UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

LUIZA DE JESUS OLIVEIRA

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: CALCULANDO AS MELHORES CHANCES DE VENCER EM JOGOS DE AZAR

BRAGANÇA
2023

LUIZA DE JESUS OLIVEIRA

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: CALCULANDO AS MELHORES CHANCES DE VENCER EM JOGOS DE AZAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena

BRAGANÇA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48c Oliveira, Luiza de Jesus.
COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: CALCULANDO AS MELHORES CHANCES DE VENCER EM JOGOS DE AZAR / Luiza de Jesus Oliveira. — 2023.
41 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2023.

1. Jogos de Azar. 2. Probabilidade. 3. Combinatória. I. Título.

CDD 519.2

LUIZA DE JESUS OLIVEIRA

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: CALCULANDO AS MELHORES CHANCES DE VENCER EM JOGOS DE AZAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Data da aprovação: 31 / 05 / 2023

Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA

Elizardo Lucena

Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena
Orientador – UFPA

Nelson Ned Nascimento Lacerda

Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Examinador Interno – UFPA

A Deus. A minha família. E a todos que se alegram com essa conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde e constante proteção que me permitiram chegar até aqui. Agradeço por ter me guiado em cada passo desta jornada, me concedendo força e a perseverança necessária para superar todos os desafios que encontrei ao longo do caminho. Sem Ele, nada disso seria possível.

A minha mãe, Célia, por todo seu amor, apoio, paciência e dedicação. Agradeço pelos ensinamentos e conselhos valiosos que sempre me motivaram a nunca desistir. Sua fé em mim e em minhas habilidades me inspiraram a cada passo dessa trajetória. Eu te amo e serei eternamente grata por tudo o que sempre fez e faz por mim.

A minha irmã, Bruna Gabrielly, por estar sempre presente em minha vida, mesmo à distância. Obrigada por todo amor e cuidado. Eu amo você.

A minha tia, Cida, por todo carinho e zelo, por cuidar tão bem de mim e me acolher de forma tão generosa. Sem dúvidas, sem a sua ajuda, eu não teria conseguido atingir os resultados que alcancei. Minha eterna gratidão.

A minha família, pelo amor incondicional, apoio constante e encorajamento em todos os aspectos da minha vida. Agradeço por sempre me fornecerem o suporte necessário para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Vocês são minha fonte de inspiração e motivação.

Amos meus amigos de graduação, Ana Paula, Gilberto Gil, Irlan Ivisson, João Victor, Lucas Vitor e Pedro Augusto, pessoas que levarei para sempre comigo. Agradeço pelas longas horas de estudo compartilhadas e pelas risadas nos momentos de descontração, sem vocês ao meu lado isso não teria sido tão especial, nem tido a mesma graça. Muito obrigada pela amizade e companheirismo.

Ao meu orientador, Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena, pela orientação e apoio durante todo o processo de pesquisa e redação deste trabalho.

A estes e todos os que fizeram parte do meu caminho, minha gratidão.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

(Nikolai Ivanovich Lobachevsky)

RESUMO

Este trabalho aborda a aplicação da matemática nos jogos de azar, com foco em três modalidades populares: Mega-Sena, roleta e craps. Cada jogo é contextualizado com uma breve história, destacando sua evolução ao longo do tempo. São apresentadas as regras e estratégias para cada jogo, bem como a análise das probabilidades envolvidas. Explora-se a importância da compreensão dos conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade para tomar decisões estratégicas e aumentar as chances de sucesso. O estudo abrange diferentes combinações de dados, possibilidades de apostas na roleta e seleção de números na Mega-Sena, contribuindo para uma abordagem mais consciente e racional dessas atividades de entretenimento.

Palavras-chaves: análise combinatória; probabilidade; jogos de azar.

ABSTRACT

This paper addresses the application of mathematics in games of chance, focusing on three popular games: Mega-Sena, roulette and craps. Each game is contextualized with a brief history, highlighting its evolution over time. The rules and strategies for each game are presented, as well as an analysis of the probabilities involved. The importance of understanding the concepts of Combinatorial Analysis and Probability for making strategic decisions and increasing the chances of success is explored. The study covers different combinations of dice, betting possibilities in roulette and number selection in Mega-Sena, contributing to a more conscious and rational approach to these entertainment activities.

Keywords: combinatorial analysis; probability; gambling.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **11**

1 PRELIMINARES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE **12**

1.1 Análise Combinatória 12

1.1.1 Princípio Multiplicativo 12

1.1.2 Princípio Aditivo 13

1.1.3 Fatorial 14

1.1.4 Permutação Simples 15

1.1.5 Arranjo Simples 16

1.1.6 Combinação Simples 17

1.2 Probabilidade 18

1.2.1 Aspectos Históricos 18

1.2.2 Entendendo Probabilidades 19

1.2.3 Probabilidade complementar 21

2 JOGOS DE AZAR **22**

2.1 O que é um jogo de azar 22

2.2 Jogos de azar no Brasil 22

2.2.1 Jogos ilícitos 23

2.3 Aspectos psicológicos dos jogos de azar 24

3 A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS JOGOS DE AZAR **26**

3.1 Mega-Sena 26

3.1.1 As formas de apostar e ganhar na Mega-Sena 27

3.1.2 Sena 27

3.1.3 Quina 28

3.1.4 Quadra 29

3.2 Roleta 30

3.2.1 Apostas e Probabilidades 31

3.2.2 Apostas Internas 31

3.2.3 Apostas Externas 32

3.2.4 Vantagens da Casa 34

3.3 Craps 34

3.3.1 As regras 35

3.3.2 Tipos de Apostas 35

3.3.3 As probabilidades 36

CONSIDERAÇÕES FINAIS **39**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **40**

INTRODUÇÃO

Os jogos de azar sempre foram uma fonte de entretenimento para muitas pessoas ao longo da história, embora os resultados desses jogos sejam em grande parte imprevisíveis, a matemática pode ser aplicada para entender melhor as probabilidades e os padrões subjacentes a esses jogos, além de ajudar a desenvolver estratégias para aumentar as chances de sucesso. Nesse trabalho, iremos apresentar uma introdução à matemática aplicada aos jogos de azar, envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade, áreas da matemática que são amplamente úteis para modelar e compreender os fenômenos presentes nos jogos de azar, que dependem de uma série de variáveis aleatórias.

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo principal analisar a matemática aplicada aos jogos de azar, explorando as problemáticas e desafios que surgem nesse campo. Buscaremos compreender como a matemática pode ser utilizada como uma ferramenta fundamental na análise de probabilidades, cálculo de vantagens e estratégias para maximizar as chances de sucesso nos jogos de azar. Além disso, exploraremos os dilemas éticos e sociais que envolvem essa prática, considerando os aspectos de jogo responsável e os impactos potenciais do vício em jogos.

No capítulo 1, apresentaremos os principais conceitos básicos de Análise Combinatória e Probabilidade, introduzidos através de uma sequência de problemas resolvidos, necessários para a compreensão da teoria discutida.

No capítulo 2, adentraremos na história dos jogos de azar, abrangendo tanto os jogos ilícitos quanto os lícitos no Brasil. Além disso, analisaremos os aspectos psicológicos que permeiam esses jogos, como a ilusão da sorte e a possibilidade de vício. Ao explorar esses tópicos, buscamos compreender a complexidade dos jogos de azar, fornecendo uma visão abrangente que ultrapassa as meras regras e probabilidades, considerando também os impactos pessoais e sociais envolvidos.

Por fim, no capítulo 3, iremos explorar três jogos de azar populares: Mega-Sena, roleta e craps. Para cada um desses jogos, será apresentada uma breve história contextualizando sua origem e evolução ao longo do tempo, bem como uma descrição das regras e das formas adequadas de jogá-los.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Neste capítulo, iremos abordar às ferramentas matemáticas essenciais da análise combinatória. Serão apresentados os conceitos básicos do princípio fundamental da contagem, fatorial, arranjos, permutações e combinações. Também serão exploradas as noções fundamentais de probabilidade, como evento, espaço amostral e cálculo de probabilidades. Além de exemplos práticos que ajudam a compreender o uso desses conceitos em problemas reais.

1.1 Análise Combinatória

Análise combinatória é uma área da matemática que estuda a contabilização de objetos e o estabelecimento de relações entre esses objetos. Ela é aplicada em diversas áreas, incluindo lógica, teoria dos números, teoria dos jogos, ciência da computação e álgebra. Trata-se do estudo de problemas que envolvem o uso de métodos matemáticos para contar ou enumerar. A análise combinatória é usada para resolver problemas que envolvem a organização e a seleção de elementos a partir de um conjunto de dados.

1.1.1 Princípio Multiplicativo

Se uma decisão D1 pode ser tomada de m maneiras distintas e, tomada essa decisão D1, uma decisão D2 puder ser tomada de n maneiras distintas, então a quantidade de maneiras de se tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é igual a $m \times n$.

Observe os seguintes problemas:

1. Quantos diferentes grupos de três cartas podem ser retirados de um baralho de 52 cartas?Usando o seguinte raciocínio:

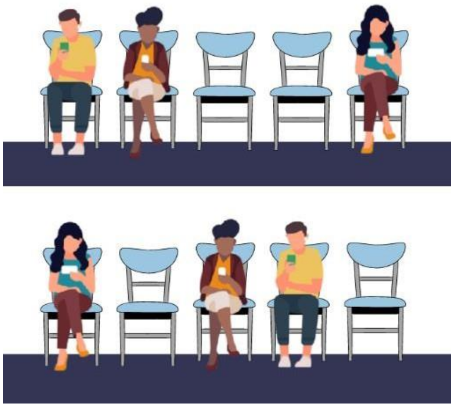
- Para escolher a primeira carta, temos 52 opções.
- Depois de escolher a primeira carta, temos 51 opções restantes para a segunda carta.
- Depois de escolher a segunda carta, temos 50 opções restantes para a terceira carta.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras de escolher três cartas é: $52 \times 51 \times 50 = 132.600$.

Portanto, há 132.600 maneiras diferentes de escolher três cartas de um baralho de 52 cartas.

2. Em um consultório chegam 3 pessoas. Há 5 cadeiras em fila disponíveis na sala de espera. De quantas maneiras elas podem se sentar?

Figura 1 – Fila de cadeiras



Fonte: própria do autor (2023)

Usando o mesmo raciocínio da questão anterior, temos que a primeira pessoa possui 5 possibilidades, já que pode escolher qualquer lugar disponível. A segunda pessoa, por sua vez, possui 4 possibilidades, uma vez que pode ocupar qualquer lugar disponível, exceto aquele já ocupado pela primeira pessoa. Já a terceira pessoa possui 3 possibilidades, pois só pode escolher entre os lugares disponíveis que ainda não foram ocupados pelas duas primeiras pessoas.

Assim, pelo princípio multiplicativo: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Portanto, existem 60 maneiras para essas pessoas sentarem.

1.1.2 Princípio Aditivo

Se uma tarefa puder ser feita de n_1 maneiras e uma segunda tarefa de n_2 maneiras e se essas tarefas não puderem ser feitas ao mesmo tempo; então, existem $n_1 + n_2$ maneiras de fazer ambas as tarefas.

Agora iremos ilustrar o Princípio Aditivo, para tanto observe os problemas a seguir.

1. Suponha que Marcos esteja escolhendo uma roupa para vestir hoje e tem duas opções de camisas e três opções de calças. Quantas combinações de roupas diferentes Marcos poderá criar?

Considerando que Marcos tem 2 opções de camisas e 3 opções de calças, para determinar o número total de combinações possíveis, basta somar o número de opções em cada evento individual: $2 + 3 = 5$.

Portanto, há 5 combinações de roupas diferentes que Marcos poderá criar.

2. Um professor de matemática deve escolher um representante de cada uma das suas duas turmas (Turma A e Turma B) para participar de um concurso de matemática. A Turma A tem 5 alunos e a Turma B tem 7 alunos. Quantos representantes diferentes o professor pode escolher?

Usando o Princípio Aditivo, podemos calcular o número total de maneiras de escolher um representante da Turma A ou da Turma B:

- Número de maneiras de escolher um representante da Turma A = 5
- Número de maneiras de escolher um representante da Turma B = 7

O número total de maneiras que o professor pode escolher um representante é a soma desses dois números: $5 + 7 = 12$

Portanto, o professor pode escolher um representante de suas turmas de 12 maneiras diferentes.

1.1.3 Fatorial

O fatorial de um número n é o produto de todos os números inteiros de 1 até n. É representado pelo símbolo "!" e é definido como:

$$\prod_{k=1}^{n} k, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Como consequência dessa definição, temos

- $1! = 1$
- $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$
- Por conversão, $0! = 1$

A função fatorial também pode ser definida (inclusive para não-inteiros) através da função gama. A função gama é uma extensão da noção de fatorial para números reais e complexos. Ela é definida como:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \, dt \tag{1.2}$$

Onde, se n é natural, $\Gamma(n + 1) = n!$.

Já para fatoriais de números grandes, pode-se usar a aproximação de Stirling, dada por:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad 1.3$$

É importante observar que, para os fatoriais, não são válidas as operações aritméticas de adição: $n! + m! \neq (n + m)!$, e multiplicação: $n! \times m! \neq (n \times m)!$. Só é possível simplificar os fatoriais, se atentarmos para as suas expansões, vejamos:

1. Simplifique a fração $\frac{12!}{6!}$.

Ao expandir o 12! e 6!, temos:

$$\frac{12!}{6!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$$
$$= 665.280.$$

1.1.4 Permutação Simples

Para um conjunto de n objetos distintos, precisamos determinar quantas maneiras diferentes existem para organizá-los em uma fila. Cada uma dessas possíveis filas é chamada de permutação simples dos n objetos. O número de permutações simples de n objetos é representado por P_n. A partir disso, temos o seguinte enunciado:

Teorema 1. O número de modos de arrumar em fila n objetos distintos é

$$P_n = n! \quad 1.4$$

A demonstração detalhada da fórmula pode ser encontrada em [10].

Como uma permutação é uma coleção ordenada desses n objetos, para a primeira posição x_1 temos n possibilidades de escolha, para segunda posição x_2 temos $n - 1$ possibilidades. Para escolha da terceira posição x_3 temos $n - 2$ possibilidades, e assim sucessivamente. Logo, pelo Princípio Multiplicativo,

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad 1.5$$

É isto que procuramos mostrar nos exemplos a seguir.

1. De quantos modos distintos 8 pessoas podem formar uma fila indiana?

Para calcular o número de maneiras distintas que 8 pessoas podem formar uma fila indiana, usaremos a fórmula de permutação simples, onde para escolhermos o primeiro da fila, temos 8 possibilidades, para o segundo da fila, 7 possibilidades, e assim, sucessivamente. Com isso,

$$P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320.$$

Portanto, existem 40.320 maneiras distintas de 8 pessoas formarem uma fila indiana.

2. Quantos são os anagramas da palavra JANELA?

Primeiramente, anagramas são qualquer reorganização das n letras criando uma nova palavra (que pode ter ou não sentido), assim, temos que a palavra "JANELA" possui 6 letras distintas. Para encontrar o número de anagramas possíveis, podemos usar a fórmula de permutação simples:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Portanto, existem 720 anagramas possíveis para a palavra “JANELA”.

1.1.5 Arranjo Simples

Para determinar o número de sequências ordenadas de p elementos que podem ser formadas a partir de um conjunto A de n objetos distintos, usamos o conceito de arranjo simples. Um arranjo simples é uma sequência ordenada de p elementos escolhidos a partir do conjunto A, sem repetição e levando em conta a ordem em que foram escolhidos. O número total de arranjos simples de p elementos, escolhidos a partir de n elementos de A, é representado por A_n^p. Com isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 3. O número de sequências ordenadas com p elementos, escolhidos a partir de um conjunto A com n elementos é

$$A_n^p = \frac{p\ fatores}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n-(p-1)]}$$

É possível aprimorar a fórmula mencionada e apresentá-la de maneira mais refinada. Na verdade, é comum encontrá-la nos livros de combinatória com a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.6}$$

A demonstração detalhada da fórmula pode ser encontrada em

[13]. Para ilustrar o teorema acima, observe os problemas a

seguir.

1. Em um concurso de beleza, há 10 finalistas, e apenas as 3 primeiras colocadas receberão uma coroa. Quantos agrupamentos diferentes de coroas podem ser formados para premiar as 3 finalistas?

Para esse exemplo, iremos utilizar o conceito de arranjos, pois a ordem das colocadas é importante. O número de maneiras que as 3 primeiras colocadas podem ser escolhidas é dado por:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Portanto, há 720 maneiras diferentes de premiar as 3 finalistas com as coroas.

2. Em uma loja de roupas, cada peça é identificada por um código composto por duas letras maiúsculas distintas e uma sequência de quatro algarismos distintos. Pode-se usar qualquer uma das 26 letras do alfabeto e qualquer algarismo de 0 a 9. Dessa forma, calcule o número de peças de roupas diferentes que podem ser identificadas por esse sistema de codificação?

Usando o conceito de arranjo simples, temos um arranjo de 26 letras para escolher duas e para os números temos 10 algarismos para escolher 4. Pelo princípio multiplicativo, os arranjos devem ser multiplicados, com isso:

$$A_{26,2} \times A_{10,4} = \frac{26!}{(26-2)!} \times \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{26!}{24!} \times \frac{10!}{4!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24!} \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$

$$= 650 \times 5040 = 3.276.000$$

Portanto, a loja de roupas pode identificar até 3.276.000 peças diferentes com esse sistema de codificação.

1.1.6 Combinação Simples

Considerando um conjunto A com n objetos distintos, é necessário determinar o número de subconjuntos que podem ser obtidos a partir de A, contendo p elementos. Cada subconjunto criado sob essas condições é denominado de combinação simples de A. O número total de combinações simples de p elementos selecionados a partir dos n elementos de A é representado por C_n^p. Nesse contexto, podemos apresentar o seguinte resultado:

Teorema 4. O número de subconjuntos com p elementos, escolhidos a partir de um conjunto A com n elementos é

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n-(p-1)]}{p!}$$

Pode-se aprimorar a formula mencionada e apresentá-la de forma mais refinada. Na realidade, é comum encontrá-la nos livros de combinatória com a seguinte apresentação:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad 1.7$$

A demonstração detalhada da fórmula pode ser encontrada em [13].

Vejamos um exemplo de combinação simples:

1. Quantas combinações de pizzas de tamanho médio e refrigerante de 500ml podem ser feitas em uma pizzaria que oferece 5 opções de sabores de pizza e 3 opções de refrigerante?

Para resolver esse exemplo usando a fórmula de combinação simples, precisamos identificar o número de elementos que queremos combinar e o número de elementos que serão selecionados em cada combinação. Nesse caso, queremos combinar pizzas de tamanho médio e refrigerantes de 500ml, e temos 5 opções de sabores de pizza e 3 opções de refrigerante. Assim, temos:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 56$$

Portanto, há 28 combinações possíveis de pizzas de tamanho médio e refrigerantes de 500mlna pizzaria em questão.

1.2 Probabilidade

1.2.1 Aspectos Históricos

A probabilidade é uma área da matemática que lida com a análise de eventos aleatórios e incertos. A ideia de probabilidades tem suas raízes na antiguidade, com evidências de jogos de azar sendo praticados em civilizações antigas, como a Grécia e a Roma.

No entanto, o desenvolvimento da teoria da probabilidade como uma disciplina matemática sistemática começou no século XVII, com os trabalhos de Blaise Pascal e Pierre de Fermat, onde desenvolveram o cálculo de probabilidades para resolver problemas relacionados a jogos de azar e apostas. Por exemplo, Fermat e Pascal trabalharam juntos para resolver um problema sobre como dividir os ganhos em um jogo de cartas inacabado de acordo com as probabilidades de cada jogador ganhar. Cada um fez de maneira diferente e chegou à mesma solução. As resoluções se davam pela famosa fórmula:

$$P(A) = \frac{números\ de\ casos\ favoráveis}{números\ de\ casos\ possíveis} \quad 1.8$$

No século XVIII, a teoria da probabilidade começou a ser aplicada em outras áreas, como estatística e teoria dos erros. O matemático suíço Daniel Bernoulli desenvolveu a lei dos grandes números, que estabelece que, em uma série suficientemente grande de eventos independentes e aleatórios, a frequência relativa de um resultado tende a se aproximar da probabilidade teórica desse resultado.

No século XIX, a teoria da probabilidade se tornou uma disciplina estabelecida com o trabalho de matemáticos como Pierre-Simon Laplace e Carl Friedrich Gauss. Laplace foi o primeiro a usar a probabilidade para fazer previsões em astronomia e física, e Gauss aplicou a probabilidade à teoria dos erros em medições.

1.2.2 Entendendo Probabilidades

Para entender o que é probabilidade, iremos definir alguns conceitos importantes:

- Experimento aleatório é todo experimento que produz resultados incertos ou imprevisíveis., dentre os possíveis, mesmo quando repetido em semelhantes condições.
- Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.
- Evento é um subconjunto do espaço amostral, que consiste em um ou mais resultados do experimento aleatório.

A definição clássica de probabilidade depende do número de elementos do evento analisado e do número de elementos do espaço amostral. Define-se a probabilidade como uma razão:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad 1.9$$

No entanto, essa definição tem uma limitação, uma vez que se aplica apenas a problemas com espaços amostrais equiprováveis, ou seja, quando todos os elementos do espaço amostral têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Com isso, a definição axiomática de probabilidade é a mais utilizada e sua principal característica é que a função de probabilidade deve satisfazer as seguintes restrições, sendo A um subconjunto qualquer do espaço amostral (Ω):

i. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
ii. $P(\Omega) = 1$
iii. Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $(A \cap B = \emptyset)$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Para entendermos melhor do que se trata, observe os exemplos a seguir.

1. Suponha que uma urna contenha 10 bolas numeradas de 1 a 10. Qual é a probabilidade de tirar uma bola com um número ímpar?

Neste caso, o espaço amostral Ω é composto pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Para o evento A, devemos observar os números ímpares, ou seja, 1, 3, 5, 7 e 9. Assim, a probabilidade de tirar uma bola com um número ímpar é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Portanto, a probabilidade de tirar uma bola com um número ímpar é de 0,5 ou 50%.

2. Suponha que um dado justo de seis faces seja lançado. Qual é a probabilidade de obter um número par ou um múltiplo de 3?

Nesse caso, o espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados do lançamento do dado, que contém 6 elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6). O evento A é a união dos resultados que são números pares ou múltiplos de 3, ou seja, (2, 3, 4, 6). Assim, a probabilidade de obter um número par ou um múltiplo de 3 é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = 0{,}6667$$

Logo, a probabilidade de obter um número par ou um múltiplo de 3 é de aproximadamente 66,67% ou 0,6667.

3. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair um número maior que 4 ou menor que 3 na face voltada para cima?

Pela terceira propriedade da definição axiomática temos que:

Para o evento A, a probabilidade de sair um número maior que 4 é $A = \{5{,}6\}$ e $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Para o evento B, a probabilidade de sair um número menor que 3 é $B = \{1{,}2\}$ e $P(B) =$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Como pode ocorrer tanto o evento A quanto o evento B, logo a probabilidade será: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

1.2.3 Probabilidade complementar

Teorema 5. Se A e B são eventos, então:

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad 1.10$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [9].

Definimos evento complementar de A como o conjunto de todos os eventos que pertencem ao espaço amostral, mas não pertencem ao evento A. Em outras palavras, A^c inclui todos os resultados possíveis que não correspondem ao evento A.

É importante observar que os eventos A e A^c são mutuamente exclusivos, o que significa que não podem ocorrer simultaneamente. Quando A ocorre, A^c não ocorre, e vice-versa. Para entendermos melhor do que se trata, observe o exemplo a seguir:

1. Suponha que em uma empresa existam 15 funcionários, incluindo o João. A empresa precisa formar um comitê de 4 pessoas para representá-la em um evento importante. Qual é a probabilidade de que o comitê não inclua o João?

Para resolver esse problema, precisamos determinar quantos grupos possíveis de 4 pessoas podem ser formados a partir de um total de 15 pessoas. Estamos diante de uma combinação.

$$n(\Omega) = C_{15,4} = \frac{15!}{4!\,((15-4)!)} = \frac{15!}{4!\,11!} = \frac{32760}{24} = 1365$$

Agora, vamos determinar quantos desses grupos não incluem o João. Para isso, precisamos formar um grupo de 4 pessoas sem incluir o João, então selecionaremos 3 pessoas dos outros 14 funcionários.

$$n(A) = C_{14,3} = \frac{14!}{3!\,((14-3)!)} = \frac{14!}{3!\,11!} = \frac{2184}{6} = 364$$

Portanto, a probabilidade de João estar incluso no comitê é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{364}{1365} = \frac{4}{15}$$

Logo, a probabilidade de João NÃO fazer parte deste comitê é:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

CAPÍTULO 2

JOGOS DE AZAR

Neste capítulo, vamos explorar o mundo dos jogos de azar, incluindo os jogos ilícitos e lícitos no Brasil. Além disso, exploraremos os aspectos psicológicos envolvidos nos jogos de azar, como a ilusão da sorte e o risco de vício em jogos, que podem levar a consequências graves para a saúde mental e financeira dos jogadores.

2.1 O que é um jogo de azar

A expressão, para os efeitos penais, é definida como sendo o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusivamente ou principalmente da sorte. Ou seja, são jogos que não dependem somente das habilidades dos jogadores - diferentemente do que ocorre com outros jogos: xadrez, futebol, etc. - mas de uma contingência natural baseada em uma realidade chamada de probabilidade matemática. Os jogos de azar envolvem apostas e dinheiro, fazendo com que os jogos sejam sustentáveis através dos jogadores que financiam os que saem vitoriosos da partida. A essência do jogo de azar é a tomada de decisão sobre a condição de risco conhecendo-se o regulamento. Na maior parte desses jogos, os prémios estão determinados pela probabilidade, estatística de acertos e a combinação escolhida, ou seja, quanto menor é a probabilidade de se obter a combinação correta, maior é o prémio, tendo em vista que aumenta a probabilidade do azar em relação a sorte. Os jogos de azar incluem jogos de cassino, como roleta, blackjack, caça-níqueis e craps, bem como jogos informais, como apostas em corridas de cavalos e lutas de galos. Em muitos países, os jogos de azar são regulamentados por leis e podem ser controlados por órgãos governamentais ou entidades privadas para garantir a integridade dos jogos e a proteção dos jogadores. No Brasil, os jogos de azar são considerados ilegais pela maioria das autoridades, com exceção das loterias federais, como a Mega Sena e a Loteria Federal, que são controladas pelo governo e têm permissão para operar.

2.2 Jogos de azar no Brasil

Não se sabem exatamente quando os jogos de azar chegaram ao Brasil. Documentos históricos registram que a prática acontecia desde a época colonial. Os cassinos surgiram no Brasil ainda na época do Império Romano, sendo suas atividades proibidas em 1917 com a consolidação da República, onde permaneceu até 1934 quando o presidente Getúlio Vargas legalizou esses estabelecimentos.

Em 1941, 7 anos mais tarde, o presidente Vargas declarou a Lei das Contravenções Penais, que determinava a aplicação de penas para quem explorasse o jogo de azar em local público ou acessível ao público. A proibição definitiva aconteceu em 1946, através do Decreto-Lei nº 9.215, assinado pelo presidente Eurico Gaspar Dutra. Esse decreto incluiu a proibição da prática e exploração de jogos de azar em todo o território nacional, justificando a medida com o argumento de que a tradição moral, jurídica e religiosa do povo brasileiro era contrária a essa prática. Essa proibição está em vigor até os dias de hoje, e a legislação brasileira continua a considerar a exploração de jogos de azar como uma atividade ilegal, sujeita a sanções e penalidades criminais.

Atualmente, a Lei das Contravenções Penais (Decreto-Lei 3.698/41) continua em vigor. Sendo autorizado, somente, os jogos de azar realizados pela Loteria Federal, isso inclui a Mega-Sena, Loto-fácil, Quina, Loto-mania, Dupla Sena, Timemania, entre outras. No entanto, a proibição dos jogos de azar no Brasil não impede que muitas pessoas participem de jogos de azar ilegalmente, muitas vezes em ambientes clandestinos e perigosos, que podem envolver atividades criminosas, como tráfico de drogas, lavagem de dinheiro e corrupção. Além disso, muitas pessoas recorrem a sites de apostas online sediados em outros países, onde as leis sobre jogos de azar são mais permissivas, para jogar.

Existem propostas para legalizar os jogos de azar no Brasil, com o objetivo de aumentar a arrecadação de impostos, gerar empregos e combater o jogo ilegal. No entanto, essas propostas encontram resistência de grupos religiosos, políticos e da sociedade em geral, que argumentam que os jogos de azar podem levar a problemas sociais, como a dependência, a exploração financeira e a criminalidade.

2.2.1 Jogos ilícitos

No Brasil, os jogos de azar são ilegais, exceto para algumas modalidades específicas, como a loteria federal, que é administrada pela Caixa Econômica Federal. Abaixo estão alguns exemplos de jogos de azar ilícitos no Brasil:

Jogo do bicho: é um jogo de apostas baseado em sorteios de números associados a animais. Apesar de sua ilegalidade, ainda existe uma prática difundida em certas regiões do país.

Cassinos físicos: A operação de cassinos físicos é considerada ilegal no Brasil. Isso inclui estabelecimentos que oferecem jogos como roleta, máquinas caça-níqueis e jogos de cartas.

Bingo: a operação de bingos também é considerada ilegal no Brasil, no entanto muitos ainda operam ilegalmente em algumas regiões do país.

Jogo online não regulamentado: O jogo online, como cassinos online e apostas esportivas, é considerado ilegal no Brasil, a menos que seja oferecido por empresas autorizadas pelo governo.

A prática desses jogos de azar pode ser penalizada por lei, com punições que variam desde multas até prisão. É importante lembrar que o jogo pode ter efeitos negativos na vida pessoal e financeira das pessoas, e que a prática responsável de jogos de azar é fundamental para evitar problemas.

2.3 Aspectos psicológicos dos jogos de azar

Os jogos de azar podem ter um impacto significativo na saúde mental e emocional das pessoas, tanto positivo quanto negativo. Abaixo estão alguns dos aspectos psicológicos que podem ser afetados pelos jogos de azar:

Ansiedade: a ansiedade pode ser um resultado comum do jogo, especialmente quando uma pessoa investe grandes quantidades de dinheiro e fica preocupada com o resultado.

Depressão: a perda excessiva em jogos de azar pode levar à depressão e sentimentos de desesperança e desespero.

Autoestima: A autoestima de uma pessoa pode ser afetada pelos resultados dos jogos de azar. O sucesso pode aumentar a autoestima, enquanto a falha pode diminuí-la.

Comportamento impulsivo: algumas pessoas podem desenvolver comportamentos impulsivos, como jogar mais do que podem pagar ou jogar por períodos mais longos do que planejado.

Vício: o jogo pode se tornar um vício para algumas pessoas, o que pode levar a problemas financeiros e emocionais graves.

Estresse: o estresse pode ser um resultado do jogo, especialmente quando as pessoas estão preocupadas com suas finanças.

Relacionamentos: o jogo pode afetar relacionamentos pessoais e profissionais, especialmente quando as pessoas mentem ou escondem o quanto estão jogando.

Comportamento compulsivo: algumas pessoas podem desenvolver um comportamento compulsivo em relação ao jogo, que pode ser difícil de controlar.

É importante notar que nem todas as pessoas que jogam jogos de azar terão esses problemas psicológicos. Além disso, há muitos fatores que podem influenciar a forma como os jogos de azar afetam a saúde mental e emocional de uma pessoa, como sua personalidade, experiência de vida e fatores ambientais.

CAPÍTULO 3

A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS JOGOS DE AZAR

Neste capítulo, iremos abordar três dos jogos de azar mais populares, como a Mega-Sena, Roleta e Craps. Serão apresentadas as regras básicas e tipos de apostas de cada jogo, assim como as probabilidades de ganho para cada tipo de aposta.

3.1 Mega-Sena

A Mega-Sena é uma das loterias mais populares do Brasil e foi lançada em 1996 pela Caixa Econômica Federal. Desde então, tornou-se uma das principais fontes de arrecadação para o governo brasileiro, além de ser responsável por distribuir milhões de reais em prêmios a cada ano. A primeira edição da Mega-Sena ocorreu em 11 de março de 1996 e teve um prêmio acumulado de R$ 2,1 milhões. Na época, as apostas eram feitas apenas em casas lotéricas físicas, mas com o passar do tempo, a Caixa Econômica Federal criou o site da Mega-Sena e outras loterias, permitindo que os apostadores fizessem suas apostas online.

A Mega-Sena funciona de maneira relativamente simples: os jogadores devem fazer uma escolha que pode variar de 6 (mínimo) a 15 (máximo) números. Se acertarem todos os seis números sorteados, ganham o prêmio principal. O valor da aposta aumenta conforme a quantidade de números escolhidos. Existem também prêmios secundários para aqueles que acertam cinco ou quatro números. Os sorteios acontecem duas vezes por semana, às quartas-feiras e sábados.

Ao longo dos anos, a Mega-Sena tem oferecido prêmios enormes, com destaque para os valores recordes de R$ 306,7 milhões, sorteados em 2019, e R$ 302,5 milhões, sorteados em 2020. Desde o seu lançamento, a Mega-Sena passou por diversas mudanças, como a inclusão de mais números no jogo e a criação de sorteios especiais, como a Mega da Virada, que ocorre no dia 31 de dezembro de cada ano e oferece um prêmio grandioso para quem acertar os seis números sorteados.

O valor total do prêmio da Mega-Sena é composto por um percentual do total das vendas de bilhetes para cada concurso. De acordo com as regras da loteria, o valor total é dividido da seguinte forma:

- 35% do valor total é destinado aos jogadores que acertam os seis números sorteados (sena).

- 19% do valor total é destinado aos jogadores que acertam cinco números (quina).
- 19% do valor total é destinado aos jogadores que acertam quatro números (quadra).
- 22% do valor total é acumulado e destinado ao prêmio principal do próximo concurso (sena).
- 5% do valor total é destinado ao prêmio da Mega-Sena da Virada, que ocorre uma vez por ano.

Caso não haja vencedores em alguma das categorias de premiação, o valor é acumulado para o concurso seguinte. Dessa forma, o prêmio pode chegar a valores muito elevados, que são conhecidos como prêmios acumulados.

3.1.1 As formas de apostar e ganhar na Mega-Sena

Existem diferentes formas de apostar e ganhar na Mega-Sena, são elas:

Acertando os seis números sorteados (Sena): essa é a forma mais conhecida e desejada de ganhar na Mega-Sena. Para isso, o apostador deve marcar seis números dentre os 60 disponíveis na cartela. Se acertar os seis números sorteados, ele ganha o prêmio principal, que é acumulado a cada concurso em que não há vencedores.

Acertando cinco dos seis números sorteados (Quina): se o apostador acertar cinco dos seis números sorteados, ele ganha o prêmio da quina, que é um valor menor que o prêmio principal, mas ainda assim bastante significativo.

Acertando quatro dos seis números sorteados (Quadra): se o apostador acertar quatro dos seis números sorteados, ele ganha o prêmio da quadra, que também é um valor menor que o prêmio principal e o da quina, mas ainda assim uma quantia significativa de dinheiro.

3.1.2 Sena

Para acertar as seis dezenas sorteadas na Mega-Sena, é necessário considerar o espaço amostral do sorteio, que consiste em sortear seis números dentre um universo de 60 possíveis. Vale destacar que a ordem em que os números são sorteados não é relevante para a premiação. Logo:

$$n(\Omega) = C_{60,6} = \frac{60!}{(6! \times 54!)} = 50.063.860$$

Com isso, ao fazer uma aposta de 6 números, a probabilidade de acertar a sena é de 1 em 50.063.860.

Para calcular a probabilidade de um jogador acertar todos os 6 números sorteados, é necessário levar em conta a quantidade de números apostados. Vejamos na Tabela 1:

Tabela 1 - Probabilidade de fazer uma sena

Números apostados	$n(S)$	Probabilidade	Porcentagem
6	$C_{6,6}$	$\frac{1}{50063860}$	0,000002%
7	$C_{7,6}$	$\frac{1}{7151980}$	0,000013%
8	$C_{8,6}$	$\frac{1}{1787995}$	0,000055%
9	$C_{9,6}$	$\frac{1}{595998}$	0,00016%
10	$C_{10,6}$	$\frac{1}{238399}$	0,00041%
11	$C_{11,6}$	$\frac{1}{108363}$	0,00092%
12	$C_{12,6}$	$\frac{1}{54182}$	0,0018%
13	$C_{13,6}$	$\frac{1}{29175}$	0,0034%
14	$C_{14,6}$	$\frac{1}{16671}$	0,0059%
15	$C_{15,6}$	$\frac{1}{10003}$	0,0099%

Fonte: própria do autor (2023)

3.1.3 Quina

Para que o jogador acerte 5 dos 6 números, o conjunto de possibilidades $n(\Omega) = 50.063.860$ permanece o mesmo, porém, o evento Qi é definido como o acerto de 5 números e o erro em relação a outra dezena. Observe a seguir na Tabela 2 as probabilidades de acertar 5 números em relação a quantidade de números apostados.

Tabela 2 – Probabilidade de fazer uma quina

Números Apostados	$n(Qi)$	Probabilidades	Porcentagem
6	$C_{6,5} \times C_{54,1}$	$\frac{1}{154518}$	0,00064%
7	$C_{7,5} \times C_{53,1}$	$\frac{1}{44981}$	0,0022%
8	$C_{8,5} \times C_{52,1}$	$\frac{1}{17192}$	0,0058%
9	$C_{9,5} \times C_{51,1}$	$\frac{1}{7791}$	0,012%
10	$C_{10,5} \times C_{50,1}$	$\frac{1}{3973}$	0,025%

11	$C_{11,5} \times C_{49,1}$	$\frac{1}{2211}$	0,045%
12	$C_{12,5} \times C_{48,1}$	$\frac{1}{1317}$	0,075%
13	$C_{13,5} \times C_{47,1}$	$\frac{1}{828}$	0,12%
14	$C_{14,5} \times C_{46,1}$	$\frac{1}{544}$	0,18%
15	$C_{15,5} \times C_{45,1}$	$\frac{1}{370}$	0,27%

Fonte: própria do autor (2023)

3.1.4 Quadra

Para que o jogador acerte 4 dos 6 números, o conjunto de possibilidades $n(\Omega) = 50.063.860$ permanece o mesmo, porém, o evento Qa é definido como o acerto de 4 números e o erro em relação as outras duas dezenas. Vejamos na Tabela 3 as probabilidades de acertar 4 números em relação a quantidade de números apostados:

Tabela 3 – Probabilidade de fazer uma quadra

Números apostados	$n(Qa)$	Probabilidades	Porcentagem
6	$C_{6,4} \times C_{54,2}$	$\frac{1}{2332}$	0,042%
7	$C_{7,4} \times C_{53,2}$	$\frac{1}{1038}$	0,096%
8	$C_{8,4} \times C_{52,2}$	$\frac{1}{539}$	0,18%
9	$C_{9,4} \times C_{51,2}$	$\frac{1}{312}$	0,32%
10	$C_{10,4} \times C_{50,2}$	$\frac{1}{195}$	0,51%
11	$C_{11,4} \times C_{49,2}$	$\frac{1}{129}$	0,77%
12	$C_{12,4} \times C_{48,2}$	$\frac{1}{90}$	1,11%
13	$C_{13,4} \times C_{47,2}$	$\frac{1}{65}$	1,53%
14	$C_{14,4} \times C_{46,2}$	$\frac{1}{48}$	2,08%
15	$C_{15,4} \times C_{45,2}$	$\frac{1}{37}$	2,70%

Fonte: própria do autor (2023)

Percebe-se que a chance de um apostador ganhar na Mega-Sena é extremamente baixa. Mesmo com probabilidades ligeiramente melhores, é necessário fazer um investimento considerável em apostas que nem sempre são viáveis.

3.2 Roleta

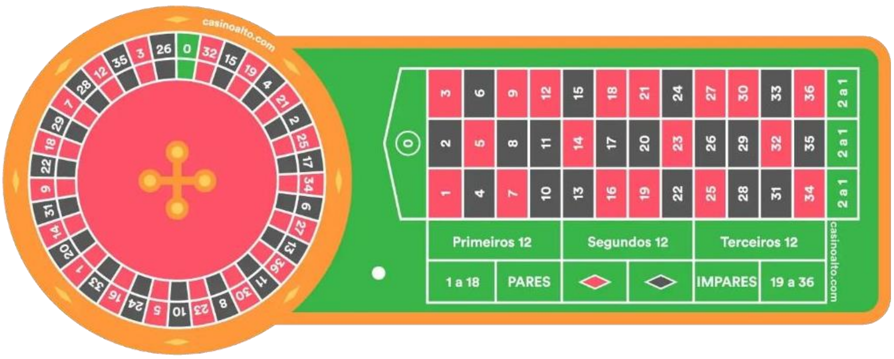
A Roleta é um dos jogos de cassino mais populares do mundo. Sua história remonta ao século XVII, quando Blaise Pascal, um matemático e inventor francês, tentou criar uma máquina de movimento perpétuo. Embora sua máquina não tenha funcionado, ela acabou sendo adaptada para se tornar a primeira roleta. A primeira versão da roleta tinha 31 números e uma casa vazia, em que a bola podia cair, fazendo com que o cassino tivesse uma vantagem significativa, aumentando assim a probabilidade de o jogador perder.

Ao longo do tempo, diferentes versões da roleta foram criadas em diferentes partes da Europa. Em 1842, os irmãos François e Louis Blanc, da França, criaram uma nova versão do jogo, que ficou conhecida como roleta europeia, onde possui 37 casas numeradas de 0 a 36. Esta versão se tornou muito popular em todo o mundo e é a mais comum em cassinos europeus e online. A roleta americana, com duas casas verdes (00), foi criada nos Estados Unidos no final do século XIX. Ela se tornou popular em cassinos americanos e, em seguida, se espalhou para outras partes do mundo. Embora seja muito semelhante à Roleta Europeia, a Roleta Americana tem uma vantagem maior para a casa devido à casa verde extra.

Com os notáveis avanços tecnológicos, a Roleta também se estabeleceu como um dos jogos mais populares nos cassinos online. A possibilidade de jogar a qualquer hora, em qualquer lugar e com qualquer pessoa se tornou uma realidade.

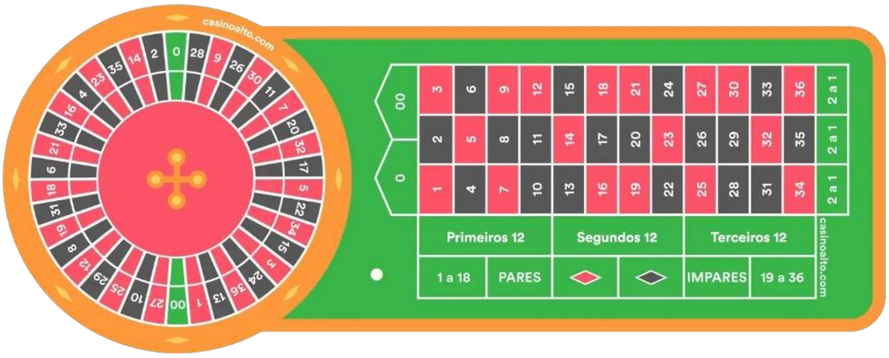
Para entendermos melhor do que se trata, observe abaixo a Roleta Europeia (Figura *2*) e a Roleta Americana (Figura *3*):

Figura 2 - Roleta Europeia



Fonte: Cassino Alto

Figura 3 - Roleta Americana



Fonte: Casino Alto

Na Roleta Europeia, a diferença da mesa de apostas é que ela tem apenas uma casa para o número 0, enquanto na Roleta Americana há duas casas separadas para o 0 e o 00, como pode ser visto nas figuras 1 e 2. Em ambos os casos, tanto na roleta quanto na mesa de apostas, o número 0 e/ou 00 são representados pela cor verde enquanto as outras numerações são divididas igualmente entre as cores vermelha e preta. Na mesa de apostas, os jogadores podem fazer uma variedade de apostas, incluindo apostas em um número específico, um grupo de números, a cor dos bolsos ou se o número será ímpar ou par. O objetivo do jogo é adivinhar onde a bola vai parar quando a roda parar de girar.

3.2.1 Apostas e Probabilidades

Existem muitas opções de apostas diferentes na roleta, que podem ser divididas em duas categorias principais: apostas internas e apostas externas. Para efetuarmos os cálculos das probabilidades em cada categoria, serão utilizados os índices ^{a} para a Roleta Americana e ^{e} para a Roleta Europeia.

3.2.2 Apostas Internas

As apostas internas são apostas em números específicos ou combinações de números. Vejamos algumas das opções de apostas internas:

Aposta direta: aposta em um número $(1n)$ específico. A aposta é colocada no centro do número escolhido. Se a bola cair nesse número, o pagamento é 35 para 1. A probabilidade de ganhar com essa aposta é:

$$P(1n^a) = \frac{1}{38} \approx 0{,}026315789 \cong 2{,}63\%$$

$$P(1n^e) = \frac{1}{37} \approx 0{,}027027027 \cong 2{,}70\%$$

Aposta dividida: A aposta dividida é uma aposta em dois números $(2n)$ adjacentes. A aposta é colocada na linha que separa os dois números escolhidos. Se a bola cair em um dos números, o pagamento é 17 para 1. A probabilidade de ganhar apostando em dois números adjacentes é:

$$P(2n^a) = \frac{2}{38} \approx 0{,}052631579 \cong 5{,}26\%$$

$$P(2n^e) = \frac{2}{37} \approx 0{,}054054054 \cong 5{,}40\%$$

Aposta de rua: A aposta de rua é uma aposta em três números $(3n)$ em uma linha horizontal. A aposta é colocada na borda da linha. Se a bola cair em um dos números, o pagamento é 11 para 1. A probabilidade de ganhar com essa aposta é de:

$$P(3n^a) = \frac{3}{38} \approx 0{,}78947368 \cong 7{,}89\%$$

$$P(3n^e) = \frac{3}{37} \approx 081081081 \cong 8{,}10\%$$

Aposta de canto: A aposta de canto é uma aposta em quatro números $(4n)$ que se encontram em um canto. A aposta é colocada no ponto de encontro dos quatro números. Se a bola cair em um dos números, o pagamento é 8 para 1. A probabilidade de ganhar apostando em 4 números em um canto é:

$$P(4n^a) = \frac{4}{38} \approx 0{,}105263158 \cong 10{,}52\%$$

$$P(4n^e) = \frac{4}{37} \approx 0{,}108108108 \cong 10{,}81\%$$

Aposta de cinco números: A aposta de cinco números $(5n)$ só está disponível na roleta americana e é uma aposta em 0, 00, 1, 2 e 3. A aposta é colocada na interseção entre 0 e 1. Se a bola cair em um dos números, o pagamento é 6 para 1. A probabilidade de ganhar com essa aposta é:

$$P(5n^a) = \frac{5}{38} \approx 0{,}131578947 \cong 13{,}15\%$$

3.2.3 Apostas Externas

As apostas externas são apostas em grandes grupos de números ou características da roleta. Vejamos algumas das opções de apostas externas:

Aposta em uma das cores (C) da mesa (vermelha/preta): A aposta vermelha ou preta é uma aposta na cor da próxima bolsa que a bola vai cair. Se a bola cair na cor escolhida, o pagamento é 1 para 1. A probabilidade de ganhar apostado nas cores da mesa é de:

$$P(C^a) = \frac{18}{38} \approx 0{,}47368421 \cong 47{,}36\%$$

$$P(C^e) = \frac{18}{37} \approx 0{,}486486486 \cong 48{,}64\%$$

Aposta ímpar ou par: é uma aposta no número em que a bola cair será par ou ímpar. Se a bola cair no número escolhido, o pagamento é 1 para 1. A probabilidade de ganhar com essa aposta é:

$$P(PI^a) = \frac{18}{38} \approx 0{,}47368421 \cong 47{,}36\%$$

$$P(PI^e) = \frac{18}{37} \approx 0{,}486486486 \cong 48{,}64\%$$

Aposta em Dúzias (D): Você aposta em uma das três dúzias de números na grade. As opções incluem 1-12, 13-24 e 25-36. Se a bola cair em um dos números escolhidos, o pagamento é 2 para 1. A probabilidade de ganhar apostando em uma das dúzias é de:

$$P(D^a) = \frac{12}{38} \approx 0{,}315789473 \cong 31{,}57\%$$

$$P(D^e) = \frac{12}{37} \approx 0{,}324324324 \cong 32{,}43\%$$

Aposta alta ou baixa: A aposta alta ou baixa (AB) é uma aposta no número que a bola vai cair ser alto (19-36) ou baixo (1-18). Se a bola cair no grupo de números escolhido, o pagamento é 1 para 1. A probabilidade de ganhar com essa aposta é:

$$P(AB^a) = \frac{18}{38} \approx 0{,}47368421 \cong 47{,}36\%$$

$$P(AB^e) = \frac{18}{37} \approx 0{,}486486486 \cong 48{,}64\%$$

Aposta de coluna (Co): é uma aposta em uma coluna vertical de 12 números. Se a bola cair em um dos números escolhidos, o pagamento é 2 para 1. A probabilidade de ganhar apostando em coluna vertical é de:

$$P(Co^a) = \frac{12}{38} \approx 0,315789473 \cong 31,57\%$$
$$P(Co^e) = \frac{12}{37} \approx 0,324324324 \cong 32,43\%$$

3.2.4 Vantagens da Casa

No jogo da roleta, a casa tem uma vantagem embutida sobre os jogadores, que é conhecida como vantagem da casa. Essa vantagem é construída devido à presença de uma casa zero ou duas casas zero na roda da roleta, o que significa que, ao apostar em qualquer número individual, a probabilidade de ganhar é menor do que $\frac{1}{37}$ ou $\frac{1}{38}$, dependendo da roleta.

O pagamento da roleta é menor do que a verdadeira probabilidade de acerto. Por exemplo, se você apostar em um único número e ganhar, o pagamento é normalmente de 35 para 1, mesmo que a probabilidade real de ganhar seja de $\frac{1}{37}$ ou $\frac{1}{38}$. Isso significa que a casa mantém uma pequena porcentagem do dinheiro apostado, mesmo que todos os jogadores percam.

Além disso, existem outras opções de apostas que também favorecem a casa, como apostas em vermelho ou preto, ímpar ou par, ou grupos de números, que oferecem uma probabilidade quase igual de ganhar e perder, mas com um pagamento ligeiramente menor do que o necessário para tornar o jogo justo. Desse modo, a casa tem uma vantagem que é construída em torno do pagamento reduzido em relação à probabilidade real de acerto e as opções de apostas disponíveis que favorecem a casa.

3.3 Craps

O Craps teve origem em um jogo inglês chamado "Hazard", havendo registros de soldados jogando esse jogo durante a Terceira Cruzada no século XII.

No século XVII, os franceses adotaram o jogo e o chamaram de "Crabes". Durante esse tempo, o jogo também foi introduzido no Canadá, que na época era uma colônia francesa conhecida como Acádia. Com a perda do domínio francês sobre Acádia para os ingleses em 1755, os moradores que restaram mudaram o nome do jogo para "Creps", devido à influência da mistura linguística. No início do século XIX, o jogo chegou aos Estados Unidos, onde recebeu seu nome atual de "Craps" em 1843. A versão moderna do jogo foi trazida para Nova Orleans no século XX por Bernard Xavier, mas ainda com algumas falhas.

Entretanto, foi somente após as modificações nas regras feitas por John Winn que o Craps se tornou o jogo emocionante que conhecemos hoje. Com a adição de apostas específicas e uma nova forma de jogar os dados, o jogo ganhou popularidade em cassinos de Las Vegas e é hoje um dos jogos mais populares em todo o mundo.

3.3.1 As regras

O jogo é jogado com um par de dados, e o objetivo é prever o resultado do par de dados lançados. Além disso, o jogo é feito em rodadas e, em cada rodada, um jogador é escolhido para lançar os dados (conhecido como o "lançador"). Antes do lançamento, os jogadores fazem apostas em uma variedade de resultados possíveis.

O jogo começa com uma "rodada de saída", na qual o jogador atira os dados na mesa. Se o resultado for 7 ou 11, o jogador ganha automaticamente. Se o resultado for 2, 3 ou 12, o jogador perde automaticamente. Se o resultado for 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, esse número é chamado de "ponto", e o jogo continua. Se um ponto é estabelecido, o jogador continua jogando até que o ponto seja atingido novamente (o que significa que o jogador ganha) ou até que um 7 seja jogado (o que significa que o jogador perde).

Há diversas opções de apostas disponíveis para os jogadores, algumas delas dependem de um resultado específico dos dados, enquanto outras dependem de uma condição do jogo, por exemplo, se o próximo lançamento dos dados resultará em um número ímpar ou par. O pagamento para cada tipo de aposta pode variar, dependendo da probabilidade de acertar a aposta escolhida e do nível de risco envolvido.

3.3.2 Tipos de Apostas

Pass Line (linha de passagem): é a aposta mais comum no Craps. É uma aposta em que o resultado do lançamento dos dados será 7 ou 11. Se o resultado for 7 ou 11, a aposta paga 1 para 1. Se o resultado for 2, 3 ou 12, a aposta é perdida. Se o resultado for qualquer outro número, esse número se torna o "ponto" e o jogador deve rolar o ponto novamente antes de rolar um 7 para ganhar a aposta.

Don't Pass Line (linha não passa): é o oposto da aposta Pass Line. É uma aposta contra o lançador e é uma aposta de que o resultado será 2, 3 ou 12 ou que o lançador não fará o ponto antes de rolar um 7. Se o resultado for 2 ou 3, a aposta paga 1:1. Se o resultado for 12, a aposta é empurrada (nem ganha nem perde). Se o resultado for 7 ou 11, a aposta é perdida.

Come (vinda): é uma aposta feita depois que o ponto foi estabelecido. É uma aposta de que o próximo resultado será 7 ou 11. Se o resultado for 7 ou 11, a aposta paga 1:1. Se o resultado for 2, 3 ou 12, a aposta é perdida. Se o resultado for qualquer outro número, essa aposta é transferida para a área de apostas desse número e o jogador deve rolar o número novamente antes de rolar um 7 para ganhar a aposta.

Don't Come (não vem): é o oposto da aposta come. É uma aposta contra o jogador e é uma aposta de que o próximo resultado será 2, 3 ou 12 ou que o jogador não fará o ponto antes de rolar um 7. Se o resultado for 2 ou 3, a aposta paga 1:1. Se o resultado for 12, a aposta continua na mesa. Se o resultado for 7 ou 11, a aposta é perdida.

Field (campo): é uma aposta em que o resultado será um dos seguintes números: 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12. Se o resultado for 3, 4, 9, 10 ou 11, a aposta paga 1:1. Se o resultado for 2 ou 12, a aposta paga 2:1.

Any Seven (qualquer 7): é uma aposta em que o resultado será 7 na próxima rodada. Se o resultado for 7, a aposta paga 4:1.

Place to win (lugar para ganhar): é uma aposta em que o jogador escolhe um dos números (4, 5, 6, 8 ou 10) e aposta que esse número será rolado antes de um 7. O pagamento varia de acordo com o número escolhido.

3.3.3 As probabilidades

Podemos considerar, inicialmente, todas as combinações possíveis de soma de resultados que podem ser obtidas a partir do lançamento de dois dados distintos. Para um lançamento de dois dados, o número total de resultados possíveis é dado por $n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. As probabilidades de obter cada resultado possível são:

Tabela 4 – Probabilidade de somas em um lançamento de dois dados

Soma	Dados	Probabilidade	Porcentagem
2	$1+1$	$\frac{1}{36}$	2,77%
3	$1+2 \quad 2+1$	$\frac{1}{18}$	5,55%
4	$1+3 \quad 2+2 \quad 3+1$	$\frac{1}{12}$	8,33%
5	$1+4 \quad 2+3 \quad 3+2 \quad 4+1$	$\frac{1}{9}$	11,11%
6	$1+5 \quad 2+4 \quad 3+3 \quad 4+2 \quad 5+1$	$\frac{5}{36}$	13,88%
7	$1+6 \quad 2+5 \quad 3+4 \quad 4+3 \quad 5+2 \quad 6+1$	$\frac{1}{6}$	16,66%
8	$2+6 \quad 3+5 \quad 4+4 \quad 5+3 \quad 6+2$	$\frac{5}{36}$	13,88%

9	$3+6 \quad 4+5 \quad 5+4 \quad 6+3$	$\frac{1}{9}$	11,11%
10	$4+6 \quad 5+5 \quad 6+4$	$\frac{1}{12}$	8,33%
11	$5+6 \quad 6+5$	$\frac{1}{18}$	5,55%
12	$6+6$	$\frac{1}{36}$	2,77%

Fonte: própria do autor (2023)

Quando o jogo começa, as apostas (representadas por "V" para vitória) são ganhas se o resultado for 7 ou 11, e perdidas (representadas por "D" para derrota) se o resultado for 2, 3 ou 12. Caso contrário, qualquer outra pontuação se torna o "ponto" (representado por "P"). Isso pode ser descrito usando o princípio aditivo para eventos independentes:

Para calcular a probabilidade de vitória (V), precisamos somar as probabilidades de obter um 7 ou um 11. Assim, temos:

$$P(V) = P(7) + P(11) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Para calcular a probabilidade de derrota (D), precisamos somar as probabilidades de obter um 2, um 3 ou um 12. Temos que,

$$P(D) = P(2) + P(3) + P(12) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Finalmente, para calcular a probabilidade de ponto (P), basta subtrair as probabilidades de vitória e derrota de 1, pois o resultado deve ser ou uma vitória, ou uma derrota, ou um ponto. Assim, temos:

$$P(P) = 1 - P(V) - P(D) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Nota-se que a probabilidade de sucesso é duas vezes maior do que a probabilidade de perder automaticamente. Além disso, a probabilidade de estabelecer um ponto e continuar jogando é três vezes maior do que a probabilidade de vencer automaticamente e, portanto, seis vezes maior do que a probabilidade de perder.

Uma vez que o ponto é estabelecido, a probabilidade de perder nas apostas *Pass Line*, *Come*, e em todas as outras que apostam em um número, aumenta, uma vez que a probabilidade de um resultado 7 é maior do que a probabilidade do resultado no Ponto, independentemente de qual número tenha sido estabelecido. Por outro lado, as apostas *Don't Pass Line*, *Don't Come*, *Any Seven*, e todas as outras que apostam no 7 antes do número do ponto, têm uma vantagem.

Ao analisar as probabilidades, pode-se concluir que o jogo de Craps não impõe uma situação de vitória ou derrota automática. Em vez disso, ele permite que o jogador prossiga, oferecendo uma probabilidade reduzida de vitória nas rodadas subsequentes do jogo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi possível explorar a matemática envolvida nos jogos de azar, desde a sua origem até os principais conceitos e fórmulas matemáticas que são fundamentais para entender a probabilidade e as estratégias que envolvem esses jogos. Ao compreender a matemática por trás dos jogos de azar, espera-se que o leitor tenha percebido a importância da análise combinatória e da probabilidade na tomada de decisões em situações de incerteza. Além disso, espera-se que o leitor também tenha compreendido que, mesmo que os jogos de azar sejam baseados em cálculos matemáticos, o elemento sorte presente nesses jogos não pode ser completamente eliminada, fazendo com que o leitor reflita sobre os riscos e benefícios envolvidos nesse tipo de atividade. É importante ressaltar que, apesar da aplicação da matemática, os jogos de azar sempre terão uma vantagem estatística para a casa, garantindo a lucratividade dos cassinos e casas de apostas a longo prazo. A matemática pode ajudar a entender as probabilidades e a tomar decisões informadas, mas não pode garantir resultados consistentemente favoráveis. Por fim, para prosseguir no estudo da matemática dos jogos de azar, sugere-se a leitura de trabalhos acadêmicos específicos sobre o tema, bem como a realização de simulações e experimentos para observar como as probabilidades se comportam na prática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE, Rafael Thé Bonifácio de. A probabilidade aplicada aos jogos de azar. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2017. 69f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

[2] BEZERRA, Luis Rodrigo D'Andrada. Métodos de contagem. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013. 47f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[3] BRASIL. Decreto-Lei nº 3.688, de 3 de outubro de 1941. Dispõe sobre as contravenções penais. Diário Oficial da União, Rio de Janeiro, 3 out. 1941. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del3688.htm. Acesso em: 09 mar. 2023.

[4] BRASIL. Decreto-Lei nº 9.215, de 30 de abril de 1946. Proíbe a prática e a exploração de jogos de azar em todo o território nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 30 abr. 1946. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/Del9215.htm. Acesso em: 09 mar. 2023.

[5] CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Mega-Sena. Disponível em: https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mega-Sena.aspx. Acesso em: 02 abr. 2023.

[6] CASINOALTO. Estratégias para jogar roleta. Disponível em: https://casinoalto.com/br/estrategia/ruleta/. Acesso em: 05 abr. 2023.

[7] CASINOALTO. Regras do jogo Craps. Disponível em: https://casinoalto.com/br/reglas/craps/. Acesso em: 17 abr. 2023.

[8] JUSBRASIL. Processos judiciais sobre jogo de azar. Disponível em: https://www.jusbrasil.com.br/processos/nome/289967/jogo-de-azar. Acesso em: 10 mar. 2023.

[9] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 5aEd., 2004.

[10] Morgado, A. C. et al, Análise Combinatória e Probabilidade, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 10 Edição, 2016.

[11] O'MAIS, Sálua. Jogos de azar: análise do comportamento psíquico e sócio-familiar do jogo patológico a partir de vivências do jogador. 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2007.

[12] PUCCI, Giuseppe A. Axiomática das Probabilidades. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/33918/axiomatica.html. Acesso em: 24 maio 2023.

[13] Santos, José Plínio O., Mello, Margarida P. e Murari, Idanir T.C. Introdução à Análise Combinatória, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, RJ, 4 Edição, 2007.

[14] VARELLA, Drauzio. Jogadores patológicos. Entrevista concedida a UOL. São Paulo, 2012. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/entrevistas-2/jogadores-patologicos-entrevista/. Acesso em: 09 mar. 2023.