dessa parte do processo de ensino e aprendizagem do aluno.

Entretanto, admite Borasi (1989), que o desenvolvimento desses ambientes é um tanto quanto complicado, pois os objetivos educacionais da grande parte dos currículos de matemática são infelizes, uma vez que adotam o desempenho de tarefas específicas e, o desenvolvimento conceitual de conteúdos, da mesma forma que o curto espaço de tempo, dificulta e desencoraja os professores. Dessa forma, ela acrescenta dizendo que “em um clima instrucional em que as explicações dos professores, seguidas da prática dos alunos é norma, pode se esperar obstáculos consideráveis para envolver os alunos no uso de erros nas práticas de aprendizagem” (BORASI, 1989, p. 33).

E por fim, cabe abordar uma de suas mais importantes e interessantes contribuições para o estudo do erro. A *taxonomia do uso dos erros como trampolins para a pesquisa*, como a autora mesma diz. Essa taxonomia consiste em um quadro que relaciona níveis de discurso matemático com objetivos da aprendizagem matemática, que são complementares entre si (BORASI, 1989).

Cury (2013), comenta que a autora reformulou o quadro em sucessivos trabalhos, a partir do ano de 1987. Dessa forma, apresentamos a seguir, a *Taxonomia* de Borasi, com alguns ajustes feitos por Cury (2013).

Nível de discurso matemático			
Objetivo da aprendizagem	Realização de uma tarefa matemática específica.	Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático.	Compreensão sobre a natureza da Matemática.
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdo específico.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a insights e perspectivas

	direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
--	---	---	---

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir de Borasi (1996 *apud* Cury, 2013).

Com a Taxonomia, Borasi (1989), propõe o uso consciente e direcionado, assim como, o estudo do erro como uma ferramenta para facilitar o ensino e aprendizagem de estudantes.

Cury (2013), comenta que a combinação da Taxonomia, pode levar o professor a encontrar resultados distintos em momentos diferentes. Por exemplo, em um primeiro momento, o professor pode apenas descobrir o erro e o remediar. Mas, em um outro momento, ele pode instigar outra turma, ao aprofundamento a partir da pesquisa deste erro.

Portanto, Borasi (1989) partilha da ideia que o valor da taxonomia deve ser medido com o objetivo que faça com que professores busquem novas possibilidades construtivas de abordagem do erro, assim como, procurem inovar suas práticas educacionais (BORASI, 1989, p. 4). Portanto, quando utilizada a Taxonomia de Borasi, uma série de benefícios podem ser alcançados, entretanto, é necessário que o professor adeque ao contexto empregado.

Helena Noronha Cury

Uma das principais influentes no estudo do erro matemático no Brasil, é Helena Noronha Cury. Cury é licenciada e bacharel em Matemática pela UFRGS, mestre e doutora também pela UFRGS. Sua área de pesquisa aborda a análise de erros em Matemática, concepções e crenças Matemáticas, além do uso de computadores no ensino de Matemática (CURY, 2001, p. 9).

Em seus trabalhos, a autora destacar seu entendimento sobre o erro Matemático, de forma construtiva para o ensino e aprendizagem, uma vez que o erro é uma “ferramenta para aprendizagem”, como ela mesma diz, composta por inúmeros fatores que analisados de forma correta podem contribuir para a construção do conhecimento do estudante.

Dessa forma, Cury (2013), destaca a ideia de que o erro é um conhecimento constituído e, de alguma maneira sendo necessário que o professor intervenha, nesse

conhecimento constituído pelo erro, de forma didática para desestabilizar as certezas do aluno levando-o ao questionamento de suas respostas.

Com isso, Cury considera que o erro pode ser fonte de novas descobertas e comenta que “quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema” (CURY, 2013, p.184). Diante desse problema, a autora diz, que os alunos em conjunto com professores, podem investigar a existência de possíveis soluções que promovam o aprendizado, caracterizando assim, o uso construtivo do erro como “ferramenta para a aprendizagem”.

Além disso, ainda que o erro seja visto como algo desprezível no processo de ensino por alguns educadores, a autora destaca seu entendimento considerando que ele pode ser empregado como metodologia de ensino. Dessa forma, Cury (2013, p. 84) expressa que, por meio dos erros cometidos pelos estudantes, o professor pode utilizá-lo como metodologia de ensino, retornando a conceitos e elaborando estratégias de forma a permitir que o aluno supere suas dificuldades.

Por meio dessa estratégia, o docente pode utilizar a metodologia de ensino para investigar os supostos saberes envolvidos no erro do estudante, assim como, explorar suas dificuldades por meio das habilidades matemáticas que envolvam os aprendizados investigados a partir desse erro. Nesse sentido, a autora comenta que o erro além de ser uma metodologia de pesquisa “também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e, se quer explorá-las em sala de aula” (CURY, p. 220, 2013).

Com isso, a partir da metodologia considerada por Cury, a avaliação da aprendizagem matemática passa a ter um novo leque de abrangência, uma vez que é desmitificada a visão do erro, como algo que pode ser “apagado” do processo de ensino e, atribuído uma pontuação negativa. Nesse viés, a autora considera, em comparação com essa metodologia, que:

No processo de avaliação da aprendizagem matemática, utilizado habitualmente, em qualquer nível de ensino, estamos acostumados a corrigir provas, que são instrumentos individuais de avaliação, e o fazemos separadamente das outras atividades desenvolvidas pelo grupo, durante as aulas ou como tarefas extraclasse. Essa avaliação não leva em conta o processo de chegar à solução, não usa os erros dos alunos como subsídios para compreender suas dificuldades. (CURY, 2001, p. 23).

Além disso, essa avaliação não considera as experiências do indivíduo, o meio em que vive, seus aprendizados natos, suas dificuldades e se realmente domina

determinado conteúdo. Portanto, a autora acrescenta dizendo que uma avaliação que não considera os aprendizados adquiridos através do convívio social do estudante e, que só avalia a partir de provas individuais, apenas considera o conhecimento já atingido pelo aluno e que um novo método, chamado por ela de “nova fórmula”, consiste em propor atividades que exijam um esforço conjunto dos alunos (CURY, 2001, p. 24).

É a partir desse esforço conjunto, que a análise dos erros pelo professor pode ser feita de forma ampla, abrangendo todo o grupo e facilitando o entendimento das fragilidades no aprendizado de determinados conteúdos. Cury (1994, *apud* CURY, 2001), considera que o professor pode ter uma visão mais abrangente sobre a análise de erros na resolução de problemas em grupo, pois as dificuldades e necessidades do grupo são vistas de maneira ampla e, as atividades planejadas e direcionadas permitem aos estudantes, como grupo e como indivíduos, desenvolverem funções cognitivas não amadurecidas completamente.

Portanto, fica clara a posição da autora em seus trabalhos, a favor da importância do uso construtivo do erro matemático no processo de ensino e aprendizagem seja na educação básica, em que é essencial seu uso para a construção do conhecimento, assim como no ensino superior, em que são formados os profissionais para as mais diversas áreas de atuação, em especial os docentes. Entretanto, Cury (2013), questiona a ausência de discussão sobre o erro nas licenciaturas, uma vez que, os futuros professores de Matemática estarão diariamente lidando com o processo de ensino e aprendizagem, envolvendo observações de respostas, discussões e análise de soluções. Em síntese, “as pesquisas sobre os erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores” (CURY, 2013, p. 225).

Nesta seção, fizemos as discussões a partir de grandes nomes - Thorndike, Hadamard, Krutetskii Brousseau, Bachelard, Borasi, Cury – do século XX, que contribuíram para a compreensão do erro matemático no cenário mundial e nacional – Estados Unidos, Alemanha, Rússia, Brasil – a partir de estudos realizados por esses pesquisadores.

A partir desta compreensão, consideramos relevante trazer na seção a seguir, os erros matemáticos que ocorreram em grandes obras da engenharia e, as consequências desses erros para a sociedade.

3. Erros Matemáticos que marcaram a história da humanidade:

A partir desta compilação, em que conseguimos reunir as discussões feitas por teóricos que discutem o erro no cenário nacional e mundial, julgamos relevante, fazer o compartilhamento de cinco grandes fatos que marcaram o mundo, ocorridos a partir do erro matemático.

Erros matemáticos são comuns, mesmo entre professores de Matemática ou pessoas que trabalham no dia a dia, na realização de cálculos. Existem erros que podem parecer corriqueiros nas salas de aula, como por exemplo, o aluno que não consegue resolver um problema matemático e, quando o tenta, o resultado não é o esperado, ocorrendo o erro. Aqui estamos nos referindo aos erros matemáticos de maior proporção e/ou fatais.

Para evitar que erros de cálculos ocorram, é necessário realizar testes sucessivos, até que se tenha uma margem de segurança, que não venha colocar em risco a vida humana, antes desse produto ser colocado no mercado. A história nos mostra casos de aviões mal projetados, construções que não respeitam as leis da física e, até mesmo dobradiças instaladas de maneira incorreta, podem resultar na morte de centenas de pessoas. Para demonstrar esses erros, selecionamos cinco casos mundialmente conhecidos como grandes catástrofes e, que foram provocados por erros de cálculo ou falhas humanas.

Naufração do Transatlântico Titanic:

Existem muitas teorias sobre o naufrágio do Titanic. Falhas na segurança, despreparo da tripulação e dos profissionais envolvidos aliados à fatalidade de encontrar um *iceberg* pelo caminho, são apenas algumas das razões mais conhecidas do público. Entretanto, um erro de cálculo na construção do navio pode ter sido o maior responsável pela falha. A embarcação era composta por três hélices a vapor, sendo as duas externas impulsionadas por motores de pistão e a central acionada por uma turbina a vapor. Embora as hélices movidas a vapor sejam mais dinâmicas, elas funcionam apenas em mão única. Ao avistar o iceberg, o primeiro oficial do Titanic ordenou que fosse mobilizada toda a força das hélices na direção oposta, mas uma delas continuou girando na mesma direção.

O naufrágio do RMS *Titanic*¹, ocorreu entre na noite de 14 e a madrugada de 15 de abril de 1912, no Atlântico Norte, quatro dias após o início de sua viagem inaugural, iniciada em Southampton, Inglaterra, com destino à cidade de Nova Iorque, nos Estados Unidos. O *Titanic* era o maior navio de passageiros em serviço à época, tinha 2.208 pessoas a bordo, quando atingiu um *iceberg* por volta de 23h40 (horário no navio) no domingo, 14 de abril de 1912. O acidente levou a morte de 1.496 pessoas, transformando-o em um dos desastres marítimos com maior número de vítimas fatais.

Figura 1. Imagem ilustrativa do naufrágio do Transatlântico *Titanic*



FONTE: Imagem ilustrativa do naufrágio do *Titanic* a partir da pesquisa bibliográfica/2021

A queda da ponte Tacoma Narrows:

Pode uma ponte cair apenas por ser sólida demais? Foi justamente isso o que aconteceu na década de 40, com a ponte Tacoma Narrows, nos Estados Unidos. Felizmente, nenhuma pessoa morreu no incidente, que foi causado devido a fortes ventos e a um erro de construção.

Quando você olha para uma ponte comum, elas parecem frágeis, a ponto de desabar a qualquer momento. Isso acontece porque embaixo delas há um espaço destinado à passagem de ar. Quando isso não ocorre, toda a ponte está sujeita a sacudidas em caso de rajadas mais fortes de vento. Logo depois de construída, todos os que passaram no local perceberam o erro. Outro engenheiro foi contratado para estudar o caso e sugeriu que fossem feitos alguns furos nas vigas, mas não houve tempo hábil e a ponte desabou. Anos depois do incidente, outra ponte foi construída no local e permanece firme até hoje.

¹ Ver mais sobre em: [Wikipédia, a enciclopédia livre \(wikipedia.org\)](https://pt.wikipedia.org). Acesso em: 23 de outubro de 2021

Figura 2 - A queda da ponte Tacoma Narrows



FONTE: Imagem ilustrativa da queda da Ponte Tacoma Narrows a partir da pesquisa bibliográfica/2021

O Avião assassino com janelas quadradas

Na década de 50, o grupo Havilland Comet iniciou os seus trabalhos na aviação. A empresa construiu um jato moderno, com características nunca vistas antes, e uma cabine pressurizada que permitia à aeronave voar mais alto e mais rápido do que qualquer outra. Contudo, em 1954, dois aviões da companhia simplesmente se desintegraram no ar, matando aproximadamente 56 pessoas. O motivo do desastre: o avião tinha janelas quadradas. Janelas quadradas.

A explicação é simples. Uma janela não pode ser um quadrado perfeito, é preciso que nos seus cantos existam bordas arredondadas. Quando essa regra não é observada, todos os cantos passam a ser pontos de concentração de tensão, podendo provocar rachaduras. Você pode reparar isso em uma janela da sua casa.

No caso do avião, com a força do ar recebido externamente e a pressurização interna da cabine, com o tempo as janelas não resistiram e bastou uma pequena rachadura em um dos cantos para que a cabine explodisse e o avião se desintegrasse no ar.

Figura 3 - O Avião assassino com janelas quadradas



FONTE: Imagem ilustrativa do avião de janelas quadradas a partir da pesquisa bibliográfica/2021

As colunas do Hyatt Regency

Na década de 80, em Kansas City, um hotel de 40 andares desabou, matando 114 pessoas e deixando outras 200 feridas. A causa foi um erro grotesco do projeto de reforma de um dos andares do edifício.

O erro absurdo aconteceu quando um engenheiro propôs a mudança de lugar de uma das colunas do salão. O que ele não sabia como engenheiro e, tinha a obrigação de saber, é que aquela era uma das colunas mestras do prédio. Ao removê-la do lugar, outra coluna foi colocada, mas com um posicionamento diferente. Quando houve tráfego no piso de cima, a nova coluna ruiu, fazendo com que o prédio inteiro desabasse.

Figura 4 - As colunas do Hyatt Regency



FONTE: Imagem ilustrativa do avião de janelas quadradas a partir da pesquisa bibliográfica/202

4. OBSTÁCULOS COGNITIVOS NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: o **ERRO** como elemento central desse processo

Tratamos nessa seção, sobre o processo de aprendizagem numa perspectiva psicológica trazendo as ideias dos autores como Jean Piaget e Vygotsky, acerca de suas contribuições teóricas para o entendimento do processo de aprendizagem.

O biólogo Jean Piaget (1896–1980), dedicou seus estudos à área da epistemologia, buscando entender sobre como se estabelece o processo de construção do conhecimento. Piaget buscou investigar “sobre como seria possível alcançar o conhecimento, ou seja, como se passaria de um menor conhecimento para um mais avançado” (NUNES; SILVEIRA, 2015, p. 42).

Com isso, o autor buscou entender como essa construção do conhecimento se estabelece no decorrer da evolução do indivíduo, isto é, desde criança até a juventude. Além disso, destaca que esta evolução se dá de forma ininterrupta, constituída através da ação de interação do indivíduo com o meio, seja esse meio físico e social (PIAGET, 1991 *apud* NUNES, SILVEIRA, 2015, p. 42).

Teoria da Equilibração de Piaget

Na busca pela compreensão de como se estabelece o desenvolvimento intelectual, o autor explicou através de sua *Teoria da Equilibração* que basicamente, o desenvolvimento intelectual está sempre fundamentado no processo de equilibração. Isto é, no jogo de sucessivas assimilações e acomodações, esse processo está presente em todas as fases da vida de uma pessoa.

Em outras palavras, Nunes e Silveira (2015), comentam em seu livro *Psicologia da Aprendizagem* que:

Quando ocorre uma necessidade (intelectual, afetiva ou orgânica), que, por sua vez, é uma manifestação de um desequilíbrio, o sujeito reagirá a esta por meio de uma tentativa de restabelecimento do equilíbrio. Na medida em que a ação do sujeito compensa a necessidade (soluciona um problema), o equilíbrio é recuperado.” (p.45).

Nesse sentido, para que haja a equilibração, antes é necessário que exista outros dois processos os quais Piaget chamou de *Assimilação* e *Acomodação*.

Processo de Assimilação

De acordo com Pádua (2009, p. 43), Piaget retira o conceito de Assimilação da biologia, onde na fisiologia assimilar é retirar partes importantes para a subsistência. Desse mesmo modo, agora no campo dos processos cognitivos, a partir da interação

sujeito/objeto de conhecimento, assimilar é reter informações para reorganizar estruturas mentais já existentes.

Isto é, assimilar é interpretar o objeto do conhecimento dando uma nova significação/sentido ao que conheceu. Para Piaget "a assimilação não se reduz a uma simples identificação, mas é construção de estruturas ao mesmo tempo que incorporação de coisas a essas estruturas" (1996, p. 364 *apud* PÁDUA, 2009, p. 24).

Um exemplo de assimilação é o contato de uma criança com a operação básica de multiplicação. Assumindo que esta criança já saiba a operação de adição, ela basicamente iria assimilar às estruturas pré-existentes que a multiplicação é embasada pela operação de adição, se assim o meio o estimular. Isto é, a criança compreenderia um novo conhecimento com base em um que já possui.

Processo de Acomodação

A Acomodação ocorre quando um esquema mental existente, é alterado para se adaptar/adequar a uma nova informação/percepção de um objeto de conhecimento. Isto é, "o mecanismo de acomodação exige uma modificação dos esquemas mentais (assimilados) a fim de que um novo conhecimento seja construído" (NUNES; SILVEIRA, 2015, p.45).

Neste sentido, Piaget (1996), diz que a "assimilação jamais pode ser pura porque, ao incorporar os elementos novos nos esquemas anteriores, a inteligência modifica sem cessar esses últimos para ajustá-los aos novos dados" (p.13 *apud* PÁDUA, 2009, p. 25). Com isso, a acomodação sempre estará ligada a um processo de aceitação e adequação de um novo conhecimento (assimilação), isto é, quando um conhecimento passa a ser utilizado, pelo indivíduo, para a solução de problemas do seu dia a dia.

Desta forma, utilizando o exemplo da operação de multiplicação que a criança agora se depara, com uma expressão matemática que contenha as operações de adição e multiplicação (que antes não conseguia solucionar pois desconhecia a multiplicação). Após assimilar como se estabelece a ideia de produto, a criança agora, com os devidos estímulos do meio (professor), conhece uma nova operação matemática e, é capaz de distingui-la uma da outra, baseada na modificação de seus esquemas mentais. Chama-se a essa modificação de *Acomodação*.

Processo de Equilibração

O indivíduo, em um primeiro contato com um novo conhecimento, passa por uma fase de desequilíbrio. Na busca por estabelecer o equilíbrio novamente este indivíduo tem duas possibilidades: *buscar conhecer o novo ou negá-lo*.

Na busca pelo equilíbrio novamente, o indivíduo aceitando conhecer a nova informação, passa por sucessivos processos de assimilações e acomodações. Nesse sentido, Piaget comenta que a equilibração “conduz de certos estados de equilíbrio aproximado a outros qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações” (1975, p. 9, *apud* PÁDUA, 2009, p. 25-26).

Portanto, entende-se por equilibração, a relação dialética entre sucessivas assimilações e acomodações no processo de aprendizagem. Nesse sentido, Nunes e Silveira (2015) comentam que “o ponto de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação é o mecanismo autorregulador, denominado equilibração” segundo a concepção piagetiana (p. 45).

Epistemologia Genética

Jean Piaget, no estudo para entender os processos de desenvolvimento do conhecimento, questionou e discordou de teorias que pregavam o seu estabelecimento baseado na herança genética (NUNES; SILVEIRA, 2015, p. 42) bem como do Behaviorismo e Empirismo.

Afirmando que “o conhecimento não pode ser concebido como algo predeterminado nem nas estruturas internas do sujeito (...) nem nas características preexistentes do objeto”, Piaget desenvolve sua teoria em que analisou como o ser humano passa de um estágio de menor conhecimento para um mais avançado (PIAGET, 1970 *apud* PÁDUA, 2009, p. 27).

Piaget estudou a sucessão de fatos que caracterizam o desenvolvimento intelectual de crianças desde seus primeiros dias de vida até sua adolescência. Afim de entender que processos se dão em meio a essa evolução, o autor, em sua teoria, estabeleceu que a capacidade intelectual de um indivíduo, é constituída em fases e o desenvolvimento do conhecimento, é constituído por meio de saltos e rupturas em que no decorrer desse processo, existem estágios onde cada qual representa uma lógica de estruturas mentais que o indivíduo desenvolve (PÁDUA, 2009, p.28). Estes estágios são interpretados através de intervalos de tempo, não sendo estabelecido rigidamente um início nem fim para cada qual, mas sim uma média de idade.

Nesse sentido, a *Teoria da Epistemologia Genética* aborda quatro grandes estágios do desenvolvimento intelectual: sensorio-motor; pré-operatório, operatório

concreto e operatório formal. Em cada estágio é trabalhado características observadas por Piaget que sinalizam o desenvolvimento cognitivo, além disso, Pádua (2009, p. 28), comenta que “os estágios significam, ainda, que existe uma sequência e uma sucessão no desenvolvimento da inteligência e que esse desenvolvimento passa, necessariamente, por cada um destes estágios.”

Em seus estudos, Jean Piaget (1970), identifica os quatro estágios pelos quais as crianças se desenvolvem: *Estágio Sensório-motor; Pré-operatório; Operatório Concreto; Operatório Formal.*

Estágio Sensório-motor:

Essencialmente, este estágio começa nos primeiros dias de vida de uma criança e vai até por volta de um ano e meio a dois anos de idade. Em suma, é marcado inicialmente pelas percepções sensoriais e motoras, onde a criança desenvolve as primeiras percepções de reflexos e necessidades nutricionais, e também nesse período se desenvolve a sucção e seu aperfeiçoamento (NUNES; SILVEIRA, 2015, p. 44).

Além disso, a noção de objeto permanente é outra característica desenvolvida nessa fase. A criança começa a interpretar o meio, percebendo os objetos ao seu redor e passando a buscá-los, e a criar a intuição de hábito. Piaget (1971), afirma com isso que “aí existe, portanto, o início observável da reversibilidade prática” (p. 104 *apud* PÁDUA, 2009, p. 29).

Outra construção cognitiva presente nessa fase é a organização de percepções que aos poucos vão se tornando intencionais, a fim de se conseguir algo. Com isso, PÁDUA (2009), comenta que “com a ideia de diferenciação entre meios e fins a criança adquire uma série de conhecimentos fundamentais sobre a natureza dos objetos, bem como suas possibilidades de ações sobre eles” (p. 29).

Estágio Pré-operatório

Este estágio é compreendido dos dois anos de idade até por volta dos 6. Uma das suas principais características é o surgimento da linguagem oral, o que não era possível se ter no estágio anterior, assim como da função simbólica. Além disso, a representação passa a ser uma capacidade que a criança adquire nessa fase, com isso, ela consegue agora organizar o mundo de forma coerente e concreta utilizando esquemas representativos (PÁDUA; pag. 30, 2009)

Outrossim, a criança passa a conhecer e a entender a noção de moralidade, isto é, ela entende sobre o que é certo ou errado, distingue regras e valores do meio

em que o estimula. Nesse sentido, Pádua (pag.31, 2009) comenta que o entendimento da moralidade, nessa fase, é muito importante pois não era tido no estágio anterior e acrescenta dizendo que para Piaget “por volta dos 4 anos de idade é que a criança penetra no mundo da moralidade, mas apesar de saber diferenciar regras condicionadas pela natureza de normas morais ou sociais, ela ainda não compreende o sentido de tais regras.”

Nessa fase do desenvolvimento intelectual, ainda se tem o desenvolvimento do egocentrismo pela criança. Segundo Pádua (pag. 31, 2009), para Piaget “dizer que uma criança é egocêntrica não quer dizer que ela se comporte como estivesse totalmente centrada nela, significa que ela tem dificuldades de perceber o ponto de vista do outro.” e este fato está ligado a outra característica dessa fase que é a da irreversibilidade, isto é, a criança tem dificuldades de reverter, mudar seus esquemas intelectuais a partir do ponto de vista de outras pessoas.

Estágio Operatório Concreto

Com a maturação e o constante desenvolvimento das estruturas mentais, agora no novo estágio que dura em média dos seis aos onze/doze anos (NUNES; SILVEIRA, 2015, p. 44), a criança desenvolve o início do raciocínio lógico. Nesse sentido, a principal característica dessa fase passa a ser a reversibilidade de ideias que agora começa aparecer na vida da criança. Com isso, ideias interiorizadas antes difíceis de serem corrigidas, começam a ser melhor compreendidas e aperfeiçoadas a partir de outros pontos de vista pelas crianças.

Entretanto, a abstração de ideias/conteúdos, ainda são dificilmente entendidos por elas nessa fase. Nesse sentido, Pádua (2009), comenta que a “criança faz uso da capacidade das operações reversíveis apenas em cima de objetos que ela possa manipular, de situações que ela possa vivenciar ou de lembrar a vivencia” (p.32). Em outras palavras, isso quer dizer que a criança ainda não é capaz de reverter ideias que não tenham sido vivenciadas em experiências reais.

Estágio Operatório formal

Nesta última fase do desenvolvimento cognitivo que, começa por volta dos onze ou doze anos e continua por toda a vida, temos como principal característica a aparição do pensamento hipotético-dedutivo. Segundo Pádua (pag.33, 2009) apesar de esse ser o último estágio do desenvolvimento cognitivo as pessoas nele não pensam somente de forma operatória, elas passam a raciocinar em um sentido formal e abstrato.

No que diz respeito às abstrações, Piaget versou sobre elas destacando o entendimento em dois sentidos: *a Abstração empírica e a Reflexiva*. “As informações retiradas do objeto de conhecimento pelo sujeito são abstrações empíricas; ao passo que, as informações retiradas das ações do sujeito sobre o objeto são abstrações reflexivas” (PÁDUA; 2009, p. 33). Com isso, entende-se o pensamento hipotético-dedutivo nessa nova fase, a partir da interpretação do objeto de conhecimento que agora pode ser um objeto abstrato.

A análise e o entendimento das contribuições da teoria piagetiana sobre a aprendizagem, aos professores de matemática facilita e encurta o meio para o entendimento dos erros cometidos pelos alunos em determinados conteúdos. Em detrimento disso, as fases do aprendizado em Piaget, são cruciais para o desenvolvimento de conteúdos e, um bom convívio do professor em sala de aula, principalmente, nos anos iniciais da educação básica, pois direciona o docente para a manipulação de conteúdos, conforme o desenvolvimento intelectual de cada fase do público alvo e facilita a identificação de possíveis erros cometidos pelos discentes.

Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky

Assim como Piaget buscou entender, através de sua teoria, como se estabelece o aprendizado do ser humano, Vygotsky dedicou esforços na busca pelo entendimento do desenvolvimento cognitivo do ser humano.

Lev Semienovich Vygotsky (1896-1934) nasceu na Bielo Rússia e, no decorrer de sua vida dedicou-se ao estudo da atividade intelectual humana. A base de sua investigação considera as características culturais e históricas essenciais para o desenvolvimento intelectual do indivíduo, assim como as relações sociais. Nesse sentido, com a colaboração de outros pesquisadores em vários estudos, Vygotsky fundamentou a teoria da abordagem histórico-cultural.

Segundo Rocha (2000 *apud* BUENO; DIAS, 2015), a teoria de Vygotsky surgiu:

“se contraponto às outras matrizes do pensamento psicológico e sua construção se dá a partir da “desconstrução” dos pressupostos sobre os quais os sistemas psicológicos atuais erigiram; não se edifica isoladamente das outras psicologias; ao contrário, estabelece com elas constante diálogo, normalmente marcado por profundas discordâncias” (p. 174).

Com isso, Vygotsky discordava dos meios que embasavam os estudos vigentes sobre a mente humana pois levavam em consideração aspectos que

envolviam a idade do indivíduo, fases de desenvolvimento, aspectos que poderiam, para o autor, ser controlados pelo observador. Nesse sentido, segundo Nunes e Silveira (2015, p. 50), a teoria do autor entende que o progresso do sujeito acontece desde seus primeiros dias de vida, através da apropriação de signos culturais presentes no meio de convívio do indivíduo.

Com base nisso, para Vygotsky, existe duas funções psicológicas diferentes a se analisar no decorrer do desenvolvimento. A primeira está presente a partir do nascimento da criança e é denominada funções elementares, enquanto que a segunda, funções psicológicas superiores, passam a ser desenvolvida a partir do aprendizado cultural do meio em que convive o indivíduo.

Dessa forma, através da interação com o meio, Nunes e Silveira (2015, p.50) dizem que as funções psicológicas vão evoluindo, interpretando os mais distintos significados culturais, isto é, “vão se constituindo as funções psicológicas superiores” a partir de “um avanço dos modos de raciocínio realizados pelo sujeito” (NUNES E SILVEIRA, 2015, p. 50).

Com base nisso, por meio dessa evolução a criança começa a se apropriar dos signos e a se expressar por meio de objetos que estão presentes no seu meio, surgindo a partir de então o que se chama de inteligência prática. Essa inteligência é necessária para que a criança “compreenda e utilize signos culturais, que servem de ponte para sua relação com o meio no qual está inserida” onde esses signos podem ser entendidos como sendo a própria linguagem, objetos, símbolos algébricos, desenhos, gestos etc. (NUNES; SILVEIRA, 2015, p. 51).

Com efeito, a maior influência para a formação do indivíduo, segundo Bueno e Dias (2015) a partir da teoria de Vygotsky, são:

“[...] as interações sociais que fornecem instrumentos e símbolos carregados de cultura, os quais fazem a mediação do indivíduo com o mundo, fornecendo-lhe elementos para a formação dos mecanismos psicológicos, fundamentais para as aprendizagens e o desenvolvimento” (p. 176).

Processo de ensino e aprendizagem para Vygotsky

Tratando-se da perspectiva vygotskyana sobre ensino e aprendizagem, nota-se uma ruptura no que diz respeito ao ensino individualista, isto é, o indivíduo é um ser sociável e sua aprendizagem só existe se houver interação com o outro e com o meio. Nunes e Silveira (2015), versa sobre dizendo que “aprendizagem, em Vygotsky, é um processo de apropriação de conhecimentos, habilidades, signos, valores, que

engloba o intercâmbio ativo do sujeito com o mundo cultural onde se está inserido” (p. 53).

Nesse sentido, para o autor a criança começa a desenvolver suas habilidades mentais a partir dos primeiros dias de vida e elenca dois tipos de conceitos de aprendizagem: *Espontâneos e Científicos*.

Espontâneos: São conhecimentos aprendidos no cotidiano, na prática de ações familiares, repetitivas. São conhecimentos prévios e informais, mas de grande importância para a vida do indivíduo.

Científicos: Conhecimentos obtidos através do ensino propriamente dito, isto é, são conhecimentos científicos como por exemplo: operações matemáticas, equações, conjuntos etc.

Vygotsky reconhece a importância e a dependência desses conhecimentos para o progresso do desenvolvimento intelectual do estudante, uma vez que antes de iniciar os estudos na escola, a criança já tem um vasto conhecimento espontâneo da realidade que vivencia. Nesse sentido, esse conhecimento prévio é essencial para o entendimento dos conhecimentos científicos pois embasam seu entendimento contribuindo na construção de funções psicológicas mais avançadas.

Com base nesse avanço, o autor dá ênfase na aprendizagem escolar uma vez que nesse meio a criança passa a ser estimulada na produção do conhecimento. Nesse sentido, Oliveira (1992) comenta que “a escola tem o papel de fazer a criança avançar em sua compreensão do mundo, a partir de seu desenvolvimento já consolidado e tendo em conta etapas posteriores, ainda não alcançadas” (p. 62 *apud* BUENO; DIAS, 2015, p. 180).

Com efeito, muito embora uma criança consiga entender algumas informações sem ajuda de uma pessoa, ainda assim, é desafiador para ela avançar em um aprendizado sem que um novo conhecimento seja mediado por um orientador. Por essa mediação, Vygotsky atribui grande importância à escola junto com as práticas educacionais como propulsoras do desenvolvimento do indivíduo e contribui significativa para a educação com o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Em sua teoria histórico-cultural, o autor discorre acerca de dois tipos de dimensões de aprendizagens que embasam o conceito de ZDP. A primeira diz respeito à completa capacidade do indivíduo de realizar uma tarefa, isto é, seu pleno entendimento sobre determinado conteúdo, a essa dimensão o autor chamou de zona

de desenvolvimento real. Enquanto que chamou de zona de desenvolvimento potencial a iminência do indivíduo realizar/entender determinada atividade/ conteúdo.

Diante disso, existe entre essas dimensões um papel de fundamental importância para impulsionar o aprendizado do indivíduo, a mediação. Nunes e Silveira (2015, p. 54), comentam dizendo que “a mediação possibilita que o potencial [...] se torne uma função real no desenvolvimento da criança” a partir da intervenção de um mediador em um obstáculo que esteja dificultando o aprendizado da mesma.

Com efeito, cabe ao professor identificar uma situação de ZDP e dar a devida atenção ao processo de desenvolvimento do aluno, não apenas mostrando alguns passos a serem seguidos, no entanto instigando a construção do conhecimento e promovendo a interação de diferentes perspectivas de aprendizado por meio das relações sociais no meio escolar. Nesse sentido, Nunes e Silveira (2015), acrescentam comentando que é:

“importante atentar para as capacidades que podem ser efetivadas a partir da intervenção do outro como mediador. A escola, pela sua especificidade de lugar de (re)construção de significados culturais e históricos, pode fornecer condições concretas para que o desenvolvimento potencial torne-se real” (p.54).

A teoria de histórico-cultural de Vygotsky contribui para um novo entendimento de ensino e aprendizagem no meio escolar, entendimento que agora torna o indivíduo um ser ativo e social no meio em que está inserido. Além disso, a escola torna-se lugar de importante papel para o desenvolvimento da função social de interação entre professor – aluno e aluno - aluno. O professor passa a ter um importante papel no desenvolvimento intelectual do aluno com o conceito de mediação e ZDP. Em suma, Vygotsky contribuiu para a educação de forma grandiosa com suas pesquisas e entendimentos da mente no campo do desenvolvimento intelectual humano

5. Reflexões de um professor em Formação

Como futuro professor de Matemática, compreendo que existem alguns pontos que precisam ser repensados quanto ao *erro matemático* na educação básica. Entre eles pode-se destacar a contemplação de aspectos didáticos para o ensino de conteúdos matemáticos com atenção na incidência de erros que possam causar aversão ao conteúdo ministrado.

Nesse sentido, me chama atenção a ausência de preparo na formação docente que tive, que não me deixou habilitado para atuar e dar o devido direcionamento, de forma a tirar o melhor proveito de situações que envolvam o erro e obstáculos cognitivos no ensino de conteúdos matemáticos. Diante disso, fico na incumbência de buscar conhecimentos em fontes externas que me habilitem a atuar diante de situações que sejam agravadas por obstáculos cognitivos a partir do erro matemático.

Outrossim, destaco uma outra problemática que impede que o erro seja visto de forma fecunda por parte dos professores, a super lotação em sala de aula. Esta barreira divide o caminho do trabalho de excelência do mediador uma vez que para identificar essas ocorrências é preciso observar atentamente o aluno no desenvolvimento de seus aprendizados. Destaco essa barreira, mas não a considero impossível, uma vez que por meio de análises do andamento do aprendizado da turma, eu, como professor, posso vir a identificar obstáculos causados por eventuais erros e passe a utiliza-lo para trabalhar e sanar possíveis impasses entre o pleno entendimento do conteúdo trabalhado. Destaco ainda que os casos de erros apontados na seção 3, é a forma que encontrei de demonstrar que o erro matemático, se estende para além da aula de Matemática, para além da sala de aula.

Em relação às políticas pedagógicas, é preciso que haja reflexão na formação de professores sobre os obstáculos cognitivos causados pelo erro matemático, de forma que prepare os futuros docentes para lidar, identificar e tirar proveito do grande potencial que o erro tem para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse sentido, Cury (2013), sinaliza que “as pesquisas sobre os erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores” (p. 225), para que seu potencial seja benéfico para o professor e para o aluno.

6. REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Rosana C. M. **Um Estudo Sobre os Componentes da Criatividade na Solução de Problemas Matemáticos**. 2017. Tese (Doutorado em Educação para Ciência), Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista. 2017.

AMARAL, J. J. F. Como fazer uma pesquisa bibliográfica. Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2007. Disponível em: Acesso em: 01 set. 2020

BARCHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: contraponto, 1996.

BORASI, Raffaella. **Students' Constructive Uses Of Mathematical Errors: A Taxonomy**. San Francisco, 1989.

BUENO, Flaviane Fatima Lima; DIAS, Renata Flávia Nobre; **O processo ensino aprendizagem na perspectiva da teoria histórico-cultural de Lev Vygotsky**. Revista Triangulo, volume. 8, jul./dez. 2015.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Coleção Tendências em Matemática).

CURY, H. N. **Retrospectiva Histórica e Perspectivas Atuais da Análise de Erros em Educação Matemática**. Revistas: Zetetiké, 1995.

CURY, H. N. et al. **Formação de Professores de Matemática uma Visão Multifacetada**. 1º edição. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

CAZORLA, Irene M. **A relação entre a habilidade visopictória e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. 2002. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de educação, Universidade Estadual de Campinas 2002.

COSTA, Bruno F. **Obstáculos no processo de aprendizagem de logaritmo**. São Mateus. 2017. Dissertação (Mestrado em profissional em gestão social educação e desenvolvimento regional), Faculdade Vale do Cricaré.

GIORGION, Rogério. **Habilidades Matemáticas Presentes em Alunos do Ensino Médio Participantes em Feiras de Ciências**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo 2010.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. Fundamentos de Metodologia Científica. São Paulo, SP: Atlas 2003.

MIRANDA, Weverton. **Erros e Obstáculos**: Os Conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação. 2007.

NUNES, Ana Ignez Belém Lima; SILVEIRA, Rosemary do Nascimento; **Psicologia da Aprendizagem**. 3º edição. Eduece, Ceará, 2015.

POINCARÉ, H. **Mathematical creation. Resonance.** P. 85- 94, FEV.2000. Disponível em: [http://vigeland.caltech.edu/ist4/lectures/Poincare Reflections.pdf](http://vigeland.caltech.edu/ist4/lectures/Poincare%20Reflections.pdf). Acesso em: 20 mar. 2020.

PÁDUA, Gelson Luiz Daldegan; **A EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE JEAN PIAGET.** Revista FACEVV; 1º Semestre de 2009

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013

RIZZON, Bruna M. **Formação continuada para professores de matemática: O ERRO COMO RECURSO PEDAGÓGICO E SEU PAPEL NO PROCESSO DE AVALIAÇÃO.** Caxias do Sul, 2018. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática).

THORNDIKE, E. L. **A Nova metodologia Da Aritmética.** Porto Alegre: Globo, 1936.
VAZ, Rafael F. N. **Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações.** Rio de Janeiro, 2013. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática).