



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DIEGO GUIMARÃES DOS SANTOS

**IMPUTAÇÃO DE SÉRIE TEMPORAL MENSAL DE INSOLAÇÃO PELA
MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA FINS DE PLANEJAMENTO
ENERGÉTICO FOTOVOLTAICO NA REGIÃO AMAZÔNICA**

TUCURUÍ
2026

DIEGO GUIMARÃES DOS SANTOS

**IMPUTAÇÃO DE SÉRIE TEMPORAL MENSAL DE INSOLAÇÃO PELA
MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA FINS DE PLANEJAMENTO
ENERGÉTICO FOTOVOLTAICO NA REGIÃO AMAZÔNICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado
como requisito parcial para obtenção do grau
de Bacharel em Engenharia Elétrica, pela
Universidade Federal do Pará.

Orientador:
Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira

TUCURUÍ

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237i Santos, Diego Guimarães dos.
Imputação de série temporal mensal de insolação pela
modelagem no espaço de estados para fins de planejamento
energético fotovoltaico na região amazônica / Diego Guimarães dos
Santos. — 2026.
123 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira
Coorientador(a): Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma
Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Tucuruí, Faculdade de Engenharia
Elétrica, Tucuruí, 2026.

1. Imputação. 2. Série temporal. 3. Espaço de estados. I.
Título.

CDD 621.307209811

DIEGO GUIMARÃES DOS SANTOS

**IMPUTAÇÃO DE SÉRIE TEMPORAL MENSAL DE INSOLAÇÃO PELA
MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA FINS DE PLANEJAMENTO
ENERGÉTICO FOTOVOLTAICO NA REGIÃO AMAZÔNICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado
como requisito parcial para obtenção do grau
de Bacharel em Engenharia Elétrica, pela
Universidade Federal do Pará.

Data da aprovação: 27/02/2026

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente

RAPHAEL BARROS TEIXEIRA

Data: 15/07/2026 11:29:40-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira

Orientador – FEE/CAMTUC/UFPA



Documento assinado digitalmente

JEFFERSON SOUZA COSTA

Data: 15/07/2026 10:01:27-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jefferson Souza Costa

Avaliador Interno – FEE/CAMTUC/UFPA



Documento assinado digitalmente

CLEISON DANIEL SILVA

Data: 09/07/2026 09:46:02-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Cleison Daniel Silva

Avaliador Interno – FEE/CAMTUC/UFPA

TUCURUÍ

2026

	UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
---	--

TÍTULO: IMPUTAÇÃO DE SÉRIE TEMPORAL MENSAL DE INSOLAÇÃO PELA MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS PARA FINS DE PLANEJAMENTO ENERGÉTICO FOTOVOLTAICO NA REGIÃO AMAZÔNICA

DISCENTE: DIEGO GUIMARÃES DOS SANTOS

MATRÍCULA: 202033040033

#	BANCA EXAMINADORA	CONDIÇÃO
1	Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira – UFPA	Orientador
2	Prof. Dr. Jefferson Souza Costa – UFPA	Membro
3	Prof. Dr. Cleison Daniel Silva – UFPA	Membro

Data da defesa: 27/02/2026 Hora de Início: 15:30 Hora de Término:

Trabalho Escrito (0 a 10 pontos por critério)	Membro 1	Membro 2	Membro 3
Formatação			
Linguagem (Gramática e Semântica)			
Conteúdo técnico			

Defesa Oral (0 a 10 pontos por critério)	Membro 1	Membro 2	Membro 3
Sequência lógica de apresentação			
Administração do tempo			
Expressão oral			
Domínio do tema			

Média por examinador			
Média Final			
Conceito Final			

Tucuruí-PA, 27/02/2026

Orientador

Co-orientador

Membro

Membro

Aos meus nobres ancestrais (In Memoriam)

Ao meu querido avô paterno, Luiz Sobrinho dos Santos (In Memoriam)

A minha querida avó materna, Sofia Ribeiro Lima Guimarães (In Memoriam)

Ao querido mestre, Waldener Lima Guimarães (In Memoriam)

Ao nobre colega, Eng. Antônio Olavo Fonseca da Rocha (In Memoriam)

Ao nobre colega, Eng. MSc. Bruno Prazeres de Miranda (In Memoriam)

Ao nobre professor, Prof. Dr. João dos Santos Protázio (In Memoriam)

AGRADECIMENTOS

A Deus todo poderoso, por sua infinita misericórdia.

Aos nobres mentores e mentoras espirituais, por seus conselhos e orientações.

A minha querida mãe, pelo apoio incondicional.

A minha querida irmã, pela companhia inestimável.

Aos meus nobres professores, Prof. Dr. André Felipe Souza da Cruz, Profa. Dra. Andrécia Pereira da Costa, Prof. Dr. Cleison Daniel Silva, Prof. Dr. Ewerton Ramos Granhen, Prof. Dr. Rafael Suzuki Bayma, Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira, Prof. Dr. Washington César Braga de Sousa e Prof. MSc. Vitor da Silva Jorge, pelos nobres ensinamentos, conselhos e orientações.

Aos nobres funcionários do campus universitário de Tucuruí.

“O segredo para se andar sobre as águas é saber onde estão as pedras.”

(Provérbio Chinês)

RESUMO

Na presente monografia investiga-se a possibilidade de se modelar uma série temporal mensal de insolação média (observada por uma estação meteorológica convencional localizada na cidade de Soure durante um intervalo de tempo de trinta anos) através da modelagem no espaço de estados, com o intuito de se efetuar a imputação dos dados que se encontram ausentes na referida série temporal. Dentre os modelos utilizados para se efetuar a referida modelagem, no espaço de estados, destacam-se, o modelo de nível local de sazonalidade clássica e o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica. O ajuste dos referidos modelos na série temporal de insolação mensal média da estação meteorológica de Soure demonstrou que os referidos modelos devem ser acrescidos de uma componente autorregressiva de média móvel (*ARMA*) para que os mesmos possam produzir imputações pontuais que preservem a dinâmica média e a sazonalidade observadas na série temporal de insolação mensal média da estação meteorológica de Soure.

Palavras-Chave: Imputação; Série Temporal; Espaço de Estados.

ABSTRACT

In this monograph, we investigate the feasibility of modeling a monthly time series of average sunshine duration (recorded at a conventional meteorological station located in the city of Soure over a thirty-year period) by means of state-space modeling, with the aim of imputing the missing observations in that series. Among the models employed in this state-space framework, particular emphasis is given to the local level model with classical seasonality and the linear trend model with classical seasonality. The fit of these models to the monthly average sunshine duration series from the Soure meteorological station showed that they must be supplemented with an autoregressive moving average (*ARMA*) component in order to generate point imputations capable of preserving both the mean dynamics and the seasonal pattern observed in the series.

Keywords: Imputation; Time Series; State Space.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Aspecto estrutural básico de uma estação meteorológica convencional...	21
Figura 2	– Aspecto estrutural básico de um heliógrafo de <i>Campbell-Stokes</i>	25
Figura 3	– Fluxograma de execução do procedimento metodológico.....	79
Figura 4	– Perfil da insolação mensal média da estação de Soure.....	82
Figura 5	– Perfil dos resíduos recursivos padronizados do <i>Modelo 01</i>	85
Figura 6	– Perfil do histograma dos resíduos do <i>Modelo 01</i>	85
Figura 7	– Perfil da função de autocorrelação do <i>Modelo 01</i>	86
Figura 8	– Perfil da função de autocorrelação parcial do <i>Modelo 01</i>	86
Figura 9	– Perfil do nível do <i>Modelo 01</i>	87
Figura 10	– Perfil da sazonalidade do <i>Modelo 01</i>	87
Figura 11	– Perfil do ruído do <i>Modelo 01</i>	88
Figura 12	– Perfil dos resíduos recursivos padronizados do <i>Modelo 02</i>	91
Figura 13	– Perfil do histograma dos resíduos do <i>Modelo 02</i>	92
Figura 14	– Perfil da função de autocorrelação do <i>Modelo 02</i>	92
Figura 15	– Perfil da função de autocorrelação parcial do <i>Modelo 02</i>	93
Figura 16	– Perfil do nível do <i>Modelo 02</i>	93
Figura 17	– Perfil do <i>ARMA(1,1)</i> do <i>Modelo 02</i>	94
Figura 18	– Perfil da sazonalidade do <i>Modelo 02</i>	94
Figura 19	– Perfil do ruído do <i>Modelo 02</i>	95
Figura 20	– Perfil dos resíduos recursivos padronizados do <i>Modelo 03</i>	99
Figura 21	– Perfil do histograma dos resíduos do <i>Modelo 03</i>	99
Figura 22	– Perfil da função de autocorrelação do <i>Modelo 03</i>	100
Figura 23	– Perfil da função de autocorrelação parcial do <i>Modelo 03</i>	100
Figura 24	– Perfil do nível do <i>Modelo 03</i>	101
Figura 25	– Perfil da sazonalidade do <i>Modelo 03</i>	101
Figura 26	– Perfil do ruído do <i>Modelo 03</i>	102
Figura 27	– Perfil dos resíduos recursivos padronizados do <i>Modelo 04</i>	105
Figura 28	– Perfil do histograma dos resíduos do <i>Modelo 04</i>	106
Figura 29	– Perfil da função de autocorrelação do <i>Modelo 04</i>	106
Figura 30	– Perfil da função de autocorrelação parcial do <i>Modelo 04</i>	107
Figura 31	– Perfil do nível do <i>Modelo 04</i>	107

Figura 32	–	Perfil do $ARMA(1,1)$ do <i>Modelo 04</i>	108
Figura 33	–	Perfil da sazonalidade do <i>Modelo 04</i>	108
Figura 34	–	Perfil do ruído do <i>Modelo 04</i>	109
Figura 35	–	Perfil da série temporal de Soure imputada pelo <i>Modelo 02</i>	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	–	Quadro resumo das principais características do <i>Modelo 01</i>	84
Quadro 2	–	Quadro resumo das principais características do <i>Modelo 02</i>	91
Quadro 3	–	Quadro resumo das principais características do <i>Modelo 03</i>	98
Quadro 4	–	Quadro resumo das principais características do <i>Modelo 04</i>	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ARMA</i>	–	Autorregressivo de média móvel
<i>ARIMA</i>	–	Autorregressivo de média móvel integrado
<i>SARIMA</i>	–	Autorregressivo de média móvel sazonal
<i>BIC</i>	–	Critério de informação bayesiana de Schwarz
<i>WMO</i>	–	Organização meteorológica mundial
<i>AR</i>	–	Autoregressivo
<i>MA</i>	–	Média Móvel
<i>ACF</i>	–	Função de autocorrelação
<i>PACF</i>	–	Função de autocorrelação parcial
<i>i.i.d</i>	–	Independente e identicamente distribuído
INMET	–	Instituto nacional de meteorologia

SUMÁRIO

1.0	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	13
1.1	Justificativa.....	16
1.2	Objetivo.....	19
1.3	Estrutura da monografia.....	19
2.0	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
2.1	A estação meteorológica convencional.....	21
2.2	A grandeza meteorológica insolação.....	24
2.3	Estimação do potencial de geração fotovoltaica pela insolação.....	27
2.4	Métodos de imputação de dados ausentes em séries temporais.....	29
2.5	Forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados.....	32
2.6	O modelo autorregressivo de média móvel.....	34
2.7	O modelo de nível local com componente sazonal.....	37
2.7.1	Nível local de sazonalidade clássica.....	38
2.7.2	Nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$	42
2.8	O modelo de tendência linear com componente sazonal.....	47
2.8.1	Tendência linear de sazonalidade clássica.....	49
2.8.2	Tendência linear de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$	52
2.9	O filtro de <i>Kalman</i>.....	57
2.10	O suavizador de <i>Kalman</i>.....	61
2.11	O método da máxima verossimilhança.....	64
2.12	Resíduos recursivos padronizados.....	66
2.13	A função de autocorrelação.....	68
2.14	A função de autocorrelação parcial.....	70
2.15	O teste estatístico de <i>Ljung-Box</i>.....	71
2.16	O teste estatístico de <i>Shapiro-Wilk</i>.....	73
2.17	O critério de informação bayesiana de Schwarz.....	75
3.0	MATERIAIS E MÉTODOS.....	77
3.1	Descrição geral do procedimento metodológico.....	77
3.2	Breve descrição do pacote <i>statespacer</i>.....	80

3.3	Perfil da insolação mensal média observada pela estação de Soure.....	81
4.0	AJUSTE DOS MODELOS AOS DADOS METEOROLÓGICOS.....	83
4.1	Descrição geral dos modelos utilizados.....	83
4.2	Nível local de sazonalidade clássica.....	83
4.2.1	Características intrínsecas do <i>Modelo 01</i>	88
4.3	Nível local de sazonalidade clássica com componente <i>ARMA(1,1)</i>.....	90
4.3.1	Características intrínsecas do <i>Modelo 02</i>	95
4.4	Tendência linear de sazonalidade clássica.....	98
4.4.1	Características intrínsecas do <i>Modelo 03</i>	102
4.5	Tendência linear de sazonalidade clássica com componente <i>ARMA(1,1)</i>.....	104
4.5.1	Características intrínsecas do <i>Modelo 04</i>	109
4.6	Imputação dos dados ausentes da estação convencional de Soure.....	111
5.0	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
	Referências.....	117

1.0 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A imputação de falhas em séries temporais de insolação na região amazônica consiste muito mais do que um *remendo estatístico*, trata-se de uma etapa fundamental para a garantia da qualidade do recurso solar que alimenta decisões de planejamento energético fotovoltaico, desde a estimativa de produtividade e análises de risco, dimensionamento de sistemas isolados e avaliação de viabilidade econômica. Na região amazônica, lacunas em séries observacionais são frequentes por motivos operacionais (manutenção, falhas de sensores, interrupções de comunicação e mudanças de estação), e isso ocorre justamente em um ambiente climático de alta variabilidade intra e intersazonal, fortemente controlado por nebulosidade, umidade e circulação regional.

Estudos que mapeiam o recurso solar e sua variabilidade no Brasil mostram que a energia solar disponível e sua sazonalidade não são uniformes no território e que, mesmo na faixa equatorial, a variabilidade sazonal associada à nebulosidade e ao regime de chuvas é relevante para planejamento e política energética (MARTINS et al., 2008a). O ponto de partida é explicitar o que está sendo chamado de *insolação* e como isso entra no planejamento fotovoltaico. Do ponto de vista da meteorologia, o termo pode se referir à duração do brilho solar (medida em *horas de sol*) ou, em usos aplicados, ser empregado de forma ampla para representar a energia solar disponível. Para o planejamento de sistemas fotovoltaicos, a grandeza diretamente útil é a irradiação solar (energia por área ao longo do tempo, medida geralmente em kWh/m^2) e suas decomposições (*direta* e *difusa*) quando se modela o efeito de inclinação, orientação e componentes atmosféricos. Literaturas técnicas voltadas para o planejamento de sistemas fotovoltaicos discutem como essas grandezas se relacionam e como as séries temporais de recurso solar são transformadas em entradas para o cálculo de energia em superfícies inclinadas e, conseqüentemente, em estimativas de geração de sistemas solares (DUFFIE; BECKMAN, 2013; IQBAL, 1983).

Os modelos no espaço de estados se destacam, porque tratam a série observada como resultado de componentes latentes com interpretação física, geralmente compostas por quatro componentes fundamentais, são elas, o nível (*level*), a inclinação (*slope*), a sazonalidade e o ruído irregular. Essa modelagem também permite a inclusão de regressões com variáveis explicativas (por exemplo, nebulosidade, precipitação, aerossóis/queima de biomassa ou índices de grande escala) quando disponíveis. Na forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados, a observação y_t (insolação/irradiação no tempo t) é descrita por uma equação de medida ($y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t$), e o estado latente α_t evolui de acordo com uma equação

de transição ($\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t$), em que a variável ϵ_t e η_t representam ruídos (com variâncias a estimar). Essa formulação é a base do filtro e do suavizador de *Kalman*, que viabilizam inferência recursiva e retrospectiva sobre os estados e observações faltantes (KALMAN, 1960; DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). Do ponto de vista didático, a imputação por espaço de estados pode ser entendida como um processo em duas camadas. Na primeira, denominada de *camada estrutural*, escolhe-se um modelo compatível com o comportamento esperado da insolação na região de interesse.

Em séries temporais mensais, é comum se representar um nível local que se ajusta lentamente ao longo do tempo (captando mudanças de regime e tendências), uma sazonalidade anual que captura o ciclo úmido–seco e variações intra-anuais, e um termo irregular que representa flutuações de curto prazo. A sazonalidade pode ser modelada por uma *componente sazonal clássica* (com soma zero ao longo do ano) ou por uma *componente sazonal trigonométrica* (também denominada de *componente sazonal harmônica*), particularmente útil quando se deseja suavidade e interpretação em termos de senos e cossenos. Isso é consistente com a literatura de modelos estruturais e de espaço de estados para séries com sazonalidade bem marcada (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Na segunda camada, denominada *inferencial*, estimam-se as variâncias dos ruídos e demais parâmetros (por máxima verossimilhança via filtro de *Kalman*), produzindo-se respectivamente, estimativas filtradas que usam apenas informações até o instante de tempo t e estimativas suavizadas, que usam toda a série observada, antes e depois do instante de tempo t , para se reconstruir os estados e preencher faltas com incerteza devidamente quantificada (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

A parte crucial para imputação é como o método lida com os dados ausentes da série temporal de interesse. Na modelagem no espaço de estados, uma observação faltante no instante de tempo t não causa uma interrupção na execução do algoritmo de processamento pois, quando a observação y_t está ausente, o filtro de *Kalman* simplesmente não executa a etapa de atualização pela medida naquele instante, permanecendo com a predição do estado baseada na dinâmica do modelo. Quando as observações voltam, o filtro retoma as atualizações normalmente. Depois, o suavizador de *Kalman* utiliza a informação futura (por exemplo, o retorno da série após uma lacuna) para ajustar retroativamente as estimativas dentro do intervalo faltante. Assim, o valor imputado para y_t tende a ser a esperança condicional dada a estrutura do modelo e as observações disponíveis, e vem acompanhado de variância e intervalos de confiança, o que é essencial para o planejamento energético com gestão de risco (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Em termos práticos, isso significa que uma

falha de vários meses pode ser preenchida respeitando o padrão sazonal e o nível daquele ano, em vez de se produzir padrões artificiais típicos de interpolações simples, ao mesmo tempo, o método explicita que a incerteza aumenta em trechos longos sem medida, o que deve ser carregado para análises posteriores.

A necessidade de um tratamento estruturado é ainda maior na região amazônica por causa da influência da nebulosidade na partição entre radiação direta e difusa. Trabalhos em sítios amazônicos mostram que a fração difusa varia entre estações e se relaciona com cobertura de nuvens, afetando regimes radiativos relevantes para processos biofísicos e, por extensão, para o desempenho de tecnologias solares conforme o contexto atmosférico (BUTT et al., 2010). Somado a isso, estudos observacionais no sul da região amazônica indicam que, durante a curta estação seca, controles atmosféricos e de superfície modulam fluxos e disponibilidade energética, evidenciando que o perfil sazonal do sistema acoplado atmosfera–superfície precisa ser respeitado quando se reconstrói a série (NEGRÓN JUÁREZ et al., 2007). Esses elementos justificam que a imputação não seja meramente geométrica (interpolação), mas probabilística e consistente com dinâmica temporal e sazonalidade (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). Uma vez imputada a série, ela passa a ser um insumo mais robusto para o planejamento fotovoltaico, mas ainda é fundamental conectar *recurso solar a energia gerada*.

A literatura de fotovoltaica descreve que a energia entregue por um sistema depende da irradiação no plano do gerador, da eficiência do módulo (dependente de temperatura e tecnologia), e de perdas agregadas em um fator de desempenho, por isso, o planejamento usa séries temporais para estimar produtividade, sazonalidade de geração, complementação com armazenamento ou geração térmica, e confiabilidade do suprimento (LUQUE; HEGEDUS, 2011; DUFFIE; BECKMAN, 2013). No caso amazônico, essa conexão aparece claramente em estudos que construíram cenários para aplicações fotovoltaicas e avaliaram rendimentos de geração na região (inclusive em contextos híbridos com diesel), enfatizando o uso de bases de dados e mapas de recurso solar para análise de viabilidade e planejamento energético (MARTINS et al., 2008b). O papel da imputação aqui é direto pois, se a série tem lacunas, a estimativa de médias sazonais, de mínimos críticos (meses de menor recurso) e de métricas de garantia pode ficar enviesada.

Ao se preencher os dados faltantes com o auxílio da suavização no espaço de estados, preserva-se a coerência temporal e se leva adiante uma medida explícita de incerteza que pode ser propagada para a energia estimada (DURBIN; KOOPMAN, 2012). Para que essa imputação seja defensável cientificamente no contexto do planejamento, algumas cautelas metodológicas merecem ser internalizadas ao longo do processo. Primeiro, deve-se investigar o mecanismo de

ausência pois, falhas podem ser aproximadamente aleatórias (por exemplo, panes pontuais) ou estruturadas (por exemplo, ausência sistemática em meses chuvosos por problemas de instrumentação). Segundo, o diagnóstico pós-ajuste é indispensável pois, resíduos padronizados e testes estatísticos de autocorrelação ajudam a verificar se o modelo capturou tendência e sazonalidade, evitando imputações que suavize demais a variabilidade real ou que deixe padrões remanescentes sistemáticos. Terceiro, quando houver acesso a múltiplas fontes (estações, reanálises, satélite), o espaço de estados pode ser estendido para formulações multivariadas ou de regressão dinâmica, permitindo que uma série mais completa auxilie a imputação de outra.

Essa lógica de modelagem dialoga com a literatura recente que discute comparação e predição de dados de irradiação em contexto amazônico e reforça a importância de avaliar fontes e modelos antes de decisões de engenharia (PALACIOS et al., 2024). Ao final, o objetivo não é *inventar* dados, mas reconstruir valores plausíveis e quantificar a incerteza de forma útil para decisão pública e privada, especialmente em uma região onde a substituição de combustíveis fósseis em sistemas isolados e a expansão de soluções distribuídas dependem fortemente de informação confiável sobre o recurso solar (MARTINS et al., 2008b; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

1.1 – Justificativa

O planejamento energético fotovoltaico depende, de forma direta, da qualidade com que se conhece o *recurso solar local*, isto é, o comportamento temporal da radiação solar disponível para conversão em eletricidade na região de interesse. Em termos práticos, as estimativas de geração, a escolha do porte do sistema (potência instalada e área de módulos), o dimensionamento de armazenamento (baterias) e a avaliação de risco de suprimento em sistemas isolados são todas sensíveis às estatísticas da série histórica de insolação/irradiação, sobretudo à sua sazonalidade, variabilidade interanual e ocorrência de períodos persistentemente baixos.

Obras de referência de engenharia fotovoltaica mostram que a energia produzida por sistemas fotovoltaicos é determinada, em primeiro nível, pela irradiância incidente (além de temperatura, perdas e eficiência), e que, por isso, séries temporais representativas e consistentes são essenciais para simulações de desempenho, estudos de confiabilidade e análises econômico-financeiras (DUFFIE; BECKMAN, 2013; LUQUE; HEGEDUS, 2011). Na região amazônica, essa dependência de dados confiáveis é ainda mais crítica. A dinâmica atmosférica equatorial,

a elevada nebulosidade e a forte participação da radiação difusa (em razão de nuvens e aerossóis) tornam o regime radiativo espacial e temporalmente complexo, com mudanças importantes entre períodos mais chuvosos e mais secos e com contrastes entre áreas do oeste e do leste amazônico.

Estudos realizados em sítios amazônicos mostram relações quantitativas entre fração de nuvens e fração de radiação difusa, evidenciando que a composição do fluxo radiativo varia com o estado atmosférico e que a caracterização local desse comportamento não pode ser tratada como detalhe secundário quando se deseja estimar com realismo a disponibilidade de energia solar (BUTT et al., 2010). Apesar disso, séries temporais observacionais provenientes de estações de superfície e de redes de monitoramento frequentemente apresentam lacunas por falhas instrumentais, manutenção, problemas de registro, interrupções de energia ou inconsistências de calibração.

Essas ausências não são inofensivas pois quando se calcula a média climatológica mensal, a variância, percentis (que capturam situações críticas) ou se constrói um ano meteorológico típico, a presença de valores faltantes pode distorcer as estatísticas e, consequentemente, induzir decisões de projeto equivocadas. A literatura de dados ausentes destaca que o impacto desses dados ausentes depende do mecanismo de ausência, e que ignorar esse aspecto pode introduzir viés e subestimar incertezas (RUBIN, 1976; LITTLE; RUBIN, 2019). Em termos de planejamento de sistemas fotovoltaicos, esse viés pode se materializar como superdimensionamento oneroso (quando se *pensa* que há menos sol do que realmente há) ou, mais gravemente, subdimensionamento e risco de déficit energético (quando as lacunas encobrem períodos persistentemente nublados).

É nesse ponto que a imputação por modelos no espaço de estados se torna especialmente relevante e metodologicamente coerente para séries de insolação. A formulação em espaço de estados representa a série observada por uma equação de observação (medida), ligada a componentes latentes que evoluem no tempo de acordo com uma equação de transição (estado). Essa estrutura é particularmente adequada para variáveis ambientais com padrões claros de tendência e sazonalidade, porque permite decompor o sinal em nível, inclinação, sazonalidade e ruído, tratando cada componente de forma explícita e probabilística (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). Na prática, o método oferece um *modelo gerador* da série pois, ele descreve como a insolação varia ao longo dos meses em torno de um ciclo sazonal e como perturbações de curto prazo (por exemplo, variações meteorológicas) se somam a esse ciclo.

A relevância da abordagem fica ainda mais evidente porque, em modelos lineares gaussianos no espaço de estados, a presença de observações faltantes é tratada de modo natural

no próprio algoritmo pois, quando um dado mensal está ausente, o filtro de *Kalman* simplesmente não realiza a etapa de atualização pela observação naquele instante, mas continua propagando a dinâmica do estado e sua incerteza, depois, o suavizador de *Kalman* usa toda a informação do passado e do futuro observados para reconstruir, de forma ótima no sentido de erro quadrático médio, os estados e os valores ausentes condicionados ao conjunto de dados disponível (KALMAN, 1960; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Em outras palavras, a imputação não é um *remendo* pontual, mas o resultado de uma inferência estatística consistente com a estrutura temporal do fenômeno. Isso reduz o risco de imputações que quebram a sazonalidade, achatam extremos ou criam saltos artificiais, problemas comuns em métodos determinísticos simples. Do ponto de vista do planejamento fotovoltaico amazônico, há um ganho decisivo adicional, pois, a imputação via espaço de estados fornece, junto com o valor imputado, uma medida de incerteza (variância/intervalos) para cada ponto reconstruído e para estimativas derivadas (por exemplo, médias sazonais e tendências). Em contextos de tomada de decisão, essa quantificação é tão importante quanto a média, porque permite transformar séries temporais em cenários de risco pois, pode-se avaliar, por exemplo, quão provável é que um sistema atinja determinado patamar de energia em meses críticos e como a incerteza se acumula na projeção de disponibilidade de recurso. Em regiões remotas da região amazônica, onde sistemas híbridos e microrredes têm alto custo de falha e elevada sensibilidade logística, planejar com intervalos de incerteza é uma forma de tornar o projeto mais resiliente e financeiramente defensável (DUFFIE; BECKMAN, 2013; LUQUE; HEGEDUS, 2011).

Desta forma, a relevância da imputação é também estratégica para estudos de potencial e para políticas de expansão da energia solar. Trabalhos de avaliação de cenários solares no Brasil mostram que a caracterização do recurso e sua variabilidade é etapa estruturante tanto para mapear potencial quanto para sustentar aplicações fotovoltaicas em diferentes regiões, incluindo áreas com maior complexidade atmosférica, como a faixa equatorial (MARTINS et al., 2008a; MARTINS et al., 2008b). Ao preencher lacunas de forma estatisticamente informada, preservando sazonalidade e variabilidade, o método do espaço de estados contribui para séries históricas mais comparáveis no tempo, melhora a base para calibração/validação de estimativas por sensoriamento remoto e fortalece o encadeamento entre dados observados e decisões de engenharia. Desta forma, conclui-se que imputar séries de insolação com espaço de estados não é apenas *completar a planilha*, trata-se de se reduzir o viés estatístico, explicitar incerteza e tornar mais robusto o planejamento fotovoltaico na região amazônica, onde a atmosfera impõe desafios adicionais e o custo de decisões subótimas tende a ser maior.

1.2 – Objetivo

O tema analisado pela presente monografia tem como principal objetivo explicitar a relevância da modelagem estatística de séries temporais mensais de insolação provenientes de estações meteorológicas convencionais, através da modelagem no espaço de estados, para fins de tomada de decisão relativas às atividades de planejamento energético fotovoltaico na região amazônica. A principal meta da presente monografia é demonstrar a aplicabilidade dos modelos estruturais de nível local e de tendência linear local, com componente sazonal clássica, na modelagem de séries temporais de insolação mensal média obtida por estação meteorológica convencional.

1.3 – Estrutura da monografia

A presente monografia encontra-se devidamente estruturada em cinco capítulos. No primeiro capítulo, se apresenta a relevância, justificativa, objetivo e meta da modelagem de séries temporais mensais de insolação, através do método do espaço de estados, para fins de planejamento energético fotovoltaico na região amazônica. No segundo capítulo, se apresenta de forma sucinta, a revisão bibliográfica pertinente ao desenvolvimento do tema proposto pela monografia. Dentre as principais definições apresentadas neste capítulo destacam-se, a estação meteorológica convencional, a grandeza meteorológica insolação, estimação do potencial de geração fotovoltaica pela insolação, os métodos de imputação de dados ausentes em séries temporais, a forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados, o modelo autoregressivo de média móvel (*ARMA*), o modelo de nível local de sazonalidade clássica, o modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente *ARMA*(1,1), o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica, o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente *ARMA*(1,1), o filtro e suavizador de *Kalman*, o método da máxima verossimilhança, os resíduos recursivos padronizados, as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, os testes estatísticos de *Ljung-Box* e de *Shapiro-Wilk* e o critério de informação Bayesiana de Schwartz (*BIC*). No terceiro capítulo se apresenta, o procedimento metodológico utilizado para se efetuar o ajuste dos modelos estruturais supracitados nos dados das séries temporais de insolação mensal utilizados neste estudo, uma breve descrição das funcionalidades básicas do pacote *statespacer* da linguagem *R* e uma breve descrição geral do perfil da insolação mensal média observada pela estação meteorológica convencional de Soure. No quarto capítulo, apresentam-se os resultados provenientes dos ajustes dos modelos

estruturais supracitados aos dados da série temporal de insolação mensal média da estação meteorológica da cidade de Soure. Por fim, no quinto e último capítulo, são apresentadas as conclusões obtidas através da aplicação do referido procedimento metodológico aos dados da série temporal de insolação mensal média da estação meteorológica da cidade de Soure.

2.0 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 – A estação meteorológica convencional

Uma estação meteorológica convencional pode ser entendida, em termos didáticos, como sendo um conjunto de instalações e instrumentos padronizados, operado em um ponto fixo do território, no qual as observações são realizadas de modo predominantemente manual por observadores treinados, em horários e rotinas definidos, com registros sistemáticos das variáveis atmosféricas e de superfície. A característica *convencional* está associada, sobretudo, ao modo de observação (humano e procedimental) e ao uso de instrumentos clássicos ou de leitura direta, ainda que uma estação possa incorporar sensores mais modernos sem perder a lógica operacional centrada na observação e no controle humano do processo. Na figura 1 apresenta-se o aspecto estrutural básico de uma estação meteorológica convencional.

Figura 1 – Aspecto estrutural básico de uma estação meteorológica convencional.



Fonte: <https://www.blogtecniquitel.com/estacao-meteorologica/>.

Em contraste, as estações automáticas se baseiam em sensores conectados a sistemas de aquisição e telemetria, ampliando a densidade espacial e a continuidade temporal das medições, mas exigindo igualmente padrões de instalação, calibração e garantia da qualidade para que os

dados sejam comparáveis e confiáveis (WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, 2008). Do ponto de vista técnico, a noção de *convencional* não se reduz a *ter* ou *não ter computador*, mas sim ao fato de que a observação meteorológica é organizada como um procedimento normatizado, ou seja, com instrumentos posicionados segundo requisitos de exposição, altura e afastamento de obstáculos, medições seguem métodos reconhecidos e os registros incluem metadados sobre o sítio e o entorno, pois qualquer mudança de ambiente (urbanização, desmatamento no entorno, troca de abrigo meteorológico, deslocamento do pluviômetro, entre outros) pode introduzir quebras de homogeneidade na série. A padronização internacional é justamente o mecanismo que permite comparar séries no tempo e no espaço e transformar uma leitura local em informação útil para aplicações climáticas e energéticas, porque define *como medir, onde medir e com que incerteza medir* (WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, 2008).

Em uma estação convencional típica voltada a observações de superfície, observa-se um núcleo de elementos meteorológicos essenciais, entre os quais se incluem temperatura do ar e umidade, pressão atmosférica, precipitação, direção e velocidade do vento, nebulosidade (quando observada visualmente), e frequentemente variáveis correlatas como evaporação, visibilidade e, quando disponível, indicadores de disponibilidade solar como duração do brilho solar e/ou radiação solar medida por instrumentos radiométricos. O ponto importante, para fins de planejamento fotovoltaico, é que mesmo quando a estação convencional não dispõe de piranômetro para medir irradiância global diretamente, ela ainda pode fornecer informações meteorológicas críticas que condicionam a geração elétrica, a variabilidade do recurso e a operação dos sistemas (WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, 2008).

A relevância dessas estações para o planejamento energético fotovoltaico decorre do fato de que projetos de geração solar dependem de estimativas robustas do recurso solar e de sua variabilidade, além de parâmetros meteorológicos que afetam desempenho e perdas. Em termos físicos e de engenharia, a energia gerada por um arranjo fotovoltaico é primariamente controlada pela irradiância incidente no plano do módulo, mas o rendimento instantâneo é sensível à temperatura de operação das células, que, por sua vez, depende não apenas da própria irradiância, como também da temperatura ambiente e das condições de convecção, nas quais o vento tem papel decisivo. Por isso, séries de temperatura e vento, mesmo sem medições radiométricas perfeitas, entram diretamente na modelagem de desempenho, na estimativa de eficiência sazonal e na quantificação de incertezas do projeto (DUFFIE; BECKMAN, 2013).

No contexto amazônico, essa importância se intensifica por três razões interligadas. A primeira é climática pois, a região amazônica apresenta elevada nebulosidade em grandes

porções do ano, forte sazonalidade hidrológica e regimes convectivos que alteram rapidamente a disponibilidade de irradiância direta, aumentando a participação relativa da irradiância difusa em muitas áreas e períodos. Essa condição modifica o perfil de geração diária e pode afetar escolhas de inclinação, orientação, tecnologias (por exemplo, respostas distintas a difusa) e estratégias de integração ao sistema elétrico (MARTINS et al., 2008). A segunda razão é de infraestrutura pois, em regiões extensas e de difícil acesso, a disponibilidade de medições de alta qualidade e longa duração costuma ser limitada, o que eleva o risco do pesquisador e dificulta análises de viabilidade técnico-econômica com níveis de confiança apropriados.

Em termos de planejamento, a ausência de dados confiáveis é reconhecida como um obstáculo central para viabilizar investimentos em energias renováveis, porque compromete a avaliação do recurso, sua variabilidade e os níveis de confiança associados às estimativas (MARTINS et al., 2008). A terceira razão é de ordem metodológica pois, muitas bases de dados de recurso solar usadas em planejamento (por exemplo, produtos derivados de satélite e modelos de transferência radiativa) precisam ser validadas e ajustadas com medições em superfície, desta forma, sem uma rede de estações e séries bem controladas, a calibração regional do recurso fica fragilizada e a incerteza espacial cresce, justamente onde o planejamento precisa escolher locais e dimensionamentos com maior precisão (MARTINS et al., 2008). Mesmo quando a estação convencional não mede irradiância global com radiômetros, a variável *duração do brilho solar* pode desempenhar papel estratégico. Historicamente, ela foi registrada em muitas redes meteorológicas por instrumentos como o heliógrafo *Campbell–Stokes* e, embora a instrumentação e os critérios de leitura possam ter mudado ao longo do tempo (o que exige cautela na homogeneidade), essas séries longas são valiosas porque se relacionam empiricamente com a radiação solar global por meio de modelos clássicos, entre os quais se destaca a relação de *Ångström–Prescott*, frequentemente usada para estimar radiação a partir de insolação (no sentido de duração do brilho solar) quando não há radiometria contínua disponível (MATUSZKO, 2015; MEDEIROS et al., 2017).

Em termos práticos para a região amazônica, isso significa que estações convencionais podem sustentar séries climatológicas de longo prazo capazes de alimentar estimativas regionais do recurso, apoiar a construção de *anos meteorológicos típicos* e fornecer referência observacional para checagem de produtos de satélite, reduzindo-se as incertezas em estudos de viabilidade energética. Desta forma, observa-se que uma estação meteorológica convencional é relevante para o planejamento fotovoltaico amazônico não apenas como fonte de dados, mas como uma infraestrutura de observação que ancora a qualidade do conhecimento climático-energético regional.

Ao fornecer séries padronizadas de variáveis atmosféricas e de superfície (incluindo, quando disponível, indicadores diretos ou indiretos de disponibilidade solar) ela permite caracterizar sazonalidade, variabilidade e extremos (dias persistentemente nublados, ondas de calor, períodos de calmaria de vento que elevam temperatura de módulo), elementos indispensáveis para dimensionamento, estimativa de produtividade e análise de risco. Além disso, ao seguir padrões internacionalmente acordados de observação e gestão da qualidade, a estação convencional contribui para que os dados sejam comparáveis no tempo e no espaço, condição que sustenta a confiabilidade de modelos, mapas e cenários usados por planejadores, pesquisadores e investidores no planejamento, instalação e expansão dos sistemas fotovoltaicos na região amazônica (WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION, 2008; DUFFIE; BECKMAN, 2013; MARTINS et al., 2008).

2.2 – A grandeza meteorológica insolação

A grandeza meteorológica denominada de *insolação* é, em termos observacionais, uma medida do tempo (geralmente expresso em *horas*) em que a superfície recebe luz solar direta ao longo de um dia. Na climatologia operacional, a definição formal mais adotada para esse conceito considera insolação como a soma dos intervalos de tempo em que a irradiância solar direta na superfície atinge ou supera um limiar (tipicamente de 120 W/m^2), de modo que a variável deixa de ser uma noção subjetiva de *dia ensolarado* e passa a ser um quantitativo padronizado e comparável entre lugares e períodos. Essa padronização é relevante porque a insolação é sensível, sobretudo, ao ciclo diário e sazonal de nebulosidade, à presença de aerossóis e à transparência atmosférica, elementos que controlam a disponibilidade de radiação solar direta e, portanto, a variabilidade do recurso solar na região de interesse.

Do ponto de vista instrumental, a insolação foi historicamente medida, em muitas redes meteorológicas, por meio do heliógrafo *Campbell–Stokes*, um equipamento que registra a presença de Sol pela marca (queima) produzida por focalização da luz solar em uma fita apropriada, permitindo contabilizar o total diário de horas de brilho solar. O aspecto físico de um heliógrafo de *Campbell–Stokes* é apresentado na figura 2. Estudos comparativos discutem que esse método manual, e de longa tradição, vem sendo progressivamente substituído por sensores automáticos (por exemplo, arranjos ópticos e radiométricos), o que exige cuidado com a homogeneidade das séries quando se deseja comparar tendências de longo prazo, justamente porque instrumentos diferentes podem responder de modo distinto em condições de céu parcialmente nublado e em transições entre Sol e sombra.

Figura 2 – Aspecto estrutural básico de um heliógrafo de *Campbell-Stokes*.



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Campbell-Stokes_recorder.jpg.

Em contextos brasileiros de estações convencionais, é comum a coexistência de séries longas de insolação por heliógrafo, ao passo que a radiação solar global (quando medida) depende de instrumentação radiométrica específica, mais cara e com exigências de calibração e manutenção. Essa distinção é central para o planejamento fotovoltaico pois módulos fotovoltaicos convertem energia a partir da radiação solar incidente (irradiância/irradiação), e não diretamente a partir da insolação (que é *tempo de brilho*).

Ainda assim, a insolação é frequentemente tratada como uma espécie de *aproximação operacional* do recurso solar, porque guarda relação física e estatística com a radiação solar global diária em superfície. Por isso, quando não há medições radiométricas suficientes, é prática consolidada estimar a radiação global a partir da insolação por meio de relações empíricas do tipo *Ångström–Prescott*, que conectam a fração de radiação global à fração de insolação (razão entre insolação observada e insolação máxima possível no topo da atmosfera para aquele dia e latitude). Essa abordagem, tornou-se um *caminho de engenharia* para reconstruir séries de radiação onde apenas a insolação foi registrada. Evidências empíricas em diferentes regiões brasileiras sustentam essa prática pois, trabalhos de calibração destacam que

a radiação solar não é medida com resolução espaço-temporal adequada em muitas áreas e que, por isso, a insolação, com registros mais longos, pode ser usada como entrada para estimar radiação global, desde que haja calibração local dos parâmetros.

Na região amazônica, a relevância da insolação para o planejamento energético fotovoltaico se intensifica por três razões interligadas, são elas, a variabilidade atmosférica, as lacunas observacionais e a necessidade de confiabilidade no dimensionamento. Primeiramente, a região amazônica apresenta um regime de nebulosidade e precipitação que impõe forte sazonalidade ao brilho solar, no norte do Brasil, a disponibilidade de radiação em superfície é modulada por padrões de nuvens e, em parte do ano, também por aerossóis associados a queimadas, com impacto na transparência atmosférica e na partição entre radiação direta e difusa. Isso é particularmente importante para sistemas fotovoltaicos porque a produção elétrica, o fator de capacidade e a necessidade de armazenamento dependem de como o recurso solar oscila entre estação chuvosa e menos chuvosa. Em paralelo, medições mostram que a relação entre fração de nuvens e radiação difusa pode assumir regimes diferentes em sítios amazônicos, afetando a composição do recurso solar ao longo do ano e, portanto, a resposta energética de tecnologias fotovoltaicas.

Em segundo lugar, a realidade de rede observacional desigual torna a insolação um dado frequentemente mais disponível do que a própria radiação global medida por piranômetros. Logo, a insolação, quando bem controlada e interpretada, funciona como uma espécie de *ponte* entre o que a estação convencional consegue medir historicamente e o que o planejador energético precisa para simular geração, sazonalidade e incerteza. Em terceiro lugar, na região amazônica há grande presença de sistemas isolados e localidades onde soluções híbridas são estrategicamente relevantes. Discussões sobre aplicações fotovoltaicas no Brasil ressaltam justamente o papel dos referidos sistemas para o atendimento de demandas em áreas remotas, onde logística e custo de combustível tornam o planejamento energético particularmente sensível a erros de estimativa do recurso solar. Nesses cenários, séries confiáveis de insolação (e de radiação estimada a partir dela) são valiosas para reduzir superdimensionamentos custosos e, ao mesmo tempo, evitar subdimensionamentos que comprometam continuidade de serviço.

É justamente nesse ponto que a insolação também se conecta, de maneira prática, à necessidade de completar e qualificar séries temporais. Para estudos de planejamento, não basta ter valores médios, é desejável ter séries consistentes (diárias ou mensais) para calcular sazonalidade, probabilidades de déficit e desempenho esperado. Em regiões onde falhas de observação são comuns, modelos de espaço de estados oferecem uma justificativa metodológica forte porque tratam tendência e sazonalidade como componentes latentes e incorporam, de

forma natural, procedimentos de filtragem e suavização de *Kalman* que lidam naturalmente com dados ausentes, permitindo imputação probabilística e quantificação de incerteza (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Essa lógica é particularmente útil quando a insolação é a variável com maior histórico, pois permite reconstruir séries coerentes com o ciclo anual local, entregando insumos mais robustos para converter insolação em radiação e, finalmente, em energia (DUFFIE; BECKMAN, 2013).

Por fim, vale-se ressaltar que, além das estações, existem avanços em estimativas por satélite de insolação para o território brasileiro, com validação frente a medições *in loco* e desempenho considerado, em geral, adequado, embora com variações regionais. Para a região amazônica, onde a representatividade espacial de estações pode ser limitada, esses produtos podem complementar a análise, seja para checagem de consistência, seja para apoiar regionalizações e interpolação de parâmetros, desde que o planejador trate cuidadosamente vieses e diferenças sazonais. Desta forma, conclui-se que a insolação é uma variável meteorológica que quantifica, de maneira padronizada, o tempo de brilho solar direto e, por isso, captura de forma sensível o *efeito integrado* de nuvens e transparência atmosférica. Na região amazônica, onde a variabilidade de nebulosidade, o papel de aerossóis e as lacunas de medição radiométrica são determinantes, séries de insolação bem tratadas (incluindo reconstrução/imputação quando necessário por modelos de espaço de estados) tornam-se um insumo estratégico para estimar radiação, simular geração e reduzir incertezas no dimensionamento e na operação de sistemas fotovoltaicos, especialmente em aplicações isoladas e híbridas.

2.3 – Estimação do potencial de geração fotovoltaica pela insolação

A estimativa do potencial de geração fotovoltaica de uma localidade a partir de uma série temporal de insolação obtida por uma estação meteorológica convencional exige, antes de tudo, uma distinção conceitual importante. Nas estações convencionais, a variável tradicionalmente registrada como insolação não corresponde diretamente à irradiância solar medida em watt por metro quadrado, mas ao tempo de brilho solar, isto é, ao número de horas em que a radiação solar direta supera um determinado limiar e efetivamente caracteriza a presença de sol brilhante. Em séries históricas longas, esse dado costuma ser obtido por heliógrafos de *Campbell-Stokes*, e representa uma informação extremamente valiosa porque, mesmo não sendo uma medida direta da energia radiante incidente, preserva a variabilidade sazonal e interanual da disponibilidade solar.

Por essa razão, a literatura clássica de radiação solar e engenharia fotovoltaica ensina que o caminho metodológico adequado não consiste em converter mecanicamente horas de insolação em quilowatt-hora de eletricidade, mas em percorrer uma sequência de estimações físicas e empíricas, primeiro transforma-se a insolação em radiação solar global incidente, depois ajusta-se essa radiação ao plano inclinado dos módulos e por fim, converte-se o recurso solar estimado em energia elétrica esperada do sistema fotovoltaico (DUFFIE; BECKMAN, 2013; IQBAL, 1983; MESSENGER; VENTRE, 2004; VIVAR et al., 2014; OWCZAREK; MALINOWSKA, 2023).

Do ponto de vista prático, o primeiro passo consiste em organizar a série temporal de insolação da estação. Se os dados estiverem em base diária, o ideal é trabalhar inicialmente com valores diários e, depois, agregá-los em médias mensais ou totais anuais. Se a série já estiver disponível em base mensal, como frequentemente ocorre em estudos climatológicos, utiliza-se a insolação média mensal diária, isto é, o número médio de horas de brilho solar por dia em cada mês. Em seguida, devem ser verificados os aspectos básicos de qualidade da série, como homogeneidade, falhas, possíveis mudanças de instrumento e coerência sazonal, porque a confiabilidade da estimativa da geração fotovoltaica depende fortemente da consistência dessa série de entrada.

A literatura também mostra que o aproveitamento energético solar pode ser expresso de duas formas distintas, embora complementares, como recurso solar do local, geralmente em kWh/m^2 por dia, mês ou ano, e como produtividade fotovoltaica específica, normalmente em $kWh/kWp.ano$, que já relaciona o recurso solar às características de um sistema fotovoltaico padrão. Essa distinção é didaticamente importante, porque a série de insolação permite estimar primeiro o recurso solar, somente depois é que se obtém a geração elétrica de um sistema real ou hipotético (DUFFIE; BECKMAN, 2013; IQBAL, 1983; MESSENGER; VENTRE, 2004).

O segundo passo é calcular as grandezas astronômicas que servem de ponte entre o tempo de brilho solar observado e a radiação solar potencial disponível no topo da atmosfera. Para cada dia do ano, ou para o dia médio representativo de cada mês, calculam-se o comprimento máximo do dia, geralmente indicado por N , e a radiação extraterrestre diária em plano horizontal, geralmente indicada por H_0 ou R_a . Essas quantidades dependem da latitude da localidade e da geometria Sol-Terra, expressa por variáveis como a declinação solar, a distância relativa Terra-Sol e o ângulo horário ao pôr do sol. Em termos didáticos, a variável N representa o máximo de horas de sol possível naquele dia se não houvesse obstrução atmosférica por nuvens ou aerossóis, enquanto que H_0 representa a energia solar teoricamente disponível acima da atmosfera. A razão n/N , em que n é a insolação observada, expressa a fração do brilho solar

efetivamente registrada em comparação com o máximo astronômico possível, já a razão H/H_0 , em que H é a radiação global na superfície, expressa a transmissividade média da atmosfera. É precisamente nessa relação entre a fração de brilho solar e a fração de radiação global que se baseia o método mais clássico de estimação do recurso solar em localidades que não dispõem de piranômetros (DUFFIE; BECKMAN, 2013; IQBAL, 1983).

O método mais consagrado para essa conversão é a equação de *Ångström-Prescott*, derivada da formulação original proposta por *Ångström* e posteriormente reformulada por *Prescott*. Em sua forma mais difundida, escreve-se $H/H_0 = a + b(n/N)$, em que H é a radiação global diária média sobre superfície horizontal, H_0 é a radiação extraterrestre diária, n é a duração observada do brilho solar, N é a duração máxima possível do dia, e a e b são coeficientes empíricos que dependem das condições atmosféricas e climáticas da localidade. A lógica física dessa equação é simples e elegante, quanto maior for a razão n/N , maior tende a ser a razão H/H_0 , pois maior foi a fração do dia em que a atmosfera permitiu a passagem da radiação direta. Em termos metodológicos, isso significa que uma longa série de insolação pode ser transformada em uma série estimada de radiação solar global, desde que os coeficientes sejam adequadamente escolhidos. A literatura mostra, contudo, que esses coeficientes não devem ser tomados como universais sem verificação local, pois variam com nebulosidade, altitude, umidade, aerossóis e outras características regionais, por isso, sempre que houver disponibilidade de alguma série simultânea de radiação medida em local próximo, recomenda-se calibrar localmente a equação para melhorar a confiabilidade da estimativa (ÅNGSTRÖM, 1924; PRESCOTT, 1940; ALMOROX; HONTORIA, 2004; MEDEIROS; SANTOS E SILVA; BEZERRA, 2017).

2.4 – Métodos de imputação de dados ausentes em séries temporais

Em séries temporais, a imputação de dados ausentes não deve ser entendida apenas como o ato de *preencher vazios* na base de dados. Em sentido estatístico, trata-se de reconstruir valores não observados sem comprometer propriedades que dão identidade à série, como dependência temporal, tendência, sazonalidade, ciclos e variabilidade local. Por isso, a literatura distingue o problema das ausências em séries temporais daquele encontrado em dados transversais: quando se perde uma observação no tempo, perde-se também uma posição na dinâmica do processo, e isso pode afetar tanto a descrição quanto a previsão e a inferência. Antes de escolher um método, é necessário avaliar o mecanismo de ausência, tradicionalmente classificado como ausência completamente ao acaso, ausência ao acaso e ausência não ao acaso,

bem como o padrão das lacunas, isto é, se elas são isoladas, consecutivas, curtas, longas, univariadas ou distribuídas em várias séries relacionadas. Essa etapa é decisiva porque a adequação do método depende não apenas do percentual de dados ausentes, mas também da razão pela qual eles faltam e do papel que a observação perdida exerce na estrutura temporal do fenômeno estudado (LITTLE; RUBIN, 2019; SCHAFER; GRAHAM, 2002).

Os métodos mais simples de imputação são os determinísticos e locais, isto é, aqueles que substituem o valor ausente com base em uma regra mecânica de fácil aplicação. Nessa classe aparecem procedimentos como a substituição pela média, o carregamento da última observação disponível, o carregamento da observação seguinte, a interpolação e o uso de médias móveis. Essas técnicas costumam ser atraentes em aplicações operacionais porque são simples, rápidas e transparentes, mas sua simplicidade cobra um preço metodológico pois, quando empregadas sem critério, podem suavizar excessivamente a série, reduzir artificialmente a variabilidade e enfraquecer a estrutura de autocorrelação. A literatura sobre dados ausentes é particularmente crítica em relação à substituição pela média, porque, embora ela preserve o valor médio da variável, altera outras características distributivas importantes, como a variância e as correlações. Em termos didáticos, isso significa que um preenchimento aparentemente *inofensivo* pode produzir uma série mais estável do que a realidade, induzindo o pesquisador a conclusões excessivamente otimistas sobre ajuste e previsibilidade (SCHAFER; GRAHAM, 2002; MORITZ; BARTZ-BEIELSTEIN, 2017).

Entre esses métodos simples, a interpolação ocupa lugar de destaque, especialmente quando as falhas são poucas e isoladas. A ideia central é construir um valor intermediário coerente com os pontos vizinhos já observados. A interpolação linear é a forma mais conhecida, mas a literatura aplicada também utiliza versões polinomiais, splines e variantes baseadas em suavização local. Em séries relativamente suaves e com pequenas lacunas, a interpolação tende a produzir resultados razoáveis, pois respeita a continuidade temporal imediata. Contudo, quanto mais extensa for a sequência ausente, menor será a credibilidade do valor imputado, porque a informação usada para reconstruí-lo passa a vir de pontos cada vez mais distantes. Em outras palavras, a interpolação funciona melhor como correção pontual de pequenas falhas do que como estratégia para reconstituir trechos longos de uma trajetória temporal complexa. A própria literatura aplicada sobre imputação em séries temporais apresenta a interpolação como um método útil, mas pertencente ao grupo das imputações simples, que precisam ser escolhidas com cautela quando a série possui sazonalidade forte ou dinâmica autorregressiva pronunciada (MORITZ; BARTZ-BEIELSTEIN, 2017; HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2021).

Quando a série apresenta sazonalidade clara, uma alternativa mais adequada consiste em imputar após decompor o sinal em componentes como tendência, sazonalidade e resíduo. Nessa abordagem, em vez de preencher diretamente a série bruta, o pesquisador separa o comportamento sistemático periódico do restante da dinâmica e só então reconstrói o valor ausente, recombina depois os componentes. A vantagem didática desse raciocínio é evidente pois, se a série possui um padrão sazonal estável, não faz sentido imputar um mês de dezembro ignorando o fato de que dezembro costuma se comportar de maneira distinta de abril ou agosto. Métodos desse tipo são especialmente úteis em dados meteorológicos, econômicos e de demanda, nos quais a repetição sazonal é parte essencial da estrutura do processo. Por essa razão, a literatura aplicada de séries temporais e os compêndios de previsão destacam a decomposição e suas extensões robustas como instrumentos relevantes tanto para diagnóstico quanto para tratamento de valores faltantes em contextos sazonais (HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2021; MORITZ; BARTZ-BEIELSTEIN, 2017).

Um passo além dos métodos simples é dado pelos métodos baseados em modelos autorregressivos e de médias móveis, especialmente os modelos *ARIMA* e *SARIMA*. Nesses casos, a imputação decorre de uma modelagem explícita da dependência serial pois, o valor ausente é estimado a partir da estrutura temporal inferida dos dados observados. Esse tipo de procedimento é conceitualmente superior às regras puramente mecânicas porque reconhece que o valor faltante pertence a um processo estocástico com memória, e não a uma sequência arbitrária de números. A literatura clássica mostra, há décadas, que modelos *ARMA* e *ARIMA* podem ser ajustados mesmo na presença de observações ausentes, com obtenção de estimativas por máxima verossimilhança e posterior interpolação dos pontos não observados. Em aplicações práticas, isso significa que a imputação deixa de ser uma mera substituição e passa a ser uma consequência do modelo que descreve a série. Em linguagem simples, preenche-se o dado ausente com o valor que melhor se harmoniza com a dinâmica estatística da série, e não apenas com os vizinhos imediatos (JONES, 1980; HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2021).

Ainda mais robusta é a imputação realizada no contexto de modelos no espaço de estados e do filtro e suavizador de *Kalman*. Nessa família, a série observada é entendida como manifestação parcial de componentes latentes, como nível, tendência, sazonalidade e ruído. A literatura clássica de espaço de estados enfatiza que observações ausentes são tratadas de forma particularmente natural nesse enquadramento, justamente porque o modelo já separa o processo latente do mecanismo de observação. Nessa lógica, a ausência de um ponto não interrompe necessariamente a análise; ela pode ser acomodada pelo filtro de *Kalman*, e a reconstrução posterior pode ser refinada pelo suavizador. Outra vantagem importante é que a previsão pode

ser tratada como caso particular de observação ausente, o que revela a profunda conexão entre imputar e prever em séries temporais. Por isso, modelos estruturais como nível local, tendência linear local e componentes sazonais clássicos são amplamente recomendados quando a meta é imputar preservando a forma global da série e sua interpretação substantiva (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY; PIERSE, 1984).

2.5 – Forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados

A forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados representa uma estrutura unificadora capaz de abarcar uma ampla gama de modelos estatísticos aplicados à análise de séries temporais. Sua relevância decorre do fato de que, ao invés de se restringir a modelos específicos, tais como os *ARMA*, a formulação em espaço de estados oferece um arcabouço flexível em que diferentes processos podem ser expressos e estimados por meio de equações matriciais, possibilitando a utilização de algoritmos recursivos, como o filtro e o suavizador de *Kalman*, para inferência, previsão e imputação de dados faltantes (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Um modelo linear em espaço de estados é definido, em sua forma geral, por duas equações fundamentais, a equação de estado e a equação de observação. A equação de estado descreve a dinâmica temporal dos estados latentes do sistema, já a equação de observação estabelece a relação entre a variável observada (medida) e os estados latentes do sistema. As mesmas são expressas, respectivamente, pelas equações (1) e (2) abaixo apresentadas:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (1)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (2)$$

Na equação (1) a variável α_t representa o vetor de estados não observados, a variável $\mathbb{T}_t$ representa a matriz de transição dos estados, a variável $\mathbb{R}_t$ representa uma matriz de controle que ajusta a dimensão do ruído de estado e a variável η_t representa o vetor de perturbações estocásticas do estado, considerado como tendo distribuição de probabilidade normal (Gaussiana) com média zero e variância $\mathbb{Q}_t$. Já na equação (2) a variável y_t representa o vetor de observações no instante de tempo t , a variável $\mathbb{Z}_t$ representa a matriz de observação, que mapeia os estados para as observações, a variável α_t representa o vetor de estados não observados e a variável ϵ_t representa o erro de observação, considerado como tendo distribuição de probabilidade normal com média zero e variância H_t . Essa formulação estabelece a base

para uma classe muito ampla de modelos, permitindo incluir tendências, sazonalidades, ciclos, variáveis exógenas e até ruídos correlacionados no tempo (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). A generalidade da forma linear no espaço de estados se revela na possibilidade de encapsular tanto modelos clássicos da estatística de séries temporais quanto modelos mais complexos.

Da mesma maneira, modelos estruturais, como os que decompõem uma série em nível, tendência, sazonalidade e ciclos estocásticos, são diretamente formulados na estrutura do espaço de estados. Além disso, a inclusão de variáveis exógenas pode ser tratada por meio de componentes adicionais no vetor de estados, expandindo a aplicabilidade a contextos multivariados e dinâmicos, conforme a necessidade do ajuste do modelo (HARVEY, 1989; COMMANDEUR; KOOPMAN, 2007). Um aspecto didático importante é compreender que, embora o modelo seja chamado de linear em espaço de estados, essa linearidade se refere à relação entre estados e observações e à evolução dos estados.

A distribuição dos erros de observação, e de estado, é geralmente assumida normal, mas a estrutura pode ser estendida para distribuições não gaussianas, originando os chamados *modelos lineares generalizados em espaço de estados*, nos quais a ligação entre estados e observações pode ser mediada por funções de ligação próprias a variáveis binárias, de contagem ou categóricas. Essa extensão amplia consideravelmente o leque de aplicações, incluindo epidemiologia, econometria e climatologia, onde variáveis não contínuas desempenham papel fundamental na modelagem estatística do fenômeno de interesse (SHUMWAY; STOFFER, 2017). Na prática, a grande vantagem da formulação generalizada em espaço de estados está na utilização do filtro de *Kalman* para estimação recursiva dos estados latentes. Esse algoritmo oferece previsões univariadas, ou multivariadas, com base em toda a informação disponível até o instante de tempo $t - 1$, atualizando-as conforme novas observações chegam, o que é particularmente útil em contextos em tempo real, como previsão de séries financeiras ou monitoramento meteorológico.

O suavizador de *Kalman*, por sua vez, incorpora informação de toda a série para produzir estimativas mais precisas dos estados ao longo do tempo, sendo essencial para imputação de dados ausentes e análise retrospectiva (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Essa característica torna o espaço de estados um paradigma natural não apenas para análise histórica, mas também para previsão e controle. Desta forma, observa-se que a forma generalizada de modelos lineares em espaço de estados constitui num dos desenvolvimentos mais importantes da estatística de séries temporais moderna, ao proporcionar um enquadramento unificado, flexível e computacionalmente eficiente para lidar com problemas que vão desde a simples

previsão de curto prazo, até a análise complexa de sistemas dinâmicos multivariados. Sua didática reside no fato de que, com apenas duas equações matriciais, é possível representar uma imensa variedade de processos temporais, fornecendo uma linguagem matemática clara e consistente para a análise, previsão e imputação de séries temporais em diferentes áreas do conhecimento (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

2.6 – O modelo autorregressivo de média móvel

O modelo autorregressivo de média móvel, usualmente abreviado como *ARMA* (do inglês, *Autoregressive Moving Average*), é uma classe de modelos estocásticos para séries temporais que descreve um processo como resultado de duas ideias complementares, sendo a primeira, que o valor atual da série pode ser explicado, em parte, por uma combinação linear de seus próprios valores passados, denominado de componente autorregressiva, usualmente abreviada como *AR* (do inglês, *Autoregressive*) e a segunda, que o valor atual também pode ser explicado por uma combinação linear de choques aleatórios ocorridos no presente e no passado, denominado de componente de média móvel, usualmente abreviada como *MA* (do inglês, *Moving Average*).

Essa construção é particularmente apropriada quando se modela uma série que, após eventuais transformações e remoção de tendência/sazonalidade, pode ser tratada como aproximadamente estacionária no sentido de média e covariância constantes ao longo do tempo (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Para compreendermos as características construtivas de um modelo *ARMA* do ponto de vista didático, devemos começar pelos seus *blocos construtivos*, são eles, o modelo autorregressivo (*AR*) e o modelo de média móvel (*MA*). Um modelo autorregressivo de ordem p , denotado por $AR(p)$, é descrito pela seguinte equação:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Na equação acima apresentada a variável X_t representa a variável aleatória que representa a série no instante de tempo t , a variável ϕ_0 representa um termo constante (geralmente denominado de *intercepto*) e as variáveis $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ representam os parâmetros autorregressivos (coeficientes) que medem quanto cada defasagem X_{t-i} contribui para explicar a variável aleatória X_t . A variável ε_t representa o termo de erro no instante de tempo t . Na formulação clássica, a variável ε_t é assumida como um ruído branco, isto é, uma sequência com

média zero, variância constante variável σ^2 e ausência de autocorrelação, muitas vezes assumida ainda como normal e identicamente distribuída para se facilitar o processo de inferência estatística (BOX et al., 2015; HAMILTON, 1994). O modelo $AR(p)$ é interpretado como sendo um modelo estocástico que tenta *prever* o presente a partir do passado, e o que não é explicado por essa combinação linear é representado pelo termo de erro ε_t . Já um modelo de média móvel de ordem q , denotado por $MA(q)$, é descrito pela seguinte equação:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4)$$

Na equação acima apresentada a variável μ representa a média do processo aleatório, as variáveis $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ são os parâmetros de média móvel e a variável ε_t representa, novamente, um ruído branco com variância σ^2 . Note que no modelo $MA(q)$, o passado entra não por meio das variáveis X_{t-i} , mas por meio de choques passados ε_{t-i} . Isso representa um mecanismo em que um choque aleatório não afeta apenas o instante em que ocorre, ele *se espalha* por alguns períodos e depois desaparece, porque a soma vai apenas até q defasagens (BROCKWELL; DAVIS, 2016; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Desta maneira, combinando-se o modelo $AR(p)$ com o modelo $MA(q)$ chega-se ao modelo $ARMA(p,q)$. O mesmo é definido através da seguinte equação:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (5)$$

Na equação acima apresentada as variáveis mantem exatamente os mesmos significados dos modelos $AR(p)$ e $MA(q)$, ou seja, a variável X_t representa a série temporal, a variável c representa o intercepto, os coeficientes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ controlam o efeito das defasagens da própria série e os coeficientes $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ controlam o efeito de choques atuais e passados, e a variável ε_t representa o ruído branco com variância σ^2 . Em termos intuitivos, o modelo $ARMA(p,q)$ modela simultaneamente uma persistência *estrutural* da série (capturada pelo modelo AR) e uma persistência *transitória* de choques (capturada pelo modelo MA) (BOX et al., 2015; HAMILTON, 1994). Muitas vezes é mais claro escrever o modelo $ARMA(p,q)$ em torno da média $\mu = \mathcal{E}[X_t]$, usando a série centrada $X_t - \mu$. Uma forma equivalente bastante usada é definida na seguinte equação:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (6)$$

Nessa parametrização, a média μ aparece explicitamente. Se a versão com intercepto c for usada, a relação entre c e μ (quando o processo é estacionário) é dada pela seguinte equação:

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \quad (7)$$

Essa relação decorre de se aplicar o operador *valor esperado* em ambos os lados do modelo $ARMA(p,q)$ e se considerar que $\mathcal{E}[\varepsilon_t] = 0$ (BROCKWELL; DAVIS, 2016; HAMILTON, 1994). Uma notação especialmente elegante utiliza o chamado *operador defasagem* (ou *operador de atraso*) B , definido por $BX_t = X_{t-1}$ e, em geral, $B^k X_t = X_{t-k}$. Com esse operador, define-se o polinômio autorregressivo pela seguinte equação:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (8)$$

De forma similar, com o auxílio do referido operador define-se o polinômio de média móvel pela seguinte equação:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q \quad (9)$$

Desta forma o modelo $ARMA(p,q)$ pode ser representado, de forma compacta, através da seguinte equação:

$$\phi(B)(X_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t \quad (10)$$

Essa forma evidencia que o processo estocástico pode ser obtido ao se filtrar um ruído branco ε_t por um filtro racional $\theta(B)/\phi(B)$, o que é uma visão central em teoria de séries temporais (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Para que um determinado modelo $ARMA(p,q)$ seja adequado como modelo de uma série temporal estacionária, são fundamentais a manifestação de duas propriedades, são elas, a *estacionariedade* (associada ao componente AR) e a *invertibilidade* (associada ao componente MA). A estacionariedade fraca do modelo $ARMA(p,q)$ é garantida quando as raízes do polinômio $\phi(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, isto é, quando $\phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. Intuitivamente, isso impede que a influência de choques passados cresça sem limite, assegurando que a média e as covariâncias existam e sejam constantes ao longo do tempo. A invertibilidade, por sua vez, é garantida quando as raízes de $\theta(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, isto é, quando $\theta(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. A invertibilidade é importante porque permite reescrever o modelo $MA(q)$ como uma representação AR infinita

e, mais crucialmente, garante que o termo de erro ε_t possa ser recuperado unicamente a partir de X_t , evitando múltiplas parametrizações diferentes para o mesmo processo observado (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016; HAMILTON, 1994).

Essas condições também ajudam a entender a assinatura de dependência temporal de um modelo *ARMA*. Para um modelo *MA*(q), a função de autocorrelação (*ACF*) é exatamente zero para defasagens maiores que q , porque o processo depende de um número finito de choques passados. Já para um modelo *AR*(p), a *ACF* tende a decair gradualmente (muitas vezes de forma aproximadamente exponencial ou oscilatória amortecida), enquanto a função de autocorrelação parcial (*PACF*) corta após p defasagens. Para um modelo *ARMA*(p, q), tanto a *ACF* quanto a *PACF* tendem a decair gradualmente, já que o processo combina mecanismos de memória nos valores e nos choques (BOX et al., 2015; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Essa leitura é importante na prática, porque orienta a identificação inicial de p e q em procedimentos clássicos de modelagem. Por fim, é comum destacar que o modelo *ARMA*(p, q) é um modelo que explica o presente como combinação linear do passado da própria série e do passado de choques aleatórios, oferecendo uma base matemática clara e operacional para previsão, simulação e análise da estrutura de dependência temporal de uma determinada série temporal de interesse prático (BOX et al., 2015; HAMILTON, 1994; BROCKWELL; DAVIS, 2016).

2.7 – O modelo de nível local com componente sazonal

O modelo estrutural de nível local com componente sazonal é uma abordagem própria para a análise de séries temporais que é amplamente utilizada na análise de dados meteorológicos, pois permite separar a série observada em partes que possuem significado físico direto. De acordo com Harvey (1990) e Durbin e Koopman (2012), essa formulação modela a série em um arcabouço de espaço de estados, no qual cada componente é tratada como um processo latente que evolui ao longo do tempo, oferecendo interpretação clara e flexibilidade para lidar com mudanças graduais no comportamento dos dados da série temporal sob análise.

A primeira componente é o nível local, que representa o comportamento médio de longo prazo da série. Ele não é fixo, mas evolui suavemente, permitindo captar alterações estruturais na atmosfera, como tendências associadas a variações climáticas, mudanças no regime térmico ou processos de aquecimento gradual. Esse caráter estocástico é essencial em meteorologia, onde a média verdadeira do processo raramente permanece constante ao longo do tempo. A segunda componente é a sazonalidade, que captura os padrões de repetição regulares típicos

das variáveis meteorológicas. Em dados mensais, corresponde ao ciclo anual, em dados diários, ao ciclo diário e em dados horários, à variação intradiária. Essa componente permite representar efeitos como estação seca e chuvosa, variações anuais de temperatura ou ciclos de radiação solar.

Como enfatizado por Durbin e Koopman (2012), a sazonalidade no modelo estrutural é suficientemente flexível para acomodar pequenas variações no padrão sazonal entre ciclos, algo indispensável em fenômenos sujeitos a variabilidade climática. A terceira componente é o ruído irregular, que concentra toda a variabilidade não explicada pelo nível ou pela sazonalidade. Em meteorologia, esse termo frequentemente agrega efeitos de curta duração, como eventos extremos, perturbações abruptas, erros de medição e flutuações atmosféricas de pequena escala. Ele permite que o modelo represente a imprevisibilidade inerente do sistema climático sem comprometer a interpretação das demais componentes.

A combinação dessas três partes torna o modelo especialmente útil para séries meteorológicas, pois possibilita acompanhar simultaneamente a evolução do comportamento médio, o padrão cíclico e a variabilidade aleatória. Além disso, a estrutura em espaço de estados oferece robustez frente a dados faltantes, mudanças graduais de regime e necessidade de atualização em tempo real por meio do filtro de *Kalman*. Desta forma, observa-se que o modelo estrutural de nível local com componente sazonal constitui numa ferramenta conceitualmente clara e operacionalmente eficiente para compreender e analisar séries temporais climatológicas (COMMANDEUR; KOOPMAN, 2007).

2.7.1 – Nível local de sazonalidade clássica

O modelo de nível local com sazonalidade clássica é um dos modelos estruturais mais usados para séries temporais com padrão sazonal recorrente (mensal, trimestral, entre outros) e, ao mesmo tempo, com um *patamar médio* que pode mudar gradualmente ao longo do tempo. A ideia didática central é separar o que se observa em dois componentes latentes, são eles, o *componente de nível* (μ_t), que representa a tendência de longo prazo (sem impor uma tendência determinística rígida) e um *componente sazonal* (γ_t), que representa oscilações periódicas ao longo do ciclo sazonal, o que não pôde ser efetivamente modelado por essas duas componentes é atribuído na componente de erro irregular (ϵ_t).

Essa decomposição é típica da abordagem de modelos estruturais e é apresentada como parte do arcabouço de modelos lineares no espaço de estados (HARVEY, 1990; DURBIN;

KOOPMAN, 2012). A forma mais direta de escrever o referido modelo, para uma determinada série temporal y_t , é através da seguinte equação:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (11)$$

Na equação acima apresentada a variável y_t representa o valor observado da série temporal no instante de tempo t (por exemplo, a insolação média mensal no mês t), a variável μ_t representa o nível local no instante de tempo t , isto é, o patamar médio subjacente no instante de tempo t , a variável γ_t representa o efeito sazonal no instante de tempo t (a parcela atribuível à posição dentro do ciclo sazonal) e a variável ϵ_t representa o termo irregular (ruído de medição e flutuações não explicadas), usualmente assumido com média zero e variância constante, frequentemente na forma gaussiana para permitir inferência por filtro de *Kalman* e máxima verossimilhança (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). O componente de nível local é modelado como um passeio aleatório (*random walk*), que permite que o patamar mude ao longo do tempo sem exigir uma tendência determinística fixa. A equação de transição do nível é definida pela seguinte equação:

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (12)$$

Na equação (12) a variável ε_t representa o choque do nível (também chamado de inovação do nível), com média zero e variância σ_ε^2 . Quando a variância σ_ε^2 é muito pequena, o nível muda pouco e se aproxima de uma média quase constante, no entanto, quando σ_ε^2 é maior, o nível pode se adaptar a mudanças estruturais e regimes climáticos distintos ao longo dos anos (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Já a sazonalidade clássica (também chamada de sazonalidade por *dummies* no contexto estrutural) parte do princípio de que existe um período sazonal s (por exemplo, $s = 12$ para dados mensais) e que os efeitos sazonais ao longo de um ciclo devem satisfazer uma restrição de soma nula, para evitar que a sazonalidade *roube* a média do nível. A restrição usual é definida pela seguinte equação:

$$\gamma_t + \gamma_{t-1} + \dots + \gamma_{t-s+1} = 0 \quad (13)$$

Para se implementar essa ideia de forma dinâmica e estocástica, a literatura de modelos estruturais expressa a sazonalidade clássica com $s - 1$ estados sazonais em uma equação de transição que garante a restrição de soma zero, através da seguinte relação:

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=0}^{s-2} \gamma_{t-j} + \omega_t \quad \omega_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2) \quad (14)$$

Na equação (14) a variável ω_t representa a inovação sazonal, com média zero e variância σ_ω^2 . Essa equação diz que o próximo efeito sazonal γ_{t+1} é calculado como o negativo da soma dos $s - 1$ efeitos sazonais imediatamente anteriores $\gamma_t, \gamma_{t-1}, \dots, \gamma_{t-s+2}$, mais um choque ω_t que permite que o padrão sazonal evolua lentamente ao longo do tempo. É justamente esse arranjo que caracteriza a *sazonalidade clássica* no sentido estrutural pois, trata-se de uma sazonalidade por posições no ciclo (mês 1, mês 2, ..., mês 12), com uma restrição que mantém a identificação do nível (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Para se representar o referido modelo na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*, reescrevemos o sistema no seguinte formato matricial:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (15)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (16)$$

Nas equações acima apresentadas a variável α_t representa o vetor de estado (latente), a variável $\mathbb{Z}_t$ representa a matriz de observação, a variável $\mathbb{T}_t$ representa a matriz de transição, a variável $\mathbb{R}_t$ representa a matriz de seleção das perturbações do estado e a variável η_t representa o vetor de perturbações do estado (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Se o período sazonal é s , define-se um vetor de estado com dimensão $m = s$, contendo o nível e os $s - 1$ estados sazonais necessários para se implementar a restrição de soma zero. Uma escolha clássica é considerar o seguinte vetor de estado:

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Na equação (17) a primeira componente é o nível μ_t e as demais $s - 1$ componentes representam o registro das sazonalidades necessárias para se calcular a próxima sazonalidade pela regra clássica. Com base nas equações (15) e (17), conclui-se que a matriz de observação de estados $\mathbb{Z}_t$ assume a seguinte forma:

$$\mathbb{Z}_t = [1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (18)$$

Onde a matriz $\mathbb{Z}_t$ tem dimensão $1 \times s$ no caso univariado. A equação de transição do estado, que combina a dinâmica do nível e a dinâmica sazonal clássica, é construída para refletir, além do simples deslocamento das defasagens sazonais (para que γ_t passe a ocupar a posição de γ_{t-1} no próximo instante de tempo, e assim por diante). Isso leva a seguinte matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$:

$$\mathbb{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A primeira linha de $\mathbb{T}_t$ implementa o termo $\mu_{t+1} = \mu_t$, deixando o termo ε_t entrar via matriz $\mathbb{R}_t$. A segunda linha implementa a sazonalidade clássica definida por $\gamma_{t+1} = -(\gamma_t + \gamma_{t-1} + \cdots + \gamma_{t-s+2})$ na parte determinística, com o choque ω_t entrando também via matriz $\mathbb{R}_t$. As linhas seguintes da matriz $\mathbb{T}_t$ fazem o deslocamento das defasagens sazonais, sendo que a terceira linha coloca γ_t na posição de γ_{t-1} no tempo seguinte, a quarta linha coloca γ_{t-1} na posição de γ_{t-2} , e assim sucessivamente, formando uma espécie de registrador de comprimento $s - 1$ (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Desta forma a matriz $\mathbb{R}_t$, de dimensão $s \times 2$, seleciona ondem entram as duas perturbações ε_t (nível) e ω_t (sazonalidade). Uma escolha padrão é definida pela seguinte equação:

$$\mathbb{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A equação (20) indica que a variável ε_t afeta apenas a equação do nível (primeira componente do estado) e a variável ω_t afeta apenas a equação do primeiro estado sazonal (segunda componente do estado). O restante do vetor de estado (as defasagens sazonais) evolui determinística e mecanicamente por deslocamento. As variâncias das perturbações do estado são reunidas através da seguinte matriz:

$$\mathbb{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Considerando-se que os choques do nível e da sazonalidade são não correlacionados no mesmo instante de tempo, tem perfil gaussiano e são totalmente independentes ao longo do tempo (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Com essas equações, o modelo está completamente especificado na forma generalizada pois, a observação é linear em α_t , o estado evolui linearmente, e toda a aleatoriedade entra por ruídos gaussianos com matrizes de covariância H_t e Q_t . Os parâmetros σ_ε^2 , σ_ω^2 e σ_ω^2 controlam o *grau de suavidade* de cada uma das componentes do modelo, sendo que o parâmetro σ_ε^2 regula o quanto o nível pode se deslocar de um período para outro, o parâmetro σ_ω^2 regula o quanto o padrão sazonal pode mudar ao longo dos ciclos e o parâmetro σ_ε^2 regula o quanto do comportamento observado é tratado como ruído irregular. Esses parâmetros são tipicamente estimados por máxima verossimilhança usando o filtro de *Kalman* (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

2.7.2 – Nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$

O modelo de nível local com sazonalidade clássica é um modelo estrutural cujo objetivo é separar, em uma determinada série temporal de interesse, a componente que corresponde a variações de longo prazo (o patamar médio que pode mudar lentamente), a componente que corresponde a variações periódicas (sazonalidade) e a componente que corresponde a irregularidades remanescentes. Quando se admite explicitamente que o ruído de medição é diferente de zero, a equação de observação deixa claro que os valores medidos contêm tanto o sinal gerado pelo processo latente quanto um erro de observação associado a instrumentação, registro ou arredondamento, e essa distinção é essencial para que a filtragem e a inferência atribuam corretamente a incerteza às suas fontes (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Nesse contexto, a relevância de se incluir uma componente $ARMA(1,1)$ no modelo surge quando os diagnósticos do ajuste indicam que, mesmo após modelar nível e sazonalidade, permanece dependência serial de curto prazo que aparece como autocorrelação nos resíduos recursivos padronizados (inovações padronizadas) do filtro de *Kalman*, sinalizando que a hipótese de *irregular como ruído branco* é insuficiente (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Considere, portanto, uma série temporal univariada y_t e um período sazonal s (por exemplo, $s = 12$ para dados mensais). Uma escrita completa do modelo com ruído de medição não nulo e com irregular correlacionado é representado através da seguinte equação:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + x_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (22)$$

Na equação (22), a variável y_t representa a observação no instante de tempo t , a variável μ_t representa o nível local no instante de tempo t , a variável γ_t representa o efeito sazonal clássico no instante de tempo t , a variável x_t representa a componente irregular do processo, aqui representado por um modelo $ARMA(1,1)$, que pode ter autocorrelação de curto prazo e a variável ϵ_t representa o ruído de medição, assumido como ruído branco com média zero e variância positiva σ_ϵ^2 . A interpretação didática é que o termo $\mu_t + \gamma_t + x_t$ representa o valor *verdadeiro* latente do processo no instante de tempo t , enquanto o termo ϵ_t representa a imperfeição da medição observada (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). O nível local é especificado como um passeio aleatório, de modo a permitir mudanças graduais de patamar através da seguinte equação:

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (23)$$

Na equação (23) a variável ε_t também representa um ruído branco com média zero e variância positiva σ_ε^2 . A variância σ_ε^2 controla o quanto o nível pode variar de um período para o outro, sendo que, se a mesma for pequena, o nível se torna quase constante, mas se a mesma for grande, o nível se adapta a mudanças estruturais (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A sazonalidade clássica é construída com a restrição de soma nula ao longo de um ciclo, para evitar que a sazonalidade absorva a média do nível. Uma forma padrão de implementá-la, usando $s - 1$ estados sazonais, é através da seguinte equação:

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=0}^{s-2} \gamma_{t-j} + \omega_t \quad \omega_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2) \quad (24)$$

Na equação (24) a variável ω_t , também considerada como sendo um ruído branco com média zero e variância positiva σ_ω^2 , representa a inovação sazonal e a sua variância controla a flexibilidade do padrão sazonal a cada instante de tempo t . O somatório presente na equação (24) garante que a soma dos efeitos sazonais, presentes em um ciclo, seja aproximadamente zero, assegurando-se a identificação entre μ_t e γ_t (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Se, após se ajustar o modelo com o termo x_t ausente, observa-se autocorrelação nos resíduos recursivos padronizados, isso indica que o modelo não capturou toda a dependência temporal de curto prazo. Sob a especificação correta do modelo linear gaussiano em espaço de estados, espera-se que os resíduos recursivos padronizados tenham um perfil aproximadamente

não autocorrelacionado e com uma variância unitária (*ruído branco*), pois o filtro de *Kalman* é construído de modo que as inovações sejam novas informações a cada passo (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Desta maneira, sempre que se observar algum tipo de autocorrelação persistente nos resíduos recursivos padronizados obtidos pelo modelo, se tem um forte indício de que existe algum tipo de dependência serial, na série temporal de interesse, que não foi efetivamente modelado (explicado) pelas componentes de nível e sazonalidade presentes no modelo (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A inclusão de um componente $ARMA(1,1)$ no modelo é relevante porque fornece um mecanismo parcimonioso para se capturar essa dependência serial remanescente, sem causar distorções na interpretação do nível e da sazonalidade. A componente $ARMA(1,1)$, representada na equação (22) pela variável x_t , é representada pela seguinte equação:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + v_t + \theta_1 v_{t-1} \quad (25)$$

Na equação (25) a variável ϕ_1 representa o parâmetro autorregressivo de ordem 1, a variável θ_1 representa o parâmetro de média móvel de ordem 1 e a variável v_t representa o ruído branco do modelo $ARMA(1,1)$ com média zero e variância σ_v^2 . As condições usuais $|\phi| < 1$ e $|\theta| < 1$ garantem, respectivamente, estacionariedade do componente autorregressivo e invertibilidade do componente de média móvel, mantendo o processo bem definido e com parametrização identificável (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016; HAMILTON, 1994). A consequência prática, após se reestimar o modelo com essa estrutura, é que parte da autocorrelação que antes aparecia nos resíduos recursivos padronizados deixa de ser a *falha do modelo* e passa a ser explicada pelos parâmetros ϕ_1 e θ_1 , levando os resíduos recursivos padronizados a se aproximarem do comportamento característico de um ruído branco. Além disso, modelar explicitamente a autocorrelação residual pela componente $ARMA(1,1)$ evita que o ajuste *empurre* variações de curto prazo para dentro das variáveis μ_t e γ_t , preservando o significado dessas componentes e melhorando a calibração de incertezas (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Para representar o modelo completo na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*, utilizam-se as seguintes equações:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (26)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (27)$$

Na equação (27) a variável y_t representa a observação, a variável α_t representa o vetor de estado latente, a variável $\mathbb{Z}_t$ representa a matriz de observação. Já na equação (26) a variável $\mathbb{T}_t$ representa a matriz de transição de estado, a variável $\mathbb{R}_t$ representa a matriz que injeta as perturbações no estado, a variável H_t representa a variância do erro de observação e a variável $\mathbb{Q}_t$ representa a matriz de covariâncias das perturbações do estado (DURBIN; KOOPMAN, 2012; ANDERSON; MOORE, 1979). Escolhe-se um vetor de estado que contenha o nível, os $s - 1$ estados necessários para a sazonalidade clássica e dois estados para o $ARMA(1,1)$ em forma linear. Uma escolha conveniente é dada pela seguinte equação:

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \\ x_t \\ v_t \end{bmatrix} \quad (28)$$

Considerando-se o vetor de estado definido pela equação (28), conclui-se que a matriz de observação $\mathbb{Z}_t$ será definida pela seguinte equação:

$$\mathbb{Z}_t = [1 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (29)$$

A matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$ do modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$ é representada, de forma blocada, por duas submatrizes de transição, são elas, a matriz de transição de componente estrutural ($\mathcal{T}_{CE}$), que corresponde as componentes de nível e sazonalidade e a matriz de transição do componente $ARMA(1,1)$ ($\mathcal{T}_A$). A matriz de transição de componente estrutural, de dimensão $(s \times s)$, é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_{CE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Já a matriz de transição do componente $ARMA(1,1)$, de dimensão (2×2) , é definida utilizando-se uma forma linear equivalente da equação (25) dada pela seguinte equação:

$$x_{t+1} = \phi_1 x_t + \theta_1 v_t + v_{t+1} \quad (31)$$

Definindo-se $w_t = v_{t+1}$, e considerando-se que $w_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$, pode-se representar o componente $ARMA(1,1)$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_t \quad (32)$$

Com base na equação (32), conclui-se que a matriz de transição do componente $ARMA(1,1)$ é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_A = \begin{bmatrix} \phi_1 & \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Por fim, conclui-se que a matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$, de dimensão $(s+2) \times (s+2)$, do modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$, é representada de forma blocada, pela seguinte equação:

$$\mathbb{T}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{CE} & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_A \end{bmatrix} \quad (34)$$

Os ruídos de estado do modelo podem ser organizados no seguinte vetor:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \omega_t \\ w_t \end{bmatrix} \quad (35)$$

Com a seguinte matriz de covariância de estado:

$$\mathbb{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

A matriz de seleção de ruídos $\mathbb{R}_t$, de dimensão $(s+2) \times 3$, injeta as perturbações definidas na equação (35) com o auxílio da seguinte equação:

$$\mathbb{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Com as matrizes $\mathbb{Z}_t$, $\mathbb{T}_t$, $\mathbb{R}_t$, $\mathbb{Q}_t$ claramente definidas, respectivamente, nas equações (29), (34), (37) e (36), o modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$ encontra-se plenamente representado na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*. Desta forma, sempre que se constatar que os resíduos recursivos padronizados apresentarem autocorrelação significativa, isso significa que o modelo carece de uma componente capaz de modelar a estrutura dinâmica presente na componente irregular do modelo. Desta forma, a inclusão da componente $ARMA(1,1)$ se justifica como um mecanismo parcimonioso para se modelar essa estrutura dinâmica residual (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; BOX et al., 2015).

2.8 – O modelo de tendência linear com componente sazonal

O modelo estrutural de tendência linear com componente sazonal é uma das formulações mais elegantes e difundidas na análise moderna de séries temporais, especialmente no contexto dos modelos estruturais clássicos e do filtro de *Kalman*. Ele se baseia na ideia de que a série observada pode ser decomposta em partes que representam diferentes fontes de variação, sendo elas, uma tendência que evolui lentamente ao longo do tempo, uma sazonalidade que segue um padrão recorrente com periodicidade anual e um termo irregular que incorpora flutuações imprevisíveis. A grande força dessa abordagem está no fato de que cada componente é tratado como uma estrutura dinâmica e estocástica, capaz de evoluir de forma flexível conforme novas observações se tornam disponíveis.

Essa visão probabilística e atualizável foi desenvolvida e consolidada principalmente pelos trabalhos de Harvey (1989), Commandeur e Koopman (2007) e Durbin e Koopman (2012), que contribuíram para o avanço e desenvolvimento dos modelos lineares no espaço de estado. A tendência linear, no âmbito desse modelo, descreve o movimento de longo prazo da série, capturando seu crescimento ou declínio de maneira suave e gradual. Essa tendência é entendida como composta por um nível, que indica o valor médio em torno do qual a série oscila, e um termo de inclinação, que representa a velocidade com que esse nível se altera ao longo do tempo.

A característica essencial dessa estrutura é que tanto o nível quanto a inclinação não são fixos, mas evoluem de forma adaptativa. Isso permite que o modelo acompanhe mudanças estruturais, variações persistentes e diferentes regimes de crescimento ou retração, mesmo em ambientes econômicos ou sociais sujeitos a múltiplos choques. Em contraste com abordagens

determinísticas, o modelo estrutural confere à tendência um caráter vivo, permeado de pequenas flutuações que refletem a natureza real e frequentemente irregular das séries temporais. A componente sazonal, por sua vez, capta os movimentos que se repetem ciclicamente a cada período de oscilação. Em séries com periodicidade mensal, como dados de vendas, produção industrial, consumo elétrico ou indicadores climáticos, é comum observar padrões específicos que se repetem mês a mês.

O modelo estrutural interpreta essa sazonalidade como um conjunto de efeitos distribuídos ao longo dos doze meses, que juntos formam o padrão sazonal completo. Cada mês carrega um impacto particular sobre o valor observado, podendo aumentar, reduzir ou estabilizar o nível da série em relação ao que seria esperado apenas pela tendência. Uma característica fundamental desse componente é o fato de que ele é construído de modo a não introduzir viés sistemático na série, preservando o equilíbrio ao longo de cada ciclo anual. Ao mesmo tempo, assim como a tendência, a sazonalidade é flexível e pode variar lentamente ao longo dos anos. Isso é crucial porque padrões sazonais podem mudar por fatores culturais, econômicos, tecnológicos ou ambientais, e o modelo estrutural permite essa adaptação gradual sem quebrar o ciclo natural da série.

Um dos aspectos mais importantes desse tipo de modelagem é sua representação no formato de modelos lineares no espaço de estado, pois é relevante compreender intuitivamente que essa formulação distingue entre um estado latente (formado pela tendência, pela inclinação e pelos efeitos sazonais) e a observação da série em si. O estado descreve o que está acontecendo *por trás* dos dados, enquanto as observações são reflexos imperfeitos e ruidosos desse processo subjacente. Essa estrutura permite que o modelo seja atualizado continuamente com novas informações por meio do filtro de *Kalman*, que reajusta as estimativas dos componentes internos de maneira eficiente e estatisticamente ótima.

Assim, cada nova observação contribui para refinar a compreensão da tendência e da sazonalidade, mantendo a coerência do modelo ao longo do tempo. A flexibilidade do modelo estrutural de tendência linear com sazonalidade mensal também o torna extremamente robusto diante de situações complexas, como mudanças graduais e irregularidades inesperadas. A separação clara entre os componentes facilita a identificação de movimentos estruturais, como variações sazonais que se intensificam ou enfraquecem, mudanças de patamar na tendência ou anomalias transitórias no termo irregular. Como destacam Durbin e Koopman (2012) e Harvey (1990), essa decomposição explícita permite não apenas realizar previsões consistentes, mas também interpretar o comportamento da série com maior clareza, oferecendo ao pesquisador uma ferramenta ao mesmo tempo analítica e explicativa.

2.8.1 - Tendência linear de sazonalidade clássica

O modelo de tendência linear com sazonalidade clássica (também chamado, na literatura de modelos estruturais, de *modelo de tendência linear local com componente sazonal clássica*) é uma especificação para séries temporais na qual se assume que o comportamento observado pode ser decomposto em três componentes principais, são elas, a tendência (que evolui no tempo de maneira aproximadamente linear), a sazonalidade (que se repete com período fixo s , por exemplo, $s = 12$ para séries temporais mensais) e o termo irregular associado a ruídos e variações não explicadas. A designação *tendência linear* decorre do fato de que a tendência é representada por um nível (*intercepto local*) e por uma inclinação (*taxa de crescimento local*), de modo que o nível de um período para o outro é atualizado adicionando-se a inclinação, o que produz uma trajetória localmente linear.

Ao mesmo tempo, a inclinação também pode variar lentamente por meio de choques estocásticos, permitindo mudanças graduais no ritmo de crescimento ou declínio. Essa formulação é típica do arcabouço de modelos estruturais no espaço de estados e é amplamente apresentada em textos de referência sobre filtro de *Kalman* e séries temporais no espaço de estados (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). A forma estrutural mais direta desse modelo, para uma série temporal observada y_t , começa pela seguinte equação de observação:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (38)$$

Na equação (38) a variável y_t representa o valor observado da série no instante de tempo t , a variável μ_t representa o nível no instante de tempo t , a variável γ_t representa o efeito sazonal clássico no instante de tempo t e a variável ϵ_t representa o termo irregular (ou erro de observação) do modelo, que representa as variações aleatórias não explicadas pelas componentes de tendência e sazonalidade. A tendência linear do modelo é introduzida ao se decompor a variável μ_t em um mecanismo de nível e inclinação. Representando-se por β_t a *inclinação (slope)* no instante de tempo t , a dinâmica da tendência linear local é especificada pelas seguintes equações de transição:

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \quad (39)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{2t} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \quad (40)$$

Nessas equações, as variáveis ε_{1t} e ε_{2t} representam ruídos brancos gaussianos de média zero e variâncias $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ e $\sigma_{\varepsilon_2}^2$. As variâncias $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ e $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ controlam a flexibilidade da tendência do modelo pois, quando $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ é muito pequena, a inclinação varia pouco e a tendência se aproxima de uma reta com inclinação quase constante, por outro lado, quando $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ é grande, a inclinação pode mudar mais rapidamente, permitindo acelerações e desacelerações graduais (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A sazonalidade clássica, por sua vez, é denominada de *clássica* porque representa efeitos sazonais por posição no ciclo (mês do ano, trimestre do ano etc.), impondo uma restrição de identificação de soma nula ao longo de um período sazonal completo. A restrição conceitual é que, em um ciclo de comprimento s , os efeitos sazonais devem somar aproximadamente zero para que a sazonalidade não absorva a média do nível. Uma forma usual de expressar essa estrutura é trabalhar com $s - 1$ estados sazonais e definir a atualização sazonal pela seguinte equação (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012):

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=0}^{s-2} \gamma_{t-j} + \omega_t \quad \omega_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{\omega}^2) \quad (41)$$

A equação (41) possui exatamente o mesmo significado das equações (14) e (24) utilizadas no modelo de nível local de sazonalidade clássica e no modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$. Para representar o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*, reescreve-se as equações (38), (39), (40) e (41) em notação matricial, separando-se a parte observada da parte latente, através das seguintes equações:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (42)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (43)$$

Novamente, as equações (42) e (43) possuem exatamente o mesmo significado das equações (15), (16), (26) e (27) utilizadas no modelo de nível local de sazonalidade clássica e no modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$. No caso do modelo de tendência linear com sazonalidade clássica, uma escolha natural do vetor de estado é agrupar o nível e a inclinação, seguidos pelos $s - 1$ estados sazonais necessários para se implementar a sazonalidade clássica. Desta forma, define-se o vetor de estados α_t para o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica, através da seguinte equação:

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Considerando-se o vetor de estados definido pela equação (44), conclui-se que a matriz de observação de estados $\mathbb{Z}_t$ será definida pela seguinte equação:

$$\mathbb{Z}_t = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (45)$$

De forma similar ao modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$, a matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$ do modelo de tendência linear de sazonalidade clássica é representada, de forma blocada, por duas submatrizes de transição, são elas, a matriz de transição da dinâmica de tendência linear ($\mathcal{J}_{TL}$) e a matriz de transição da dinâmica de sazonalidade clássica ($\mathcal{J}_S$). Desta maneira, a matriz de transição da dinâmica de tendência linear é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{J}_{TL} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

E a matriz de transição da dinâmica de sazonalidade clássica é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{J}_S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Juntando-se as matrizes definidas nas equações (46) e (47), define-se a matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$ do modelo de tendência linear de sazonalidade clássica pela seguinte equação:

$$\mathbb{T}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{TL} & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_S \end{bmatrix} \quad (48)$$

Os ruídos de estado do modelo podem ser organizados no seguinte vetor:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \omega_t \end{bmatrix} \quad (49)$$

Com a seguinte matriz de covariância de estado:

$$\mathbb{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\omega}^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

A matriz de seleção de ruídos $\mathbb{R}_t$, de dimensão $(s + 1) \times 3$, injeta as perturbações definidas na equação (49) com o auxílio da seguinte equação:

$$\mathbb{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Essa representação na forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados é relevante porque ela permite aplicar diretamente o filtro e o suavizador de *Kalman* para se estimar as componentes latentes μ_t , β_t e γ_t ao longo do tempo, assim como calcular previsões e intervalos de previsão que incorporam, de maneira coerente, a incerteza do nível, da inclinação, da sazonalidade e do ruído de observação. Além disso, a parametrização por H_t , $\sigma_{\varepsilon_1}^2$, $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ e σ_{ω}^2 oferece um controle explícito sobre o grau de suavidade de cada componente, permitindo que o modelo se ajuste a séries que exibem mudanças graduais na tendência e padrões sazonais que podem ser mais rígidos ou mais adaptativos conforme os dados indiquem (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

2.8.2 - Tendência linear de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$

O modelo de tendência linear com sazonalidade clássica é um modelo estrutural no qual se representa uma série temporal observada y_t como a soma de uma tendência localmente linear, de um componente sazonal associado a um período s e de um termo irregular. A tendência é dita linear porque é formada por um nível μ_t e por uma inclinação β_t , de modo que o nível se atualiza adicionando-se a inclinação, permitindo que a trajetória do sinal subjacente seja aproximadamente linear em janelas locais, mas ainda flexível, pois tanto o nível quanto a

inclinação podem sofrer choques estocásticos. A sazonalidade é dita clássica porque é parametrizada por efeitos por posição no ciclo e impõe uma restrição de soma nula ao longo de s períodos, garantindo identificação entre tendência e sazonalidade.

Quando se considera explicitamente que o ruído de medição é diferente de zero, o modelo passa a separar, de forma conceitualmente correta, a variabilidade que decorre da dinâmica do processo (tendência, sazonalidade e irregular do processo) da variabilidade que decorre de imperfeições da observação, o que é central no arcabouço de modelos lineares gaussianos em espaço de estados e afeta diretamente filtragem, suavização, verossimilhança e construção de intervalos de previsão (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Na forma estrutural, a equação de observação com ruído de medição não nulo pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + x_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (52)$$

Na equação (52) a variável y_t representa a observação no instante de tempo t , a variável μ_t representa o nível da tendência no instante de tempo t , a variável γ_t representa o efeito sazonal clássico no instante de tempo t , a variável x_t representa o componente irregular do processo que pode carregar dependência serial de curto prazo e a variável ϵ_t representa o ruído de medição, assumido como sendo um ruído branco com média zero e variância $\sigma_\epsilon^2 > 0$. A presença explícita de σ_ϵ^2 significa que y_t é uma versão ruidosa do sinal latente $\mu_t + \gamma_t + x_t$, e não uma medida perfeita desse sinal (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). A tendência linear local é especificada por duas equações de transição. A primeira atualiza o nível adicionando a inclinação e um choque do nível e a segunda atualiza a inclinação com um choque próprio, permitindo mudanças graduais na taxa de crescimento, de acordo com as seguintes equações:

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \quad (53)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{2t} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \quad (54)$$

Nas equações acima apresentadas a variável β_t representa a inclinação (*slope*) no instante de tempo t , a variável ε_{1t} representa a inovação do nível com média zero e variância $\sigma_{\varepsilon_1}^2$, a variável ε_{2t} representa a inovação da inclinação com média zero e variância $\sigma_{\varepsilon_2}^2$. As variâncias $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ e $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ controlam a flexibilidade da tendência do modelo, sendo que, quando $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ é pequena, a inclinação varia pouco e a tendência se aproxima de uma reta de inclinação quase constante, no

entanto, quando $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ é maior, a inclinação pode se ajustar com mais rapidez, permitindo acelerações e desacelerações ao longo do tempo (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A sazonalidade clássica, com período s , é implementada com $s - 1$ estados sazonais e uma atualização, que impõe a restrição de soma nula, através da seguinte equação:

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=0}^{s-2} \gamma_{t-j} + \omega_t \quad \omega_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2) \quad (55)$$

A equação (55) garante que o próximo efeito sazonal seja sempre o negativo da soma dos $s - 1$ anteriores, produzindo a propriedade de que a soma dos s efeitos sazonais em um ciclo é aproximadamente zero, o que impede que a sazonalidade absorva a média da tendência (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Sob o modelo linear gaussiano corretamente especificado, espera-se que resíduos recursivos padronizados sejam aproximadamente não autocorrelacionados e tenham uma variância unitária.

A presença de uma autocorrelação persistente nos resíduos recursivos padronizados indica que a estrutura do modelo não capturou toda a dependência temporal, comprometendo a coerência de intervalos de previsão e testes estatísticos (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). A inclusão de um componente $ARMA(1,1)$ no modelo definido pela equação (52) é relevante justamente por oferecer uma descrição parcimoniosa e eficaz dessa dependência temporal, sem *forçar* o nível (μ_t), a inclinação (β_t) ou a sazonalidade (γ_t) a absorver flutuações que não pertencem às suas escalas de interpretação. Define-se então a componente $ARMA(1,1)$ através da seguinte equação:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + v_t + \theta_1 v_{t-1} \quad (56)$$

Na equação (56) a variável ϕ_1 representa o parâmetro autorregressivo de ordem 1, a variável θ_1 representa o parâmetro de média móvel de ordem 1 e a variável v_t representa o ruído branco com média zero e variância σ_v^2 . As condições $|\phi| < 1$ e $|\theta| < 1$ garantem estacionariedade e invertibilidade do componente $ARMA(1,1)$, assegurando-se que a estrutura de curto prazo seja bem definida e identificável (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016; HAMILTON, 1994). O ganho prático é que o modelo passa a explicar explicitamente aquilo que, antes, aparecia como autocorrelação nos resíduos recursivos padronizados pois, ao se reestimar o modelo, as inovações tendem a perder a autocorrelação porque a previsão um passo à frente passa a incorporar a memória de curto prazo definida pela componente $ARMA(1,1)$. Isso

melhora a validade dos diagnósticos, protege a interpretação das componentes estruturais e aumenta a confiabilidade de intervalos de previsão, pois a dependência serial deixa de *contaminar* o termo irregular assumido como ruído branco (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Para se representar o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$ na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*, utilizam-se, novamente, as seguintes equações:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (57)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (58)$$

Considerando-se um período sazonal mensal ($s = 12$), uma escolha natural de vetor de estado é incluir tendência (*nível e inclinação*), sazonalidade clássica (com $s - 1$ estados) e a componente $ARMA(1,1)$ (com dois estados), através da seguinte equação:

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \\ x_t \\ v_t \end{bmatrix} \quad (59)$$

Baseando-se no perfil da equação (59) constata-se que o vetor $\mathbb{Z}_t$ da equação (58) deverá selecionar o nível μ_t (primeira componente), o sazonal corrente γ_t (terceira componente) e o componente $ARMA(1,1)$ x_t (penúltima componente), sendo que a variável v_t não entra diretamente na observação. Desta forma, $\mathbb{Z}_t$ será definido da seguinte forma:

$$\mathbb{Z}_t = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (60)$$

De forma similar ao modelo de tendência linear de sazonalidade clássica, a matriz de transição de estados $\mathbb{T}_t$ do modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$ é representada, também de forma blocada, por três submatrizes de transição, são elas, a matriz de transição da dinâmica de tendência linear local ($\mathcal{T}_{TL}$), a matriz de transição da dinâmica de sazonalidade clássica ($\mathcal{T}_S$) e a matriz de transição da dinâmica da componente $ARMA(1,1)$ ($\mathcal{T}_A$). Desta maneira, a matriz de transição da dinâmica de tendência linear é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_{TL} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

E a matriz de transição da dinâmica de sazonalidade clássica é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Para obtermos a matriz de transição da dinâmica da componente $ARMA(1,1)$, reindexa-se a equação (56) da seguinte forma:

$$x_{t+1} = \phi_1 x_t + \theta_1 v_t + v_{t+1} \quad (63)$$

Definindo-se $w_t = v_{t+1}$, e considerando-se que $w_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$, pode-se representar o componente $ARMA(1,1)$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_t \quad (64)$$

Com base na equação (64), conclui-se que a matriz de transição do componente $ARMA(1,1)$ é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_A = \begin{bmatrix} \phi_1 & \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Como as componentes de tendência, sazonalidade e $ARMA(1,1)$ evoluem separadamente e se combinam apenas na equação de observação, conclui-se que a matriz de transição do modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente $ARMA(1,1)$ pode ser escrita, em blocos, da seguinte forma:

$$\mathbb{T}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{TL} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_S & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{T}_A \end{bmatrix} \quad (66)$$

Os ruídos de estado do modelo podem ser organizados no seguinte vetor:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \omega_t \\ w_t \end{bmatrix} \quad (67)$$

Com a seguinte matriz de covariância de estado:

$$\mathbb{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

A matriz de seleção de ruídos $\mathbb{R}_t$, de dimensão $(s + 3) \times 4$, injeta as perturbações definidas na equação (67) com o auxílio da seguinte equação:

$$\mathbb{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Por fim, ao se incorporar as variáveis ϕ_1 e θ_1 , o modelo passa a produzir inovações mais próximas de ruído branco, melhora a adequação do diagnóstico, evita que a tendência e a sazonalidade absorvam flutuações que não lhes pertencem e fornece previsões e intervalos mais bem calibrados, o que é exatamente o objetivo quando se busca *remover* a autocorrelação dos resíduos recursivos padronizados provenientes do modelo estrutural (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; BOX et al., 2015).

2.9 – O filtro de *Kalman*

O filtro de *Kalman* é um procedimento recursivo de estimação que permite inferir, a cada instante do tempo, o estado latente de um sistema dinâmico linear a partir de observações ruidosas, atualizando continuamente a melhor estimativa disponível quando novas informações chegam. Em modelos de séries temporais formulados no espaço de estados, ele se torna particularmente relevante porque fornece, de forma computacionalmente eficiente, as quantidades necessárias para estimar componentes não observadas, produzir previsões e calcular a verossimilhança do modelo. A intuição didática é que o filtro de *Kalman* combina

duas fontes de informação, são elas, a *crença* prevista sobre o estado, obtida ao se propagar o modelo de transição, e a informação contida na observação atual, ponderando-as por meio de um ganho que depende das incertezas relativas de previsão e de medição. Esse arcabouço foi estabelecido originalmente no contexto de problemas de controle e estimação e, mais tarde, sistematizado para análise de séries temporais e modelos estruturais (KALMAN, 1960; ANDERSON; MOORE, 1979; HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Para se explicar como o filtro é aplicado em um modelo univariado devidamente especificado na *forma generalizada de modelos lineares no espaço de estados*, considere as equações de observação e de transição de estados abaixo apresentadas:

$$\alpha_{t+1} = \mathbb{T}_t \alpha_t + \mathbb{R}_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \mathbb{Q}_t) \quad (70)$$

$$y_t = \mathbb{Z}_t \alpha_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, H_t) \quad (71)$$

O caso clássico do filtro de *Kalman* assume que as variáveis η_t e ϵ_t são não correlacionados entre si e não correlacionados ao longo do tempo, isto é, os ruídos são brancos e independentes temporalmente. Essa hipótese, junto com a linearidade e a gaussianidade, garante que a distribuição condicional do estado, considerando-se os dados até cada instante de tempo t , permaneça normal e seja completamente caracterizada por uma média e uma covariância, que são exatamente os objetos atualizados pelo filtro (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Para se iniciar o procedimento recursivo, especifica-se uma distribuição inicial para o estado, da seguinte forma:

$$\alpha_1 \sim \mathcal{N}(a_1, P_1) \quad (72)$$

Na relação acima apresentada a variável a_1 representa a média inicial do estado e a variável P_1 representa a covariância inicial. Em muitas aplicações de séries temporais, utiliza-se o processo de inicialização difusa para componentes pouco conhecidas (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). O filtro de *Kalman* procede em dois grandes movimentos a cada instante de tempo t , são eles, a etapa de previsão e a etapa de atualização. Na etapa de previsão, calcula-se a distribuição predita do estado e a previsão da observação antes de se ver y_t . Se a variável a_t denota a média do estado no instante de tempo t condicionada às observações até o instante de tempo $t - 1$, escreve-se $a_{t|t-1}$ para enfatizar a informação disponível. Do mesmo modo, a variável $P_{t|t-1}$ denota a covariância predita do estado. A previsão do estado para o instante de

tempo t , usando-se a transição a partir do instante de tempo anterior, será definida da seguinte forma:

$$a_{t|t-1} = \mathbb{T}_{t-1} a_{t-1|t-1} \quad (73)$$

E a covariância predita do estado será definida da seguinte forma:

$$P_{t|t-1} = \mathbb{T}_{t-1} P_{t-1|t-1} \mathbb{T}_{t-1}' + \mathbb{R}_{t-1} \mathbb{Q}_{t-1} \mathbb{R}_{t-1}' \quad (74)$$

Na equação (73) a variável $a_{t-1|t-1}$ representa a média filtrada do estado no instante de tempo $t - 1$ após se incorporar a observação y_{t-1} , na equação (74) a variável $P_{t-1|t-1}$ representa a covariância filtrada correspondente. Na equação (74), o apóstrofo $(\cdot)'$ indica transposição, o termo $\mathbb{T}_{t-1} P_{t-1|t-1} \mathbb{T}_{t-1}'$ representa a propagação da incerteza do estado anterior para o tempo seguinte via dinâmica do sistema, enquanto que o termo $\mathbb{R}_{t-1} \mathbb{Q}_{t-1} \mathbb{R}_{t-1}'$ adiciona a incerteza introduzida pelas perturbações do estado no passo de transição (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Com o estado predito em mãos, prevê-se a observação y_t . A previsão de um passo à frente da observação é dada por:

$$\hat{y}_{t|t-1} = \mathbb{Z}_t a_{t|t-1} \quad (75)$$

Define-se então a inovação v_t , isto é, o erro de previsão de um passo à frente, através da seguinte equação:

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} = y_t - \mathbb{Z}_t a_{t|t-1} \quad (76)$$

A inovação é a parcela da observação atual que não foi antecipada pelo modelo com base no passado, e é justamente ela que *carrega* a informação nova no instante de tempo t . A variância da inovação é definida pela seguinte equação:

$$F_t = \text{Var}(v_t) = \mathbb{Z}_t P_{t|t-1} \mathbb{Z}_t' + H_t \quad (77)$$

No caso de uma série temporal univariada, F_t consiste num escalar positivo. O termo $\mathbb{Z}_t P_{t|t-1} \mathbb{Z}_t'$ representa a incerteza da previsão associada ao estado predito, projetada para o espaço da observação, e H_t é a variância do ruído de medição, isto é, o quanto a própria observação é ruidosa independentemente do estado (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER,

2017). A etapa de atualização é o coração do filtro de *Kalman* pois, ela combina a previsão do estado com a informação contida em y_t via a inovação v_t . Essa combinação é governada pelo ganho de *Kalman* (K_t), definido pela seguinte equação:

$$K_t = P_{t|t-1} \mathbb{Z}_t' F_t^{-1} \quad (78)$$

O ganho de *Kalman* possui interpretação direta, ou seja, ele define quanto a estimativa do estado deve ser corrigida em resposta a um erro de previsão v_t . Se H_t é grande (medição muito ruidosa), então F_t tende a ser grande e K_t tende a ser menor, fazendo o filtro confiar mais na previsão do modelo do que na observação, por outro lado, se H_t é pequeno e $P_{t|t-1}$ é relativamente grande, K_t tende a ser maior, fazendo o filtro reagir mais à informação observada. A atualização da média do estado, após se observar y_t , é dada pela seguinte equação:

$$a_{t|t} = a_{t|t-1} + K_t v_t \quad (79)$$

E a atualização da covariância do estado é definida pela seguinte equação:

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t F_t K_t^{-1} \quad (80)$$

As equações (79) e (80) demonstram explicitamente lógica do filtro de *Kalman*, a média filtrada $a_{t|t}$ é definida pela média predita $a_{t|t-1}$ somada a uma correção proporcional ao erro de previsão v_t , e a covariância filtrada $P_{t|t}$ é a covariância predita $P_{t|t-1}$ reduzida pela quantidade de incerteza *explicada* pela observação. A redução é maior quando o ganho é maior e quando F_t é suficientemente informativo, refletindo o fato de que as observações precisas reduzem mais a incerteza do estado (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Uma razão fundamental para o filtro de *Kalman* ser tão central em séries temporais é que ele também fornece, quase sem custo adicional, o cálculo da função de verossimilhança do modelo quando se assume gaussianidade. Como v_t é normal com média zero e variância F_t sob o modelo, a função log-verossimilhança por inovações pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln(L) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\ln(2\pi) + \ln(|F_t|) + v_t' F_t^{-1} v_t] \quad (81)$$

Essa expressão mostra que ajustar os parâmetros desconhecidos do modelo (por exemplo, elementos de H_t e $\mathbb{Q}_t$, ou parâmetros que influenciem $\mathbb{T}_t$) por máxima verossimilhança requer

exatamente os objetos calculados pelo filtro, ou seja, as variáveis v_t e F_t . Por isso, em modelos estruturais e modelos *ARIMA* representados em espaço de estados, o filtro de *Kalman* é, ao mesmo tempo, um algoritmo de estimação de estados e a base computacional para a estimação de parâmetros (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Em termos de aplicação prática em uma série temporal univariada já especificada no formato generalizado, o procedimento é inteiramente recursivo, ou seja, inicia-se o referido procedimento com $a_{1|0} = a_1$ e $P_{1|0} = P_1$, computa-se a previsão $\hat{y}_{1|0}$, a inovação v_1 e sua variância F_1 , obtém-se o ganho K_1 , atualiza-se para $a_{1|1}$ e $P_{1|1}$, e repete-se o mesmo ciclo para os instantes de tempo $t = 2, 3, 4, 5, \dots, n$. Ao final, tem-se, para cada instante de tempo t , estimativas filtradas do estado α_t e medidas de incerteza associadas, além do conjunto $\{v_t, F_t\}$ que permite a realização de um diagnóstico por resíduos recursivos padronizados $r_t = v_t / \sqrt{F_t}$ e estimação de parâmetros via verossimilhança. Desta forma, observa-se que o filtro de *Kalman* consiste numa ferramenta que operacionaliza, de modo rigoroso e eficiente, a ideia de que modelos em espaço de estados descrevem um processo latente dinâmico observado com erro, atualizando crenças sobre esse processo à medida que a série temporal se revela (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

2.10 – O suavizador de *Kalman*

O suavizador de *Kalman* (*Kalman smoother*) é o procedimento que, em um modelo linear gaussiano no espaço de estados, estima retrospectivamente os estados latentes de uma série temporal usando *todas* as observações disponíveis no intervalo $\{1, \dots, n\}$. Enquanto o filtro de *Kalman* produz estimativas *em tempo real*, ou seja, definidas por $\alpha_{t|t} = \mathcal{E}(\alpha_t | y_1, \dots, y_t)$, o suavizador fornece estimativas *a posteriori* de intervalo fixo, ou seja, definidas por $\alpha_{t|n} = \mathcal{E}(\alpha_t | y_1, \dots, y_n)$, que tipicamente são mais precisas para instantes passados porque incorporam a informação de observações futuras em relação ao instante de tempo t .

Essa diferença é central em séries temporais estruturais, pois a decomposição em componentes (tendência, sazonalidade, ciclo) costuma ser interpretada a partir de estimativas suavizadas, e não apenas filtradas, já que o objetivo é reconstruir o sinal latente com a menor incerteza possível em todo o período amostral (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Em termos probabilísticos, como o modelo é linear e gaussiano, a distribuição condicional $\alpha_t | y_{1:n}$ permanece normal, de modo que basta obter sua média e sua covariância para se caracterizar completamente sua incerteza, e o suavizador é justamente o algoritmo recursivo que computa essas quantidades de forma eficiente a partir das

saídas do filtro (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012). O suavizador de *Kalman* é aplicado após se executar o filtro de *Kalman* e se armazenar, para cada instante de tempo t , as quantidades filtradas e previstas. Denote por $a_{t|t}$ a média filtrada do estado, definida por $a_{t|t} = \mathcal{E}(\alpha_t | y_{1:t})$, e por $P_{t|t}$ sua covariância, definida por $P_{t|t} = \text{Var}(\alpha_t | y_{1:t})$. Denote também por $a_{t+1|t}$ a média predita de um passo à frente, definida por $a_{t+1|t} = \mathcal{E}(\alpha_{t+1} | y_{1:t})$ e por $P_{t+1|t}$ a covariância predita correspondente, definida por $P_{t+1|t} = \text{Var}(\alpha_{t+1} | y_{1:t})$. Essas quantidades são produzidas pelo filtro de *Kalman* por meio das recursões usuais de previsão e atualização, já o suavizador, as utiliza em uma etapa posterior, rodando *para trás* no tempo, do instante n até o instante 1 (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). O objetivo do suavizador de *Kalman* é obter, para cada instante de n , a média suavizada definida por:

$$a_{t|n} = \mathcal{E}(\alpha_t | y_{1:n}) \quad (82)$$

E a covariância suavizada definida por:

$$P_{t|n} = \text{Var}(\alpha_t | y_{1:n}) \quad (83)$$

Nas equações (82) e (83) o termo $y_{1:n}$ denota o conjunto completo de observações $\{y_1, \dots, y_n\}$. A forma mais conhecida, e amplamente usada em séries temporais, é conhecida como o suavizador de *Rauch–Tung–Striebel (RTS)*, que fornece recursões fechadas para $a_{t|n}$ e $P_{t|n}$ a partir das saídas do filtro de *Kalman* (RAUCH; TUNG; STRIEBEL, 1965; ANDERSON; MOORE, 1979). A recursão começa no final da amostra com as seguintes condições de contorno:

$$a_{n|n} = a_{n|n} \quad (84)$$

$$P_{n|n} = P_{n|n} \quad (85)$$

Isto é, no último instante de tempo o suavizador coincide com o filtro, pois não existem observações *futuras* além de n . Em seguida, para os instantes de tempo $t = n - 1, n - 2, \dots, 1$, define-se a matriz de ganho do suavizador (muitas vezes chamada de *ganho de suavização*) através da seguinte equação:

$$\mathcal{J}_t = P_{t|t} \mathbb{T}'_t P_{t+1|t}^{-1} \quad (86)$$

O papel de $\mathcal{J}_t$ é quantificar quanto a estimativa suavizada em t deve ser ajustada ao se comparar, o que o filtro de *Kalman* acreditava sobre α_{t+1} com base em $y_{1:t}$ e o que o suavizador passa a acreditar sobre α_{t+1} após incorporar todo o conjunto $y_{1:n}$. Essa lógica é análoga à do ganho de *Kalman* no filtro de *Kalman*, mas agora operando no sentido inverso do tempo, ou seja, a informação *extra* vem de observações posteriores ao instante de tempo t , sintetizadas em $\alpha_{t+1|n}$ (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Com o ganho $\mathcal{J}_t$ definido na equação (86), a recursão para a média suavizada do estado pode ser obtida através da seguinte equação:

$$a_{t|n} = a_{t|t} + \mathcal{J}_t(a_{t+1|n} - a_{t+1|t}) \quad (87)$$

Na equação (87), a variável $a_{t|t}$ representa a média filtrada do estado no instante de tempo t , a variável $a_{t+1|t}$ representa a média predita para o instante de tempo $t + 1$ com base apenas em dados até o instante de tempo t , a variável $a_{t+1|n}$ representa a média suavizada no instante de tempo $t + 1$, que já incorpora toda a informação até n . O termo $(a_{t+1|n} - a_{t+1|t})$ é, portanto, uma medida de *quanto aprendemos a mais* sobre o estado em $t + 1$ ao usar dados futuros, ao multiplicá-lo por $\mathcal{J}_t$ e somar em $a_{t|t}$, redistribui-se essa informação de volta para o instante de tempo t , gerando uma estimativa retrospectiva mais precisa de α_t (RAUCH; TUNG; STRIEBEL, 1965; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A recursão para a covariância suavizada é obtida através da seguinte equação:

$$P_{t|n} = P_{t|t} + \mathcal{J}_t(P_{t+1|n} - P_{t+1|t})\mathcal{J}_t^{-1} \quad (88)$$

Na equação (88), a variável $P_{t|t}$ representa a covariância filtrada do estado no instante de tempo t , a variável $P_{t+1|t}$ representa a covariância predita para o instante de tempo $t + 1$ com base em dados até o instante de tempo t , e a variável $P_{t+1|n}$ representa a covariância suavizada no instante de tempo $t + 1$. Como a variável $P_{t+1|n}$ tende a ser menor que $P_{t+1|t}$ (porque usar mais dados reduz incerteza), a diferença $(P_{t+1|n} - P_{t+1|t})$ é tipicamente negativa, e o termo $\mathcal{J}_t(\cdot)\mathcal{J}_t^{-1}$ ajusta $P_{t|t}$ para baixo, refletindo que as estimativas suavizadas geralmente têm menor variância do que as filtradas. Assim, o suavizador não apenas *corrige* a média do estado passado, mas também quantifica o ganho de precisão ao incorporar toda a amostra (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Uma vez obtidos as variáveis $a_{t|n}$ e $P_{t|n}$, é comum

construir a estimativa suavizada do sinal observado (a parte explicada do modelo) e, quando necessário, imputar valores ausentes de y_t . A estimativa suavizada da observação é obtida pela seguinte equação:

$$\hat{y}_{t|n} = \mathbb{Z}_t a_{t|n} \quad (89)$$

E sua respectiva variância condicional, incluindo-se o erro de observação, é obtida pela seguinte equação:

$$\text{Var}(y_t|y_{1:n}) = \mathbb{Z}_t P_{t|n} \mathbb{Z}_t^{-1} + H_t \quad (90)$$

No caso univariado, o termo $\mathbb{Z}_t P_{t|n} \mathbb{Z}_t^{-1}$ consiste num escalar que representa a incerteza do estado suavizado projetada na observação e H_t representa a variância do ruído de medição. Essa relação evidencia por que o suavizador é particularmente útil em decomposições estruturais pois, ele entrega, para cada instante de tempo, a melhor reconstrução do estado (por exemplo, tendência e sazonalidade) e a incerteza associada, permitindo interpretações mais estáveis do que aquelas baseadas apenas em filtragem, especialmente no interior da amostra (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Além disso, quando há observações faltantes, o filtro pode ser executado tratando o passo de atualização de forma apropriada (isto é, propagando apenas a previsão quando y_t está ausente), e o suavizador, ao final, produz $a_{t|n}$ que permite imputar $\hat{y}_{t|n}$ de maneira coerente com a dinâmica e com as incertezas do modelo, prática amplamente discutida na literatura de modelos em espaço de estados (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

2.11 – O método da máxima verossimilhança

O método da máxima verossimilhança é um dos principais procedimentos de estimação em estatística, sendo largamente utilizado tanto em modelos clássicos quanto em estruturas mais complexas, como os modelos de séries temporais no espaço de estados. A ideia fundamental consiste em escolher os valores dos parâmetros de um modelo, de modo que a probabilidade de observar a amostra disponível seja a maior possível, ou seja, busca-se o conjunto de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança associada aos dados. Esse princípio, introduzido por *Fisher* no início do século XX, fornece um estimador com propriedades desejáveis sob condições regulares, como consistência, eficiência assintótica e

normalidade assintótica (FISHER, 1922; HARVEY, 1989; MORETTIN; TOLOI, 2006). Formalmente, suponha-se um vetor de observações independentes e identicamente distribuídas y , cuja função densidade de probabilidade depende de um vetor de parâmetros θ . A função de verossimilhança é definida através da seguinte equação:

$$L(\theta; y) = \prod_{t=1}^T f(y_t; \theta) \quad (91)$$

Onde a função $f(y_t; \theta)$ representa a densidade de probabilidade considerado para os dados. Por conveniência computacional, trabalha-se com a função log-verossimilhança (*função loglik*), definida através da seguinte equação:

$$\ell(\theta; y) = \sum_{t=1}^T \ln[f(y_t; \theta)] \quad (92)$$

O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é obtido através da solução numérica do seguinte problema de otimização:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ell(\theta; y) \quad (93)$$

Em muitos casos, não é possível obter solução analítica, recorrendo-se então a métodos numéricos de otimização, como *Newton-Raphson*, *Gradiente* ou *Algoritmos Quasi-Newton*, que iteram até encontrar o ponto que maximiza a log-verossimilhança. No contexto da modelagem de séries temporais, e em particular de modelos formulados no espaço de estados, o método da máxima verossimilhança desempenha papel central. Nessas situações, as observações são dependentes no tempo e a função de verossimilhança não pode ser escrita simplesmente como o produto de densidades independentes.

A solução é utilizar o filtro de *Kalman* para calcular recursivamente a verossimilhança a partir da decomposição em previsões sucessivas. Esse resultado é fundamental porque permite avaliar a verossimilhança mesmo em presença de dependência temporal, já que o filtro de *Kalman* fornece as previsões condicionais necessárias de forma recursiva e eficiente (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A utilização da máxima verossimilhança em séries temporais univariadas no espaço de estados tem várias vantagens. Primeiramente, ela possibilita a estimação conjunta de parâmetros de variâncias dos ruídos de observação e de

estado, os quais controlam a suavidade de componentes como nível, tendência e sazonalidade. Em segundo lugar, a maximização da log-verossimilhança garante que os parâmetros escolhidos maximizam a adequação estatística do modelo aos dados, em termos probabilísticos. Além disso, a função de log-verossimilhança permite a construção de testes de hipóteses, intervalos de confiança e comparações entre modelos por meio de critérios de informação, como o *Critério de Informação Bayesiana de Schwarz (BIC)*, que derivam diretamente do valor da verossimilhança maximizada (SHUMWAY; STOFFER, 2017; MORETTIN; TOLOI, 2006).

Do ponto de vista prático, quando se trabalha com séries univariadas e modelos estruturais simples, como o de nível local e o de tendência linear local, com componentes sazonais, o procedimento de máxima verossimilhança se mostra computacionalmente viável mesmo para séries longas, já que o filtro de *Kalman* possui complexidade linear em relação ao número de observações. Isso torna a metodologia particularmente atraente em aplicações que vão da econometria à climatologia, passando pelo planejamento energético, onde se busca ajustar modelos probabilísticos a séries temporais para fins de previsão e imputação de dados faltantes. Quando valores estão ausentes, a estimação por máxima verossimilhança continua válida, pois o filtro de *Kalman* pode lidar naturalmente com observações faltantes ao simplesmente omitir a etapa de atualização naquele instante, preservando a coerência do cálculo da verossimilhança.

Desta forma, nota-se que o método da máxima verossimilhança consiste na base inferencial da modelagem em espaço de estados, pois fornece um critério estatístico robusto e universal para se estimar os parâmetros do modelo, a partir de séries temporais univariadas. Ao ser combinado com o filtro de *Kalman*, esse método torna-se computacionalmente eficiente e estatisticamente consistente, permitindo decompor séries em componentes latentes, ajustar modelos estruturais e realizar previsões fundamentadas em uma estrutura probabilística rigorosa (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

2.12 – Resíduos recursivos padronizados

A definição dos resíduos recursivos padronizados surge no contexto da modelagem de séries temporais por meio de modelos no espaço de estados, especialmente quando se utiliza o filtro de *Kalman* para estimação dos estados não observáveis e diagnóstico da adequação do modelo. Em tais modelos, assume-se uma formulação geral composta por uma equação de observação, e uma equação de transição dos estados, ambas definidas previamente pelas equações (1) e (2) respectivamente (DURBIN; KOOPMAN, 2012). No processo de filtragem, o filtro de *Kalman* fornece, a cada instante de tempo t , uma previsão recursiva $\hat{y}_{t|t-1}$ baseada

na estimativa preditiva do estado do sistema. A diferença entre o valor observado e o valor previsto gera o chamado resíduo recursivo v_t (ou inovação), definido pela seguinte equação:

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} \quad (94)$$

A variância associada a esse resíduo é definida pela seguinte equação:

$$F_t = \mathbb{Z}_t P_{t|t-1} \mathbb{Z}_t' + H_t \quad (95)$$

Na equação (95) a variável $P_{t|t-1}$ representa a matriz de variância-covariância da previsão do estado. Os resíduos recursivos padronizados r_t são então definidos da seguinte forma:

$$r_t = \frac{v_t}{\sqrt{F_t}} \quad (96)$$

Os resíduos recursivos padronizados são amplamente utilizados na análise de séries temporais univariadas no espaço de estados porque permitem avaliar, de maneira eficiente e sequencial, a adequação do modelo durante o processo de filtragem. Diferentemente dos resíduos ordinários obtidos após o ajuste de modelos tradicionais, estes resíduos incorporam a incerteza da previsão do estado a cada etapa temporal, refletindo não apenas discrepâncias entre observação e previsão, mas também o acúmulo de informação do sistema dinâmico (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Dessa forma, eles são particularmente úteis para se detectar quebras estruturais, outliers ou períodos em que o modelo apresenta mau desempenho preditivo. Além disso, por seguirem uma distribuição conhecida sob o modelo correto, possibilitam a aplicação direta de testes estatísticos, como testes de normalidade, autocorrelação ou heterocedasticidade, permitindo um diagnóstico robusto e sistematizado do comportamento da série (KIM; NELSON, 1999). Na prática, ao se ajustar modelos estruturais, modelos de tendência estocástica ou modelos de componentes não observáveis, a inspeção dos resíduos recursivos padronizados é uma etapa fundamental na validação da modelagem. Gráficos de r_t , autocorrelações dos resíduos e bandas de confiança são empregados para identificar possíveis inadequações.

Quando os resíduos se mostram compatíveis com um ruído branco padrão, isso indica que o modelo está capturando adequadamente a dinâmica temporal latente da série, caso contrário, ajustes na especificação, inclusão de componentes ou alteração nas variâncias dos ruídos podem ser necessários. Assim, os resíduos recursivos padronizados funcionam como

ferramenta central na calibração e verificação de modelos no espaço de estados, especialmente aqueles aplicados a séries temporais univariadas (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012; KIM; NELSON, 1999).

2.13 – A função de autocorrelação

A função de autocorrelação é um dos instrumentos fundamentais da análise de séries temporais, desempenhando papel central tanto na identificação de estruturas dinâmicas presentes nos dados quanto na verificação da adequação de modelos ajustados. Em termos formais, considere uma série temporal estacionária y_t com média μ e variância constante σ^2 . A autocorrelação na defasagem k , denotada por $\rho(k)$, é definida como a covariância entre os valores da série separados por k períodos, devidamente normalizada pela variância. Matematicamente, a função de autocorrelação é dada por:

$$\rho(k) = \frac{\mathcal{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]}{\sigma^2} \quad (97)$$

Em aplicações empíricas, como é comum não se conhecerem os verdadeiros valores de μ e de σ^2 , utilizam-se as versões amostrais da função de autocorrelação. Desta forma, para uma série observada y_t , a função de autocorrelação estimada na defasagem k é dada por:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-k} - \bar{y}_t)}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad (98)$$

Na equação (98) a variável $\bar{y}_t$ representa a média amostral. A função de autocorrelação é essencial porque captura a dependência linear entre as observações ao longo do tempo, valores significativos de $\hat{\rho}(k)$ indicam que a série apresenta memória temporal, característica típica de processos autorregressivos, médias móveis ou modelos mistos (BROCKWELL; DAVIS, 2016). A inspeção do gráfico da função de autocorrelação, conhecido como correlograma, permite identificar padrões como decaimento exponencial, cortes abruptos ou oscilações sinusoidais, que auxiliam na especificação de modelos adequados.

No contexto da modelagem de séries temporais univariadas no espaço de estados, a função de autocorrelação desempenha papel igualmente central, especialmente no diagnóstico do comportamento dos resíduos recursivos padronizados obtidos via filtro de *Kalman*. Após a estimação de um modelo no espaço de estados, seja ele um modelo estrutural básico, de

tendência estocástica ou de componentes não observáveis, obtém-se a sequência de resíduos recursivos padronizados r_t . Sob a hipótese de que o modelo está corretamente especificado, espera-se que os resíduos r_t se comportem como um ruído branco padrão, ou seja, uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância unitária. Uma das implicações diretas dessa suposição é que a função de autocorrelação dos resíduos deve apresentar valores próximos de zero para todas as defasagens, exceto na defasagem zero, cuja autocorrelação é necessariamente igual a 1 pela própria definição (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Desta forma, a aplicação da função de autocorrelação aos resíduos recursivos padronizados fornece um teste visual e quantitativo de adequação do modelo no espaço de estados. Se o correlograma dos resíduos mostrar autocorrelações significativas em defasagens positivas, isso sugere que a estrutura dinâmica da série não foi completamente capturada pelo modelo, existindo, portanto, uma dependência temporal remanescente nos resíduos. Essa situação pode indicar necessidade de reespecificar o modelo, por exemplo, ajustando as variâncias dos ruídos, incluindo novos componentes estruturais ou revisando a parametrização das matrizes $\mathbb{Z}_t$, $\mathbb{T}_t$, $\mathbb{R}_t$ e H_t .

A ausência de autocorrelação, por sua vez, reforça que as inovações estão adequadamente randomizadas, corroborando que o modelo é capaz de captar (modelar) a dinâmica subjacente da série e que o processo de filtragem está produzindo previsões consistentes (HARVEY, 1989). Além do uso exploratório, a função de autocorrelação pode ser empregada formalmente em testes estatísticos, como o teste de *Ljung-Box*, que avalia se o conjunto das autocorrelações, até uma determinada defasagem, é simultaneamente igual a zero. A aplicação do referido teste nos resíduos recursivos padronizados fornece evidências adicionais sobre a independência temporal dessas inovações, sendo útil para se verificar se algum padrão sistemático persiste após o ajuste do modelo.

A função de autocorrelação não auxilia apenas na fase inicial de identificação dos modelos, mas também se torna num instrumento indispensável na etapa de validação de modelos no espaço de estados estimados por métodos de filtragem recursiva (BROCKWELL; DAVIS, 2016; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A função de autocorrelação oferece tanto um arcabouço teórico quanto uma ferramenta prática para compreender a dependência temporal presente em séries e para avaliar a eficácia de modelos univariados no espaço de estados. Ao analisar o perfil dos resíduos recursivos padronizados por meio de seus correlogramas, é possível identificar se o modelo está corretamente especificado ou se há necessidade de ajustes, evidenciando assim, o papel imprescindível desta função no diagnóstico de modelos.

2.14 – A função de autocorrelação parcial

A função de autocorrelação parcial é uma ferramenta fundamental na análise de séries temporais, complementando a função de autocorrelação ao permitir a identificação mais clara da estrutura autorregressiva presente nos dados. Enquanto a autocorrelação simples mede a dependência linear entre y_t e y_{t-k} considerando todas as correlações intermediárias, a autocorrelação parcial isola exclusivamente a correlação entre esses dois pontos no tempo, removendo a influência das defasagens intermediárias. Assim, a autocorrelação parcial na defasagem k , usualmente denotada por ϕ_{kk} , expressa o impacto direto de y_{t-k} sobre y_t , condicionando-se a todas as outras observações. Em termos formais, a autocorrelação parcial pode ser definida como o coeficiente de regressão resultante da seguinte equação:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_k y_{t-k} + \epsilon_t \quad (99)$$

de modo que:

$$\phi_{kk} = \beta_k \quad (100)$$

A autocorrelação parcial na defasagem k pode ser obtida também por uma outra formulação equivalente através da seguinte equação:

$$\phi_{kk} = \frac{\hat{\rho}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \hat{\rho}(k-j)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \hat{\rho}(j)} \quad (101)$$

Na equação (101) as variáveis $\phi_{k-1,j}$ são autocorrelações parciais previamente calculadas (BROCKWELL; DAVIS, 2016). No contexto empírico, a autocorrelação parcial estimada é usualmente empregada por meio do correlograma parcial, que apresenta picos significativos apenas nas defasagens em que há dependência direta entre os valores da série. Um corte brusco após uma determinada defasagem sugere, por exemplo, que um processo autorregressivo da ordem correspondente é adequado.

Quando a análise se desloca para o âmbito da modelagem de séries temporais no espaço de estados, especialmente após a estimação de modelos pelo filtro de *Kalman*, a função de autocorrelação parcial torna-se um instrumento valioso no diagnóstico dos resíduos recursivos padronizados. Os mesmos devem comportar-se como uma sequência de ruído branco padrão se o modelo estiver corretamente especificado. Isso implica, além de ausência de autocorrelação

simples, ausência de autocorrelações parciais significativas em todas as defasagens positivas. A inspeção da função de autocorrelação parcial dos resíduos recursivos padronizados permite verificar se há dependência linear residual específica, não capturada pela simples função de autocorrelação.

Em muitos casos, uma série pode apresentar autocorrelações simples pequenas ou aparentemente aleatórias, mas exibir autocorrelações parciais significativas, revelando dependência direta em defasagens específicas. Assim, o correlograma parcial funciona como uma lente mais precisa, capaz de identificar padrões sutis de especificação inadequada do modelo no espaço de estados. Autocorrelações parciais significativas nos resíduos podem indicar que a estrutura dinâmica proposta, incluindo as matrizes de transição, de observação ou as variâncias dos ruídos, não captura adequadamente alguma componente determinística ou estocástica da série temporal, exigindo revisão na formulação do modelo ou inclusão de novos componentes estruturais (HARVEY, 1989).

Além disso, a função de autocorrelação parcial é particularmente útil para distinguir entre modelos alternativos na fase de diagnóstico. Por exemplo, se os resíduos exibem autocorrelações simples pequenas, mas autocorrelações parciais relevantes apenas na defasagem 1, isso sugere que a estrutura implícita pode ser semelhante a um processo autorregressivo de primeira ordem não modelado explicitamente. Já padrões persistentes em várias defasagens indicam falta de captura de tendências, ciclos ou dependências de maior ordem. Assim, a análise conjunta da função de autocorrelação e da autocorrelação parcial dos resíduos recursivos padronizados constitui numa etapa essencial para se garantir a validade estatística de modelos univariados no espaço de estados estimados por filtragem recursiva.

2.15 – O teste estatístico de *Ljung-Box*

O teste estatístico de *Ljung-Box* é um dos instrumentos mais utilizados na análise de séries temporais para verificar se os resíduos de um modelo podem ser considerados ruído branco, ou seja, se são independentes e não apresentam autocorrelação significativa. A premissa central é que, após o ajuste de um modelo adequado, seja ele autorregressivo, de médias móveis ou mesmo modelos mais gerais formulados no espaço de estados, os resíduos padronizados devem se comportar como uma sequência não correlacionada.

Caso isso não ocorra, a presença de autocorrelação indica que há estrutura temporal não capturada pelo modelo, sugerindo a necessidade de uma especificação mais rica. Nesse sentido, o teste de *Ljung-Box* funciona como uma ferramenta de diagnóstico fundamental na avaliação

da adequação do ajuste (LJUNG; BOX, 1978; MORETTIN; TOLOI, 2006; SHUMWAY; STOFFER, 2017). A estatística do teste foi proposta como uma modificação do teste de *Box-Pierce*, introduzindo uma correção para amostras finitas que melhora a aproximação à distribuição qui-quadrado. Seja $\hat{\rho}_k$ o coeficiente de autocorrelação amostral dos resíduos padronizados na defasagem k , e m o número de defasagens a serem avaliadas. A estatística de *Ljung-Box* é dada pela seguinte equação:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (102)$$

Em que n represente o tamanho da amostra efetiva de resíduos. Sob a hipótese nula de que os resíduos recursivos padronizados não apresentam autocorrelação (hipótese de ruído branco), $Q(m)$ tem, assintoticamente, distribuição *qui-quadrado* com $m - p - q$ graus de liberdade, quando o modelo ajustado é *ARMA*(p, q), sendo necessário descontar o número de parâmetros estimados (LJUNG; BOX, 1978). O *p-valor* do teste é então obtido comparando-se a estatística calculada com a distribuição *qui-quadrado* correspondente.

Valores pequenos de *p-valor* indicam rejeição da hipótese nula, ou seja, evidência de que há autocorrelação remanescente nos resíduos recursivos padronizados. Na prática da modelagem de séries temporais univariadas no espaço de estados, o teste de *Ljung-Box* assume papel central na validação do ajuste. Após a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança com auxílio do filtro de *Kalman*, obtêm-se os resíduos recursivos padronizados, que devem ser avaliados em termos de independência e homocedasticidade. A aplicação do teste de *Ljung-Box* a esses resíduos permite verificar se a estrutura especificada no modelo foi capaz de capturar, de forma adequada, a dependência temporal da série sob análise.

Por exemplo, em um modelo estrutural de nível local com componente sazonal, espera-se que, após o ajuste, os resíduos não apresentem autocorrelação significativa. Se o teste indicar rejeição da hipótese nula, isso sugere que a sazonalidade ou a tendência não foram modeladas adequadamente, ou ainda que seja necessário incluir uma componente *ARMA* para capturar dependências residuais (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Do ponto de vista didático, é importante compreender que o teste de *Ljung-Box* não é utilizado para testar a presença de autocorrelação em uma única defasagem, mas sim em um conjunto delas, avaliando a dependência global dos resíduos até a defasagem m . Isso o torna particularmente útil como ferramenta de diagnóstico geral da adequação do modelo. Além disso, a escolha de m deve ser

feita com cuidado pois, valores muito pequenos podem não detectar dependências de maior ordem, enquanto valores muito grandes podem reduzir o poder do teste devido à inclusão de defasagens pouco informativas. Recomenda-se normalmente considerar múltiplos valores de m , como 10, 15 ou 20, dependendo do tamanho da série, a fim de se verificar a robustez dos resultados (SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Desta forma, constata-se que o teste de *Ljung-Box* se integra, de forma natural, ao processo de validação de modelos no espaço de estados, sendo aplicado diretamente aos resíduos recursivos padronizados obtidos pelo filtro de *Kalman*. Ele fornece uma forma clara e estatisticamente fundamentada de avaliar se o modelo conseguiu eliminar a autocorrelação da série original, o que é um requisito essencial para a validade das inferências e previsões subsequentes. Caso a hipótese nula não seja rejeitada, tem-se um forte indício de que o modelo está bem especificado em termos de dependência temporal. Caso contrário, o diagnóstico orienta a reformulação do modelo, promovendo um ciclo iterativo de especificação, estimação e validação, que é a essência do processo de modelagem estatística de séries temporais (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

2.16 – O teste estatístico de *Shapiro-Wilk*

O teste estatístico de *Shapiro-Wilk* é um dos procedimentos mais difundidos para se avaliar a hipótese de normalidade de uma amostra, sendo amplamente empregado em análises estatísticas que pressupõem a distribuição normal dos resíduos ou dos erros. Proposto originalmente por *Shapiro* e *Wilk* em 1965, o teste se destaca por sua potência em detectar desvios da normalidade em comparação a métodos mais simples, como o teste de *Kolmogorov-Smirnov*, especialmente em amostras pequenas ou moderadas.

A importância desse teste na análise de séries temporais, sobretudo no contexto da modelagem em espaço de estados, reside no fato de que muitas inferências e previsões são baseadas na suposição de que os erros de observação e de estado seguem distribuições normais. Quando essa suposição é violada, a validade dos intervalos de confiança pode ser comprometida (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Formalmente, o teste de *Shapiro-Wilk* avalia a proximidade entre a distribuição empírica dos dados e a distribuição normal teórica, utilizando uma estatística baseada na correlação entre as ordens estatísticas amostrais e as esperadas sob normalidade. Seja uma amostra de tamanho n , representada por $x_1, x_2, \dots, x_n$ e ordenada de forma crescente, define-se a estatística do teste através da seguinte equação:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (103)$$

em que $\bar{x}$ representa a média amostral, e os coeficientes a_i são calculados a partir dos valores esperados e da matriz de covariância dos quantis de uma distribuição normal padrão. Esses coeficientes atribuem maior peso às observações mais extremas, já que desvios da normalidade costumam se manifestar de maneira mais clara nas caudas da distribuição.

O valor da estatística W varia entre 0 e 1, sendo que valores próximos de 1 indicam maior aderência à normalidade. A hipótese nula do teste estabelece que a amostra segue uma distribuição normal, enquanto a alternativa é de que ela não é normal. O *p-valor* é calculado a partir da distribuição assintótica da estatística W , permitindo ao pesquisador decidir pela rejeição ou não da hipótese de normalidade (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992). Na modelagem de séries temporais univariadas no espaço de estados, o teste de *Shapiro-Wilk* encontra aplicação direta na análise de resíduos recursivos padronizados obtidos pelo filtro de *Kalman*.

Após o ajuste de um modelo estrutural, como o de nível local ou o de tendência linear local, com componentes sazonais, é fundamental avaliar se os resíduos apresentam comportamento compatível com ruído branco normalmente distribuído. Enquanto o teste de *Ljung-Box* avalia a independência serial, o teste de *Shapiro-Wilk* verifica a adequação da hipótese de normalidade. A combinação desses diagnósticos é essencial, pois a distribuição normal dos resíduos garante que os estimadores obtidos por máxima verossimilhança possuam propriedades assintóticas desejáveis e que os intervalos de confiança derivados da variância dos estados estimados sejam válidos. Quando o teste rejeita a hipótese de normalidade, pode ser indicativo de que a série possui caudas pesadas, assimetria ou mesmo outliers não tratados. Nesses casos, transformações como a *Box-Cox* podem ser aplicadas para estabilizar a variância e aproximar a distribuição dos resíduos da normalidade, ou ainda pode-se adotar extensões do espaço de estados para distribuições não gaussianas (DURBIN; KOOPMAN, 2012; MORETTIN; TOLOI, 2006).

Do ponto de vista didático, é importante salientar que a normalidade dos resíduos não é um requisito absoluto para que o modelo seja útil, ou para que o filtro de *Kalman* opere corretamente, mas aumenta consideravelmente a confiabilidade das inferências. O teste de *Shapiro-Wilk*, ao ser aplicado em conjunto com ferramentas gráficas, como histogramas e gráficos quantil-quantil, fornece evidências robustas sobre a adequação da hipótese de normalidade. Desta forma, nota-se que o teste de *Shapiro-Wilk* é uma ferramenta estatística

amplamente utilizada para se avaliar a hipótese de normalidade, baseada na correlação entre as ordens estatísticas da amostra e os quantis da distribuição normal teórica. Sua aplicação na modelagem de séries temporais no espaço de estados é particularmente relevante, pois assegura que os resíduos atendam a uma das premissas fundamentais da inferência clássica, garantindo maior validade aos resultados obtidos por métodos como a máxima verossimilhança e pela utilização do filtro e do suavizador de *Kalman* (MORETTIN; TOLOI, 2006).

2.17 – O critério de informação bayesiana de Schwarz

O critério de informação bayesiana de Schwarz, amplamente conhecido como *BIC* (do inglês, *Bayesian Information Criterion*), consiste numa medida estatística empregada para se selecionar modelos entre diferentes especificações concorrentes, equilibrando o ajuste do modelo aos dados e a complexidade da parametrização. Sua motivação central decorre da necessidade de se evitar sobreajuste, ou seja, a escolha de modelos excessivamente complexos que se ajustam muito bem à amostra disponível, mas apresentam baixo desempenho preditivo fora dela.

O *BIC* deriva de uma aproximação do logaritmo da evidência marginal do modelo sob uma perspectiva bayesiana, incorporando um termo de penalização que cresce com o número de parâmetros estimados (SCHWARZ, 1978). Formalmente, seja $\ell(\hat{\theta})$ o valor da função de log-verossimilhança avaliada pelo estimador de máxima verossimilhança de um determinado modelo de série temporal com k parâmetros, e seja N o número total de observações da série temporal. O indicador *BIC* é definido através da seguinte equação:

$$BIC = -2\ell(\hat{\theta}) + k \ln(N) \quad (104)$$

O termo $-2\ell(\hat{\theta})$ presente na equação (104) está associado ao poder de ajuste do modelo, sendo que, quanto maior for a verossimilhança, menor será o valor do indicado *BIC*, e desta forma, melhor será o ajuste aos dados observados. Já o termo $k \ln(N)$ exerce um papel de penalização, pois, quanto maior o número de parâmetros do modelo, maior será a penalização aplicada, desencorajando a adoção de modelos desnecessariamente complexos. O modelo preferido entre um conjunto de candidatos é aquele que apresenta o menor valor de *BIC*, refletindo o melhor equilíbrio entre parcimônia e ajuste (BURNHAM; ANDERSON, 2002).

Na modelagem de séries temporais univariadas, o *BIC* é amplamente utilizado para selecionar ordens de modelos autorregressivos de médias móveis, entretanto, sua utilidade é

igualmente importante nos modelos formulados no espaço de estados, especialmente aqueles estimados por meio do filtro de *Kalman*. Em tais modelos, a determinação da estrutura adequada, como o número de componentes de tendência, ciclo, ruído, nível, sazonalidade ou a escolha entre componentes estocásticos e determinísticos, depende de um critério formal que penalize complexidade, evitando que o modelo incorpore componentes desnecessários que não contribuam significativamente para a representação da dinâmica da série (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Durante a estimação de modelos no espaço de estados, o logaritmo da verossimilhança $\ell(\hat{\theta})$ é calculado com base nas inovações produzidas pelo filtro de *Kalman*. Como essas inovações são assumidas gaussianas, independentes e com variâncias conhecidas F_t , a verossimilhança pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\ell(\hat{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(2\pi F_t) + \frac{v_t^2}{F_t} \right] \quad (105)$$

Na equação (105) a variável v_t representa o resíduo recursivo no instante de tempo t . Esse valor é então utilizado na expressão do *BIC* para cada especificação candidata de modelo. Desta maneira, o *BIC* se torna uma ferramenta objetiva para comparar modelos alternativos, permitindo decidir, por exemplo, se a tendência deve ser modelada como localmente linear ou simplesmente aleatória, se um ciclo estocástico deve ser incluído, ou se a componente sazonal deve ser tratada de maneira determinística ou estocástica (HARVEY, 1989).

O uso do *BIC* em modelos no espaço de estados é particularmente vantajoso porque ele tende a favorecer modelos mais parcimoniosos, característica consistente com a filosofia de modelagem contemporânea, que privilegia estruturas simples e interpretáveis, evitando complexidade excessiva. Além disso, o *BIC* é consistente no sentido estatístico pois, à medida que o tamanho amostral aumenta, a probabilidade de o critério selecionar o modelo verdadeiro (quando este pertence à classe de modelos considerados) converge para 1, característica desejável em aplicações de longa duração ou séries extensas (SCHWARZ, 1978).

Na prática, ao modelar séries temporais univariadas no espaço de estados, o *BIC* é utilizado em conjunto com outras ferramentas de diagnóstico, como os resíduos recursivos padronizados e as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. Enquanto essas ferramentas avaliam a adequação interna do modelo, o *BIC* atua como critério comparativo externo, auxiliando o pesquisador a decidir entre diferentes alternativas de estrutura.

3.0 – MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 – Descrição geral do procedimento metodológico

A imputação de séries temporais meteorológicas univariadas, quando realizada no âmbito da engenharia elétrica para fins de planejamento energético, exige um procedimento metodológico rigoroso, apoiado em fundamentos estatísticos sólidos e em práticas amplamente aceitas pela literatura especializada. O ponto de partida é reconhecer que séries meteorológicas, como precipitação, radiação solar, vazão ou temperatura, frequentemente apresentam lacunas devido a falhas de sensores, interrupções de comunicação ou limitações operacionais.

A ausência desses dados compromete a modelagem hidrológica, o dimensionamento de sistemas energéticos renováveis e a análise de confiabilidade do suprimento. Assim, a imputação deve ser tratada não como um mero preenchimento arbitrário, mas como um processo inferencial estatisticamente consistente, capaz de preservar a estrutura temporal da série e fornecer medidas explícitas de incerteza (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

O procedimento metodológico a ser utilizado na presente monografia fundamenta-se na formulação de modelos estruturais no espaço de estados, que permitem decompor a série temporal de interesse em componentes interpretáveis e estocásticos. Em termos gerais, a série observada é representada como a soma de um nível ou tendência, de uma componente sazonal e de um erro de observação. Essa formulação é compatível com a representação em espaço de estados, composta pela equação de observação, e pela equação de transição. O objetivo é estimar o vetor de estados latentes ao longo do tempo, mesmo nos instantes em que não existem dados observados (dados faltantes), utilizando-se para isso o filtro e o suavizador de *Kalman*. Dois modelos estruturais se destacam para a imputação de séries meteorológicas, são eles, o modelo de nível local com componente sazonal clássica e o modelo de tendência linear local com componente sazonal clássica.

O primeiro é adequado para séries em que o comportamento de longo prazo pode ser descrito por um nível estocástico que evolui segundo um passeio aleatório, enquanto o segundo é indicado quando, além do nível, há indícios de uma tendência que também varia ao longo do tempo (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). O procedimento metodológico consiste em, primeiramente, se especificar o modelo estrutural adequado de acordo com o perfil da série temporal e o horizonte de análise. Essa etapa exige análise exploratória da série, incluindo decomposição clássica, inspeção de gráficos sazonais e verificação de tendências. Em

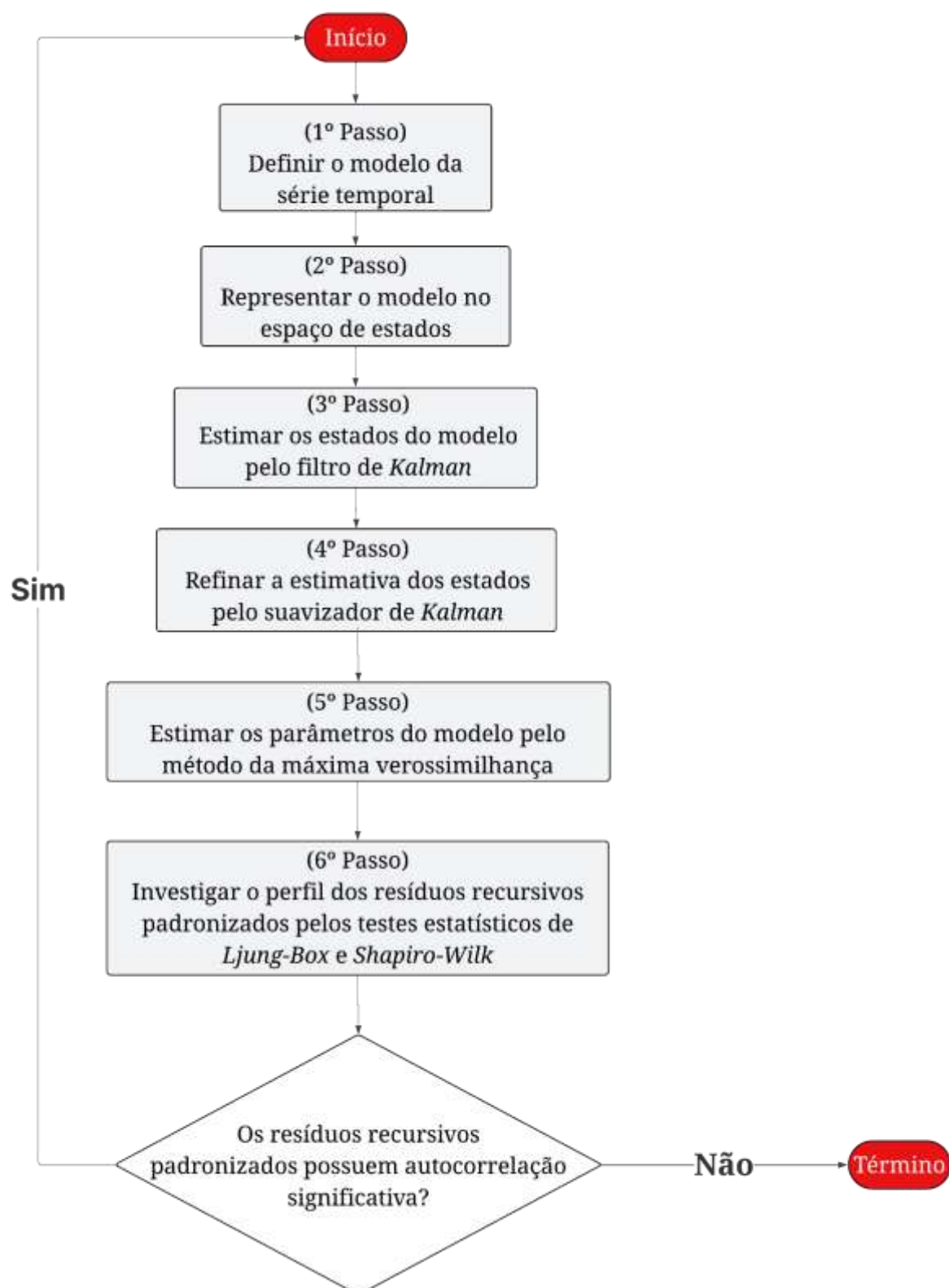
seguida, define-se a formulação em espaço de estados correspondente, estabelecendo as matrizes do modelo escolhido.

Uma vez especificado, aplica-se o filtro de *Kalman* para se calcular, de forma recursiva, as previsões e as variâncias associadas a cada observação, ainda que algumas delas estejam ausentes. Quando um determinado valor da série temporal está faltando, o filtro simplesmente omite a etapa de atualização, propagando apenas a previsão. Posteriormente, o suavizador de *Kalman* percorre a série retrospectivamente, utilizando toda a informação disponível até o instante de tempo final, para refinar as estimativas dos estados e reconstruir as observações faltantes por meio da esperança condicional.

A estimação dos parâmetros do modelo, notadamente as variâncias dos ruídos do modelo considerado, é realizada pelo método da máxima verossimilhança. A função de verossimilhança é construída a partir dos erros de predição e suas variâncias, fornecidos pelo filtro de *Kalman*. O estimador de máxima verossimilhança busca o conjunto de parâmetros que efetua a maximização da função de verossimilhança do modelo. Essa etapa garante que os parâmetros sejam consistentes com a estrutura temporal dos dados e fornece base para comparações de modelos por meio de critérios de informação, tais como o *BIC* (DURBIN; KOOPMAN, 2012; MORETTIN; TOLOI, 2006).

Após o ajuste, é imprescindível realizar uma etapa de validação. Nela, analisam-se os resíduos recursivos padronizados em busca de independência, homocedasticidade e normalidade. Testes como o de *Ljung-Box* avaliam a presença de autocorrelação remanescente, enquanto o de *Shapiro-Wilk* verifica a adequação da hipótese de normalidade. Caso os resíduos apresentem comportamento de ruído branco aproximadamente normal, o modelo é considerado adequado, e os valores imputados podem ser utilizados com confiança em aplicações subsequentes, como o planejamento da operação de usinas hidrelétricas a fio d'água ou o dimensionamento de sistemas fotovoltaicos (HARVEY, 1989; SHUMWAY; STOFFER, 2017). No fluxograma apresentado na figura 3 apresenta-se, de forma objetiva, os passos de execução do procedimento metodológico acima descrito.

Figura 3 – Fluxograma de execução do procedimento metodológico.



Fonte: Do autor.

3.2 – Breve descrição do pacote *statespacer*

O pacote *statespacer*, disponível para a *linguagem R*, foi concebido para se ajustar, diagnosticar e prever modelos de séries temporais formulados no espaço de estados, oferecendo uma interface prática para a classe linear-gaussiana e para a família de modelos estruturais clássicos. A filosofia do pacote é aproximar o usuário da formulação matricial padrão do espaço de estados, abstraindo a montagem manual das matrizes do modelo no espaço de estados quando o analista opta por componentes estruturais pré-definidos, e ao mesmo tempo permitindo especificações personalizadas quando necessário. Nessa moldura, o pacote implementa os algoritmos fundamentais de filtragem e suavização de *Kalman*, bem como o cálculo da log-verossimilhança por decomposição em erros de predição, o que possibilita a estimação de hiperparâmetros por máxima verossimilhança e o uso rotineiro de critérios de informação (*BIC*) e testes sobre resíduos, em estrita consonância com a literatura de referência (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Do ponto de vista do usuário, o fluxo de trabalho típico começa pela escolha de uma decomposição estrutural coerente com o problema empírico. Para séries univariadas, o pacote disponibiliza sinalizadores (ou listas de configuração) que ativam componentes amplamente utilizados, tais como, nível local estocástico, tendência linear local, sazonalidade do tipo clássica ou trigonométrica (com harmônicos definidos pelo período), e ciclo estocástico amortecido. Quando persistem dependências de curta duração nos resíduos, o pacote permite a incorporação de termos *ARIMA/SARIMA* diretamente no arcabouço de espaço de estados, o que tem duas vantagens práticas, o cálculo de verossimilhança permanece *exato* sob a ótica do filtro de *Kalman*, e a presença de valores ausentes é tratada de forma natural, bastando ao filtro *pular* a etapa de atualização nas observações faltantes, enquanto o suavizador reconstrói retrospectivamente estados e valores imputados.

Essa integração entre componentes estruturais e *Box-Jenkins* é particularmente útil em aplicações nas quais a tendência e a sazonalidade são de interesse substantivo, mas resíduos ainda exibem autocorrelação (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012). A estimação por máxima verossimilhança é conduzida numericamente, a partir da log-verossimilhança. O pacote oferece escolhas padrão sensatas de inicialização, transformações de parâmetros que garantem positividade de variâncias e estacionariedade de parâmetros *AR/MA*, e rotinas de otimização robustas. Ao final do processo de ajuste do modelo, o mesmo retorna estimativas pontuais, erros-padrão (via derivadas numéricas) e objetos com estados previstos, filtrados e suavizados, bem como resíduos de inovação e resíduos normalizados. A presença de estados

suavizados e de perturbações suavizadas permite decomposições e gráficos de nível/sazonalidade, quantificação de incerteza por bandas e imputação coerente de lacunas, utilizando toda a informação disponível na amostra.

Em termos didáticos, isso viabiliza o ciclo iterativo de boa prática, especificação inicial, estimação por verossimilhança, diagnóstico dos resíduos, eventual enriquecimento do modelo (um ciclo ou um *ARMA* residual), reestimação e validação final (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

No que tange a diagnóstico, o pacote *statespacer* organiza funções e extratores para inspeção gráfica e analítica dos resíduos recursivos padronizados (ou de inovação), incluindo funções de autocorrelação e testes usuais, como *Ljung-Box* para independência serial e *Shapiro-Wilk* para normalidade. Em um modelo estrutural bem ajustado, espera-se que esses resíduos se assemelhem a um ruído branco aproximadamente normal, sendo que rejeições sistemáticas orientam a reconsideração da estrutura do modelo (por exemplo, sazonalidade de ordem insuficiente) ou a inclusão de termos *ARMA* no erro. Como os objetos retornam as covariâncias associadas às estimativas, intervalos de confiança e bandas preditivas podem ser construídos de modo transparente (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Por fim, nota-se que o pacote *statespacer* consolida, em *R*, uma implementação moderna e acessível do método do espaço de estados para séries temporais univariadas, alinhada ao referencial teórico canônico. Ele facilita o ajuste de modelos estruturais interpretáveis, integra *Box-Jenkins* quando necessário, lida naturalmente com valores faltantes, provê rotinas completas de diagnóstico e retorna objetos ricos para previsão, decomposição e imputação. Ao combinar clareza inferencial com eficiência computacional, o pacote apoia tanto análises exploratórias e pedagógicas quanto aplicações de previsão e tomada de decisão em contextos reais.

3.3 – Perfil da insolação mensal média observada pela estação de Soure

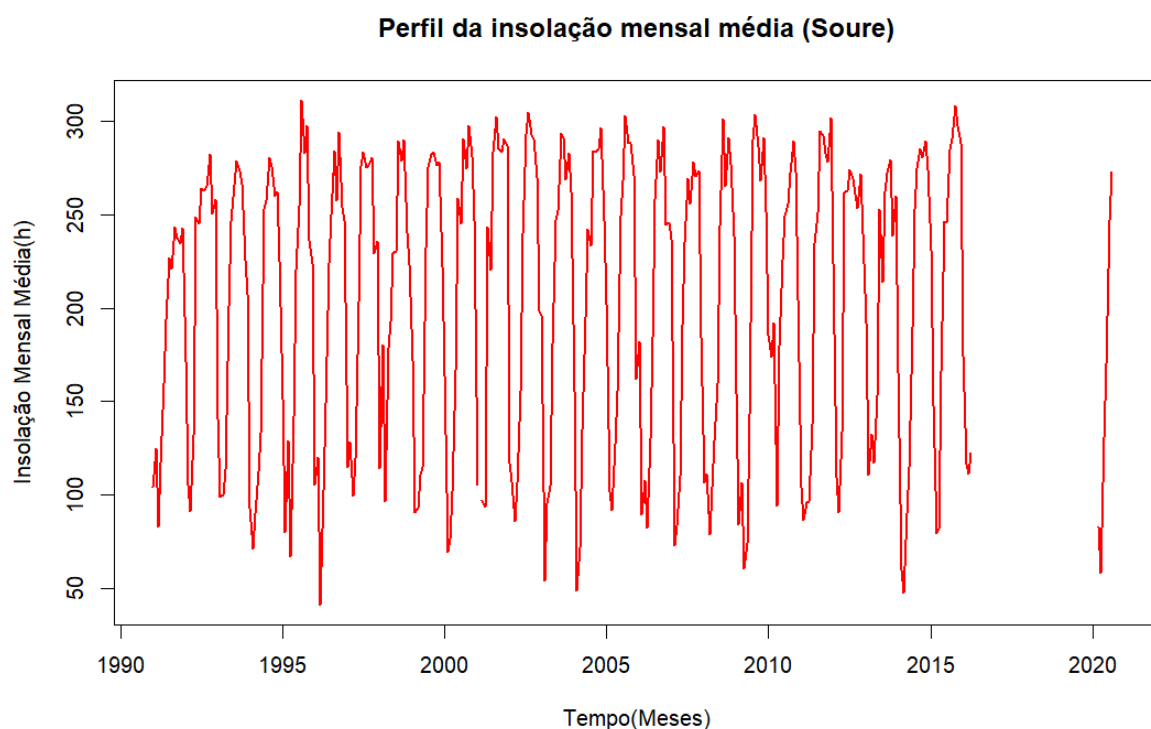
Os dados meteorológicos a serem utilizados para o desenvolvimento da presente monografia consistem num conjunto de trezentos e sessenta observações mensais, coletadas ao longo de um período de trinta anos (de 1991 à 2020), da insolação mensal média, observada pela estação meteorológica convencional que se encontra instalada na cidade de Soure. A referida estação meteorológica pertence ao Instituto Nacional de Meteorologia (INMET).

Conforme explicitado por WMO (2008), o referido período de observação (geralmente de trinta anos) é de fundamental importância para se efetuar o levantamento de dados

estatísticos que evidenciam o perfil climatológico de uma determinada região de interesse, a esse conjunto de dados que evidenciam a distribuição espacial das variáveis meteorológicas ao longo de uma determinada região é denominado de *normal climatológica*. Essas informações são de fundamental relevância para o planejamento de sistemas elétricos de potência, pois permitem uma análise detalhada das condições climáticas típicas da região, incluindo temperaturas, umidade, ventos e padrões de chuva.

Com base nesses dados, pode-se assessorar o dimensionamento da infraestrutura do sistema elétrico, reduzindo-se desta forma, os riscos de falhas e interrupções no fornecimento de energia elétrica. Na figura 3 apresenta-se o perfil da insolação mensal média observada pela estação meteorológica de Soure. Os dados de todas as estações meteorológicas convencionais, pertencentes ao INMET, podem ser adquiridos de forma gratuita, através de um download diretamente do banco de dados meteorológicos do INMET.

Figura 4 – Perfil da insolação mensal média da estação de Soure.



Fonte: Do autor.

4.0 – AJUSTE DOS MODELOS AOS DADOS METEOROLÓGICOS

4.1 – Descrição geral dos modelos utilizados

Para se efetuar o devido processo de imputação nos dados ausentes da série temporal da insolação mensal média observada pela estação meteorológica convencional da cidade de Soure utilizou-se na presente monografia, dois modelos estruturais distintos, com o intuito de se modelar o perfil comportamental da série temporal de interesse. Dentre esses modelos destacam-se, o modelo de nível local de sazonalidade clássica e o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica. Conforme será evidenciado ao longo deste capítulo, ambos os modelos apresentaram autocorrelações significativas em seus respectivos resíduos recursivos padronizados, fato este que impossibilita sua aplicação prática para se modelar séries temporais de forma confiável (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Para se contornar a referida problemática, a literatura técnica da área de modelagem de séries temporais (HARVEY, 1989; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017) demonstra que a inclusão de uma componente *ARMA* de ordem baixa, geralmente uma componente *ARMA*(1,1), tanto no modelo de nível local de sazonalidade clássica quanto no modelo de tendência linear de sazonalidade clássica, possibilita a remoção da autocorrelação residual permitindo que ambos os modelos possam ser utilizados, de forma confiável, para se modelar o perfil comportamental da série temporal de interesse prático.

Desta maneira, para se demonstrar a aplicabilidade prática dessa metodologia de análise de séries temporais, serão utilizados nesta monografia, quatro modelos de série temporal univariada no espaço de estados, são eles, o modelo de nível local de sazonalidade clássica (denominado daqui em diante de *Modelo 01*), o modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente *ARMA*(1,1) (denominado daqui em diante de *Modelo 02*), o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica (denominado daqui em diante de *Modelo 03*) e o modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente *ARMA*(1,1) (denominado daqui em diante de *Modelo 04*).

4.2 – Nível local de sazonalidade clássica

Efetuando-se o devido processo de ajuste do *Modelo 01* (modelo de nível local de sazonalidade clássica), com o auxílio do pacote *statespacer* da linguagem *R*, obteve-se como resultado o quadro e os gráficos abaixo apresentados. No quadro 1 são apresentadas, de forma

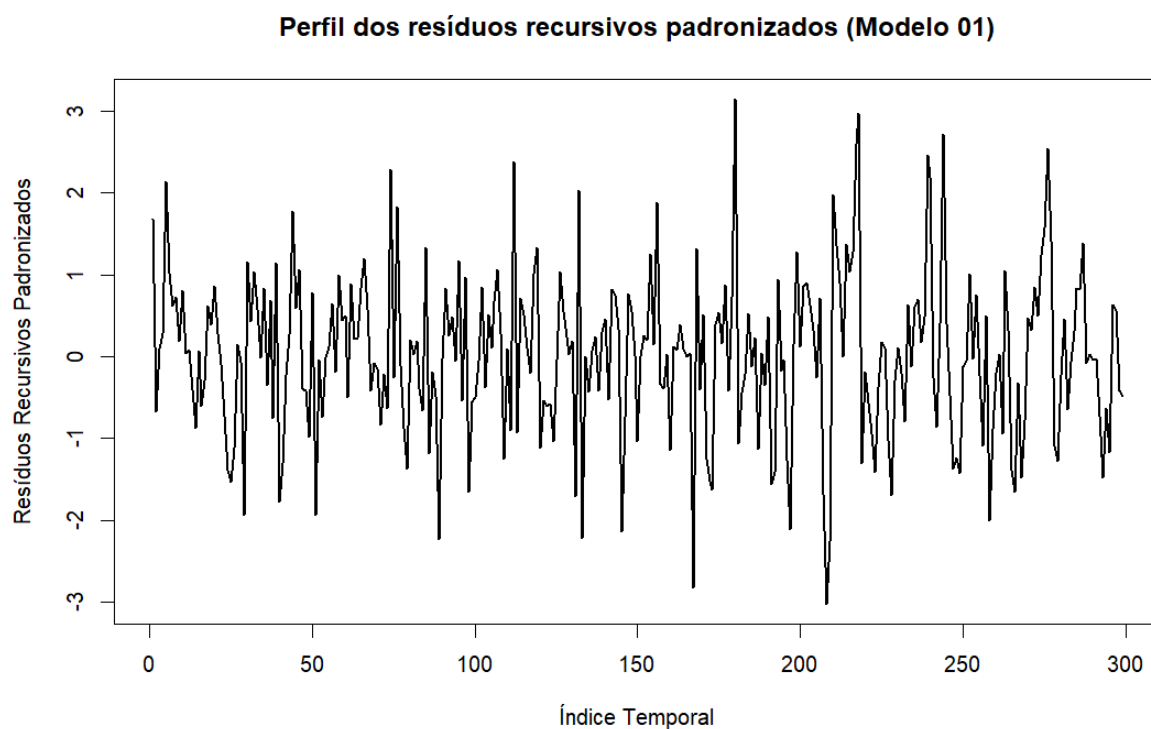
sucinta, as principais informações sobre o processo de ajuste do referido modelo aos dados da série temporal da figura 4. Na figura 5 apresenta-se o perfil dos resíduos recursivos padronizados obtidos pelo modelo, na figura 6 apresenta-se perfil do gráfico de histograma dos resíduos recursivos padronizados, na figura 7 apresenta-se o perfil da função de autocorrelação dos resíduos recursivos padronizados do modelo, na figura 8 apresenta-se o perfil da função de autocorrelação parcial dos resíduos recursivos padronizados do modelo, na figura 9 apresenta-se o perfil do nível do modelo, na figura 10 apresenta-se o perfil da sazonalidade do modelo e na figura 11 apresenta-se o perfil do ruído do modelo.

Quadro 1 – Quadro resumo das principais características do *Modelo 01*.

PARÂMETRO	VALOR
Variância do Erro de Medição da Série Temporal (H_t)	714,5227
Variância da Componente de Nível Local (σ_ϵ^2)	15,19016
Variância da Componente Sazonal Clássica (σ_ω^2)	1,188719
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 10	0,0005741
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 12	0,001304
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 24	0,003637
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 36	0,01486
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 48	0,001251
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Shapiro-Wilk</i>	0,03584
Critério de Informação Bayesiana de Schwarz (<i>BIC</i>)	8,372097

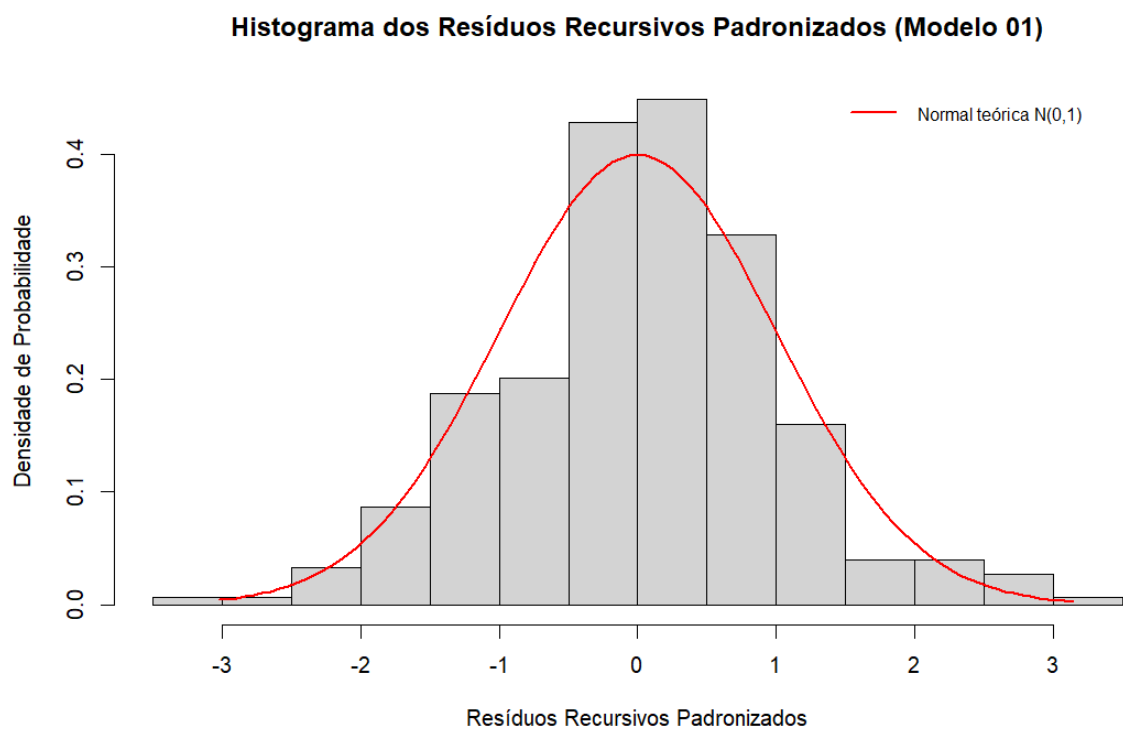
Fonte: Do autor.

Figura 5 – Perfil dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 01*.



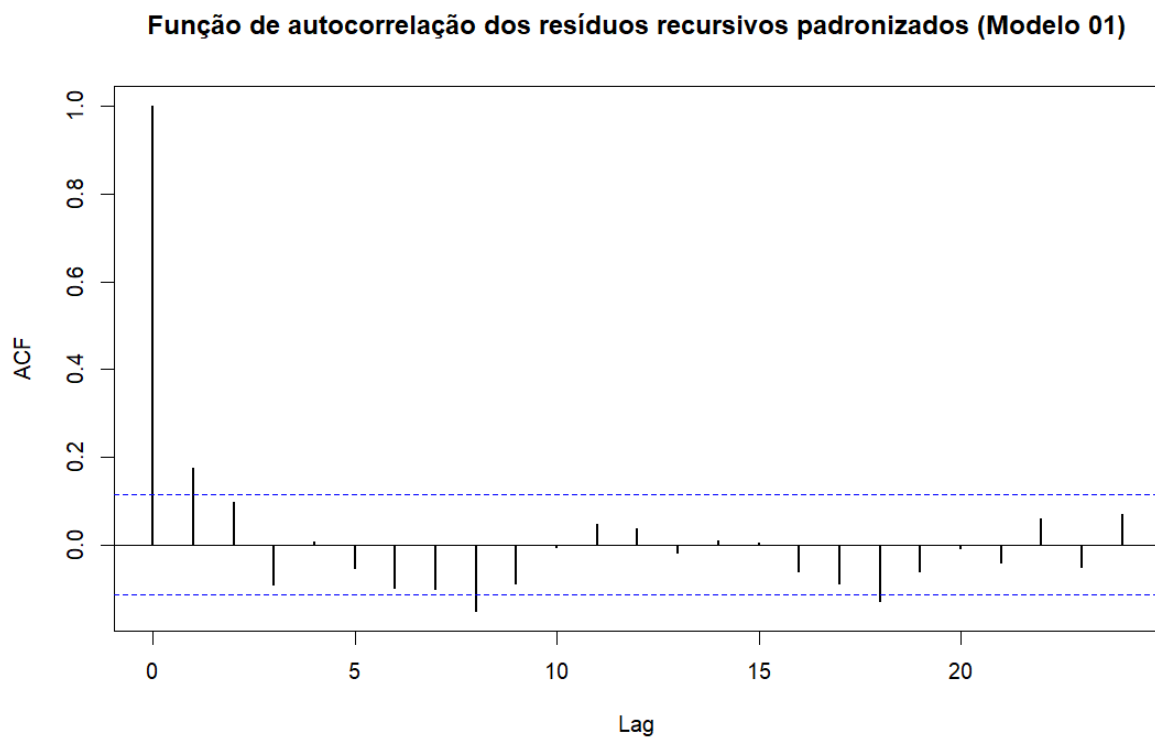
Fonte: Do autor.

Figura 6 – Perfil do histograma dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 01*.



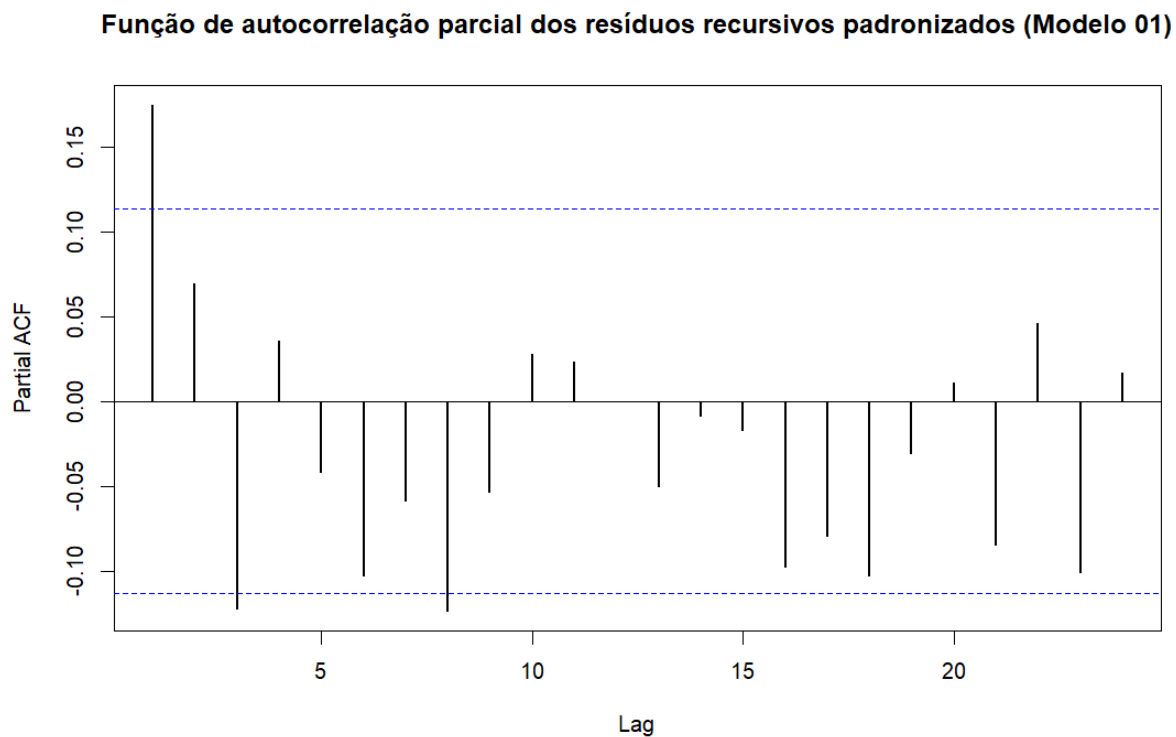
Fonte: Do autor.

Figura 7 – Perfil da função de autocorrelação do *Modelo 01*.

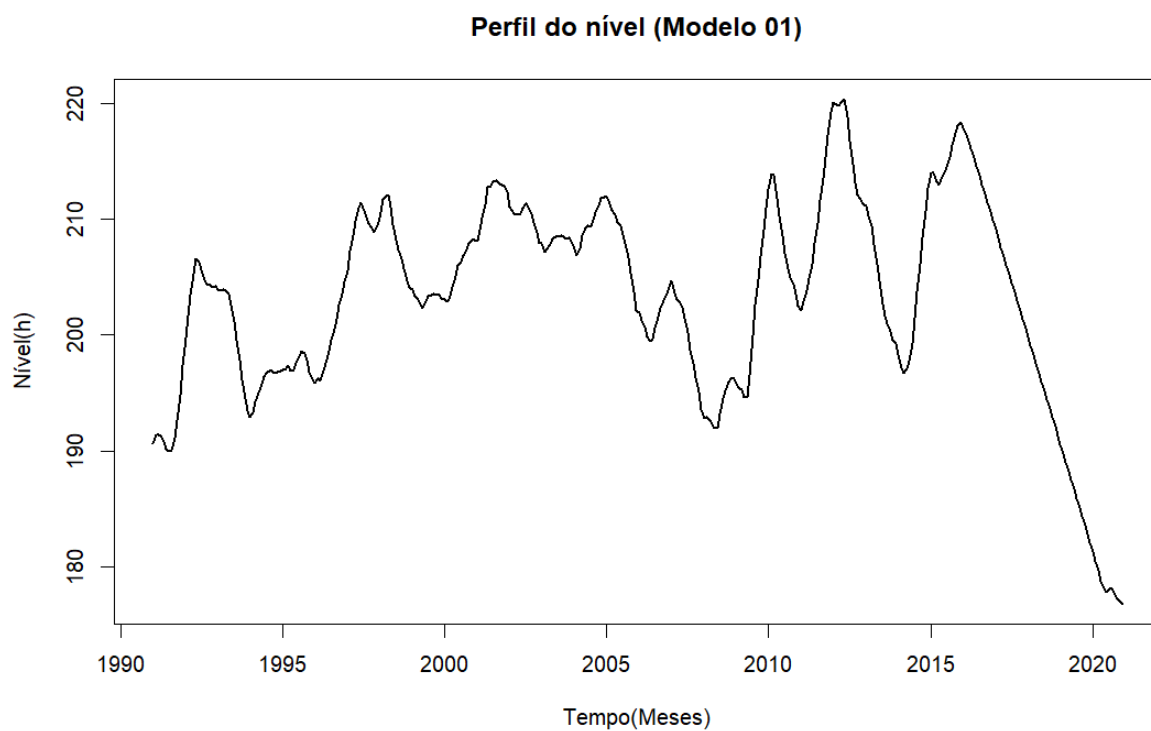


Fonte: Do autor.

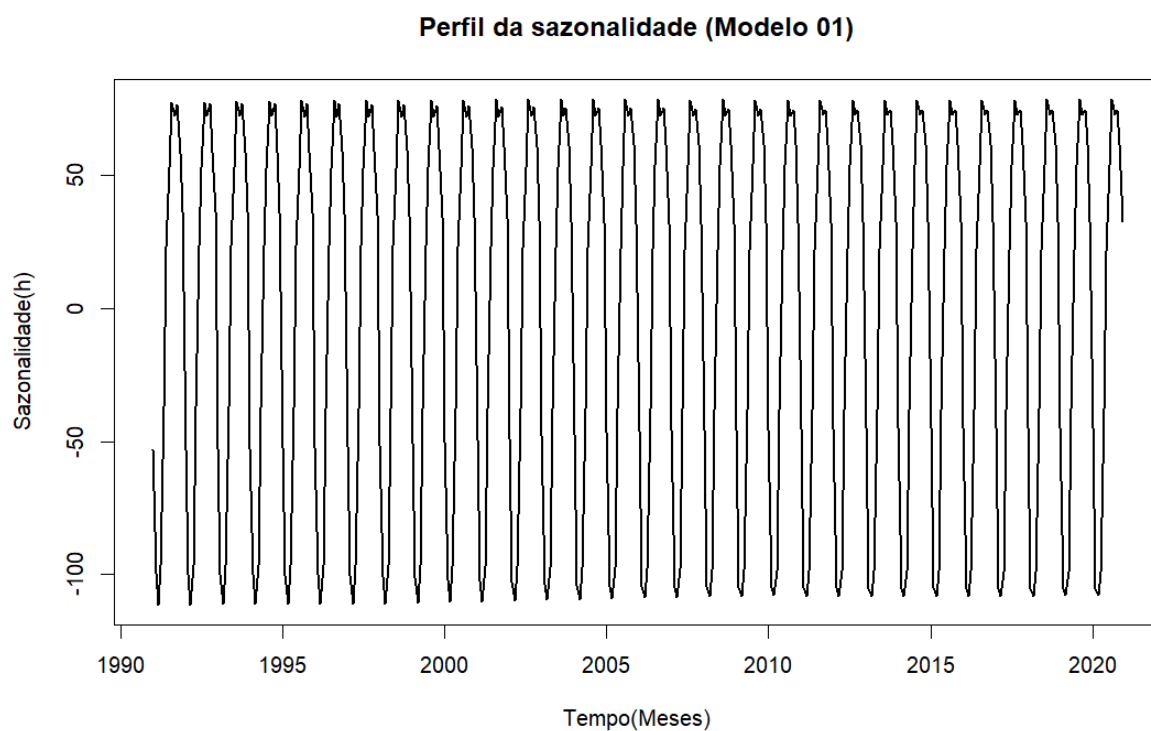
Figura 8 – Perfil da função de autocorrelação parcial do *Modelo 01*.



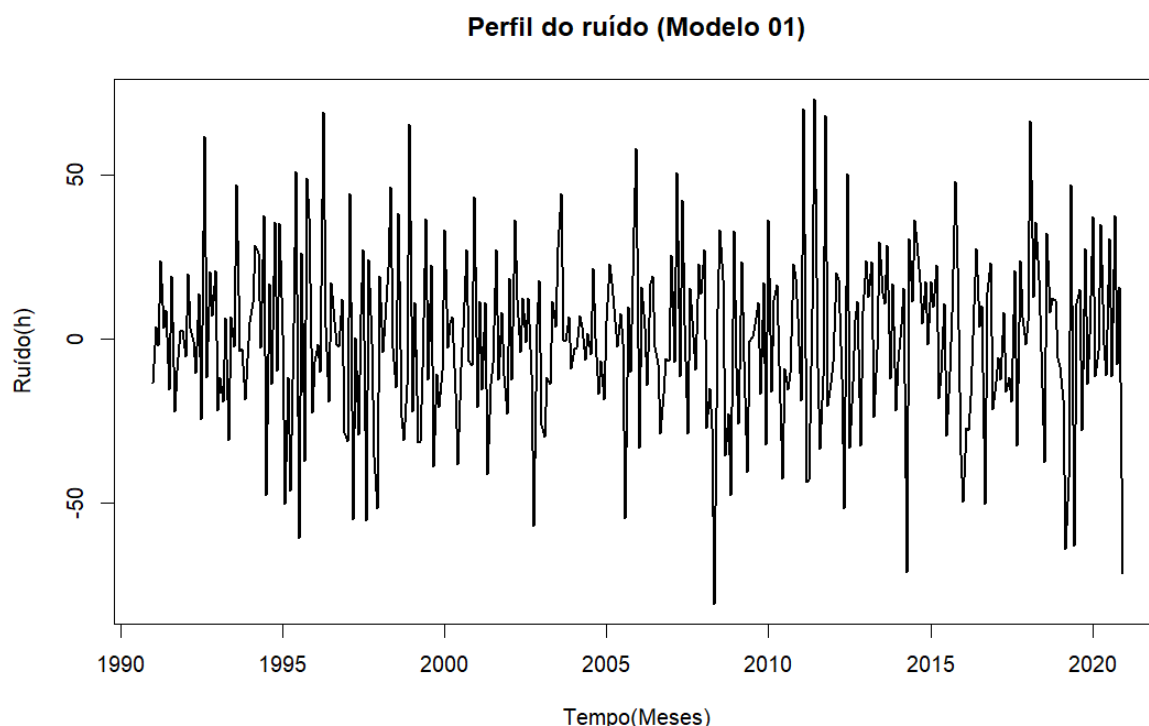
Fonte: Do autor.

Figura 9 – Perfil do nível do *Modelo 01*.

Fonte: Do autor.

Figura 10 – Perfil da sazonalidade do *Modelo 01*.

Fonte: Do autor.

Figura 11 – Perfil do ruído do *Modelo 01*.

Fonte: Do autor.

4.2.1 – Características intrínsecas do *Modelo 01*

Fundamentando-se nos diagnósticos apresentados constata-se que o *Modelo 01*, embora estruturalmente plausível para uma série mensal com forte sazonalidade, não está adequado para imputar com confiabilidade a lacuna apresentada no perfil da insolação média mensal da cidade de Soure, especialmente se ela estiver concentrada no final da amostra. O primeiro ponto a ser considerado é que os testes de *Ljung-Box* aplicados aos resíduos recursivos padronizados rejeitam fortemente a hipótese de ausência de autocorrelação serial em múltiplas ordens, pois, os *p-valores* obtidos foram de (0,0005741) até o lag 10, (0,001304) até o lag 12, (0,003637) até o lag 24, (0,01486) até o lag 36 e de (0,001251) até o lag 48.

Pela lógica do diagnóstico de modelos de séries temporais, isso significa que permanece dependência serial sistemática nos resíduos, isto é, o modelo não conseguiu *explicar* toda a dinâmica temporal presente nos dados, violando a condição de ruído branco que deveria caracterizar as inovações quando a especificação é correta (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Nessa circunstância, a imputação será proveniente de um modelo que subespecifica a dependência de curto prazo (ou parte da estrutura sazonal/irregular), o que tende a produzir imputações excessivamente *comportadas* e, muitas

vezes, intervalos de incerteza mal calibrados, porque parte da variabilidade sistemática foi empurrada para um termo de erro que o modelo trata como não correlacionado (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). O segundo ponto a ser considerado é que o teste de *Shapiro–Wilk* aplicado aos resíduos recursivos padronizados também rejeita normalidade ao nível usual de (5%), pois o *p-valor* reportado foi de (0,03584).

Em modelos lineares gaussianos, a normalidade das inovações não é apenas um *enfeite*, ela sustenta a forma exata da verossimilhança por inovações, a interpretação probabilística dos intervalos e a própria leitura de alguns diagnósticos padronizados. Quando a normalidade é rejeitada, é um sinal de que há assimetria, caudas pesadas, outliers, heterocedasticidade, mudança estrutural ou outra forma de má especificação que o modelo não acomodou adequadamente, o que pode degradar a qualidade da imputação, sobretudo em trechos longos sem dados observados (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992; DURBIN; KOOPMAN, 2012). O gráfico da função de autocorrelação (*ACF*) e da função de autocorrelação parcial (*PACF*) dos resíduos, reforçam visualmente a presença de autocorrelação residual em alguns atrasos, coerente com o resultado da estatística de *Ljung–Box*.

Um terceiro aspecto que merece interpretação é a decomposição de variâncias estimada para o *Modelo 01*. Observando-se atentamente os dados evidenciados no quadro 1, constata-se que a variância do erro de medição é (714,5227) enquanto que as variâncias das perturbações do nível local e da sazonalidade clássica são bem menores, sendo de (15,19016) para a componente de nível e de (1,188719) para a componente de sazonalidade clássica. Em termos de interpretação estrutural, isso sugere que o ajuste está atribuindo grande parte da variabilidade de curto prazo ao ruído de observação, deixando nível e sazonalidade evoluírem muito pouco estocasticamente. Essa configuração pode ocorrer em séries muito ruidosas, mas, em séries ambientais mensais com sazonalidade marcada, é comum que parte das flutuações intra-anuais e interanuais carregue estrutura (por exemplo, persistência, anomalias, variabilidade de curto prazo) que um termo puramente *branco* de medição não representa bem.

Quando esse é o caso, um modelo com irregular correlacionado (como um componente *ARMA* no componente irregular) ou com estrutura adicional (por exemplo, ciclo estocástico, tendência mais flexível, intervenções/outliers) tende a capturar melhor a dependência remanescente, levando resíduos mais próximos de ruído branco e, consequentemente, imputações mais defensáveis (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; BOX et al., 2015). O fato de o teste estatístico de *Ljung–Box* rejeitar em vários lags é compatível com a leitura de que existe correlação residual que o *Modelo 01* não está absorvendo, o que é

precisamente o tipo de problema que costuma motivar a inclusão de um componente *ARMA* no termo irregular em modelos estruturais (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Diante dessas evidências, a conclusão metodologicamente mais segura é que o *Modelo 01* não deve ser considerado adequado como modelo final para imputar os dados faltantes mostrados no gráfico da figura 4, sobretudo se a lacuna estiver no final da série, caso em que a imputação é dominada por previsão e fica ainda mais sensível à má especificação. Isso não significa que o arcabouço de espaço de estados seja inadequado, ao contrário, ele é um dos mais apropriados para imputação em séries com sazonalidade e ruído, mas sim que, conforme os próprios critérios diagnósticos consagrados na literatura, o modelo ajustado não alcançou a condição de resíduos aproximadamente não correlacionados e aproximadamente gaussianos, condição desejável para que as imputações por filtro/suavizador de *Kalman* representem de forma fiel tanto o valor esperado quanto a incerteza associada (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Em termos práticos, o caminho recomendado é reespecificar o componente irregular, por exemplo incorporando uma dinâmica *ARMA* (frequentemente um *ARMA(1,1)* é um primeiro candidato) no termo de erro, e/ou tratar possíveis outliers e mudanças estruturais, reestimando por máxima verossimilhança e reavaliando *Ljung-Box*, *ACF/PACF* e normalidade dos resíduos. Somente após esses diagnósticos indicarem resíduos compatíveis com ruído branco é que a imputação resultante pode ser defendida como estatisticamente consistente e adequada para uso analítico (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

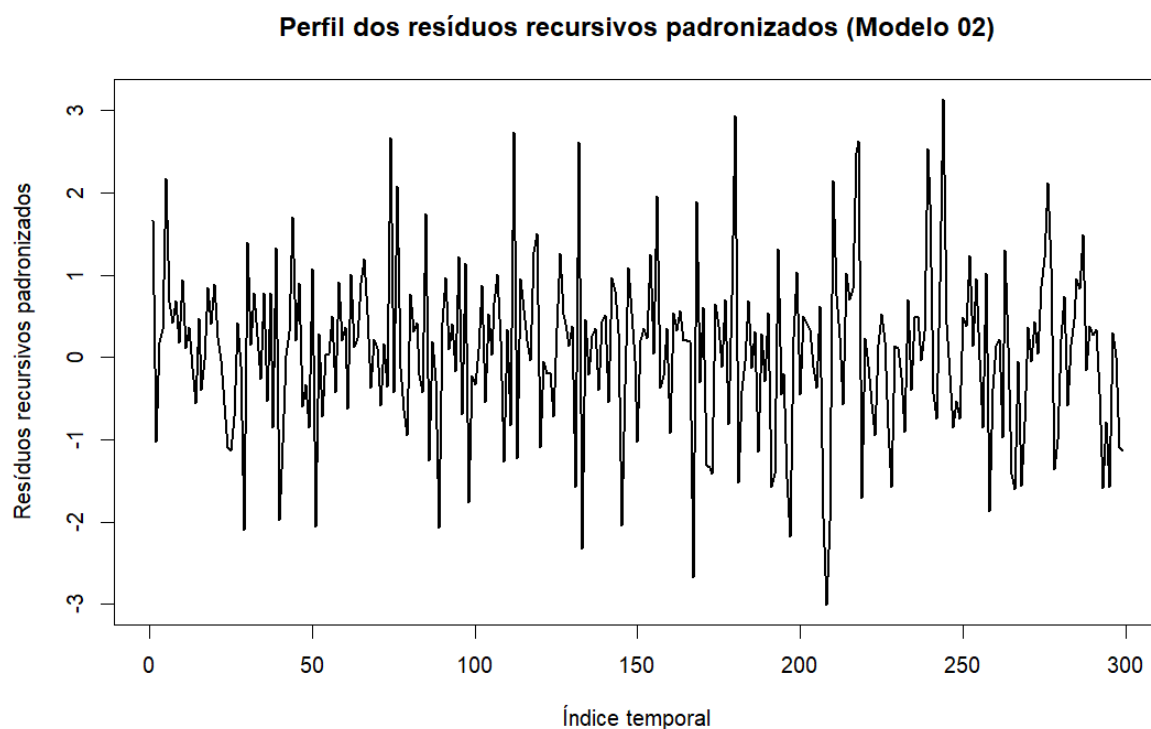
4.3 – Nível local de sazonalidade clássica com componente *ARMA(1,1)*

Efetuada-se o devido processo de ajuste do *Modelo 02* (modelo de nível local de sazonalidade clássica com componente *ARMA(1,1)*), com o auxílio do pacote *statespacer* da linguagem *R*, obteve-se como resultado o quadro e os gráficos abaixo apresentados. No quadro 2 são apresentadas, de forma sucinta, as principais informações sobre o processo de ajuste do referido modelo estrutural aos dados da série temporal da figura 4. Da figura 12 até a figura 19 apresentam-se respectivamente, os perfis, dos resíduos recursivos padronizados, do histograma dos resíduos, da função de autocorrelação dos resíduos, da função de autocorrelação parcial dos resíduos bem como de todas as componentes estruturais do referido modelo.

Quadro 2 – Quadro resumo das principais características do *Modelo 02*.

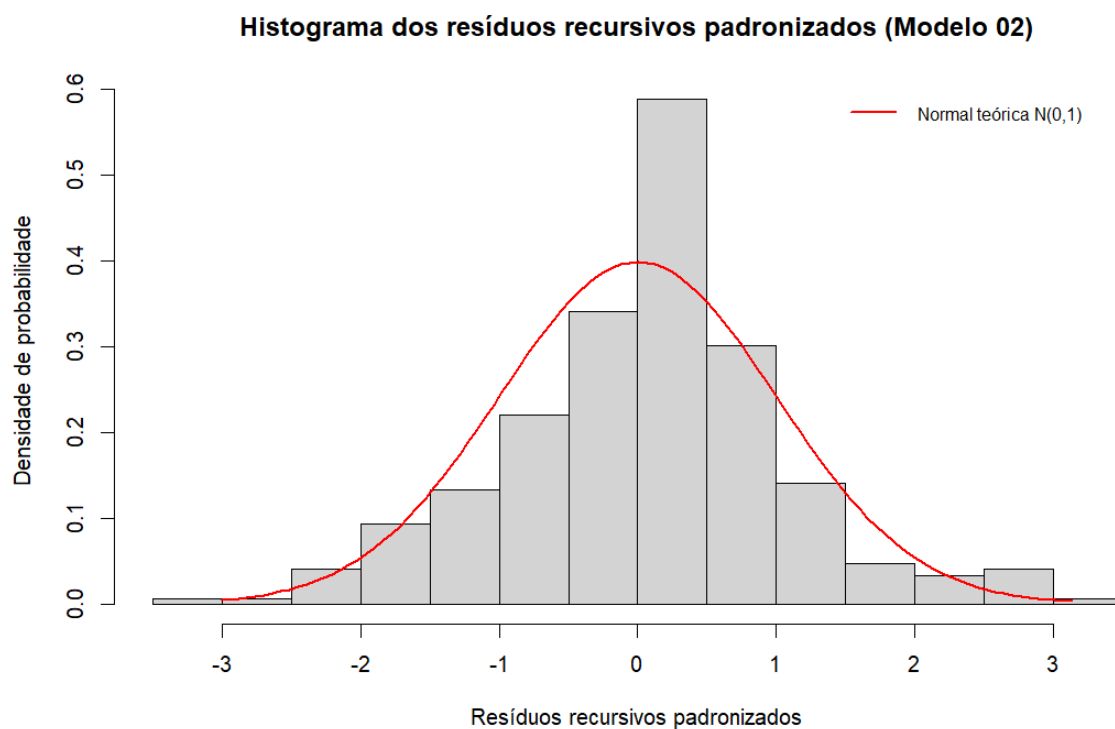
PARÂMETRO	VALOR
Variância do Erro de Medição da Série Temporal (H_t)	97,78958
Variância da Componente de Nível Local (σ_ϵ^2)	0,003696079
Variância da Componente Sazonal Clássica (σ_ω^2)	1,974818
Variância do Componente ARMA(1,1) (σ_v^2)	642,6157
Coefficiente Autoregressivo do Componente ARMA(1,1) (ϕ_1)	0,5691267
Coefficiente de Média Móvel do Componente ARMA(1,1) (θ_1)	-0,2623634
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 10	0,4045
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 12	0,4723
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 24	0,5152
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 36	0,6804
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 48	0,1798
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Shapiro-Wilk</i>	0,00118
Crítério de Informação Bayesiana de Schwarz (BIC)	8,355521

Fonte: Do autor.

Figura 12 – Perfil dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 02*.

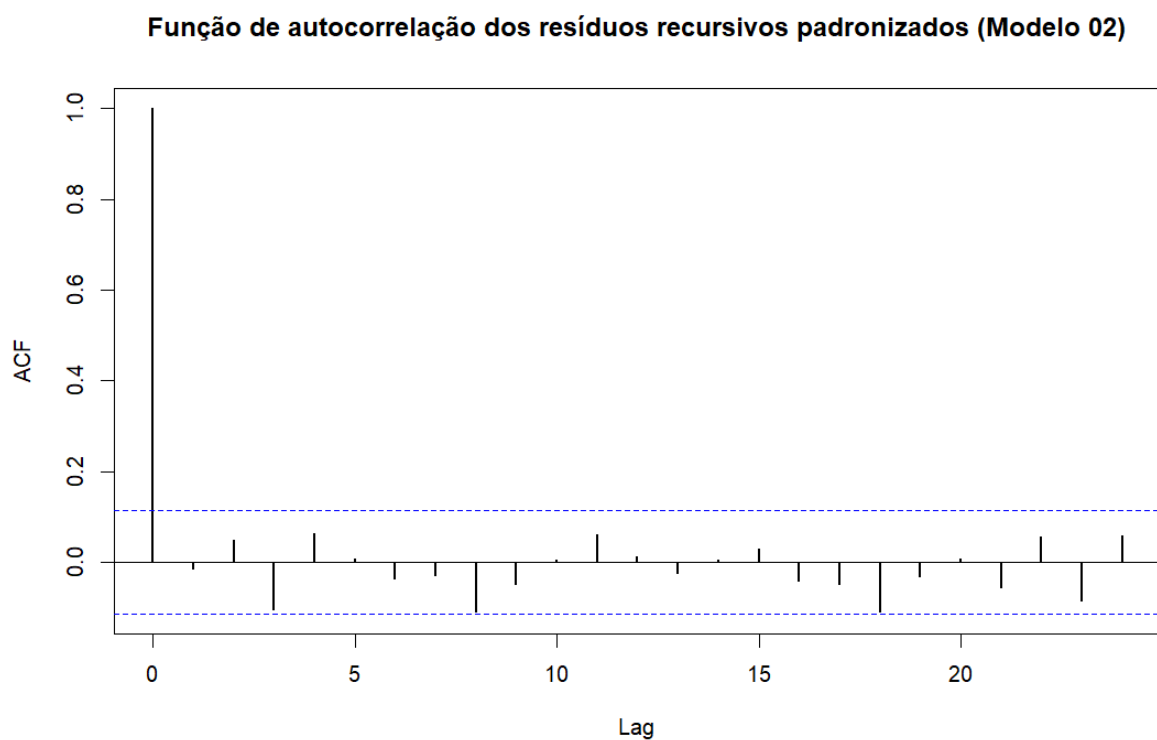
Fonte: Do autor.

Figura 13 – Perfil do histograma dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 02*.



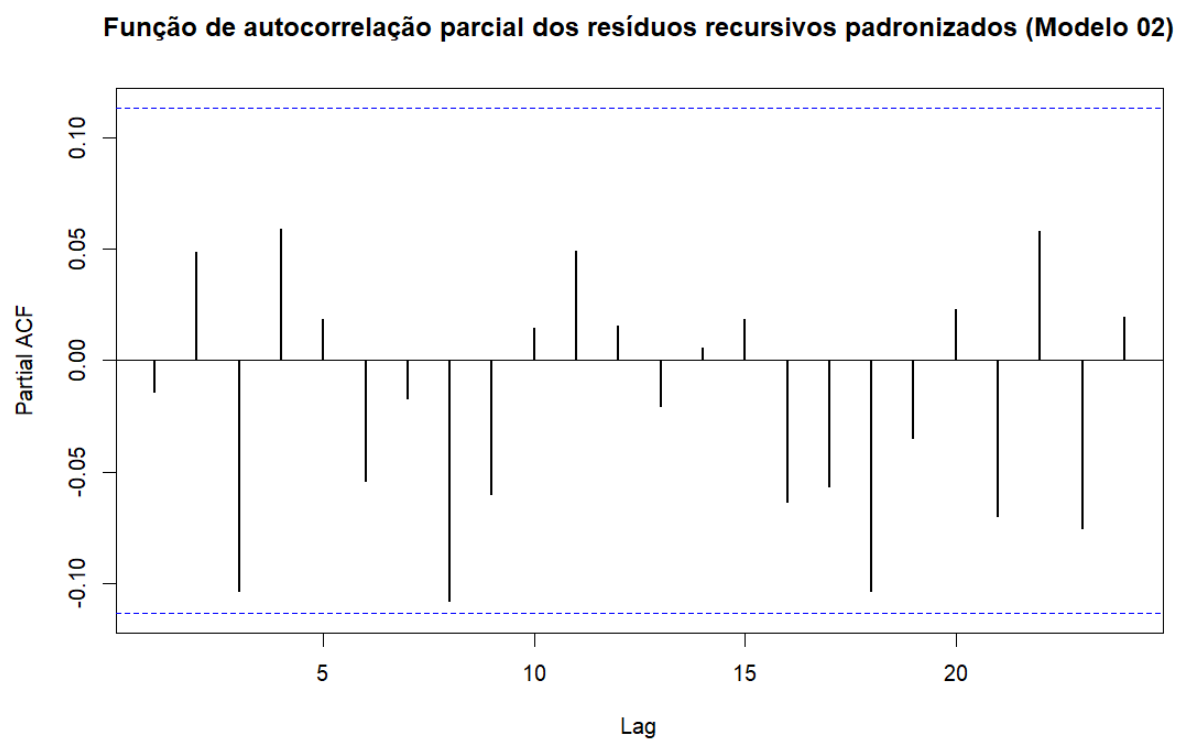
Fonte: Do autor.

Figura 14 – Perfil da função de autocorrelação do *Modelo 02*.



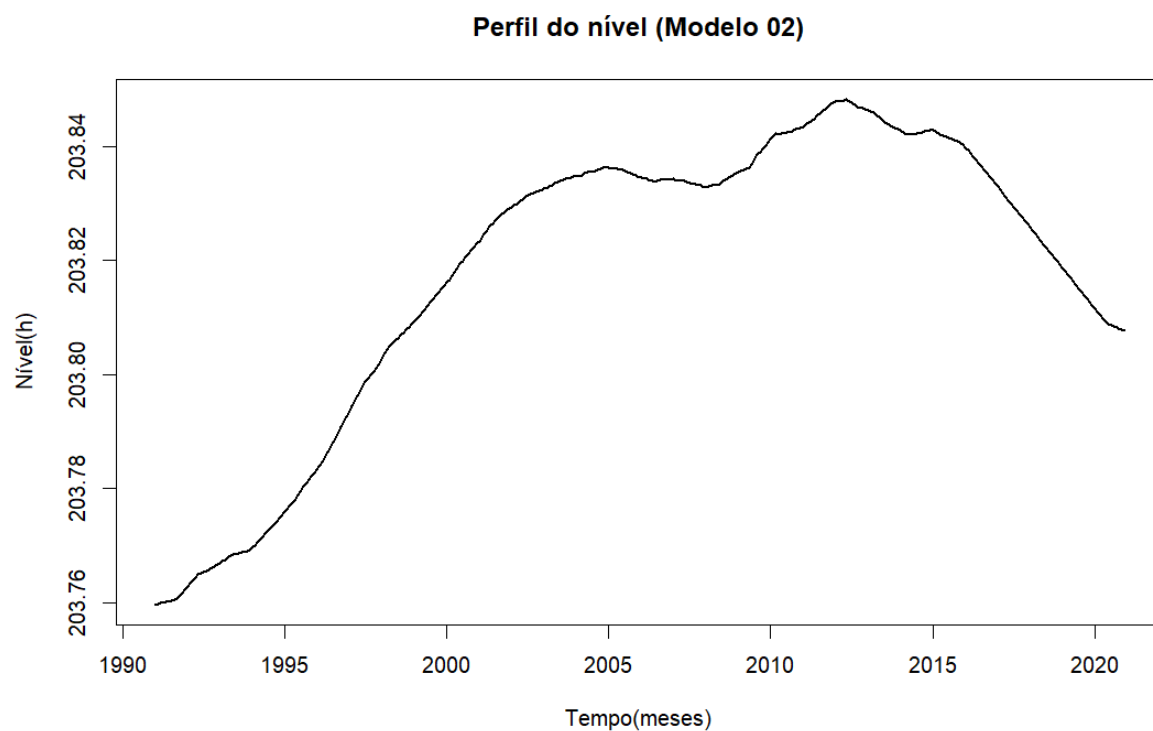
Fonte: Do autor.

Figura 15 – Perfil da função de autocorrelação parcial do *Modelo 02*.



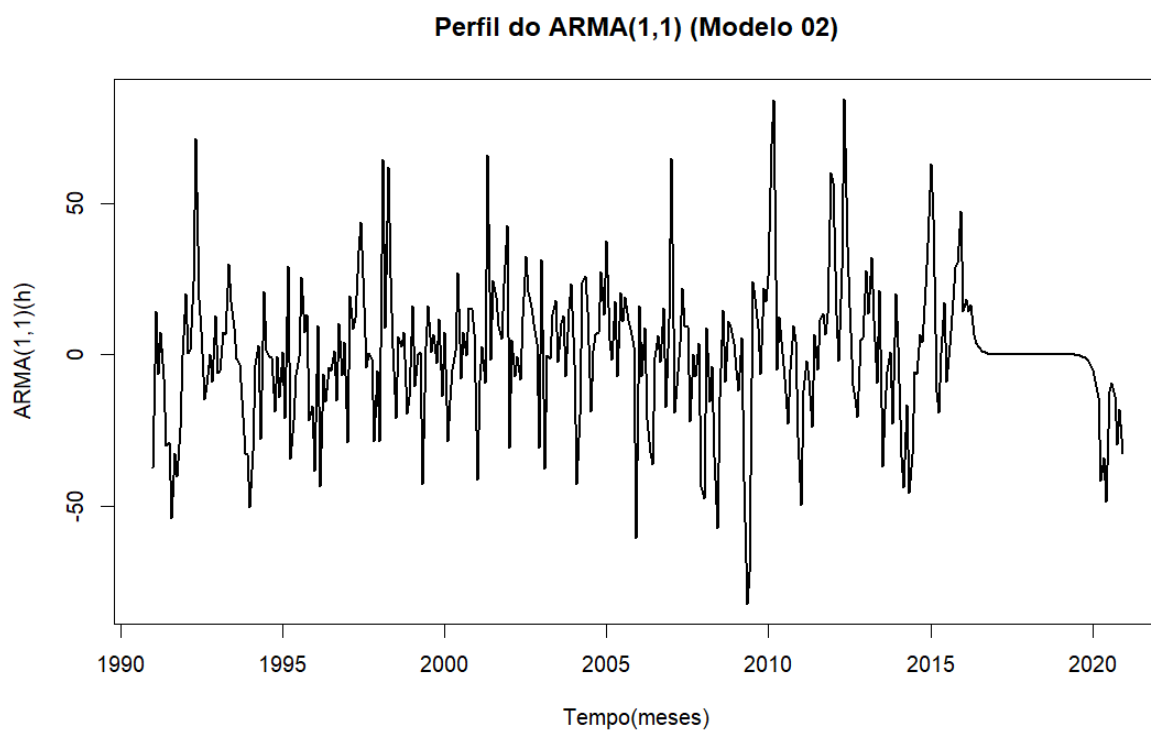
Fonte: Do autor.

Figura 16 – Perfil do nível do *Modelo 02*.



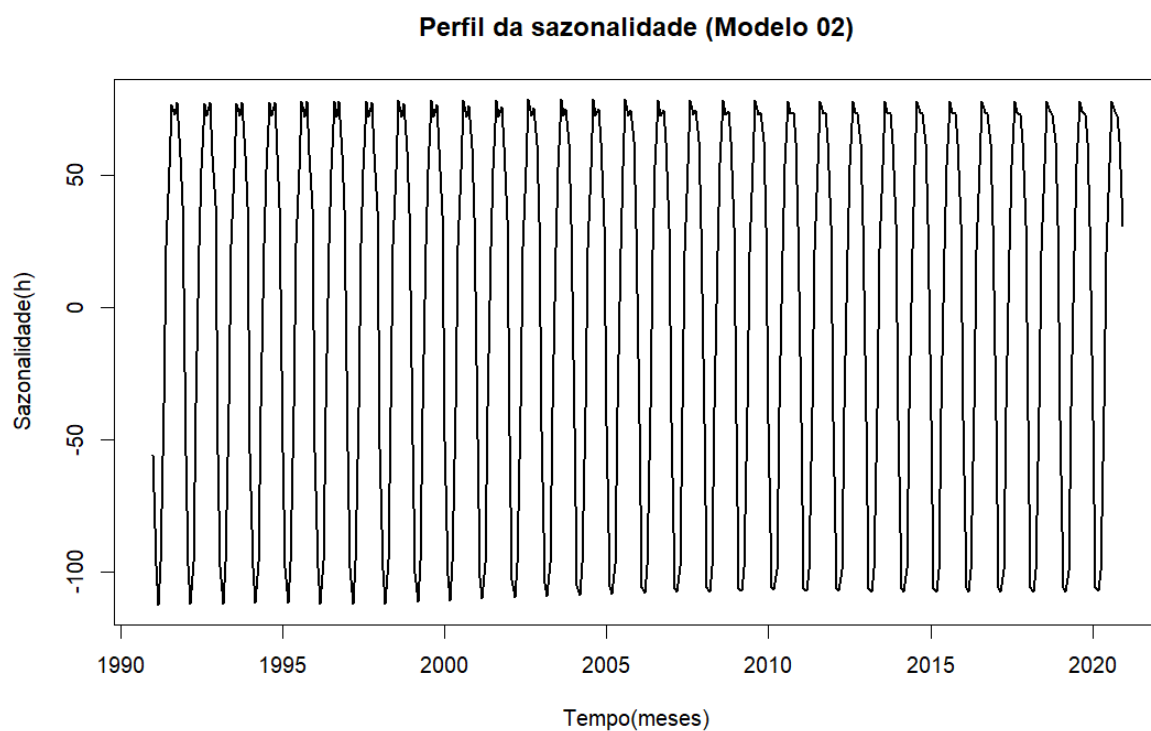
Fonte: Do autor.

Figura 17 – Perfil do $ARMA(1,1)$ do *Modelo 02*.

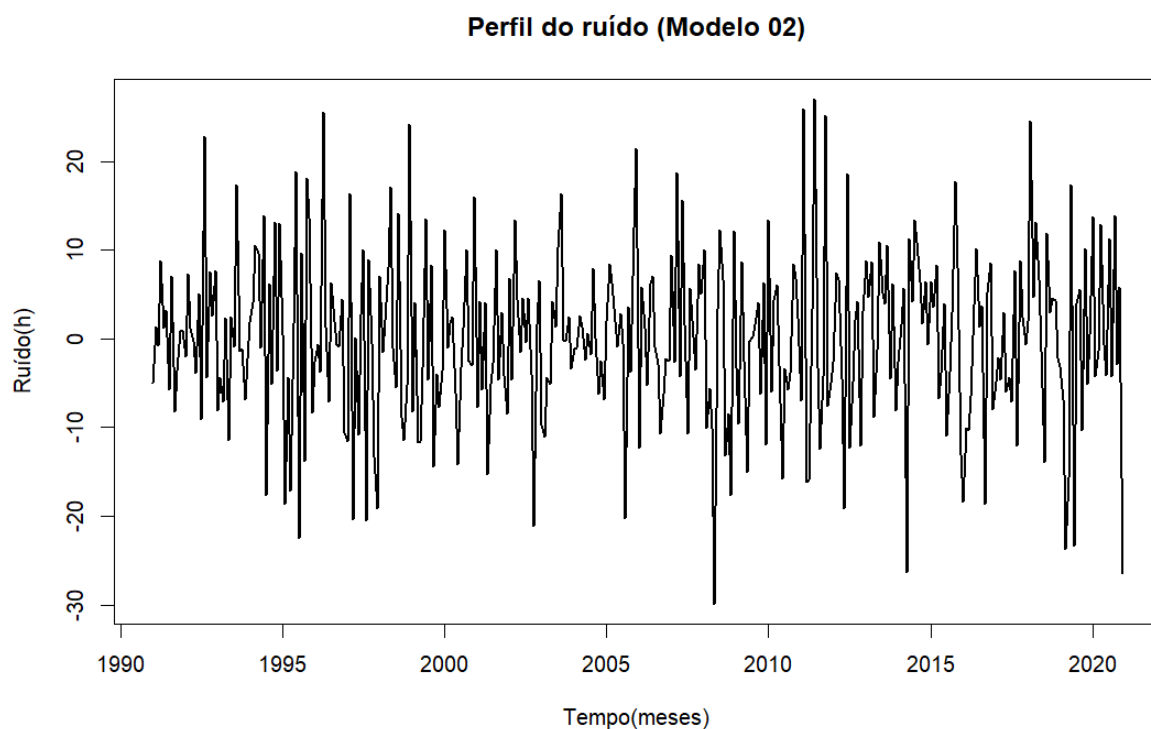


Fonte: Do autor.

Figura 18 – Perfil da sazonalidade do *Modelo 02*.



Fonte: Do autor.

Figura 19 – Perfil do ruído do *Modelo 02*.

Fonte: Do autor.

4.3.1 – Características intrínsecas do *Modelo 02*

O *Modelo 02*, conforme descrito no tópico anterior, trata-se de um modelo estrutural de nível local com sazonalidade clássica ao qual se adicionou um componente $ARMA(1,1)$ com o objetivo explícito de reduzir a autocorrelação dos resíduos recursivos padronizados. As características intrínsecas reportadas no quadro 2 indicam uma variância do erro de medição de (97,78958), uma variância da perturbação do nível local de (0,003696079), uma variância da perturbação sazonal de (1,974818) e uma variância da componente $ARMA(1,1)$ de (642,6157) com um coeficiente autorregressivo de (0,5691267) e um coeficiente de média móvel de (-0,2623634).

Em termos didáticos, esse arranjo significa que o modelo está *atribuindo* grande parte da variabilidade de curto prazo (a irregularidade que não é nível nem sazonalidade) a um processo correlacionado no tempo ($ARMA$), em vez de empurrá-la para um erro puramente branco de observação. Essa é uma estratégia clássica quando diagnósticos mostram persistência residual, pois a adição de uma dinâmica $ARMA$ ao componente irregular costuma ser suficiente para se capturar dependência serial remanescente e se produzir inovações mais próximas de ruído

branco, o que é desejável para previsão e, conseqüentemente, para imputação (BOX et al., 2015; DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990).

A pergunta central, entretanto, não é se o modelo *parece plausível*, mas se ele é adequado para se imputar os dados faltantes da série temporal de insolação. Em modelos de espaço de estados, o critério prático mais aceito para adequação com vistas a previsão e imputação é que os resíduos recursivos padronizados (as inovações padronizadas) se comportem aproximadamente como um ruído branco, isto é, sem autocorrelação sistemática. Em modelos gaussianos, espera-se também que sejam aproximadamente normais, porque essa hipótese sustenta a verossimilhança por inovações e a calibração probabilística dos intervalos (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Do ponto de vista da análise do perfil da autocorrelação dos resíduos recursivos padronizados, o *Modelo 02* apresenta um resultado claramente favorável pois, os *p-valores* de *Ljung-Box* para múltiplas ordens são todos não significativos aos níveis usuais de (5%), sendo de (0,4045) até o lag 10, (0,4723) até o lag 12, (0,5152) até o lag 24, (0,6804) até o lag 36 e (0,1798) até o lag 48. Pelo entendimento clássico desse teste, isso indica ausência de evidência estatística de autocorrelação conjunta nos resíduos até essas defasagens, o que é consistente com a hipótese de que o modelo capturou adequadamente a dependência serial relevante para previsões e reconstrução de trechos faltantes (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Os gráficos de *ACF* e *PACF* dos resíduos recursivos padronizados, reforçam visualmente essa interpretação ao sugerirem barras predominantemente pequenas e sem um padrão persistente de correlação em lags específicos.

Em um contexto de imputação, essa melhora é especialmente importante, porque a imputação por filtro/suavizador é, essencialmente, uma previsão condicional sob o modelo pois, se os resíduos ainda fossem autocorrelacionados, o modelo estaria deixando estrutura sistemática *no erro*, o que distorce as previsões e tende a produzir imputações enviesadas ou excessivamente suavizadas (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990). O ponto crítico que permanece, contudo, é o diagnóstico de normalidade. No *Modelo 02*, o teste estatístico de *Shapiro-Wilk* aplicado aos resíduos recursivos padronizados retorna um *p-valor* de (0,00118). Esse resultado fornece forte evidência contra a hipótese de normalidade dos resíduos, e, portanto, contra a hipótese estritamente gaussiana do modelo, ao menos no que diz respeito à forma distributiva do termo irregular (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992).

Para interpretar didaticamente o impacto disso na imputação, é preciso distinguir dois níveis de exigência. Se o objetivo do processo de imputação é se obter *imputações pontuais* coerentes com a dinâmica média e com a sazonalidade, a principal condição é que o modelo

represente bem a dependência temporal de segunda ordem (médias e covariâncias). Nessa perspectiva, a evidência de resíduos não autocorrelacionados é um sinal forte de que o *Modelo 02* está bem posicionado para se efetuar a imputação, pois o filtro/suavizador de *Kalman* continua produzindo o melhor estimador linear em média quadrática quando as primeiras duas ordens estão corretas, mesmo que a distribuição não seja exatamente normal (ANDERSON; MOORE, 1979; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

No entanto, se o objetivo inclui um processo de *imputação com incerteza probabilística bem calibrada* (intervalos e distribuições preditivas confiáveis), a rejeição de normalidade se torna mais problemática, porque intervalos baseados diretamente na suposição gaussiana podem ficar mal calibrados em presença de assimetria, caudas pesadas ou outliers, fenômenos comuns em séries meteorológicas mensais (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Em especial, uma lacuna longa ao final da série tende a amplificar esse problema pois, sem observações futuras para se *corrigir* o estado por suavização, a previsão fica mais dependente de suposições sobre a distribuição dos choques, e caudas pesadas ou eventos extremos podem não ser representados adequadamente por um modelo normal, mesmo que a autocorrelação tenha sido removida (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Desta forma, fundamentando-se exclusivamente nas evidências apresentadas até o presente momento, a avaliação didática mais defensável é que o *Modelo 02* é *substancialmente mais adequado* do que um modelo sem o componente *ARMA* para fins de imputação, porque atende ao requisito essencial de remover a autocorrelação dos resíduos, condição diretamente ligada à qualidade de previsão e imputação em séries temporais (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015). Ao mesmo tempo, ele não é plenamente adequado no sentido estrito *linear gaussiano*, porque os resíduos recursivos padronizados não são compatíveis com normalidade pelo teste de *Shapiro–Wilk*, o que recomenda cautela principalmente na interpretação de intervalos e probabilidades associadas às imputações (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Assim, se objetivo principal for imputar valores faltantes para completar a série e preservar o padrão sazonal e a dependência temporal média, o *Modelo 02* pode ser considerado adequado e justificável, pois os diagnósticos de autocorrelação indicam que a estrutura dinâmica foi bem capturada. No entanto, se a imputação for usada para análises que dependem fortemente da distribuição dos erros (por exemplo, quantis, risco de extremos, intervalos de confiança rigorosos), o diagnóstico de não normalidade sugere que você deveria considerar extensões usuais na literatura, como tratamento explícito de outliers/intervenções, transformações (por exemplo, *Box–Cox*) ou modelos de espaço de estados com ruídos não

gaussianos, pois esses ajustes podem melhorar a aderência distributiva sem sacrificar a boa propriedade já obtida de resíduos aproximadamente não correlacionados (BOX et al., 2015; DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990).

4.4 – Tendência linear de sazonalidade clássica

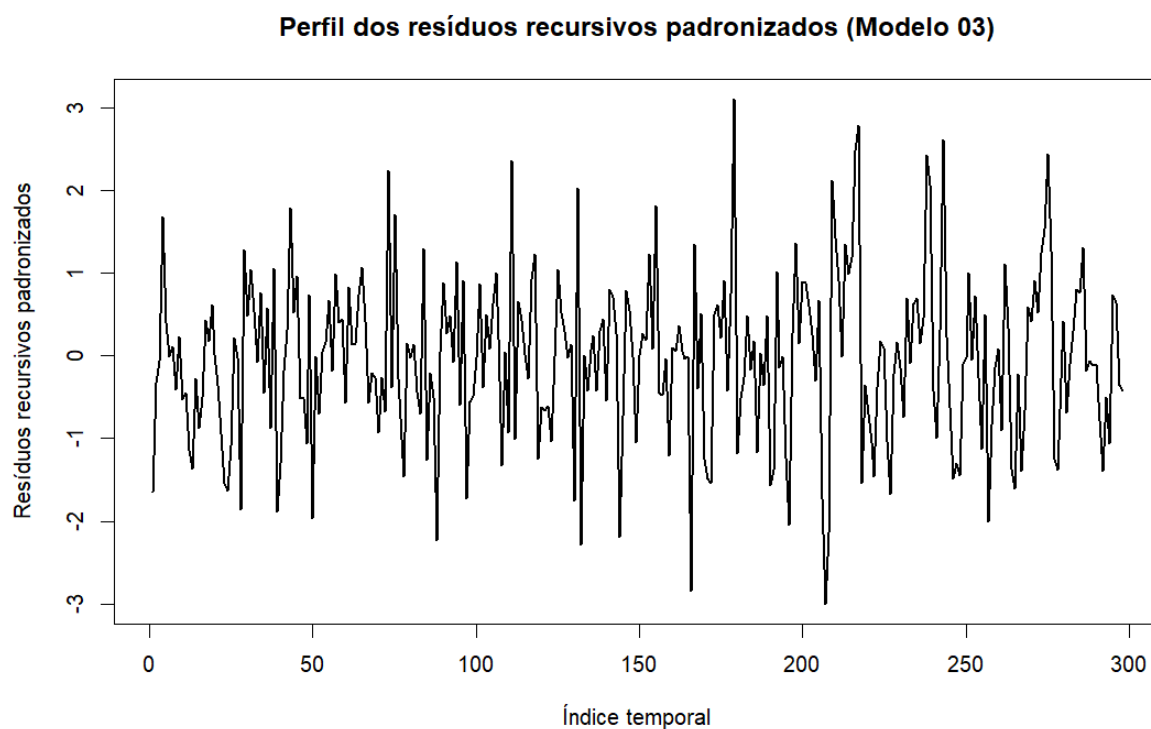
Efetuada-se o devido processo de ajuste do *Modelo 03* (modelo de tendência linear de sazonalidade clássica), com o auxílio do pacote *statespacer* da *linguagem R*, obteve-se como resultado o quadro e os gráficos abaixo apresentados. No quadro 3 são apresentadas, de forma sucinta, as principais informações sobre o processo de ajuste do referido modelo estrutural aos dados da série temporal da figura 4. Da figura 20 até a figura 26 apresentam-se respectivamente, os perfis, dos resíduos recursivos padronizados, do histograma dos resíduos, da função de autocorrelação dos resíduos, da função de autocorrelação parcial dos resíduos bem como de todas as componentes estruturais do referido modelo.

Quadro 3 – Quadro resumo das principais características do *Modelo 03*.

PARÂMETRO	VALOR
Variância do Erro de Medição da Série Temporal (H_t)	693,381
Variância da Componente de Nível Local ($\sigma_{\varepsilon_1}^2$)	21,95286
Variância da Componente de Tendência Linear ($\sigma_{\varepsilon_2}^2$)	3,710541e-05
Variância da Componente Sazonal Clássica (σ_{ω}^2)	1,245173
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 10	0,0008114
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 12	0,00121
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 24	0,003999
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 36	0,01257
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 48	0,0009289
<i>p-valor</i> do Teste de <i>Shapiro-Wilk</i>	0,08235
Critério de Informação Bayesiana de Schwarz (<i>BIC</i>)	8,412884

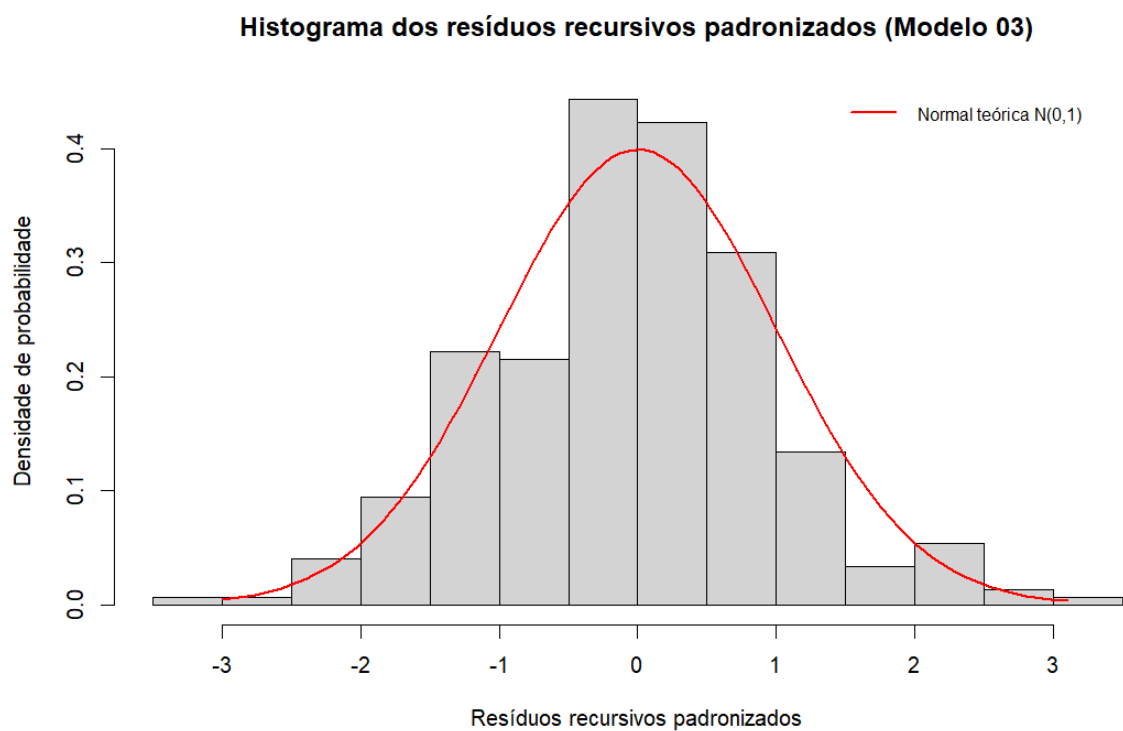
Fonte: Do autor.

Figura 20 – Perfil dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 03*.

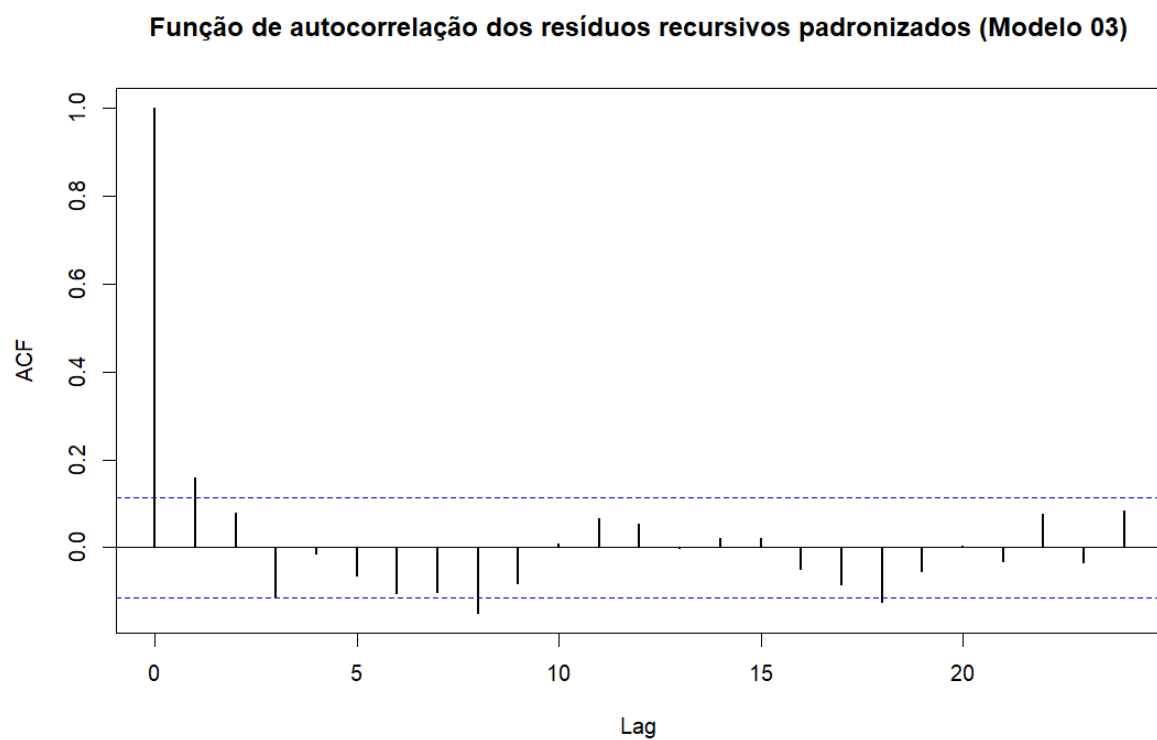


Fonte: Do autor.

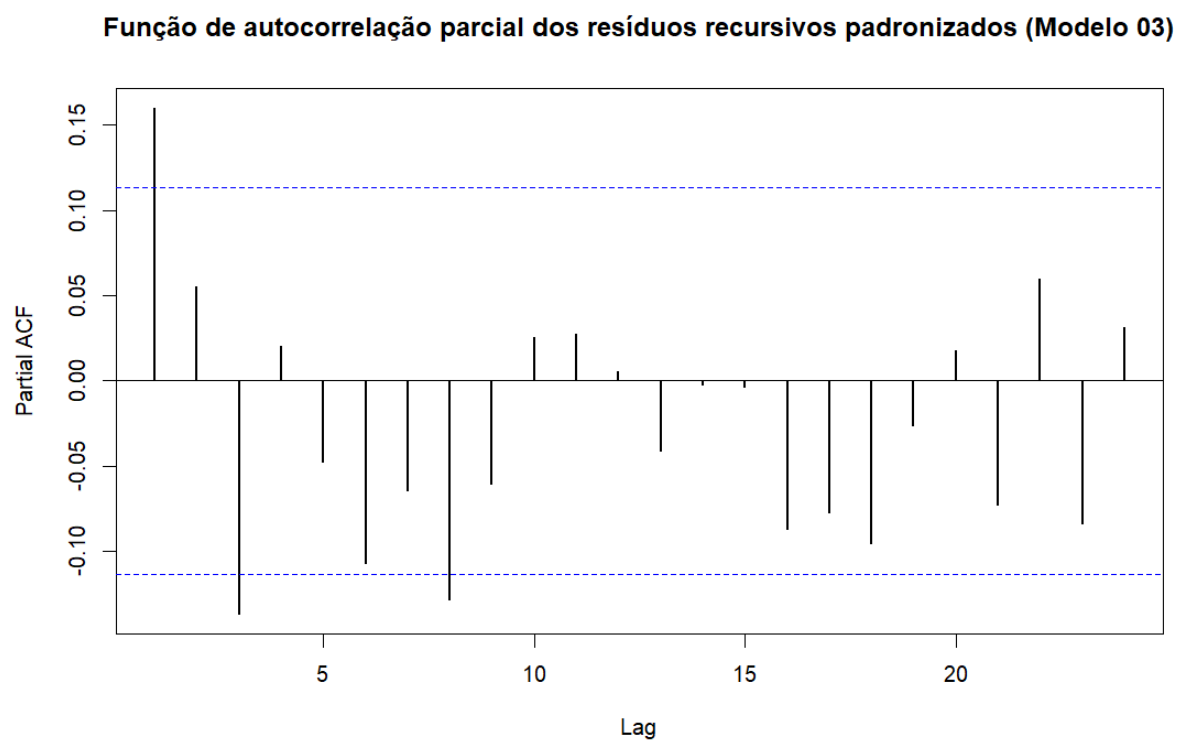
Figura 21 – Perfil do histograma dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 03*.



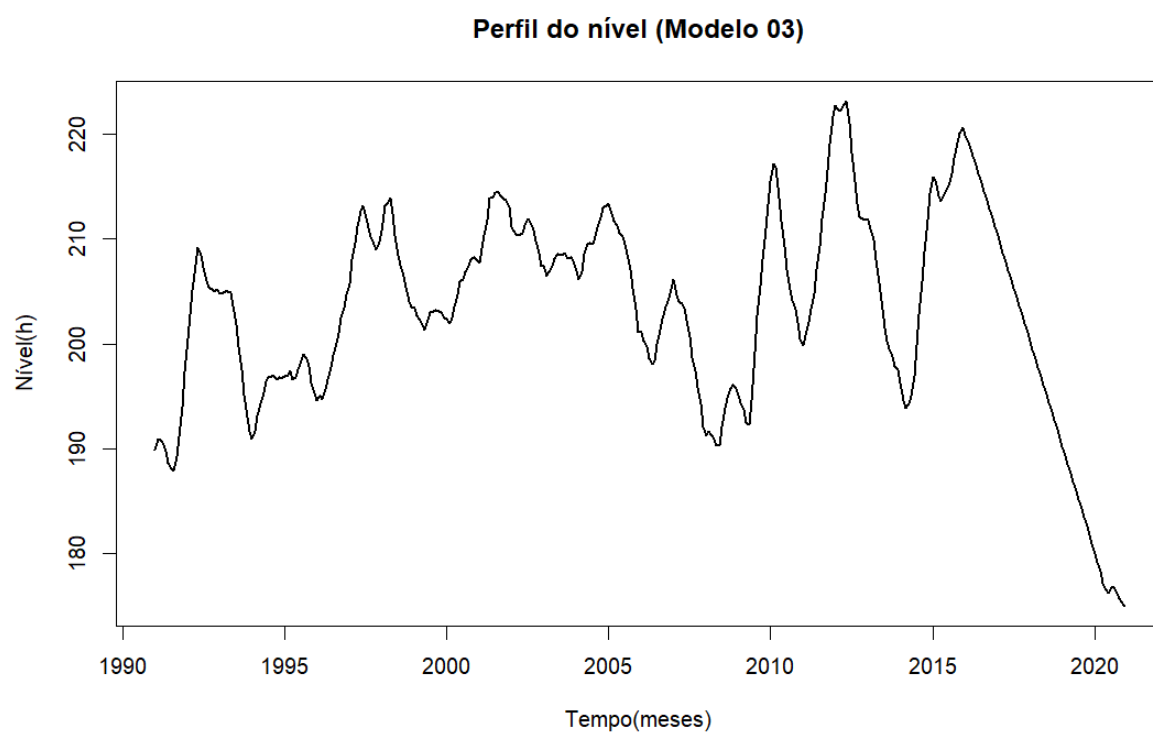
Fonte: Do autor.

Figura 22 – Perfil da função de autocorrelação do *Modelo 03*.

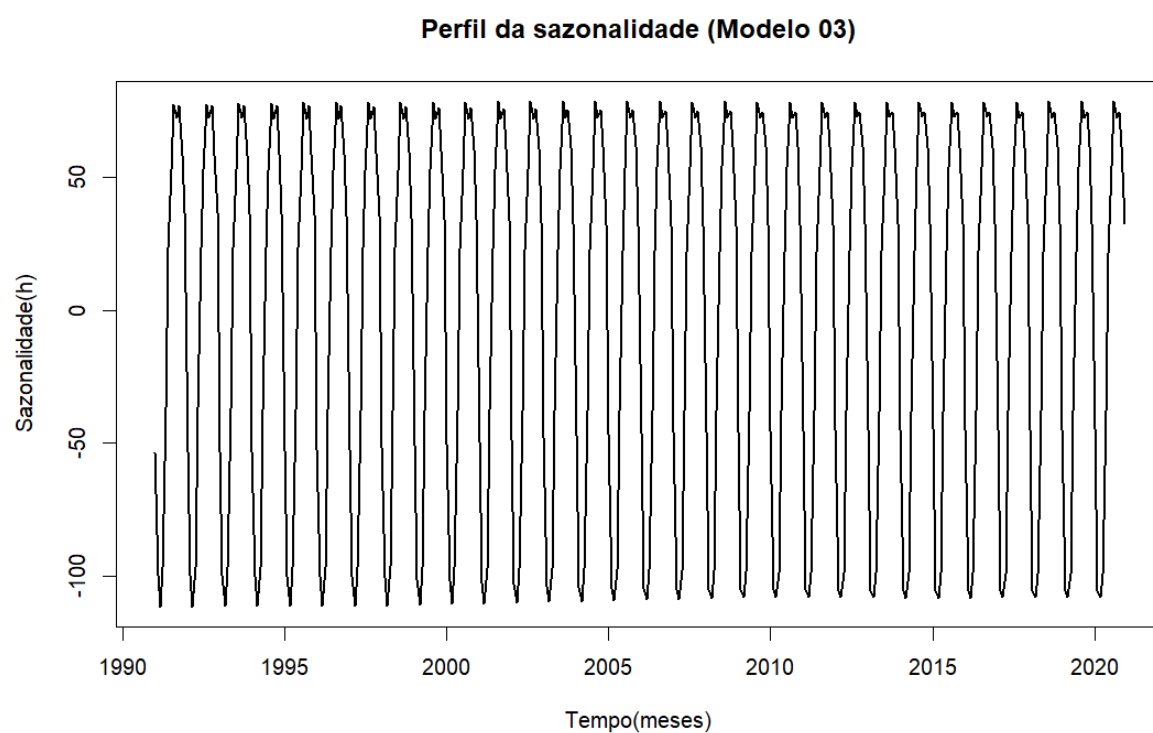
Fonte: Do autor.

Figura 23 – Perfil da função de autocorrelação parcial do *Modelo 03*.

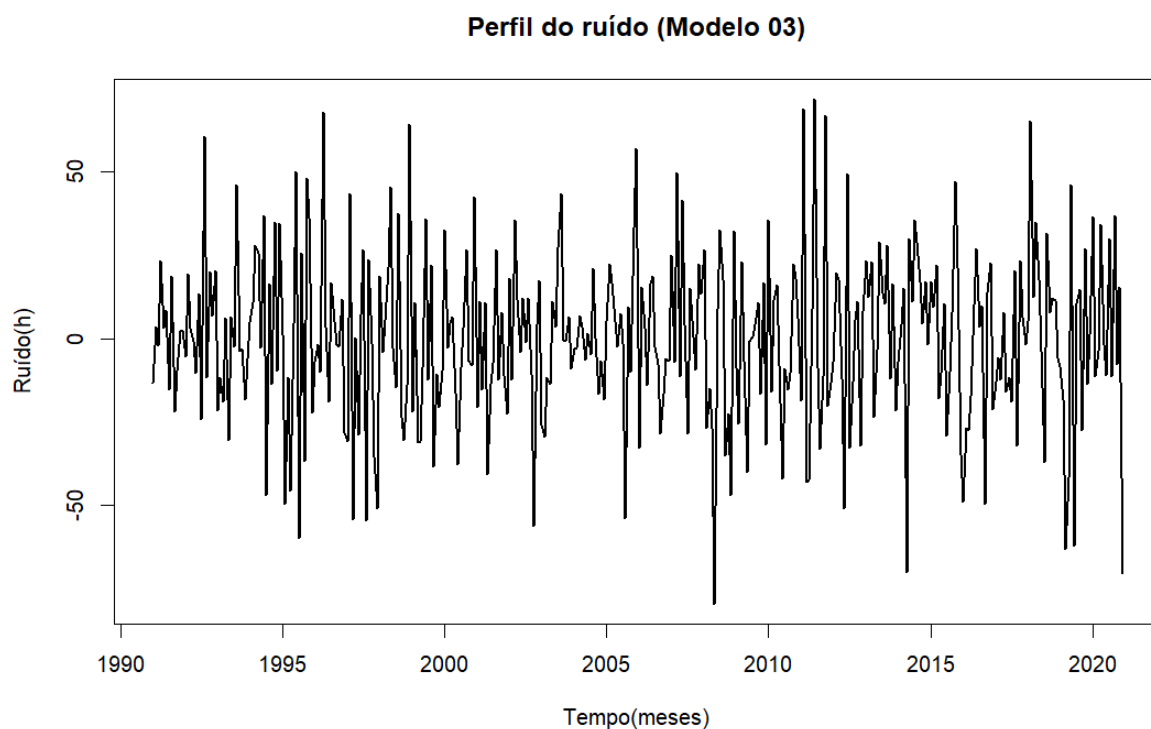
Fonte: Do autor.

Figura 24 – Perfil do nível do *Modelo 03*.

Fonte: Do autor.

Figura 25 – Perfil da sazonalidade do *Modelo 03*.

Fonte: Do autor.

Figura 26 – Perfil do ruído do *Modelo 03*.

Fonte: Do autor.

4.4.1 – Características intrínsecas do *Modelo 03*

Com base nos resultados apresentados no tópico anterior, observa-se que o *Modelo 03* apresenta uma variância de erro de medição de (693,381), uma variância associada ao nível local de (21,95286), uma variância associada à inclinação (tendência linear) extremamente pequena de (3,710541e-05) e uma variância da componente sazonal de (1,245173). A leitura estrutural mais imediata desses números é que o modelo está permitindo que o nível varie estocasticamente, mas está tornando a inclinação quase determinística (pois sua variância é praticamente nula), enquanto atribui grande parte da variabilidade não explicada ao erro de medição.

Essa combinação pode até produzir um ajuste visual aceitável do sinal médio, porém, é insuficiente para se capturar dependências de curto prazo e persistências residuais típicas de séries meteorológicas mensais, o que acaba se refletindo nos diagnósticos baseados nas inovações (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). O critério decisivo para se julgar a adequação do *Modelo 03* para imputação, entretanto, está nos diagnósticos de resíduos recursivos padronizados. Conforme explicitado pelos dados do quadro 3, os *p-valores* do teste estatístico de *Ljung-Box* para ausência de autocorrelação conjunta nos resíduos são muito

baixos em várias ordens pois, ($p\text{-valor} = 0,0008114$) até o lag 10, ($p\text{-valor} = 0,00121$) até o lag 12, ($p\text{-valor} = 0,003999$) até o lag 24, ($p\text{-valor} = 0,01257$) até o lag 36 e ($p\text{-valor} = 0,0009289$) até o lag 48.

Como o teste de *Ljung–Box* foi proposto justamente como medida formal de *falta de ajuste* associada à autocorrelação residual, valores de $p\text{-valor}$ tão pequenos implicam rejeição da hipótese nula de que os resíduos se comportam como ruído branco nas defasagens avaliadas (LJUNG; BOX, 1978). Em termos didáticos, isso significa que ainda existe estrutura temporal sistemática nas inovações que o modelo não explicou, portanto, as previsões um passo à frente e, por consequência, as imputações geradas pelo modelo tenderão a carregar erros correlacionados, violando uma condição central do arcabouço de diagnóstico em séries temporais para considerar um modelo adequado para previsão e reconstrução de valores ausentes (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Os gráficos de *ACF* e *PACF* dos resíduos recursivos padronizados, são coerentes com essa conclusão ao sugerirem picos em alguns atrasos, indicando dependência serial residual. Ao mesmo tempo, o teste de *Shapiro–Wilk* reporta um $p\text{-valor}$ de (0,08235).

Sob níveis usuais de significância, isso não fornece evidência forte contra a normalidade dos resíduos, o que é um aspecto favorável quando se deseja interpretar o modelo sob a hipótese linear gaussiana (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992). No entanto, para imputação, a condição de normalidade por si só não compensa a presença de autocorrelação residual pois, mesmo com resíduos aproximadamente normais, se eles não são aproximadamente não correlacionados, o modelo está omitindo dinâmica. Nesse cenário, a imputação pode até reproduzir o formato sazonal médio, mas tende a subestimar ou distorcer padrões de persistência e variações de curto prazo, além de produzir incertezas menos confiáveis, especialmente quando a lacuna é longa e ocorre em uma região onde a imputação se aproxima de previsão (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

O *BIC* de (8,412884) descreve um compromisso entre ajuste e parcimônia, mas, sem comparação explícita com modelos concorrentes e diante da rejeição do teste de *Ljung–Box*, ele não é suficiente para sustentar adequação para imputação, ou seja, em séries temporais, a parcimônia só é desejável quando não se compromete o requisito de resíduos aproximadamente não correlacionados (BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Diante dessas evidências, a conclusão metodologicamente consistente é que o *Modelo 03* não é adequado como modelo final para imputar os dados faltantes exibidos no gráfico da figura 4. A razão central é que os diagnósticos indicam autocorrelação residual estatisticamente significativa em várias defasagens, o que caracteriza falta de ajuste dinâmica e sugere que o modelo de tendência

linear local com sazonalidade clássica, tal como estimado, não capturou toda a estrutura temporal presente na série. Em termos práticos, isso aponta para a necessidade de se enriquecer o componente irregular com uma dinâmica correlacionada, como um *ARMA* no erro (estratégia comum em modelos estruturais quando se deseja *branquear* as inovações), ou reconsiderar a especificação dos componentes (por exemplo, permitir maior variabilidade estocástica na inclinação, incorporar um ciclo estocástico ou tratar outliers/intervenções), até que ACF/PACF e, principalmente, o *Ljung-Box* sustentem a hipótese de resíduos aproximadamente não correlacionados. Apenas após esse conjunto de diagnósticos indicar ruído branco é que a imputação por filtro/suavizador de *Kalman* pode ser defendida como coerente e confiável para completar a série com o menor viés possível e com incertezas interpretáveis (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; BOX et al., 2015).

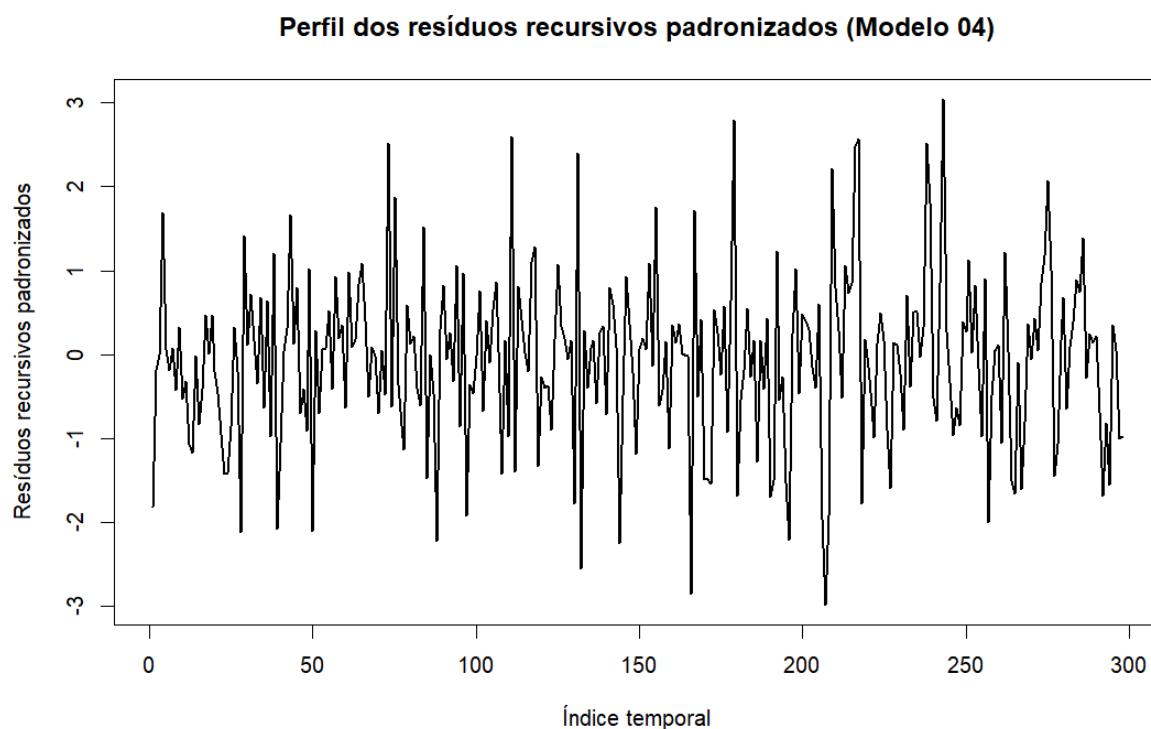
4.5 – Tendência linear de sazonalidade clássica com componente *ARMA(1,1)*

Efetuada-se o devido processo de ajuste do *Modelo 04* (modelo de tendência linear de sazonalidade clássica com componente *ARMA(1,1)*), com o auxílio do pacote *statespacer* da linguagem *R*, obteve-se como resultado o quadro e os gráficos abaixo apresentados. No quadro 4 são apresentadas, de forma sucinta, as principais informações sobre o processo de ajuste do referido modelo estrutural aos dados da série temporal da figura 4. Da figura 27 até a figura 34 apresentam-se respectivamente, os perfis, dos resíduos recursivos padronizados, do histograma dos resíduos, da função de autocorrelação dos resíduos, da função de autocorrelação parcial dos resíduos bem como de todas as componentes estruturais do referido modelo.

Quadro 4 – Quadro resumo das principais características do *Modelo 04*.

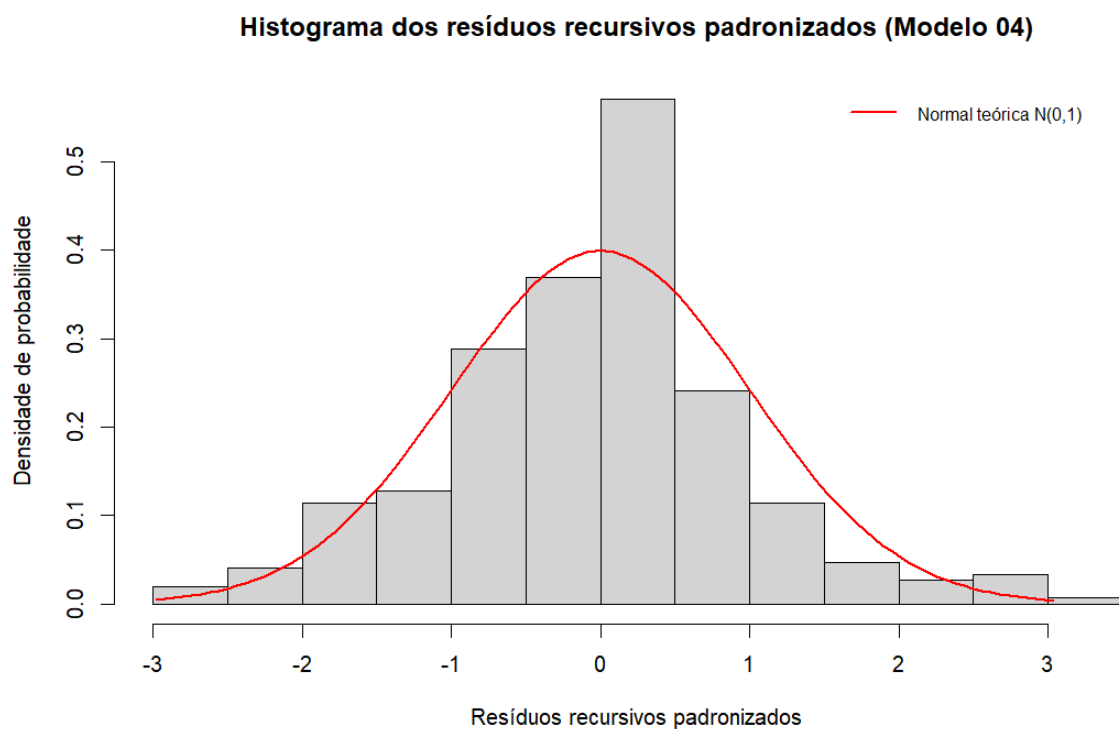
PARÂMETRO	VALOR
Variância do Erro de Medição da Série Temporal (H_t)	25,97121
Variância da Componente de Nível Local ($\sigma_{\varepsilon_1}^2$)	0,01165321
Variância da Componente de Tendência Linear ($\sigma_{\varepsilon_2}^2$)	0,0001211041
Variância da Componente Sazonal Clássica (σ_{ω}^2)	1,916154
Variância da Componente ARMA(1,1) (σ_v^2)	718,9911
Coefficiente Autoregressivo da Componente ARMA(1,1) (ϕ_1)	0,5631793
Coefficiente de Média Móvel da Componente ARMA(1,1) (θ_1)	-0,2868054
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 10	0,4173
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 12	0,4375
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 24	0,4848
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 36	0,6158
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Ljung-Box</i> até o lag 48	0,1456
<i>p</i> -valor do Teste de <i>Shapiro-Wilk</i>	0,002131
Crítério de Informação Bayesiana de Schwarz (<i>BIC</i>)	8,406218

Fonte: Do autor.

Figura 27 – Perfil dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 04*.

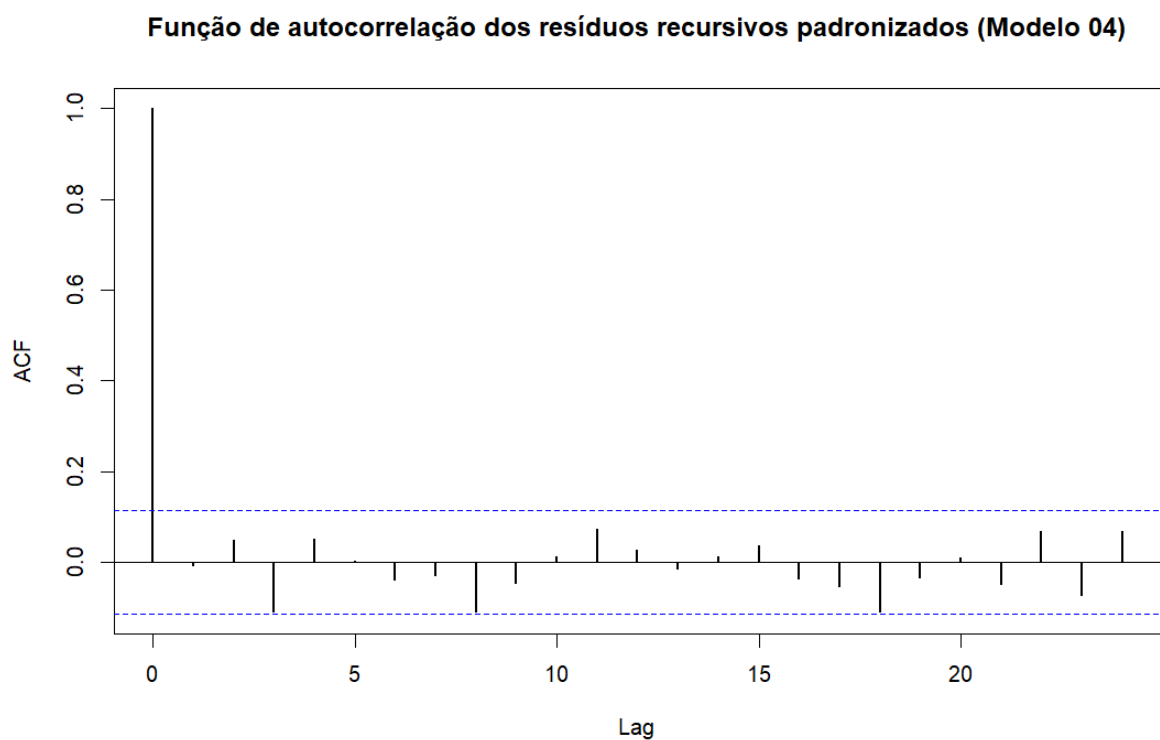
Fonte: Do autor.

Figura 28 – Perfil do histograma dos resíduos recursivos padronizados do *Modelo 04*.



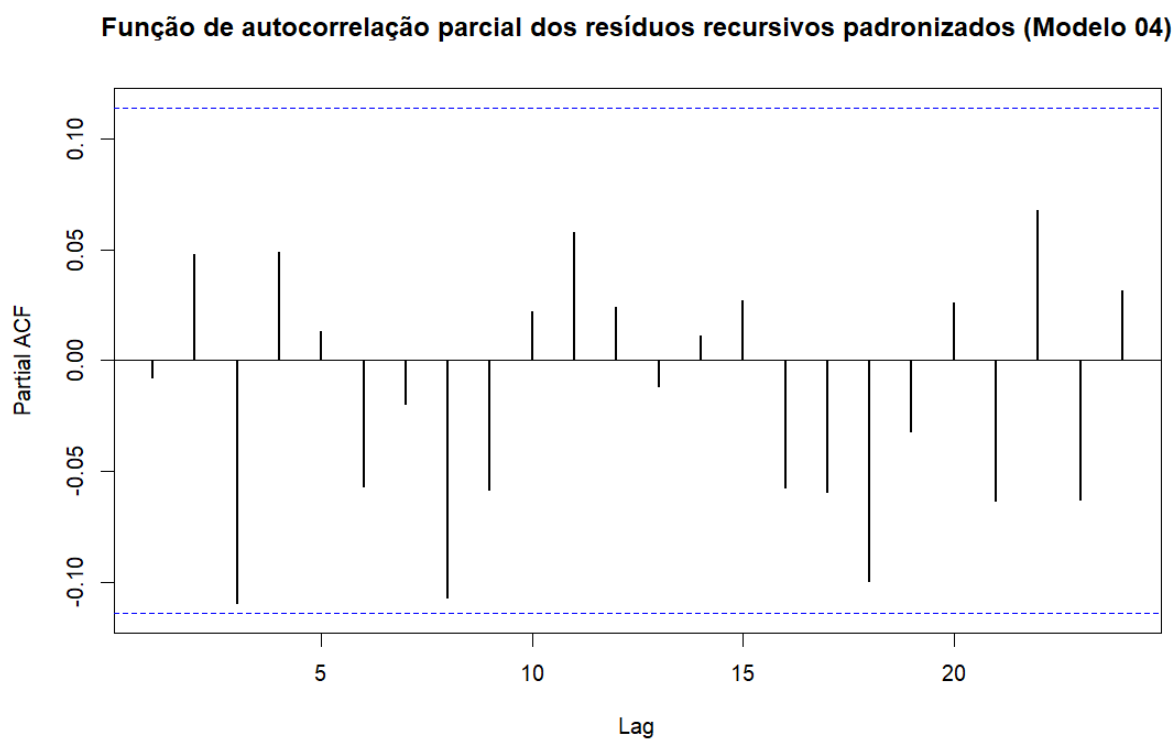
Fonte: Do autor.

Figura 29 – Perfil da função de autocorrelação do *Modelo 04*.



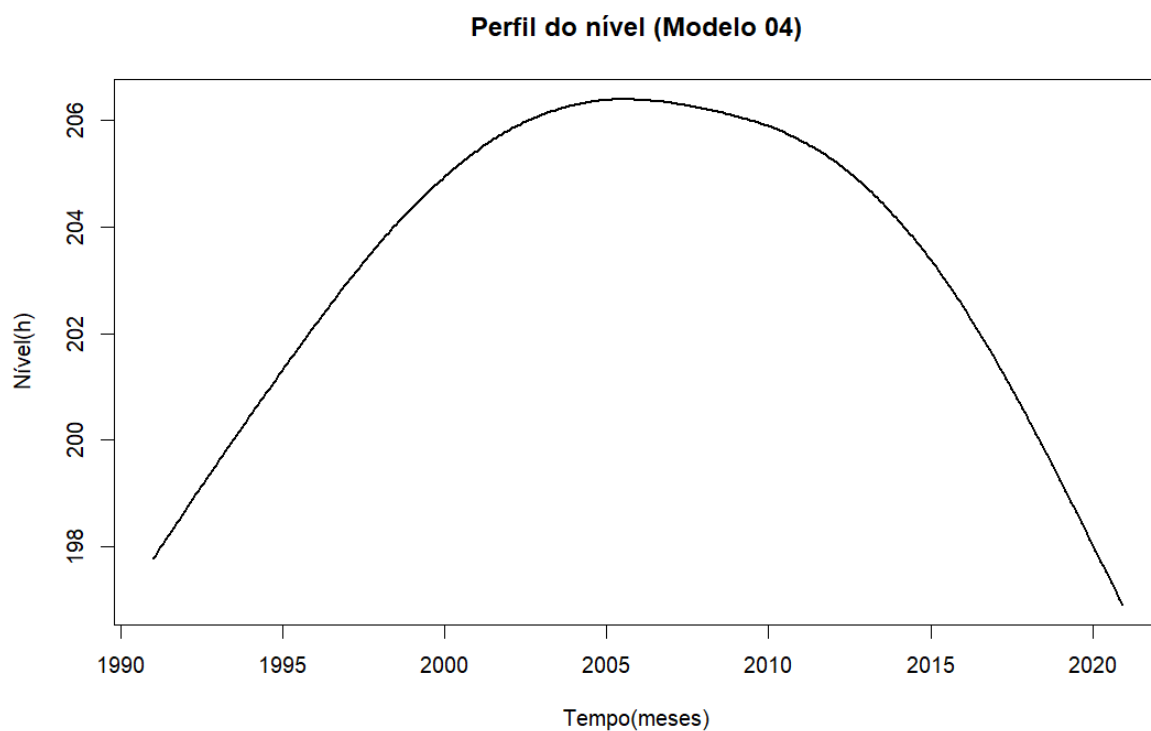
Fonte: Do autor.

Figura 30 – Perfil da função de autocorrelação parcial do *Modelo 04*.

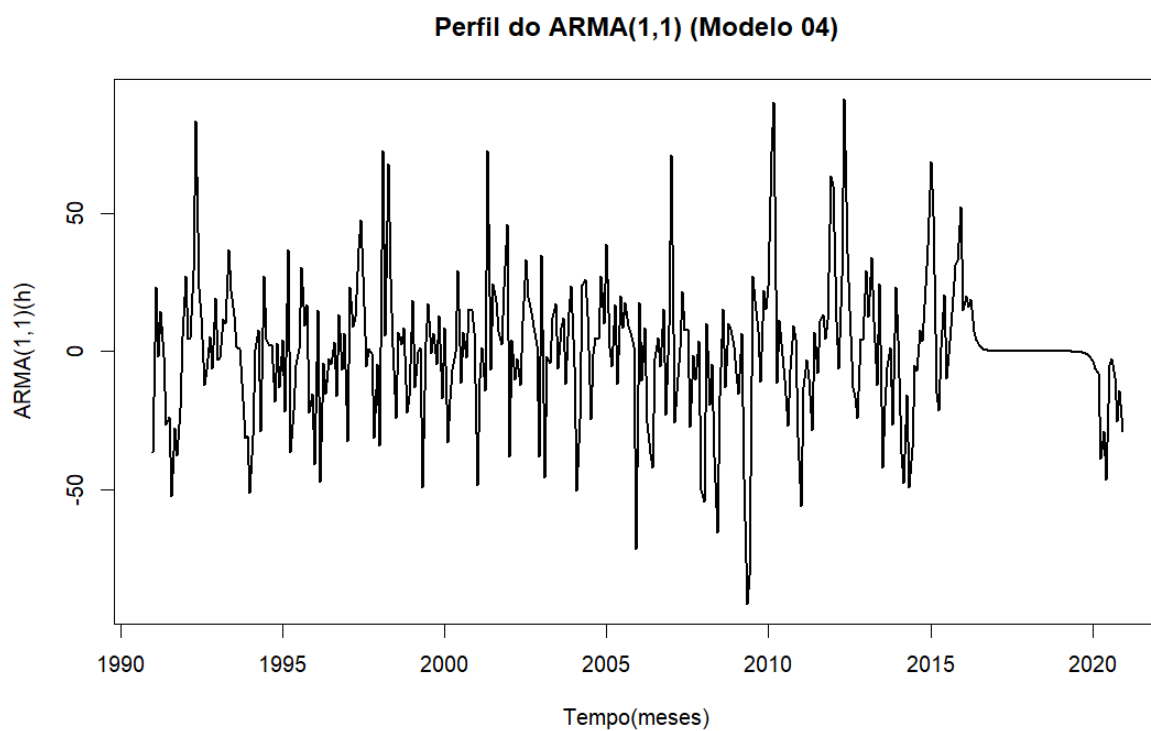


Fonte: Do autor.

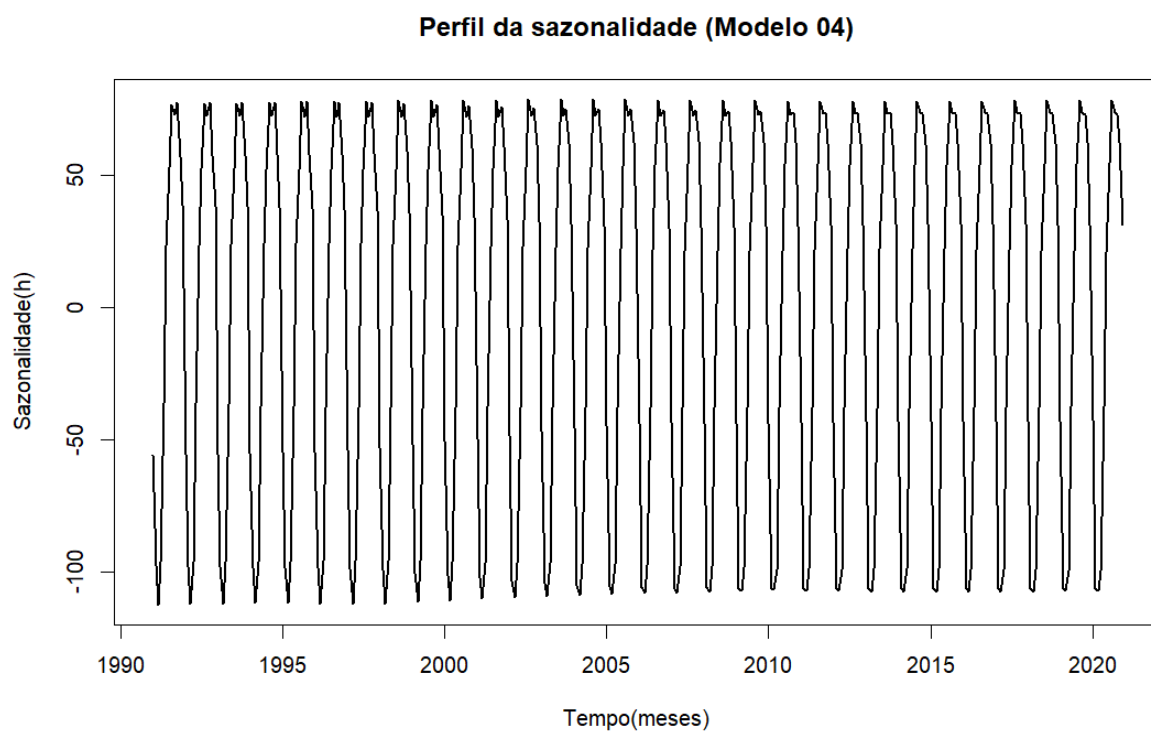
Figura 31 – Perfil do nível do *Modelo 04*.



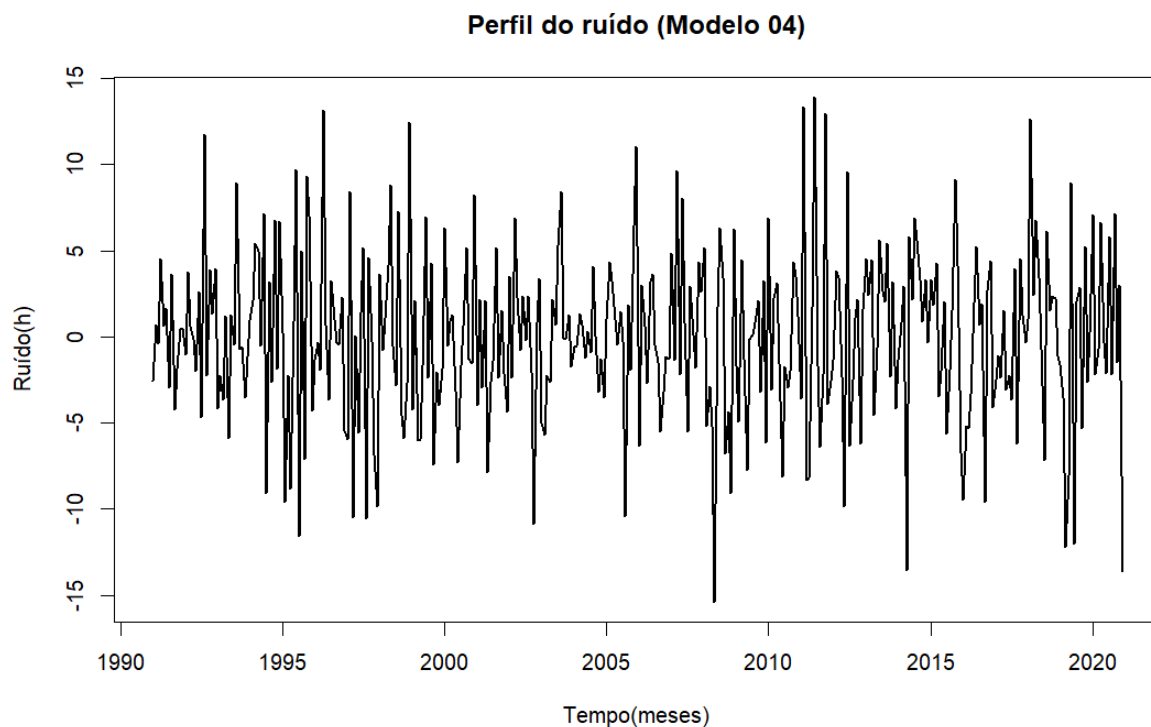
Fonte: Do autor.

Figura 32 – Perfil do $ARMA(1,1)$ do *Modelo 04*.

Fonte: Do autor.

Figura 33 – Perfil da sazonalidade do *Modelo 04*.

Fonte: Do autor.

Figura 34 – Perfil do ruído do *Modelo 04*.

Fonte: Do autor.

4.5.1 – Características intrínsecas do *Modelo 04*

Fundamentando-se nos dados apresentados no quadro 4 constata-se que o erro de medição foi estimado como relativamente baixo ($H_t = 25,97121$) e que as variâncias associadas ao nível ($\sigma_{\varepsilon_1}^2 = 0,01165321$) e à tendência linear ($\sigma_{\varepsilon_2}^2 = 0,0001211041$) são pequenas, enquanto que a variância sazonal é moderada ($\sigma_{\omega}^2 = 1,916154$) e a variância da componente *ARMA* é alta ($\sigma_v^2 = 718,9911$). Além disso, os parâmetros da componente *ARMA*(1,1) foram estimados como sendo ($\phi_1 = 0,5631793$) e ($\theta_1 = -0,2868054$). Essa configuração é compatível com a interpretação de que o modelo está atribuindo a maior parte das flutuações de curto prazo a um irregular correlacionado (*ARMA*), preservando uma tendência relativamente suave e uma sazonalidade clássica estável.

Do ponto de vista de imputação, isso costuma ser desejável quando, sem o *ARMA*, os resíduos exibem autocorrelação pois, a dinâmica remanescente deixa de *sobrar* nos resíduos e passa a ser absorvida por uma estrutura explícita no modelo, o que melhora a qualidade de previsões e, por consequência, de imputações em trechos ausentes (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; BOX et al., 2015). Para decidir de forma efetiva se o *Modelo 04* é adequado para se imputar os dados faltantes, o critério mais importante não é apenas o valor do *BIC*, mas

a verificação de que as inovações/resíduos recursivos padronizados se comportam como um ruído branco. Em modelos de séries temporais, um diagnóstico clássico dessa propriedade é o teste de *Ljung–Box* aplicado aos resíduos pois, ele avalia se um conjunto de autocorrelações até uma dada defasagem é conjuntamente nulo, funcionando como uma medida formal de *falta de ajuste* (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). No *Modelo 04*, os *p-valores* da estatística de *Ljung–Box* até os lags 10, 12, 24, 36 e 48 estão todos acima de níveis usuais de significância de (5%), não há evidência estatística de autocorrelação residual relevante nas ordens avaliadas.

Isso é um sinal forte de adequação para imputação, porque a imputação por filtro/suavizador de *Kalman* é, essencialmente, uma previsão condicional sob o modelo pois, se as inovações são aproximadamente não correlacionadas, o modelo está capturando a dependência temporal de segunda ordem necessária para previsões consistentes (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Os gráficos de *ACF* e *PACF* dos resíduos recursivos padronizados, são compatíveis com essa leitura ao sugerirem ausência de padrões persistentes de autocorrelação e autocorrelação parcial, o que reforça a conclusão apontada pelo teste de *Ljung–Box*.

O ponto que exige cautela é a normalidade dos resíduos recursivos padronizados. O quadro 4 reporta um *p-valor* de *Shapiro–Wilk* igual a (0,002131). Esse resultado rejeita a hipótese de normalidade em níveis usuais, indicando que, embora os resíduos estejam *branqueados* (sem autocorrelação detectável), a distribuição deles se afasta da normal, possivelmente por caudas pesadas, assimetria ou presença de valores extremos (SHAPIRO; WILK, 1965; ROYSTON, 1992). Para o processo de imputação, essa distinção é crucial pois, se o objetivo principal é de se obter *imputações pontuais* coerentes com a tendência e a sazonalidade, isto é, estimativas do tipo $\hat{y}_t = \mathcal{E}(y_t | \text{dados})$, a remoção da autocorrelação residual tende a ser a condição mais determinante, porque a reconstrução do sinal e a previsão dependem fortemente da estrutura de covariância capturada pelo modelo, nesse sentido, o *Modelo 04* é metodologicamente defensável para imputar a lacuna presente no gráfico da figura 4, sobretudo quando comparado a modelos que falham no *Ljung–Box* (DURBIN; KOOPMAN, 2012; HARVEY, 1990).

Por outro lado, se a imputação for usada com ênfase em *incerteza probabilística bem calibrada* (intervalos com interpretação estritamente gaussiana, probabilidades de extremos e quantis), a rejeição de normalidade recomenda prudência, porque intervalos derivados diretamente da suposição normal podem ficar sub ou superconservadores quando os resíduos têm caudas mais pesadas ou assimetria, cenário comum em dados ambientais (DURBIN;

KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Por fim, o *BIC* do *Modelo 04* é de (8,406218). O *BIC* é útil para se comparar modelos concorrentes penalizando complexidade, mas, para imputação, ele não substitui os diagnósticos de resíduos pois, um modelo pode ter *BIC* competitivo e ainda assim ser inadequado para previsão/imputação se deixar autocorrelação nos resíduos.

Aqui, o ponto forte do *Modelo 04* é justamente satisfazer o requisito de resíduos aproximadamente não correlacionados, o que sustenta a adequação do modelo para imputar a lacuna longa ao final da série em termos de coerência dinâmica. Assim, com base nas evidências fornecidas, a conclusão didaticamente fundamentada é que o *Modelo 04* é *adequado para a imputação dos dados faltantes* no gráfico da figura 4 quando o foco é reconstruir valores consistentes com tendência/sazonalidade e dependência temporal, porque os testes de *Ljung–Box* não indicam autocorrelação residual.

Todavia, ele não é plenamente adequado no sentido estrito de *modelo linear gaussiano* para fins de inferência probabilística fina, pois os resíduos rejeitam normalidade, o que sugere que, se a sua aplicação exigir intervalos e probabilidades com forte dependência da hipótese gaussiana, seria recomendável considerar ajustes adicionais (como tratamento de outliers/intervenções, transformações ou especificações não gaussianas) antes de se usar as imputações para decisões de risco ou análise de extremos (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

4.6 – Imputação dos dados ausentes da estação convencional de Soure

Análises preliminares do desempenho do *Modelo 02* e do *Modelo 04*, para fins de imputação dos dados ausentes na série temporal de insolação mensal média observada pela estação meteorológica convencional de Soure, apontam para o fato de que ambos os modelos são adequados para se efetuar a referida imputação com o intuito de se garantir uma imputação coerente com a dinâmica característica da série temporal original. No entanto, para se decidir entre o *Modelo 02* e o *Modelo 04*, com o foco exclusivo de se garantir uma imputação pontual coerente com a dinâmica média e com a sazonalidade da série de insolação mensal do gráfico da figura 13, o ponto central é escolher a especificação que, ao mesmo tempo, represente bem o padrão sazonal e a dependência de curto prazo e evite introduzir estrutura desnecessária no componente de tendência, pois qualquer estrutura extra tende a se traduzir em *deriva (drift)* em previsões e, portanto, em imputações no trecho final ausente.

Em modelos estruturais no espaço de estados, imputações pontuais decorrem da esperança condicional $\hat{y}_t = \mathcal{E}(y_t \mid \text{dados})$ produzida pelo filtro/suavizador de *Kalman*, e essa esperança condicional é particularmente sensível a especificações de tendência quando a lacuna está no final da amostra, porque nesse caso a imputação passa a ser essencialmente previsão condicionada ao passado (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017). Os dois modelos foram explicitamente construídos para se *branquear* os resíduos recursivos padronizados via a inclusão de uma componente *ARMA(1,1)*, e os diagnósticos confirmam que ambos alcançaram esse objetivo no que diz respeito à autocorrelação pois, o *Modelo 02* apresenta *p-valores* de *Ljung-Box* sempre acima de 0,05 em todos os lags observados (lag 10, lag 12, lag 24, lag 36 e lag 48) e o *Modelo 04* também apresenta a mesma característica. Pela interpretação clássica do teste de *Ljung-Box* como medida formal de falta de ajuste dinâmica, isso significa que não há evidência de autocorrelação residual conjunta nas ordens avaliadas, o que é justamente a condição desejada para previsões e imputações coerentes em modelos de séries temporais (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016). Portanto, a distinção entre os dois modelos, para imputação pontual da dinâmica média e sazonal, passa a depender principalmente de parcimônia/adequação estrutural do componente de tendência e de um critério de seleção penalizado por complexidade.

Nesse ponto, o Critério de Informação Bayesiana de Schwarz (*BIC*) fornece um argumento objetivo a favor do *Modelo 02*, pois ele apresenta *BIC* menor (8,355521) do que o *Modelo 04* (8,406218). Como o *BIC* penaliza a complexidade do modelo e tende a favorecer especificações que expliquem os dados sem adicionar parâmetros supérfluos, um *BIC* menor sugere que, para esta série, a inclusão explícita de uma tendência linear local não trouxe ganho suficiente para compensar o aumento de complexidade (SCHWARZ, 1978; HARVEY, 1990). Essa leitura é reforçada pelo próprio ajuste do *Modelo 04* pois, a variância associada à componente de tendência linear é muito pequena (0,0001211041), fato este que indica que a inclinação (*slope*) está praticamente *travada*, isto é, o modelo não está encontrando evidência forte de uma tendência estocástica relevante a ponto de precisar de um termo de tendência linear local para descrever a série temporal de insolação mensal média. Em situações assim, a literatura de modelos estruturais recomenda cautela com componentes de tendência adicionais, porque elas podem induzir extrapolações desnecessárias em previsões e imputações em trechos finais ausentes, especialmente quando o sinal visual é dominado por sazonalidade anual e variações interanuais sem um *drift* persistente claro (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Assim, como ambos os modelos atingem resíduos aproximadamente não

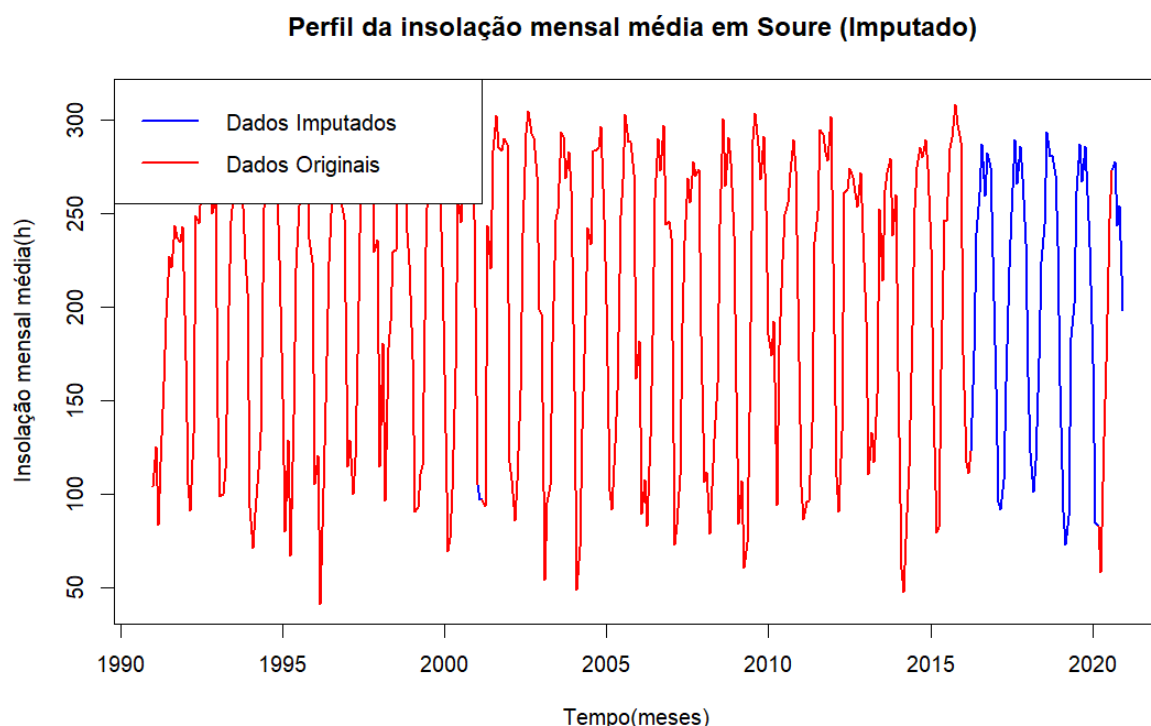
correlacionados, mas o *Modelo 02* é mais parcimonioso e apresenta melhor *BIC*, conclui-se que a escolha mais consistente para imputações pontuais coerentes com a dinâmica média e a sazonalidade é o *Modelo 02*. É importante se observar que ambos os modelos rejeitam normalidade dos resíduos recursivos padronizados pelo *Shapiro–Wilk*.

Para imputações pontuais (isto é, médias condicionais), essa rejeição não costuma ser tão decisiva quanto a presença/ausência de autocorrelação residual, porque o que governa o comportamento da média condicional em modelos lineares é principalmente a estrutura de segunda ordem (covariâncias) capturada pelas equações de estado, contudo, deve-se ter cautela quando a intenção for interpretar probabilidades e quantis com forte dependência da hipótese gaussiana (DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Como o foco da presente monografia são imputações pontuais coerentes com a dinâmica média e a sazonalidade, a escolha pelo *Modelo 02* permanece a mais defensável. Uma vez escolhido o *Modelo 02*, o procedimento de imputação segue a lógica padrão de modelos no espaço de estados, ou seja, ajusta-se o *Modelo 02* aos dados da série temporal de interesse prático, obtém a estimativa suavizada do componente observado nos instantes faltantes e, por fim, efetua-se a imputação pontual desejada. O ponto metodológico central é entender a diferença entre *senal* e *observação*, pois, em uma formulação típica no espaço de estados, a equação de observação do modelo é definida por $y_t = \hat{y}_t + \epsilon_t$, onde a variável ϵ_t representa o erro de medição com variância H_t .

O suavizador fornece naturalmente uma estimativa de $\hat{y}_t$, desta forma, quando se efetua a soma dos valores imputados com o respectivo ruído de medição, efetua-se uma imputação que não é apenas um valor médio condicional suave. Esse procedimento pode ser implementado somando-se a cada imputação um sorteio definido por $\hat{\epsilon}_t \sim i. i. d. \mathcal{N}(0, H_t)$, usando-se a variância estimado pelo modelo, que no caso do *Modelo 02*, trata-se de uma variância de (97,78958). Esse procedimento produz uma imputação no mesmo nível de variabilidade observado na série temporal original, o que é especialmente útil quando se deseja completar a série para análises que exigem valores compatíveis com a escala observada, e não apenas a trajetória média suavizada (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Efetuando-se o referido procedimento na série temporal de insolação média mensal observada pela estação meteorológica convencional da cidade de Soure, obtêm-se a seguinte série temporal imputada apresentada no gráfico da figura 27. Para fins de reprodutibilidade o gráfico da figura 35 foi gerado na *linguagem R* especificando-se o parâmetro “*set.seed(100)*” antes de se gerar a variável $\hat{\epsilon}_t$.

Figura 35 – Perfil da série temporal de Soure imputada pelo *Modelo 02*.

Fonte: Do autor.

Do ponto de vista estatístico, esse procedimento está alinhado com a interpretação de imputação por espaço de estados pois, a parte $\hat{y}_t$ vem da média condicional obtida pelo filtro/suavizador de *Kalman*, enquanto que a soma de $\hat{\epsilon}_t \sim i. i. d. \mathcal{N}(0, H_t)$ devolve à imputação a variabilidade atribuída ao ruído de medição (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

5.0 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em séries temporais mensais de insolação mensal média como a apresentada no gráfico da figura 13, o objetivo de se obter imputações pontuais coerentes com a dinâmica média e com a sazonalidade exige, antes de tudo, que o modelo no espaço de estados produza inovações (resíduos recursivos padronizados) aproximadamente não autocorrelacionadas, porque é essa condição que indica que a estrutura temporal relevante foi capturada pelos componentes do modelo e não *sobrou* no erro. Em modelos estruturais, a imputação pontual corresponde, em termos probabilísticos, à esperança condicional definida por $\hat{y}_t = \mathcal{E}(y_t | \text{dados})$, obtida via filtro e/ou suavizador de *Kalman*, e essa esperança condicional é particularmente sensível a más especificações do componente irregular e, quando há lacunas no final da série, também à forma

como o modelo trata a tendência (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SHUMWAY; STOFFER, 2017).

Assim, para se escolher entre o *Modelo 02* e o *Modelo 04*, o critério metodológico mais robusto é verificar, se ambos *branqueiam* os resíduos e se a inclusão de uma tendência linear local no *Modelo 04* é realmente necessária para representar a dinâmica média, ou se ela apenas adiciona complexidade sem ganho prático para imputações pontuais. Os resultados apresentados no quadro 5 e no quadro 7 indicam, em primeiro lugar, que ambos os modelos atingem o requisito essencial de ausência de autocorrelação residual. No *Modelo 02*, os *p-valores* do teste de *Ljung–Box* até os lags 10, 12, 24, 36 e 48 são todos não significativos em níveis usuais. No *Modelo 04*, os *p-valores* correspondentes aos mesmos lags também são não significativos. Pela interpretação clássica do *Ljung–Box* como medida de *falta de ajuste* associada à autocorrelação conjunta dos resíduos, esse padrão é compatível com a hipótese de que as inovações se aproximam de ruído branco em ambos os casos, o que sustenta a coerência dinâmica das previsões e, por consequência, das imputações pontuais (LJUNG; BOX, 1978; BOX et al., 2015; BROCKWELL; DAVIS, 2016).

Em outras palavras, como ambos já resolvem o problema que, na prática, mais prejudica imputações pontuais, a decisão passa a depender de parcimônia e da necessidade real de uma tendência linear local para descrever a dinâmica média. É exatamente nesse ponto que o *Modelo 02* se mostra mais adequado para produzir imputações pontuais coerentes com a dinâmica média e sazonal sem introduzir estrutura supérflua. O primeiro argumento é o *BIC*, que compara modelos penalizando a complexidade pois, o *Modelo 02* apresenta *BIC* menor (8,355521) do que o *Modelo 04* (8,406218). Como o *BIC* foi concebido para favorecer, em média, modelos mais parcimoniosos quando o ganho de ajuste não compensa o acréscimo de parâmetros, um *BIC* menor sugere que a inclusão explícita da tendência linear local do *Modelo 04* não trouxe informação suficiente para se justificar a complexidade adicional, ao menos sob o critério penalizado (SCHWARZ, 1978; HARVEY, 1990).

O segundo argumento é estrutural e vem do próprio ajuste do *Modelo 04* pois, a variância associada à componente de tendência linear local é extremamente pequena (0,0001211041), indicando que o termo de inclinação é, na prática, quase determinístico e pouco ativo na explicação da série. Quando uma componente de tendência tem uma variância estimada próxima de zero, isso costuma significar que a série não demanda, empiricamente, uma tendência estocástica adicional além do nível e da sazonalidade, e, nesse contexto, manter esse componente pode ser desnecessário para o objetivo de imputar o valor médio sazonal e pode até induzir extrapolações indevidas em trechos faltantes no final da amostra, justamente porque

a imputação se torna majoritariamente previsão condicionada ao passado (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012). Já o *Modelo 02* evita esse risco ao representar a evolução média por um nível local e delegar a dependência de curto prazo ao $ARMA(1,1)$ no irregular, combinação que, para séries dominadas por sazonalidade anual e flutuações interanuais, tende a preservar melhor o padrão sazonal médio ao imputar lacunas longas, sem forçar uma tendência que o ajuste não sustenta com clareza (HARVEY, 1990; BOX et al., 2015; DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Por fim, conclui-se que embora ambos os modelos rejeitem normalidade dos resíduos recursivos padronizados pelo teste de *Shapiro–Wilk* isso é um aspecto mais sensível para calibração probabilística de intervalos do que para imputações pontuais da média condicional, cujo comportamento depende sobretudo da estrutura de segunda ordem e do *branqueamento* das inovações. Desta forma, para o propósito específico declarado de imputações pontuais coerentes com a dinâmica média e com a sazonalidade da série temporal de interesse prático, a evidência mais relevante é que ambos os modelos tornam os resíduos aproximadamente não autocorrelacionados, e, entre eles, o *Modelo 02* se destaca por ser mais parcimonioso (menor *BIC*) e por não introduzir uma tendência linear local cuja variância estimada, no *Modelo 04*, é praticamente nula.

Consequentemente, o *Modelo 02* é o mais adequado entre os dois para produzir imputações pontuais que preservem a dinâmica média e a sazonalidade observadas no histórico da série de interesse prático, com menor risco de extrapolação estrutural desnecessária em trechos faltantes finais (HARVEY, 1990; DURBIN; KOOPMAN, 2012; SCHWARZ, 1978).

REFERÊNCIAS

- ALMOROX, J.; HONTORIA, C. **Global solar radiation estimation using sunshine duration in Spain.** *Energy Conversion and Management*, v. 45, n. 9-10, p. 1529-1535, 2004.
- ANDERSON, BRIAN D. O.; MOORE, JOHN B. **Optimal Filtering.** Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.
- ÅNGSTRÖM, A. **Solar and Terrestrial Radiation. Report to the International Commission for Solar Research on Actinometric Investigations of Solar and Atmospheric Radiation.** *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 50, n. 210, p. 121–126, 1924. DOI: 10.1002/qj.49705021008.
- BAÑBURA, Marta; MODUGNO, Michele. **Maximum likelihood estimation of factor models on datasets with arbitrary pattern of missing data.** *Journal of Applied Econometrics*, v. 29, n. 1, p. 133-160, 2014. DOI: 10.1002/jae.2306.
- BELÚCIO, L. P. et al. **Radiação Solar Global Estimada a partir da Insolação para Macapá (AP).** *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 29, n. 4, p. 494–504, 2014. DOI: 10.1590/0102-778620130079.
- BOX, GEORGE E. P.; JENKINS, GWILYM M.; REINSEL, GREGORY C.; LJUNG, GRETA M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control.** 5. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015.
- BROCKWELL, PETER J.; DAVIS, RICHARD A. **Introduction to Time Series and Forecasting.** 3. ed. Cham: Springer, 2016.
- BUTT, N.; NEW, M.; MALHI, Y.; DA COSTA, A.; OLIVEIRA, P.; SILVA-ESPEJO, J. **Diffuse Radiation and Cloud Fraction Relationships in Two Contrasting Amazonian Rainforest Sites.** *Agricultural and Forest Meteorology*, [S.l.], v. 150, n. 3, p. 361-368, 2010.
- DUFFIE, J. A.; BECKMAN, W. A. **Solar Engineering of Thermal Processes.** 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.
- DURBIN, J.; KOOPMAN, S. J. **Time Series Analysis by State Space Methods.** 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- GAVA, M. L. L. M.; COSTA, S. M. S.; PORFÍRIO, A. C. S. **Daily Satellite-Based Sunshine Duration Estimates Over Brazil: Validation and Intercomparison.** *Atmospheric Measurement Techniques*, v. 16, p. 5429–5441, 2023. DOI: 10.5194/amt-16-5429-2023.
- HONAKER, James; KING, Gary. **What to do about missing values in time-series cross-section data.** *American Journal of Political Science*, v. 54, n. 2, p. 561-581, 2010. DOI: 10.1111/j.1540-5907.2010.00447.x.
- HAMILTON, JAMES D. **Time Series Analysis.** Princeton: Princeton University Press, 1994.
- HARVEY, A. C. **Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter.** Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

IQBAL, M. **An Introduction to Solar Radiation**. New York: Academic Press, 1983.

JONES, Richard H. **Maximum likelihood fitting of ARMA models to time series with missing observations**. *Technometrics*, v. 22, n. 3, p. 389-395, 1980. DOI: 10.1080/00401706.1980.10486171.

KALMAN, R. E. **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**. *Journal of Basic Engineering*, [S.l.], v. 82, n. 1, p. 35-45, 1960.

KLEIN, S. A. **Calculation of monthly average insolation on tilted surfaces**. *Solar Energy*, v. 19, n. 4, p. 325-329, 1977.

LITTLE, RODERICK J. A.; RUBIN, DONALD B. **Statistical Analysis with Missing Data**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2019.

LIU, B. Y. H.; JORDAN, R. C. **The interrelationship and characteristic distribution of direct, diffuse and total solar radiation**. *Solar Energy*, v. 4, n. 3, p. 1-19, 1960.

LJUNG, GRETA M.; BOX, GEORGE E. P. **On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models**. *Biometrika*, Oxford, v. 65, n. 2, p. 297-303, 1978.

LUQUE, A.; HEGEDUS, S. (ed.). **Handbook of Photovoltaic Science and Engineering**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

MARTINS, F. R.; PEREIRA, E. B.; SILVA, S. A. B.; ABREU, S. L.; COLLE, S. **Solar Energy Scenarios in Brazil, Part One: Resource Assessment**. *Energy Policy*, [S.l.], v. 36, n. 8, p. 2853-2864, 2008a.

MARTINS, F. R.; RÜTHER, R.; PEREIRA, E. B.; ABREU, S. L. **Solar Energy Scenarios in Brazil. Part Two: Photovoltaics Applications**. *Energy Policy*, [S.l.], v. 36, n. 8, p. 2865-2877, 2008b.

MATUSZKO, DOROTA. **A Comparison of Sunshine Duration Records from the Campbell-Stokes Sunshine Recorder and CSD3 Sunshine Duration Sensor**. *Theoretical and Applied Climatology*, [s. l.], v. 122, p. 435-443, 2015.

MEDEIROS, F. J. et al. **Calibration of Ångström-Prescott Equation to Estimate Daily Solar Radiation on Rio Grande do Norte State, Brazil**. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 32, n. 3, 2017. DOI: 10.1590/0102-77863230008.

MESSINGER, R. A.; VENTRE, J. **Photovoltaic systems engineering**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.

MORITZ, Steffen; BARTZ-BEIELSTEIN, Thomas. **imputeTS: Time Series Missing Value Imputation in R**. *The R Journal*, v. 9, n. 1, p. 207-218, 2017. DOI: 10.32614/RJ-2017-009.

NEGRÓN JUÁREZ, R. I.; HODNETT, M. G.; FU, R.; GOULDEN, M. L.; VON RANDOW, C. **Control of Dry Season Evapotranspiration over the Amazonian Forest as Inferred from Observations at a Southern Amazon Forest Site**. *Journal of Climate*, [S.l.], p. 2827-2839, 2007.

OWCZAREK, M.; MALINOWSKA, M. **Manual and automatic measurements of sunshine duration in Cassubian Lakeland (Northern Poland).** *Atmosphere*, v. 14, n. 2, art. 244, 2023.

PALACIOS, I. V.; OROZCO, J. F.; MANRIQUE, N. A.; RAMIREZ, D. V. **Assessment of Solar Irradiation Data Sources and Prediction Models in the Amazon Region.** *IEEE Latin America Transactions*, [S.l.], v. 22, n. 12, p. 1019-1025, 2024.

PASHIARDIS, S. et al. **Comparison of Sunshine Duration Measurements Between the Campbell–Stokes Sunshine Recorder and Three Automatic Sensors at Three Locations in Cyprus.** *Applied Sciences*, v. 13, n. 22, p. 12393, 2023. DOI: 10.3390/app132212393.

PRESCOTT, J. A. **Evaporation from a Water Surface in Relation to Solar Radiation.** *Transactions of the Royal Society of South Australia*, v. 64, p. 114–118, 1940.

RAUCH, HERBERT E.; TUNG, F.; STRIEBEL, C. T. **Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems.** *AIAA Journal*, New York, v. 3, n. 8, p. 1445–1450, 1965.

ROYSTON, PATRICK. **Approximating the Shapiro–Wilk W-Test for Non-Normality.** *Statistics and Computing*, London, v. 2, n. 3, p. 117–119, 1992.

RUBIN, Donald B. **Inference and Missing Data.** *Biometrika*, v. 63, n. 3, p. 581–592, 1976. DOI: 10.1093/biomet/63.3.581.

SCHAFER, Joseph L.; GRAHAM, John W. **Missing data: Our View of the State of the Art.** *Psychological Methods*, v. 7, n. 2, p. 147-177, 2002. DOI: 10.1037/1082-989X.7.2.147.

SCHWARZ, GIDEON. **Estimating the Dimension of a Model.** *The Annals of Statistics*, Beachwood, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.

SEME, S.; SREDENŠEK, K.; ŠTUMBERGER, B.; HADŽISELIMOVIĆ, M. **Analysis of the performance of photovoltaic systems in Slovenia.** *Solar Energy*, v. 180, p. 550-558, 2019.

SHAPIRO, SAMUEL S.; WILK, MARTIN B. **An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples).** *Biometrika*, Oxford, v. 52, n. 3-4, p. 591–611, 1965.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples.** 4. ed. New York: Springer, 2017.

SKOPLAKI, E.; PALYVOS, J. A. **Operating temperature of photovoltaic modules: a survey of pertinent correlations.** *Renewable Energy*, v. 34, n. 1, p. 23-29, 2009.

SUEHRCKE, H. **Relationship Between Sunshine Duration and Solar Radiation.** *Solar Energy*, v. 68, n. 5, p. 417–425, 2000. DOI: 10.1016/S0038-092X(00)00020-5.

VIVAR, M.; FUENTES, M.; NORTON, M.; MAKRIDES, G.; DE BUSTAMANTE, I. **Estimation of sunshine duration from the global irradiance measured by a photovoltaic silicon solar cell.** *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 36, p. 26-33, 2014.

WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION. **Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation (WMO-No. 8).** 7. ed. Geneva: WMO, 2008.