

---

# **Demonstrações de proposições de Geometria Euclidiana por meio da Geometria Analítica: uma proposta de aplicação no ensino básico**

---

**Ivanizi Maria Paixão Cardoso**

Trabalho de Conclusão de Curso  
**Licenciatura em Matemática**



Faculdade de Matemática  
Campus Castanhal

2021

**Demonstrações de proposições de Geometria  
Euclidiana por meio da Geometria Analítica:  
uma proposta de aplicação no ensino básico**

**Graduação**

01/07/2013–13/04/2021

Submissão 25/03/2021

Defesa 08/04/2021

Versão Final 13/04/2021

Universidade Federal do Pará  
Campus de Castanhal  
Faculdade de Matemática

**Ivanizi Maria Paixão Cardoso**

[ivanizi.nz@mail.com](mailto:ivanizi.nz@mail.com)

Licenciada em Matemática 2021

*UFPA-Castanhal*

**Banca Examinadora**

**Prof. Valdelírio da Silva e Silva**

Membro da Faculdade (Orientador)

**Prof. Dr Hercio da Silva Ferreira**

Membro Externo

**Prof. Dr. Fábio Colins da Silva**

Colaborador da Faculdade

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Poder Superior por manter-me firme diante das intempéries e guiar meus sentidos nas horas de escuridão me empoderando com sabedoria para continuar a acreditar na realização deste sonho que hoje torna-se realidade.

À minha família- minha mãe, Honorilda; minhas irmãs, Waléria e Wanessa; e meus irmãos, Wagner e Ivan- pelo apoio incondicional, mesmo quando não mereci, pela motivação, por acreditarem no meu potencial quando eu mesma não mais acreditei, pelo incentivo e por todas as cobranças e que me fizeram chegar aqui. Pela compreensão, respeito, e contribuição em favor do tempo que precisei dedicar a este trabalho durante esta construção.

Ao meu querido, grande amigo, admirável professor e notório orientador, Prof. Valdelírio da Silva e Silva, pelo inestimável amparo, sem o qual, este trabalho não seria o qual é, quiçá, teria sequer existido.

À minha querida amiga, agora distante, mas sempre presente, Rosiane Cardoso, cuja qual, teve grande participação e responsabilidade na condução do curso, na finalização das aulas presenciais e que sempre se faz presente na arquibancada torcendo pelo meu sucesso.

À minha estimável amiga Nayra Rodrigues que está distante, mas se fez presente em todos os momentos durante o curso, antes e depois das aulas presenciais.

Aos meus amigos de longas datas Marcos e Augusto pelas insessantes palavras de incentivo, apoio, e exigências que foram sempre muito bem vindas e, em certos momentos, necessárias. Sobre tudo os gestos e iniciativas que contribuíram várias vezes, para que eu pudesse chegar a aqui.

A todos os meus queridos amigos cuja listagem dos nomes em detrimento do grau de contribuição seria injusta, pois contribuíram e ainda têm contribuído tanto de maneira singela, como acompanhado cada parágrafo desta construção, incentivando, corrigindo, melhorando e, principalmente, motivando este trabalho.

No mais, agradeço a todos que indiretamente também aqui tiveram participação. À toda a comunidade acadêmica da Universidade Federal Do Pará, à professora Dr<sup>a</sup> Kátia Liége pela compreensão e empatia, aos amigos que lá adquiri e que por toda a vida levarei.

---

## Epígrafe

“Só, na verdade, quem pensa certo, mesmo que, às vezes pense errado, é quem pode ensinar a pensar certo. E uma das condições necessárias a pensar certo é não estarmos demasiado certos de nossas certezas.”

Paulo Freire

# Resumo

---

A fala presente no interdiscurso da sociedade toma a matemática como difícil por si mesma e está destacada nela três dos fatores que corroboram para a tal dificuldade: a abstração, a linearidade na ordem de apresentação dos conteúdos, e uma atenção superficial dada a certos assuntos. Nesse sentido a Geometria Analítica se mostra uma das vertentes bastante propensas a portar tais condições que acentuam a custosidade no ensino/aprendizagem da disciplina na formação superior, que se estende ao ensino básico. Inspirados nas pesquisas de [Giardinetto \(1997\)](#) e [Kaminski, Sloutsky & Heckler \(2008\)](#), optamos neste trabalho, mesmo que com algumas poucas aplicações, pela intradisciplinaridade como mecanismo para defrontar a dificuldade evidente no interdiscurso, utilizando a Geometria Analítica para demonstrar a Geometria Plana, denotando os colorários da primeira para chegar às proposições da segunda, conforme alguns conceitos e demonstrações de [Delgado, Frensel & Crissaff \(2013\)](#) e [Lima \(2014\)](#) dentre outros. Após algumas noções preliminares básicas de Geometria Analítica, demonstramos aplicações, como: certas propriedades do paralelogramo, desigualdade triangular, Lei dos cossenos, Aplicações no triângulo, alguns dos seus pontos notáveis, e áreas; apontando como desnecessário o conhecimento da Geometria Euclidiana pra o entendimento da primeira e vice-versa; isto é, independentemente uma da outra elas podem se justificar e contribuir com a aprendizagem de ambas e incentivar a comunidade acadêmica a explorar de maneira mais acentuada a Geometria Analítica apoiando-se na Geometria Plana e até fazer uso desta reciprocidade.

**Palavras-chaves:** Geometria Plana; Geometria Analítica; Intradisciplinaridade.

---

## Lista de Figuras

2.1	Reta, semirreta, segmento e distância . . . . .	10
2.2	Retas $r$ e $s$ paralelas aos eixos $OX$ e $OY$ . . . . .	12
2.3	Distância entre dois pontos no plano . . . . .	13
2.4	Ponto médio de um segmento . . . . .	14
2.5	Circunferência no plano . . . . .	15
2.6	Segmentos equipolentes - DELGADO et al(2013) . . . . .	16
2.7	Vetor soma . . . . .	18
2.8	Regra do paralelogramo . . . . .	18
2.9	Propriedades da Adição . . . . .	19
2.10	Soma de vetores pelas coordenadas . . . . .	20
2.11	Vetor diferença . . . . .	20
2.12	Projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre a reta $r$ . . . . .	24
3.1	O quadrilátero e seus pontos médios . . . . .	27
3.2	Paralelogramo ABCD . . . . .	28
3.3	Paralelogramo OACB . . . . .	29
3.4	Triângulo OAC . . . . .	29
3.5	Losango ABCD . . . . .	30
3.6	Mediana Relativa a Hipotenusa no triângulo ABC . . . . .	32
3.7	Base média do triângulo ABC . . . . .	34
3.8	Triângulo ABC . . . . .	35
3.9	Quadrilátero XYMN inscrito no triângulo . . . . .	35
3.10	Ortocentro do triângulo ABC . . . . .	36
3.11	Triângulo ABC, inscrito na circunferência $G$ e retângulo em $C$ . . . . .	37
3.12	Área do paralelogramo . . . . .	38

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Noções Preliminares</b>	<b>10</b>
2.1	Coordenadas e distância na reta . . . . .	11
2.2	Coordenadas do ponto no plano . . . . .	11
2.3	Distância entre dois pontos no plano . . . . .	13
2.4	Segmentos orientados . . . . .	15
2.5	Vetores . . . . .	16
2.6	Operações com vetores . . . . .	18
2.7	Combinação linear de vetores . . . . .	21
2.8	Produto interno entre dois vetores . . . . .	22
2.9	Projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>26</b>
3.1	Paralelogramo, desigualdade triangular e lei dos cossenos . . . . .	26
3.1.1	Problema 1 . . . . .	26
3.1.2	Problema 2 . . . . .	27
3.1.3	Problema 3 . . . . .	28
3.1.4	Problema 4 . . . . .	30
3.1.5	Problema 5 . . . . .	30
3.2	Aplicações no Triângulo e pontos notáveis . . . . .	31
3.2.1	Problema 6 . . . . .	31
3.2.2	Problema 7 . . . . .	33
3.2.3	Problema 8 . . . . .	34
3.2.4	Problema 9 . . . . .	35
3.2.5	Problema 10 . . . . .	37
3.3	Áreas . . . . .	38
3.3.1	Problema 11 . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>40</b>
	<b>Referências</b>	<b>42</b>

# 1

## Introdução

---

Este trabalho tem como principal objetivo discutir uma proposta de aplicação da intradisciplinaridade, apresentando a Geometria Analítica (GA) como ferramenta para chegar às proposições de Geometria Plana (GP). Utilizando os conceitos mais básicos da primeira de forma que ela possa ser mais do que estudada, que ela possa ser apreciada pelos alunos e professores dos últimos anos do ensino fundamental até o nível superior, e incentivando a comunidade acadêmica a ampliar a abordagem da disciplina ainda no ensino básico brasileiro.

Antes de dar início a este trabalho, adentrando nos conteúdos da Matemática como um todo, com o propósito de compreender a visão dos estudiosos sobre o assunto, fazemos aqui uma discussão a respeito das dificuldades no ensino/aprendizagem da disciplina norteados pelo que [Silveira \(2011\)](#) (e [Silveira \(2002\)](#)) chamou de *interdiscurso*, pois ele “*manifesta o conjunto de sentidos expressos na voz do professor de Matemática, na voz da comunidade escolar e na voz da mídia*”. Acabamos enxergando que o estudo da GA se apresenta como um campo fértil para se propalar os problemas que parecem ser os principais responsáveis pela referida dificuldade de desenvolvimento da matemática no ensino superior e que, ciclicamente, retorna ao ensino básico e ressignifica o interdiscurso.

As investigações de [Prediger, Berwanger & Mörs \(2013\)](#), [Ribeiro & Gomes \(2017\)](#), e [Patrício et al. \(2010\)](#) apontam o uso de assuntos abordados em GA como sendo por muitas vezes o motivo da não compreensão de certos assuntos da disciplina nos cursos de graduação.

Neste sentido, [Prediger, Berwanger & Mörs \(2013\)](#) ao analisarem as dificuldades dos alunos, desde as séries iniciais até o último ano do ensino médio, observaram que além de haver uma sensível diminuição no interesse dos alunos pela disciplina “*a passagem dos conteúdos trabalhados de forma mais **concreta** para conceitos, tidos como mais **abstratos** e **lineares**[...]*” parece ser o fator que contribui para esse decréscimo. Isto dá sentido à conclusão de [Ribeiro & Gomes \(2017\)](#) ao analisar o nível de conhecimento sobre Vetores e Geometria Analítica que os alunos ingressantes dos Cursos de Engenharia trazem, pois os índices de aproveitamento -segundo ela- estão diretamente relacionados ao conhecimento prévio da disciplina bem como à dificuldade que se aumenta na transição dos conteúdos para os anos mais elevados; fato este que também é identificado por [Patrício et al. \(2010\)](#) e por ele atribuído, dentre outros motivos, à uma **atenção superficial** ao conteúdo pois, para ele, “*a abordagem de vetor é pequena e limita-se à definição de algumas propriedades*”.

[Machado \(1987\)](#), por sua vez, refletindo sobre a tal abstração presente no interdiscurso dos

alunos mencionado por [Prediger, Berwanger & Mörs \(2013\)](#), se preocupa em devolver a concretude para o ensino da matemática. Diz ele:

“Alguns matemáticos procuram intencionalmente manter-se à distância de figuras geométricas ou de objetos empíricos. [...] Isto tem sido comum, por exemplo, a partir do final do século XVIII, quando um bom livro de Geometria Analítica não devia conter figuras para evidenciar que não dependia delas” ([MACHADO, 1987](#)).

A movimentação de devolver a concretude para o ensino da matemática é quase que consensual, apesar de que alguns autores se mostram resistentes a excessos.

Para [Giardinetto \(1997\)](#) a utilização do “concreto” muitas vezes tem efeito contrário à intensão inicial [de compreensão do conteúdo e capacidade de aplicação em circunstâncias variadas] bloqueando o avanço do entendimento dos conceitos matemáticos como um todo pelo aprendiz, assim como concluem [Kaminski, Sloutsky & Heckler \(2008\)](#) da Ohio University Chillicothe<sup>1</sup> que mostram, na prática, que a aplicação do concreto pode ser atrativa para os alunos, mas a transferência de conhecimento para múltiplos problemas é muito mais atingida com a apresentação do modelo teórico, proporcionando assim, que o aprendiz desenvolva uma maior capacidade de aplicar por si mesmo o teórico-abstrato no cotidiano/concreto.

O que os cientistas sugerem concorda em partes com [Machado \(1987\)](#), que defende a contextualização, e vai além desta; a aplicação do abstrato deve estar no centro das extremidades do ensino/aprendizagem com o movimento concreto-abstrato-concreto para todo o processo; enquanto que os estudiosos de Ohio consentem que se aplique uma metodologia teórico-abstrata com contextualização.

Sem se afastar de [Giardinetto \(1997\)](#), em sua tese de doutorado, [Spinelli \(2011\)](#) soma-se a ideia de [Machado \(1987\)](#) fazendo uma ponderação entre a contextualização e seus excessos -uma vez que esta última pode servir como um desprestígio da capacidade de se abstrair o concreto impedindo de se conjecturar o que ainda não existe. O autor apresenta uma série de possibilidades de se contextualizar a matemática consigo mesma abusando da intradisciplinaridade. Pois, segundo [Faria \(2016\)](#), intradisciplinaridade “pode ser entendida como a relação da Matemática com a própria Matemática, por meio do ensino integrado de aritmética, geometria e álgebra”.

Além disso, como o citado por [Prediger, Berwanger & Mörs \(2013\)](#), o outro fator evidenciado no interdiscurso que concorre com a abstração é a linearidade da ementa das disciplinas. [Machado \(1993\)](#) faz uma importante observação acerca da associação dos conteúdos curriculares, a ordem com que são introduzidos, isto é, a linearidade com que são apresentados.

Segundo o autor, por vezes, os conteúdos são independentes entre si, mas são propostos numa determinada ordem pela comunidade acadêmica, coletivamente, como se houvesse consenso a respeito de tal necessidade criando-se o bloqueio na aprendizagem de um conteúdo “*B*” se antes não foi aprendido um assunto “*A*” (quando organizados da forma  $A \rightarrow B$ ) mesmo que as ideias não estejam interligadas e que a assimilação de “*B*” valide o entendimento de “*A*”. Linearidade essa

---

<sup>1</sup>Universidade de Ohio.

que [Blumenthal \(2013\)](#) também desaprova ao analisar a evolução dos PNC's <sup>2</sup> brasileiros e enxerga como ponto positivo a colocação dos conteúdos como tópicos no corpo do texto passando a ideia, ao seu ver, de que os conteúdos estão sendo desprendidos da referida ordem de apresentação.

Diante de tal discussão, baseados nas pesquisas de [Giardinetto \(1997\)](#) e [Kaminski, Sloutsky & Heckler \(2008\)](#) principalmente, conduzimo-nos a mensurar uma metodologia em que haja o cuidado em se devolver a concretude ao ensino da matemática com uma contextualização que não venha a tolher o aprendiz de desenvolver a capacidade de conjecturação do abstrato, e uma forma de aplicar a intradisciplinaridade para uma possível ruptura da linearidade.

Conhecendo a GA e sabendo que ela nos traz conceitos aplicáveis à GP capazes de substituir as exemplificações extremamente palpáveis, é possível com ela criar meios propícios para que o aluno compreenda estas vertentes, podendo transferir o conhecimento adquirido das Geometrias para o seu cotidiano - o que [Giardinetto \(1997\)](#) pontua como “concreto-pensado”. Ou seja, é viável a exemplificação da Matemática pela própria Matemática, desfrutando da GA para justificar a Euclidiana<sup>3</sup> e vice-versa, pois o conteúdo da GA pode enriquecer, complementar, e até validar o ensino-aprendizagem dos conteúdos da Geometria Euclidiana reciprocamente, além de promover uma maior transmissão desses conhecimentos pelos docentes em formação e seus futuros alunos.

Propusemo-nos então, embasados em conceitos e algumas demonstrações de [Delgado, Frensel & Crissaff \(2013\)](#) e [Lima \(2014\)](#) dentre outros autores, a demonstrar proposições dos conteúdos de GP através da GA para que a comunidade acadêmica tenha boas ferramentas na nova dinâmica no ensino das Geometrias apoiando-se na intradisciplinaridade.

Dividimos este trabalho em quatro capítulos e faremos, no próximo, uma breve estruturação dos conteúdos de GA para que o leitor possa ter compreensão das propriedades que serão aplicadas em cada demonstração. Não entraremos porém no conteúdo de GP admitindo que o leitor possui as noções básicas dessa disciplina e que serão demonstradas sem necessariamente o leitor já tê-las demonstrado ou as memorizado através da própria GP. Em seguida tomaremos num único capítulo todas as aplicações propostas. No quarto capítulo evidenciaremos os resultados de cada problema proposto e, por fim, nossas considerações finais.

---

<sup>2</sup>Parâmetros Nacionais Curriculares.

<sup>3</sup>Geometria Plana é também conhecida como Geometria Euclidiana.

# 2

## Noções Preliminares

Neste capítulo serão denotadas algumas noções preliminares de GA essenciais para o entendimento das demonstrações elucidadas no decorrer deste trabalho, admitindo primeiramente que o leitor tenha um conhecimento dos axiomas e principais resultados da GP, como por exemplo: as noções de ponto, reta e plano; paralelismo; ângulos; coordenadas do ponto no plano; polígonos, áreas e seus casos de congruência, mais especificamente de triângulos.

A partir disto serão apresentados alguns aspectos acerca das ferramentas de GA utilizadas à aplicação na GP. Esta fundamentação está alicerçada em [Delgado, Frensel & Crissaff \(2013\)](#), [Lima \(2014\)](#) e [Lima \(2002\)](#).

Para iniciarmos vale lembrar que pelos axiomas de ordem da Geometria Euclidiana podem ser definidos os conceitos de segmento e semireta.

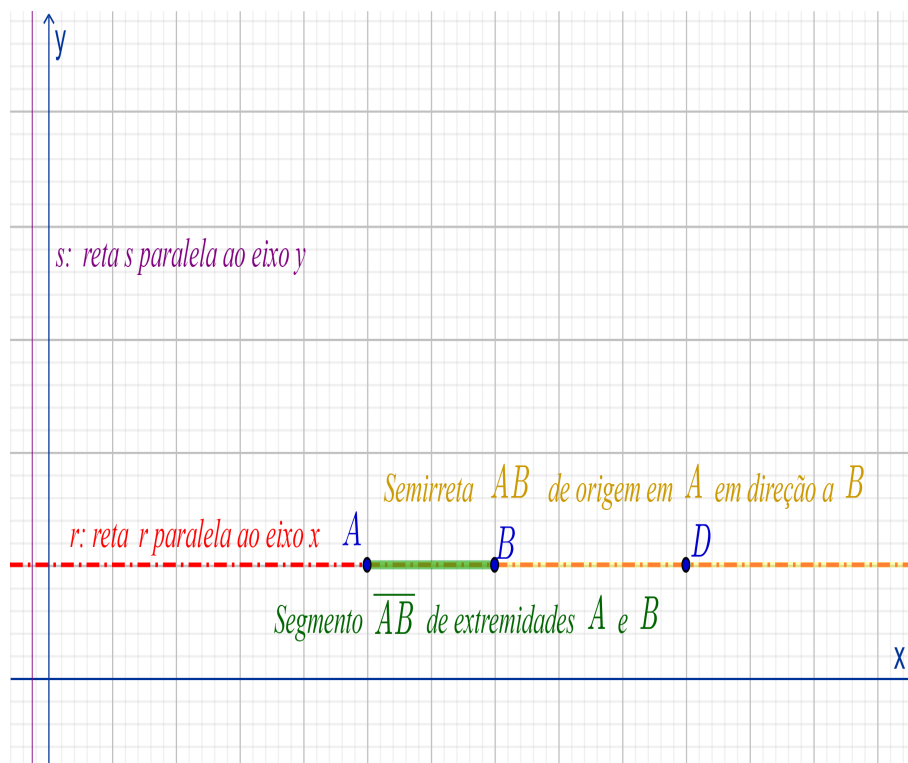


Figura 2.1: Reta, semirreta, segmento e distância

Dizemos que o segmento  $\overline{AB}$  é formado pelos pontos  $A$  e  $B$  e por quaisquer pontos  $C$  entre esses. A semireta  $AB$  contudo é formada pelo segmento  $\overline{AB}$  e por todos os pontos  $D$  tais que o ponto  $B$  esteja entre  $A$  e  $D$ . Assim, o comprimento de um segmento denotado  $\overline{AB}$  é delimitado por um par de pontos  $A$  e  $B$ , e é correspondente a um número real denominado distância que, por sua vez, é representada pelas notações  $d(A, B)$  ou  $|AB|$  e satisfaz as propriedades seguintes:

$$d(A, B) \geq 0;$$

$$d(A, B) = 0 \iff A = B;$$

$$d(A, B) = d(B, A);$$

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \iff A, B \text{ e } C \text{ são colineares e } C \text{ está entre } A \text{ e } B;$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad (\text{Desigualdade Triangular})$$

Dito isto, lembramos finalmente que dada uma semireta  $AB$  e um número real  $\lambda \geq 0$ , existe apenas um único ponto  $P \in AB$ ;  $|AP| = \lambda$ .

## 2.1 Coordenadas e distância na reta

Numa reta  $r$  cuja semireta  $OA$  está contida, denomina-se eixo  $\varepsilon$  o sentido de percurso dado pela origem em  $O$  no sentido do ponto  $A$ . A origem  $O$  corresponde ao número real 0, e cada ponto  $X \neq 0$ , entre  $O$  e  $A$ , corresponde a um número real positivo. De maneira análoga, dado um ponto  $B$ , em que  $B$  não pertença à semireta  $OA$ , cada ponto  $X \neq 0$ , entre  $O$  e  $B$ , corresponde a um real negativo. Disto, conclui-se que há uma correspondência biunívoca entre o eixo  $\varepsilon$  e o conjunto dos números reais (representado por  $\varepsilon \longleftrightarrow \mathbb{R}$ ) em que o número real  $x$  é a coordenada do ponto  $X$ .

O eixo  $\varepsilon$  é posto em correspondência com o conjunto dos números reais dessa forma:

$$\varepsilon \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

onde  $O$  é a origem, e cada ponto  $X$  é correspondente a um número real positivo se estiver à direita da origem  $O$ ,  $x = d(O, X)$ , e a um negativo se estiver à esquerda,  $x = -d(O, X)$ . Dito isto:

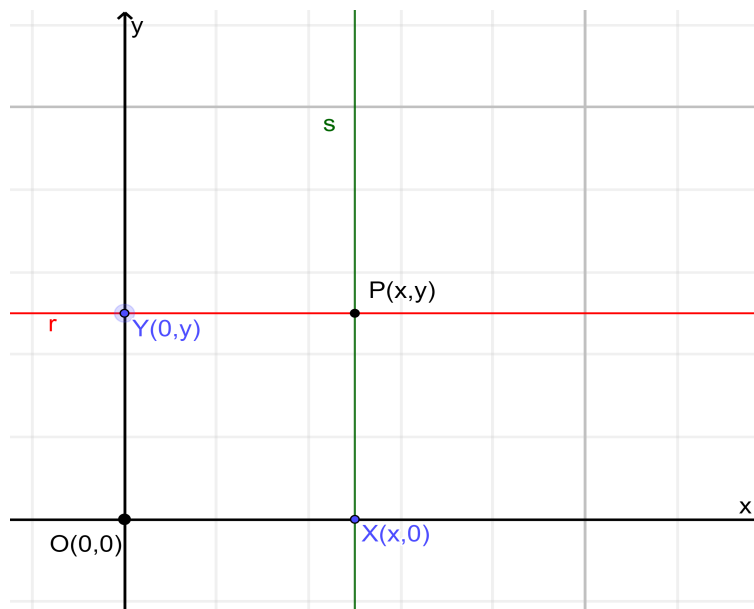
**Proposição 1.** *Se  $x$  e  $y$  são as coordenadas dos pontos  $X$  e  $Y$  sobre o eixo  $\varepsilon$ , respectivamente, então a distância entre  $X$  e  $Y$  é igual ao módulo da diferença entre os valores reais das coordenadas  $x$  e  $y$ :*

$$d(A, B) = |x - y| = |y - x|$$

## 2.2 Coordenadas do ponto no plano

Um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  num plano  $\pi$  é o par de eixos  $OX$  e  $OY$  perpendiculares entre si e têm a mesma origem no ponto  $O$ , em que  $OX$  é o eixo horizontal e  $OY$  é o eixo vertical.

Nesse sistema designamos por  $\mathbb{R}^2$  o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  onde  $x$  e  $y$  são números reais denominados primeira e segunda coordenadas, ou ainda, coordenadas cartesianas abscissa e ordenada de um ponto  $P$  pertencente ao plano, nessa ordem. Sendo que  $P$  é um ponto pertence às retas  $r$  e  $s$  que, por sua vez, são paralelas aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Isto é, as abscissas



**Figura 2.2:** Retas  $r$  e  $s$  paralelas aos eixos  $OX$  e  $OY$

fazem correspondência ao eixo  $OX$  e as ordenadas ao eixo  $OY$ .

O plano munido deste sistema em correspondência biunívoca com  $\mathbb{R}^2$  é denotado por:

$$\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

É importante observar:

- I** - O ponto pertencente ao eixo  $OX$  tem coordenadas  $(x, 0)$
- II** - O ponto pertencente ao eixo  $OY$  tem coordenadas  $(0, y)$ .
- III** - Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro quadrantes de modo que:

$$1^{\circ}\text{Quadrante} = \{(x, y) | x > 0 \text{ e } y > 0\}$$

$$2^{\circ}\text{Quadrante} = \{(x, y) | x < 0 \text{ e } y > 0\}$$

$$3^{\circ}\text{Quadrante} = \{(x, y) | x < 0 \text{ e } y < 0\}$$

$$4^{\circ}\text{Quadrante} = \{(x, y) | x > 0 \text{ e } y < 0\}$$

Portanto, cada ponto do plano pertence a um eixo ou a um dos quadrantes.

## 2.3 Distância entre dois pontos no plano

### Distância entre dois pontos

Num plano  $\pi$  munido de eixos ortogonais  $OXY$ , tomemos os pontos:  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $Q = (x_1, y_2)$ . Como  $d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|$  e  $d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras

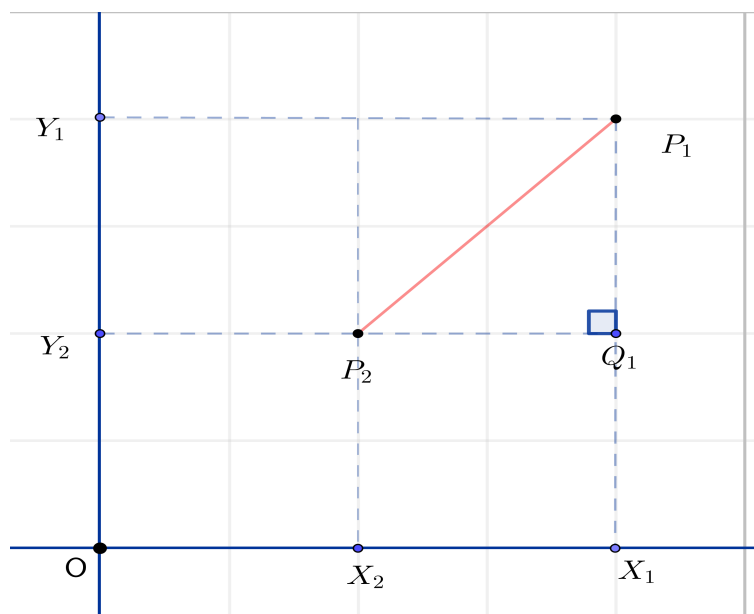


Figura 2.3: Distância entre dois pontos no plano

temos:

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2 \iff d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \iff$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos são alinhados se os segmentos definidos por dois pontos, com um ponto sendo comum aos dois segmentos, têm ângulo de  $180^\circ$ .

### Ponto médio

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais num plano  $\pi$ , e os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , o ponto médio de  $P_1$  e  $P_2$  é o ponto  $M = (x_m, y_m)$  que é equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ . Tomemos então os pontos  $Q_1 = (x_m, y_1)$  e  $Q_2 = (x_m, y_2)$ .

Note que  $Q_1$  e  $Q_2$  estão alinhados horizontalmente aos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , nessa ordem, e vertical-

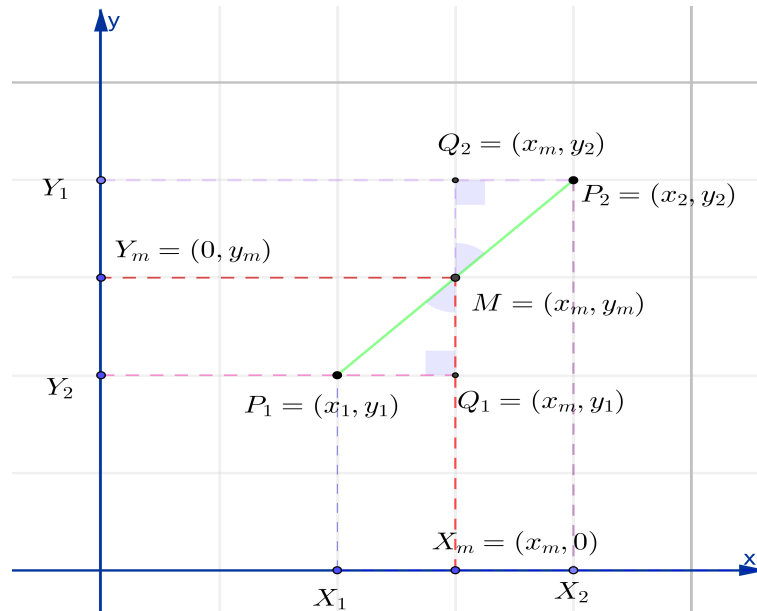


Figura 2.4: Ponto médio de um segmento

mente ao ponto  $M$ . Além disso, como  $M$  está equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ , então:

$$d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2) \iff |x_m - x_1| = |x_2 - x_m|$$

e

$$d(Q_1, M) = d(Q_2, M) \iff |y_m - y_1| = |y_2 - y_m| \iff y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Logo

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ou seja, as coordenadas do ponto médio  $M$  do segmento  $P_1P_2$  são os valores médios das respectivas coordenadas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  quaisquer que sejam estes.

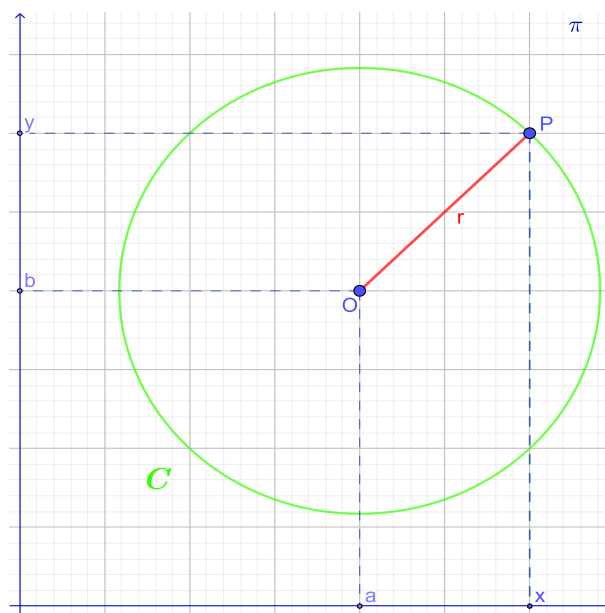
## Circunferência

Se tomarmos num plano  $\pi$  um ponto qualquer que diste igualmente de todos os pontos de uma linha fechada obteremos um círculo  $C$ . Para tanto tomemos a seguinte definição.

**Definição 1.** De um plano  $\pi$  tomado o ponto  $O$  e o número  $r > 0$ , denomina-se **Círculo**  $C$  de **centro**  $O$  e **raio**  $r > 0$  o conjunto de todos os pontos do plano  $\pi$  situados a uma distância  $r$  do centro  $O$ .

Isto é:

$$C = \{P \in \pi | d(P, O) = r\}$$



**Figura 2.5:** Circunferência no plano

Assim sendo, seja o sistema de eixos  $OXY$  do plano  $\pi$  em que  $a$  e  $b$  são as coordenadas do centro  $O$ , temos:

$$P = (x, y) \in C \iff d(P, O) = r \iff d(P, O)^2 = r^2$$

## 2.4 Segmentos orientados

Segmento orientado  $\overline{AB}$  é o segmento com origem no ponto  $A$  extremidade em  $B$  e sentido de percurso (orientação) de  $A$  para  $B$ . O segmento oposto  $\overline{BA}$  tem orientação inversa, ie, mesmas extremidades, porém o sentido de percurso é contrário, segue de  $B$  para  $A$ .

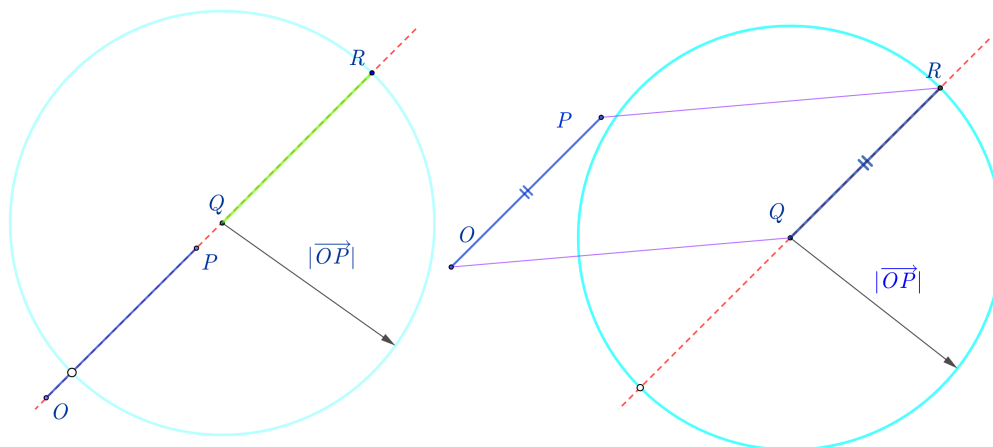
**Definição 2.** São equipolentes os segmentos orientados  $\overline{OP}$  e  $\overline{QR}$ , (denotamos  $\overline{OP} \equiv \overline{QR}$ ) quando  $\overline{OP}$  e  $\overline{QR}$  satisfazem as seguintes propriedades:

- a - Têm o mesmo comprimento:  $|\overline{OP}| = |\overline{QR}|$ ;
- b - São paralelos ou colineares;
- c - Têm mesmo sentido.

Dessa forma, segue:

**Proposição 2.**  $\overline{OP} \equiv \overline{QR} \iff$  ponto médio de  $\overline{OP}$  coincide com o ponto médio de  $\overline{QR}$ .

Pela propriedade **b** descrita podemos denotar duas situações possíveis dados os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ , conforme a figura 2.6 abaixo:



**Figura 2.6:** Segmentos equipolentes - DELGADO et al(2013)

**I**  $O, P$  e  $Q$  são colineares:

Tomando uma circunferência de centro  $Q$  e raio  $|\overline{OP}|$ , observamos que, por serem colineares, ambos fazem parte da reta  $r$  que contém o diâmetro - independentemente do segmento  $\overline{OP}$  estar totalmente contido nele ou não. A circunferência intersectará  $r$  em dois pontos, mas apenas um desses, que designamos por  $R$ , é tal que  $\overline{OP}$  e  $\overline{QR}$  têm o mesmo sentido.

**II**  $O, P$  e  $Q$  **não** são colineares:

Tomada uma reta  $r$  que contém o centro  $Q$  da circunferência  $G$  de raio  $|\overline{OP}|$ , observamos que  $G$  intersecta  $r$  em dois pontos, mas que por **não** serem colineares, podemos localizar a reta que contém  $O$  e  $P$  paralelamente à  $r$  tomando apenas um único ponto  $R \in r \cap G$  ( $R$  pertencente a  $r$  e  $G$  simultaneamente) de modo que  $OPRQ$  seja um paralelogramo e então  $OP \equiv QR$ .

Assim temos

**Proposição 3.** *Dados  $A, B$  e  $C$  pontos quaisquer no plano, existe um único ponto  $D$  no plano tal que  $AB \equiv CD$ .*

## 2.5 Vetores

Vetores podem ser entendidos como uma forma de deslocar pontos sobre segmentos. Ao se deslocar todos os pontos de uma figura, por exemplo, estaremos fazendo uma translação desta figura.

**Definição 3.** *Quando os segmentos de reta orientados são equipolentes dizemos que eles representam o mesmo **vetor**. Em outras palavras o **vetor**  $\vec{v}$  é o representante universal de todos os segmentos*

orientados equipolentes a um segmento  $\overline{AB}$ . Reciprocamente, os segmentos são os representantes de  $\vec{v}$ . Escrevemos  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .

Disto destacamos:

- a) Pela própria definição temos  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Ou seja, se  $\overline{AB}$  representante de  $\vec{v}$  e é equipolente a  $\overline{CD}$  então  $\vec{v}$  é igual tanto a  $\overrightarrow{AB}$  quanto a  $\overrightarrow{CD}$ ;
- b) O **vetor nulo** é o vetor  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ , qualquer que seja o ponto  $A$  no plano visto que o representante de  $\vec{0}$  é o segmento  $\overline{AA}$ , ie, é o segmento que tem origem em  $A$  e finda nele mesmo denotando assim que a distância entre seus extremos é nula;
- c) Dado um ponto  $A$  qualquer e um vetor  $\vec{v}$ , existe apenas um único ponto  $B$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . Ou seja, de qualquer ponto do plano origina-se apenas um único segmento orientado **representante** do vetor  $\vec{v}$ .

Pelo item **c** da definição 3 observa-se a necessidade do uso das expressões de vetores que destacam suas coordenadas num dado sistema de eixos ortogonais no plano. Assim, considerando o sistema  $OXY$  no plano e os pontos aleatórios

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2) & C &= (c_1, c_2) \\ B &= (b_1, b_2) & D &= (d_1, d_2) \end{aligned}$$

em termos de coordenadas, caracteriza equipolência a seguinte proposição:

**Proposição 4.**  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2$ .

**Definição 4.** As **coordenadas do vetor**  $\vec{v}$ , de representante  $\overrightarrow{AB}$  em que  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$ , são os números  $b_1 - a_1$  e  $b_2 - a_2$ . Escrevemos  $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

Observando a proposição 4 em que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , notamos:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}$$

Como  $A, B, C, D$  são pontos quaisquer no espaço, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ,  $ABCD$  é um paralelogramo, logo:

Com base em 2 e 4:

**a** -  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff \overline{AC} \equiv \overline{BD}$

**b** -  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \text{ e } \overline{CD} \equiv \overline{EF} \implies \overline{AB} \equiv \overline{EF}$ .

A partir de 2.5 chegamos a seguinte proposição:

**Proposição 5.** Dado o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  num sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , existe um único ponto  $P$  cujas coordenadas coincidem com as do vetor  $\vec{v}$  de modo que  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ .

## 2.6 Operações com vetores

### Adição de vetores

O vetor chamado **soma** de um par de vetores pode ser obtido a partir de:

Dados os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  e o ponto  $Z$  no plano. Sejam  $X$  e  $Y$  tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{ZX}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{ZY}$ , definimos o **vetor soma** de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  o único vetor que tem o segmento  $\overrightarrow{ZY}$  como representante conforme a figura 2.7.

Além disso se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são concorrentes, tomamos ambos os vetores a partir de uma mesma origem. E disto, o vetor soma também pode ser obtido deslizando cópias dos vetores até a extremidade de seus concorrentes, formando com isto um paralelogramo que, por sua vez, terá uma de suas diagonais formada pela soma  $\vec{u} + \vec{v}$ , conforme figura 2.8:

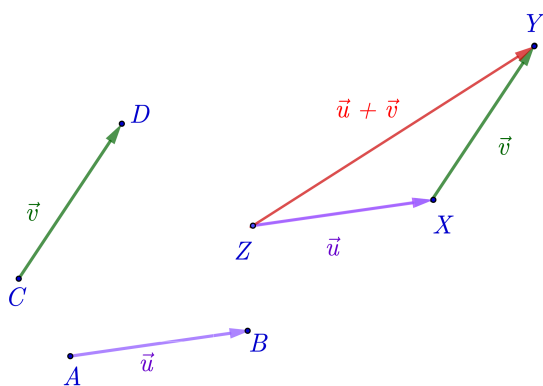


Figura 2.7: Vetor soma

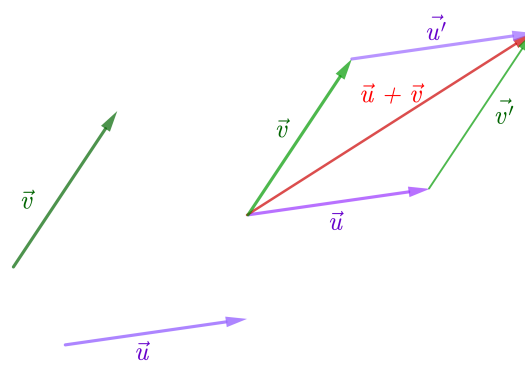


Figura 2.8: Regra do paralelogramo

### Propriedades

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no plano, valem as seguintes propriedades:

**Comutatividade:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

**Associatividade:**  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ .

**Elemento neutro aditivo:** o vetor  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  é a soma do vetor  $\vec{u}$  com o vetor nulo  $\vec{0}$ .

**Inverso aditivo:** para todo vetor  $\vec{u}$  existe apenas um único inverso cuja soma resulta no vetor nulo. Pela propriedade anterior  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

### Adição de vetores por coordenadas no plano

Seja  $OXY$  o sistema de eixos ortogonais de origem  $O$  em que se encontram os pontos  $A = (\alpha, \beta)$ ,  $B = (\alpha', \beta')$  e os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  formados por esses, tomemos  $C$  um ponto tal que  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$ . Conforme a figura 2.10, a soma desses vetores é dada por:

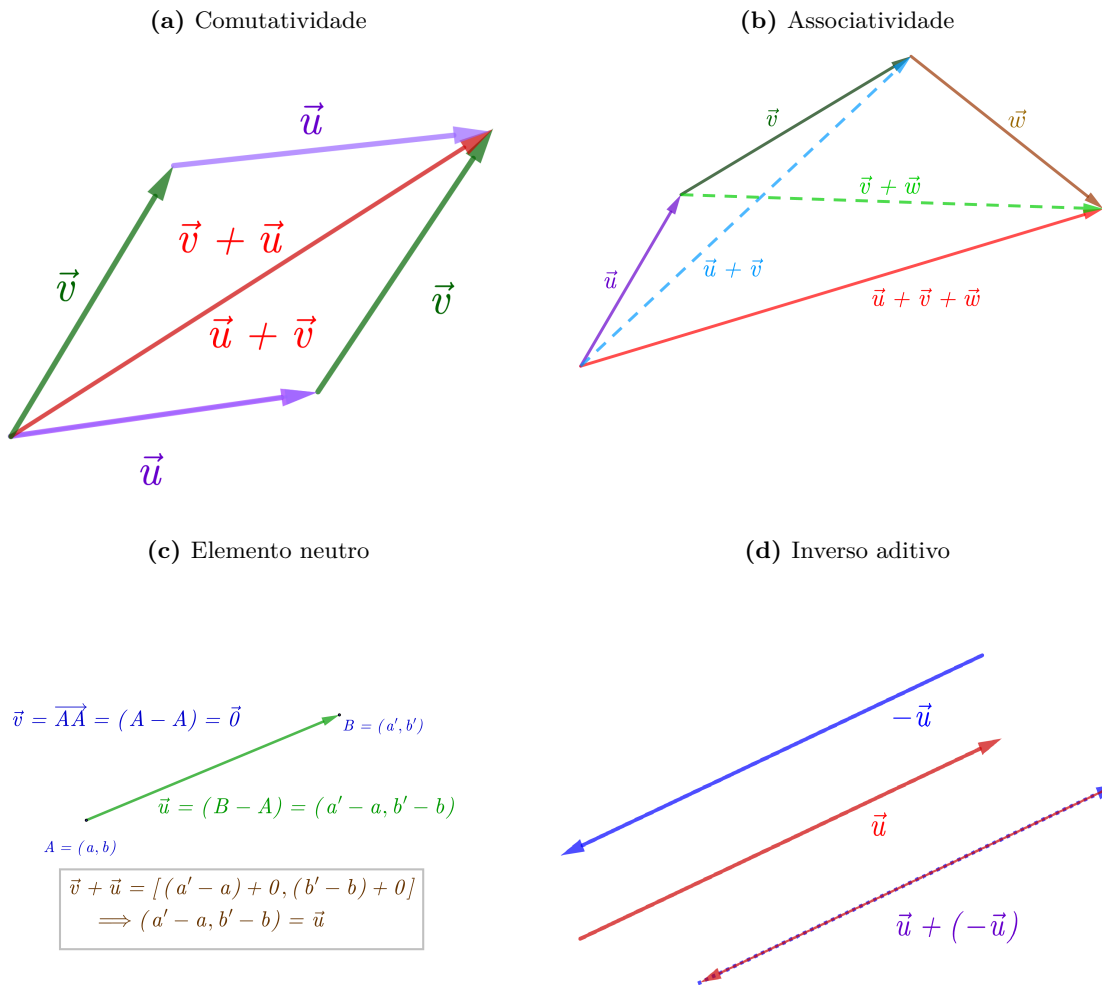


Figura 2.9: Propriedades da Adição

$$\vec{u} + \vec{v} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') = \overrightarrow{OC}$$

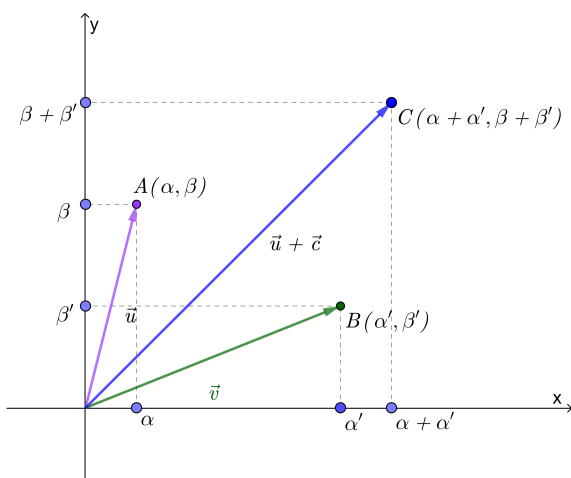
**Definição 5.** O vetor resultante da soma entre  $\vec{u}$  e  $(-\vec{v})$  é dado da forma  $\vec{u} - \vec{v}$  e chama-se **diferença entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$**  (ver 2.11).

### Multiplicação de números reais por vetores

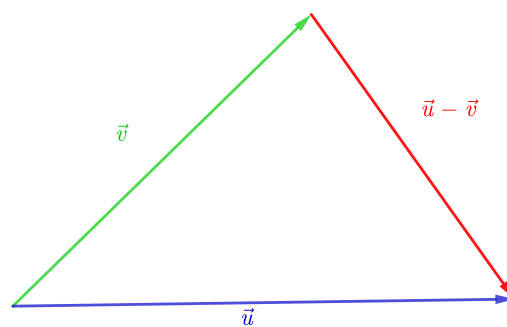
Além da adição podemos também operar os vetores multiplicando-os por números reais obtendo assim um vetor múltiplo do vetor inicial.

**Definição 6.** O produto de um vetor de representante  $\overrightarrow{AB}$  por um número real, dado um vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB'}$  em que  $\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , é da forma:

$$\lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$$



**Figura 2.10:** Soma de vetores pelas coordenadas



**Figura 2.11:** Vetor diferença

Tão logo, temos:

- Os três pontos não coincidentes dos extremos dos representantes  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AB'}$  são colineares;
- A distância de  $A$  até  $B'$  é a igual ao produto de  $|\lambda|$  pelo representante do vetor inicial  $\overrightarrow{AB}$ . Isto é:

$$d(A, B') = |\lambda|d(A, B);$$

- Se  $\lambda > 0$ , os sentidos dos representantes dos vetores inicial ( $\overrightarrow{AB}$ ) e múltiplo ( $\overrightarrow{AB'}$ ) são iguais, mas se  $\lambda < 0$  então os sentidos são opostos;
- Se o ponto extremo  $B'$  do vetor produto  $\overrightarrow{AB'}$  é igual ao ponto inicial  $A$  do vetor inicial  $\overrightarrow{AB}$ , então  $\lambda = 0$ .

**Definição 7.** O múltiplo de  $\overrightarrow{AB}$  é, por definição,  $\lambda\overrightarrow{AB}$ , então o vetor produto de um real  $\lambda$  com um vetor  $\vec{v}$  cujo representante é  $\overrightarrow{AB}$ , é dado por

$$\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

Disto, pela definição 6 item b, segue que:

$$\vec{v} = (\alpha, \beta) \Rightarrow \lambda\vec{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$$

**Proposição 6.** O ponto  $C$  pertence a uma reta  $r$  que contém  $A$  e  $D$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{AC}$  for o vetor resultante do produto de algum número real pelo vetor  $\overrightarrow{AD}$ . Denota-se:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AD}, \text{ para qualquer que seja } \lambda \in \mathbb{R}$$

### Propriedades

Sejam  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores no plano, denotamos as seguintes propriedades:

**Elemento neutro multiplicativo:**  $x \in \mathbb{R}; x\vec{u} = \vec{u}$  então  $x = 1$  é o elemento neutro multiplicativo;

**Propriedades distributivas:**  $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$  assim como  $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ .

Ambas as propriedades podem ser tomadas a partir das propriedades dos números reais.

## 2.7 Combinação linear de vetores

**Definição 8.** Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\lambda\vec{u} = \vec{v}$ :

a) Dizemos que  $\vec{v}$  é **múltiplo** de  $\vec{u}$ ;

b) O vetor  $\vec{v}$  é denominado **combinação linear** de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$  quando a soma da multiplicação dos números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  pelos vetores forem iguais a  $\vec{v}$ , isto é,  $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{v}$ .

A partir das definições apontadas até aqui é fácil notar que:

**I -** O vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor pois quaisquer vetores multiplicados por  $\lambda = 0$  é igual ao próprio vetor nulo. Porém, não existe um vetor não nulo que seja múltiplo de  $\vec{0}$  pois:

$$\vec{0} = 0\vec{v} \text{ porém, } \lambda\vec{0} \neq \vec{v};$$

**II -** Um vetor  $\vec{v}$  é múltiplo de  $\vec{u}$  assim como  $\vec{u}$  é múltiplo de  $\vec{v}$ , só se  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e portanto  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

Uma maneira diferente de se determinar quando dois vetores são múltiplos entre si é explicitada em Lima (2014), é dada pela seguinte proposição:

**Proposição 7.** Os vetores  $\vec{v} = (a, b)$  e  $\vec{v}' = (a', b')$  são múltiplos um do outro se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0.$$

Contudo, nos casos em que dois vetores não são múltiplos ocorre:

**Proposição 8.** Se  $\vec{v} \neq \lambda\vec{u}$  ( $\vec{v}$  não é múltiplo de  $\vec{u}$ ) então haverá uma única combinação linear de  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  para descrever um outro vetor  $\vec{w}$  qualquer. Ou seja, existirão dois reais  $\lambda, \mu$  que determinarão de maneira única um outro vetor qualquer na forma  $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

## 2.8 Produto interno entre dois vetores

Na seção anterior observamos que, tanto a adição de vetores quanto a multiplicação de um número real por um vetor, têm como resultado um novo vetor que pode ter diferentes comprimentos, direção e sentido dependendo da operação aplicada.

Nesta seção vamos definir uma nova operação que também é uma multiplicação, porém o resultado obtido é diferente das operações já vistas até aqui, pois seus fatores são vetores no plano e o produto não é um novo vetor, e sim um número real que, neste caso, será chamado **escalar**.

Iniciaremos definindo alguns termos que serão utilizados a partir de então.

**Definição 9.** Será denominado **norma** ou **comprimento** do vetor  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$  de representantes  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \dots$ , o número real não negativo ( $\lambda \geq 0$ ) que determine a distância entre os extremos de quaisquer um de seus representantes. Denota-se:

$$\|\vec{v}\| = d(A, B) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

**Definição 10.** O **vetor unitário** é o vetor cuja distância entre os extremos de seus representantes é igual a 1, assim  $\|\vec{v}\| = d(A, B) = 1$ . E se  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ( $\vec{v}$  é um vetor não nulo), então  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  é o vetor unitário que tem mesma direção e sentido de  $\vec{v}$ .

**Definição 11.** Num plano em que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores, denomina-se **produto interno** entre eles um número real resultante desta operação com as seguintes propriedades:

a) Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  são vetores nulos, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0;$$

b) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ , então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Tomando agora as coordenadas de dois vetores dados podemos obter o produto entre eles através da seguinte proposição:

**Proposição 9.** Num plano qualquer em que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam vetores de coordenadas  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$  e  $\vec{v} = (\alpha', \beta')$ , o produto  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  pode ser obtido por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'.$$

**Definição 12.** *Dados um número real qualquer e três vetores no plano, sejam eles  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , valem as propriedades:*

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{v}\|^2 && \text{(desigualdade triangular)} \\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= 0 \iff \vec{v} = \vec{0} && \text{(elemento neutro)} \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle && \text{(comutatividade)} \\ \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \text{(associação soma e produto interno)} \\ \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle && \text{(associação produto interno e soma)} \\ \langle \mu\vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{v}, \mu\vec{w} \rangle = \mu\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \text{(associação multiplicação de real e produto interno)} \end{aligned}$$

**Definição 13.** *Num plano, dizemos que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares quando o ângulo  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$  ou ainda se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  forem iguais a  $\vec{0}$ . O perpendicularismo  $\vec{u} \perp \vec{v}$  ( $\vec{u}$  perpendicular a  $\vec{v}$ ) existe se, e somente se,  $\vec{v} \perp \vec{u}$  ( $\vec{v}$  perpendicular a  $\vec{u}$ ).*

Tomando a definição 11 é imediatamente evidente que:

a) Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  são nulos e  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , em comparativo com a definição acima 13 então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v};$$

b) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  então  $\exists \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta$ . E como ainda pela definição (13)  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ , então

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\implies \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta \\ &\implies \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cdot 0 \\ &\implies \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto vale a seguinte proposição:

**Proposição 10.** *Dados dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , estes serão perpendiculares entre si se, e somente se, o produto interno entre eles é nulo. Ou seja:*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

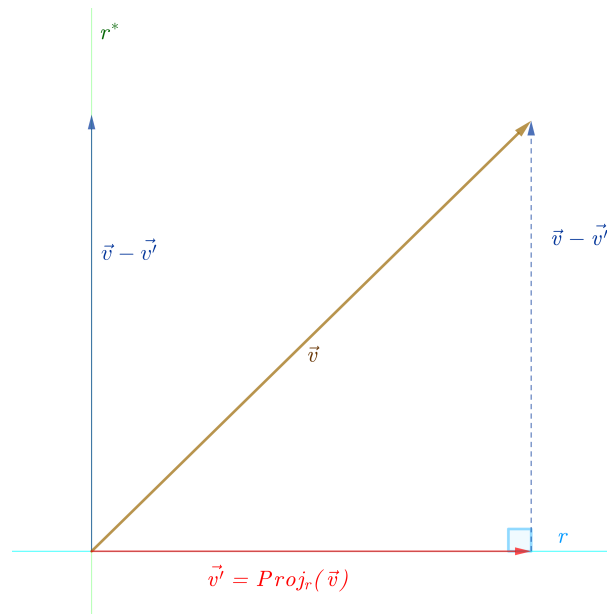
Em questão de coordenadas temos ainda:

**Proposição 11.** *Se  $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$ , o vetor  $\vec{v}$  será perpendicular quele se, e somente se, suas coordenadas forem  $\vec{v} = \mu(-b, a)$  ou  $\vec{v} = \mu(b, -a)$ , para qualquer  $\mu \in \mathbb{R}$ .*

## 2.9 Projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta

Somando os conhecimentos até aqui apresentados pudemos observar que segmentos equipolentes determinam vetores iguais no plano independentemente de sua localização, sendo a figura 2.8 da regra do paralelogramo o que pode ilustrar bem esta afirmação. Isto pode proporcionar várias aplicações geométricas que nos permitam determinar congruência entre segmentos de retas e inclusive os polígonos formados por eles. A projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta também nos dá armas preciosas para a resolução de questões da GP com a determinação explícita de perpendicularismo entre retas e vetores.

**Definição 14.** Dada uma reta  $r$  e sua perpendicular  $r^*$  em que o vetor  $\vec{v}$  não nulo é posicionado de forma que sua origem esteja na intersecção delas, denominamos **projeção ortogonal** de  $\vec{v}$  o vetor  $\vec{v}' = Proj_r(\vec{v})$ , paralelo a  $r$ ; ou ainda, podemos chamar  $\vec{v}'$  de **componente vetorial** paralela a  $r$ , de modo que a diferença  $\vec{v} - \vec{v}'$  seja paralela à  $r^*$ , ou seja,  $\vec{v} - \vec{v}'$  é a componente perpendicular a  $r$ .



**Figura 2.12:** Projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre a reta  $r$

Tomada a definição 14 consideremos um vetor  $\vec{w} \neq 0$  de modo que  $\vec{w}/r$ . Assim,  $\vec{v}'$  além de paralelo é múltiplo de  $\vec{w}$ , isto é,  $\vec{v}' = \lambda \vec{w}$  sendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como  $(\vec{v} - \vec{v}') \perp r$ , então  $(\vec{v} - \vec{v}') \perp \vec{w}$ , logo:

$$\langle \vec{v} - \vec{v}', \vec{w} \rangle = 0$$

para tanto, ou um dos vetores é nulo  $\vec{w} = 0$ ,  $\vec{v} - \vec{v}' = 0$ , que não é o caso, ou  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}', \vec{w} \rangle$ , pois pelo 5º item da definição 12  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ , chegamos que  $\langle \vec{v} - \vec{v}', \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}', \vec{w} \rangle = 0$ ,

então:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}', \vec{w} \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}$$

$$\lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2}$$

Mas como  $\vec{v}' = \lambda \vec{w}$ , temos portanto:

$$\text{Proj}_r(\vec{v}) = \vec{v}' = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}.$$

# 3

## Aplicações

Neste capítulo aplicaremos os conceitos revistos no capítulo anterior. Cada problema proposto remete a uma proposição da GP e que serão demonstradas tomando apenas os conhecimentos de GA revistos até aqui. Apoiaremos-nos nas obras de diversos autores referenciados de acordo com cada problema demonstrado indicando o colorário ou conclusão de cada proposta. Algebricamente, numa primeira visão, alguns problemas aparentarão ter algum nível de complexidade mais elevado por conta da sua extensão, entretanto, logo o leitor perceberá que se trata apenas de um desenvolvimento mais detalhado, com o intuito de facilitar a sua compreensão em que evitamos a tomada de “atalhos” que deixam implícitos alguns processos.

### 3.1 Paralelogramo, desigualdade triangular e lei dos cossenos

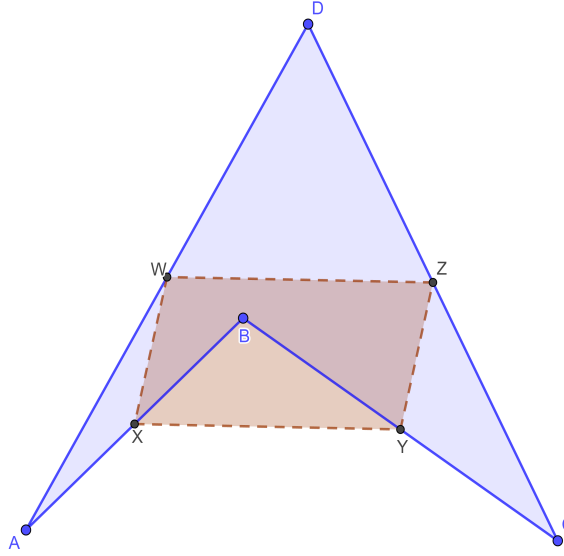
#### 3.1.1 Problema 1

**Problema 1.** *Dado o quadrilátero  $ABCD$ , mostre que os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  determinam um paralelogramo.*

Extraímos esta demonstração de [Delgado, Frensel & Crissaff \(2017, pag. 48\)](#). Nela utilizaremos os conceitos de equipolência de segmentos orientados. O objetivo é mostrar que são equipolentes os segmentos opostos determinados pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer, pois a própria definição 2 de segmentos equipolentes está condicionada à colinearidade ou paralelismo entre dois segmentos, e como, nesse caso, eles partem de pontos de retas diferentes, somente poderão originar segmentos paralelos.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero qualquer e  $X, Y, Z, W$  os pontos médios, respectivamente, dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  deveremos mostrar que  $XYZW$  é um paralelogramo. Tomemos então  $\overrightarrow{XY}$  que formado pelos pontos médios  $X$  e  $Y$  de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , nessa ordem. Como  $B$  é extremidade comum a  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  fica evidente que os segmentos são consecutivos. Disto  $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY}$  onde  $\overrightarrow{XB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$  e  $\overrightarrow{BY} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$  e então  $\overrightarrow{XY} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{XY} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$  e assim  $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ .

De maneira análoga, tomamos o segmento formado pelos outros dois pontos médios  $W$  e  $Z$  de  $\overline{AD}$  e  $\overline{DC}$ , respectivamente. E como  $D$  é comum entre os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{DC}$ , estes são consecutivos. Verificamos também que  $\overrightarrow{WZ} = \overrightarrow{WD} + \overrightarrow{DZ}$  onde  $\overrightarrow{WD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$  e  $\overrightarrow{DZ} = \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$  e logo  $\overrightarrow{WZ} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2} \Rightarrow$



**Figura 3.1:** O quadrilátero e seus pontos médios

$\overrightarrow{WZ} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . Portanto  $\overrightarrow{XY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{WZ}$ , ou seja,  $\overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{WZ}$  comprovando que  $XYZW$  é um paralelogramo como queríamos demonstrar.  $\square$

Em GP tal resultado nos mostra que:

**Corolário 1.** *Os segmentos determinados pelos pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero determinam um paralelogramo.*

### 3.1.2 Problema 2

**Problema 2.** *Dado um paralelogramo  $ABCD$  de diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  prove que as diagonais intersectam-se no ponto  $M$  tal que  $M$  é ponto médio tanto de  $\overline{AC}$  quanto de  $\overline{BD}$ .*

Em [Veloso \(2015\)](#) se tem a demonstração desse problema. Nela basta conhecermos a soma entre vetores e o conceito de ponto médio. Com isto poderemos mostrar que existe um ponto comum às duas retas diagonais do paralelogramo e que divide ambas em partes iguais individualmente.

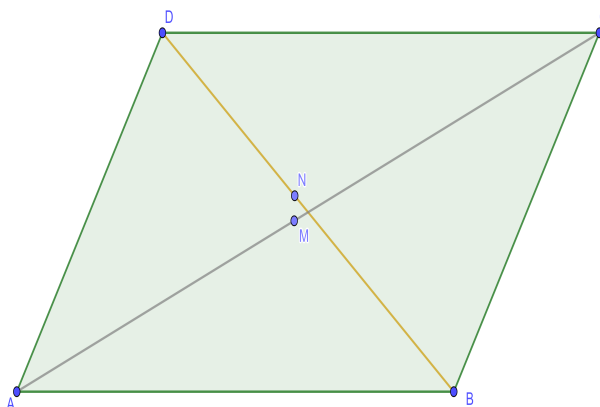
*Demonstração.* Seja o paralelogramo  $ABCD$  de diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  em que  $M$  é o ponto médio de  $\overline{AC}$ , observamos a formação do triângulo  $AMB$  pela soma  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ . Como o ponto médio de  $\overline{AC}$  é  $M$ , então  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$  e assim se verifica o outro triângulo  $CMD$  dado pela soma  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD}$ . Mas como  $ABCD$  é paralelogramo, então  $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ . Isto é:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD} \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} \quad (3.4)$$



**Figura 3.2:** Paralelogramo ABCD

Substituindo 3.1 e 3.2 em 3.3, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{MD} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{MD}\end{aligned}$$

comparando com 3.4

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} \iff \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$$

Logo  $M$  é, portanto, ponto médio de  $\overrightarrow{BD}$

□

Este problema 2 nos leva a:

**Corolário 2.** *As diagonais de um paralelogramo intersectam-se num único ponto que, por sua vez, também é ponto médio de ambas as diagonais deste polígono.*

### 3.1.3 Problema 3

**Problema 3.** *Mostre que se  $\theta$  é o ângulo entre os lados de um triângulo qualquer, então é válida a lei:*

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos \theta \quad (\text{Lei dos cossenos})$$

Demonstraremos este problema apoiados em Delgado, Frensel & Crissaff (2017) e Lima (2002). Aplicaremos aqui o método do paralelogramo primeiramente. Projetando, em seguida, os vetores da

maneira mais conveniente possibilitando desfrutar das propriedades matemáticas dos ângulos que conhecemos e das propriedades do produto interno de vetores.

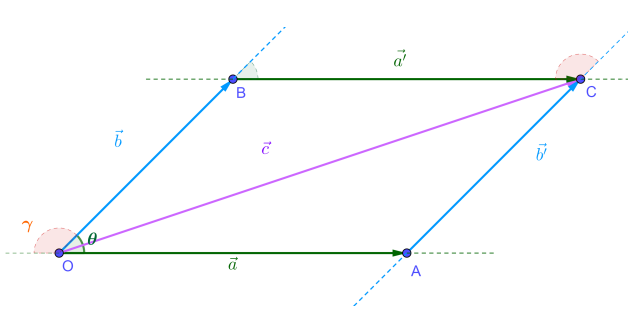


Figura 3.3: Paralelogramo OACB

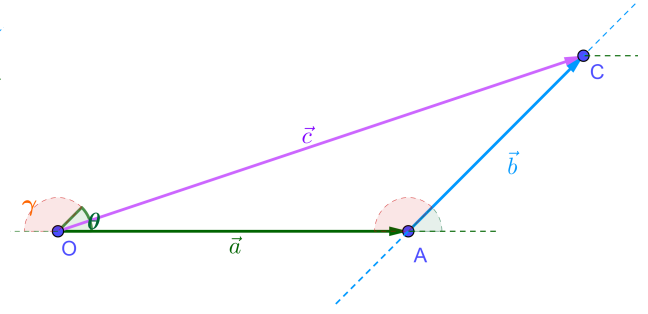


Figura 3.4: Triângulo OAC

*Demonstração.* Sejam  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ , e  $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ , na soma  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ , sendo  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ . Pelo método do paralelogramo as projeções  $\overrightarrow{BC} = \vec{a}' = \vec{a}$  e  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}' = \vec{b}$ , desse modo  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}' + \vec{b}'$  e  $\theta = 180^\circ - \gamma$ , pois  $\gamma = \angle(\vec{a}', \vec{b}')$ . Como:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} \\ \|\vec{c}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ \|\vec{c}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a}' + \vec{b}') \\ \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}' + \|\vec{b}\|^2 \\ \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Pela propriedade 10  $\langle \vec{a}, \vec{b}' \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}'\| \cos \gamma$ , assim:  $\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \|\vec{b}'\| \cos \gamma$  e se  $\theta = 180^\circ - \gamma$  ( $\theta$  é suplementar de  $\gamma$ ), então:  $\cos \gamma = -\cos \theta$ . E disto:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}'\|(-\cos \theta) \\ \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos \theta \end{aligned}$$

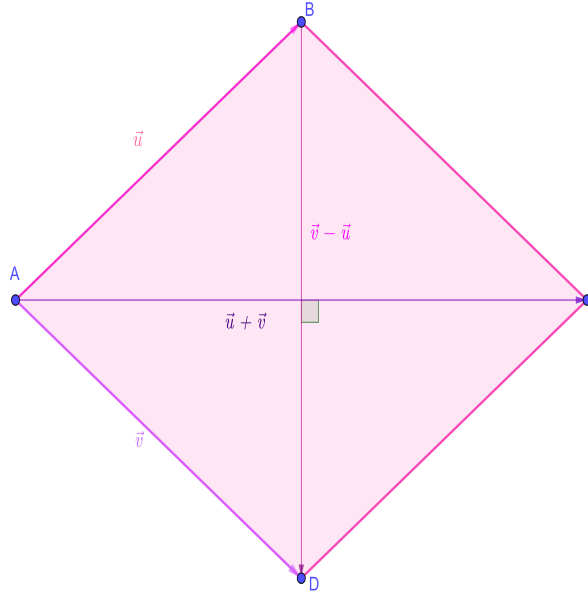
□

Esta é uma das leis mais significativas da GP, a Lei dos Cossenos. Segue a lei:

**Corolário 3.** Num triângulo qualquer, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, subtraída de duas vezes o produto destes dois lados pelo cosseno do ângulo entre os mesmos.

## 3.1.4 Problema 4

**Problema 4.** *Mostre que um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.*



**Figura 3.5:** Losango ABCD

*Demonstração.* Tal demonstração segue a ideia colocada em [Veloso \(2015\)](#). Consideremos  $A, B, C$  e  $D$  vértices de um paralelogramo, e de modo que, se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  com as operações de adição e diferença entre eles temos  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$  e  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$ . Desse modo, com a operação de produto interno desses vetores teremos

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Daí segue que se o paralelogramo é losango, então seus lados tem mesmo comprimento e consequentemente o resultado do membro direito acima é nulo, mostrando que as diagonais formadas por  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$  são perpendiculares. Reciprocamente, se as diagonais do paralelogramo são perpendiculares o lado esquerdo da equação é zero, implicando que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ , i.e, o paralelogramo é losango.  $\square$

Como consequência temos:

**Corolário 4.** *Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.*

## 3.1.5 Problema 5

**Problema 5.** *Mostre que dados os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , vale a desigualdade triangular*

$$\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$$

em que a igualdade acontece se, e somente se  $\vec{v}$  ou  $\vec{u}$  é nulo ou se um é múltiplo **positivo** do outro.

Apesar da afirmação da desigualdade não parecer direta com a desigualdade triangular, um olhar mais atento interpretando o comprimento de vetores faz todo sentido! A soma de dois comprimentos de dois vetores (dois lados) é sempre maior que o comprimento do outro vetor (do terceiro lado).

*Demonstração.* Suponhamos primeiramente sem perda de generalidade, que  $\vec{v} = 0$ , então  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \iff \|\vec{u}\| + \|0\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

Agora se  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ , com  $\lambda > 0$ , então

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \lambda\vec{u}\| = \|(1 + \lambda)\vec{u}\| = (1 + \lambda)\|\vec{u}\| \quad (3.5)$$

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \lambda \cdot \|\vec{u}\| = (1 + \lambda)\|\vec{u}\| \quad (3.6)$$

Com 3.5 e 3.6, mostramos que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ , se  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ; mas reparemos que a igualdade não acontece caso  $\lambda < 0$ , e sim que  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| > \|\vec{u} + \vec{v}\|$ .

Temos agora que

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos \theta| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

□

Vimos a importância de mostrar esta proposta uma vez que trata-se da condição de existência de um triângulo qualquer, pois a soma de dois vetores não nulos e não múltiplos entre si (refletida na interpretação da expressão do problema) coincidem com dois lados de tal polígono. Portanto:

**Corolário 5.** *A soma do comprimento de dois dos lados de um triângulo qualquer é sempre maior que a medida do terceiro lado.*

## 3.2 Aplicações no Triângulo e pontos notáveis

### 3.2.1 Problema 6

**Problema 6.** *Seja  $ABC$  um triângulo retângulo de hipotenusa  $\overline{BC}$ . Calculando a distância em coordenadas, mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado  $\overline{BC}$  é a metade do comprimento desse lado.*

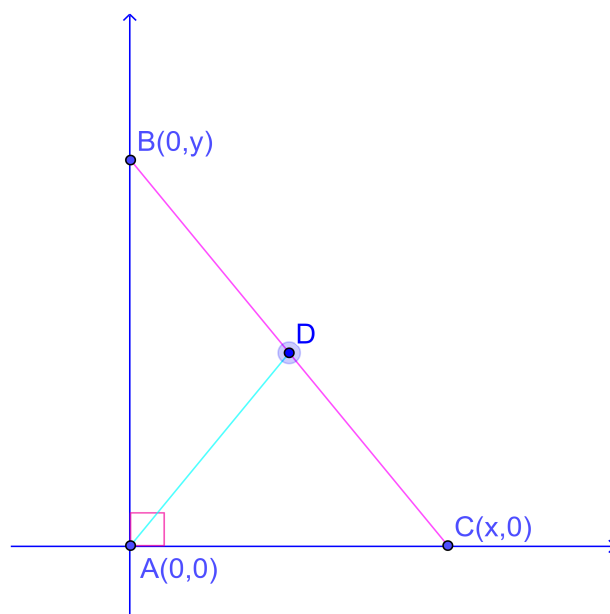
Na demonstração tomamos a base proposta por Craizer (2015). Os conhecimentos necessários à resolução deste problema são os de distância entre dois pontos em coordenadas e ponto médio. Para tanto é necessário posicionar de maneira conveniente ambos os lados e vértices do triângulo de maneira tal que as coordenadas sejam em alguns momentos a própria distancia entre alguns dos pontos, facilitando a relação entre as incógnitas postas como abscissa e ordenada de cada ponto.

*Demonstração.* Seja o triângulo  $ABC$  de hipotenusa  $\overline{BC}$  sobre o plano  $OXY$  retângulo em  $A$ . Tomemos então  $A(0,0)$  a própria origem, e assim  $B(x,0)$  e  $C(0,y)$  os demais vértices que recairão sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. A distância  $|\overline{BC}|$  é obtida por:

$$d(B, C) = \sqrt{d(A, B)^2 + d(A, C)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(x - 0)^2 + (0 - y)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



**Figura 3.6:** Mediana Relativa a Hipotenusa no triângulo ABC

Tomemos o ponto médio de  $\overline{BC}$ , o ponto  $D$ , cuja mediana  $\overline{AD}$  intersecta a hipotenusa do triângulo. Como  $D$  é ponto médio de  $\overline{BC}$  então  $D = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \iff D = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  e assim

obtemos o comprimento  $|\overline{AD}|$ :

$$d(A, D) = \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 0\right)^2}$$

$$d(A, D) = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$d(A, D) = \sqrt{\left(\frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{y^2}{4}\right)}$$

$$d(A, D) = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + y^2)}$$

$$d(A, D) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Portanto, o comprimento da mediana  $\overline{AD}$  relativa ao lado  $\overline{BC}$  é a metade do comprimento deste lado como queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 6.** *Num triângulo retângulo qualquer o comprimento da mediana relativa à hipotenusa é a metade do comprimento desta última.*

Nos três problemas a seguir, [Veloso \(2015\)](#) traz as demonstrações, mas se apoiando em figuras. O que nos preocupamos foi de demonstrá-las sem necessariamente ter que visualizá-las, descrevendo, de uma forma mais minuciosa, cada demonstração de maneira que o leitor possua meios de produzir sua própria ilustração, mesmo que tenhamos aqui também ilustrado cada uma delas.

### 3.2.2 Problema 7

**Problema 7.** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, se  $M$  e  $N$  são pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Prove que  $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$ , ou seja, que  $\overline{MN}$  é base média paralela ao lado  $\overline{BC}$ .*

Aqui a demonstração é simples, basta que tenhamos conhecimento sobre soma de vetores e ponto médio de um segmento.

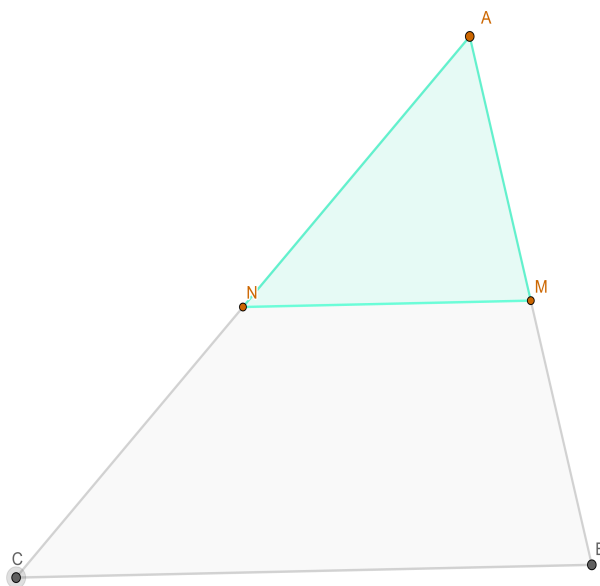
*Demonstração.* Seja o triângulo  $ABC$  tal que  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . Com  $M$  e  $N$  sendo os pontos médios dos lados  $\overline{BA}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, teremos que  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$ . E por serem pontos médios,  $\overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$  e  $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ . Isso nos leva a:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2}, \text{ como } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$$



**Figura 3.7:** Base média do triângulo ABC

□

Obtemos com este, o seguinte colorário:

**Corolário 7.** *O segmento formado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é base média desse e é paralelo ao seu terceiro lado.*

### 3.2.3 Problema 8

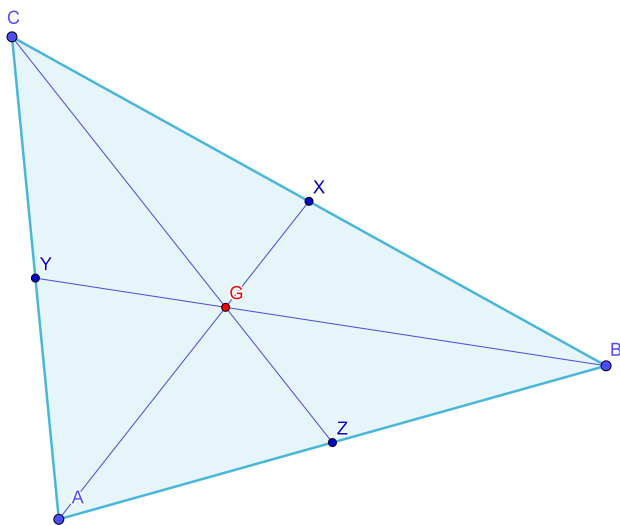
**Problema 8.** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer,  $G$  seu baricentro, e sendo  $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$  suas medianas. O segmento de cada vértice ao baricentro divide cada mediana na razão 2:3, i.e.,  $\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AX}, \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BY}, \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CZ}$ .*

Vale lembrar antes desta demonstração os conceitos de baricentro e mediana: Baricentro é o ponto de encontro das três medianas; Mediana é o segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto;

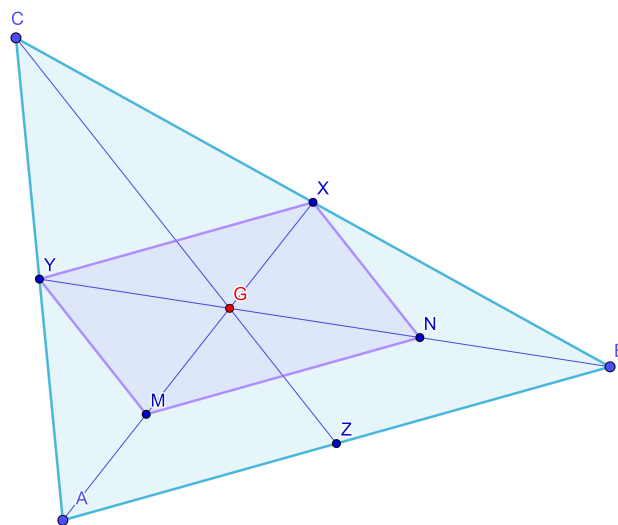
Inicialmente tomaremos os problemas 8 e 2 para então mostrar que existe a proporcionalidade de 2 : 1 que o baricentro divide as medianas que o compõem.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo de baricentro  $G$  e medianas  $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$  observamos as formações na figura 3.8:

Tomemos os triângulos  $ABC$  e  $YXC$ , pelo problema 7, temos que  $\overline{XY} // \overline{AB}$  e  $\overline{XY} = \frac{\overline{AB}}{2}$ . Assim como no triângulo  $ABG$  (fig 3.9) em que  $M$  e  $N$  são, respectivamente, pontos médios dos lados  $\overline{AG}$  e  $\overline{BG}$ ,  $\overline{MN} // \overline{AB}$ , e  $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$ . Ou seja,  $\overline{XY}$  e  $\overline{MN}$  são bases médias dos



**Figura 3.8:** Triângulo ABC



**Figura 3.9:** Quadrilátero XYMN inscrito no triângulo

triângulos  $ABC$  e  $ABG$ , nessa ordem. Como  $\overrightarrow{YX} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$  e  $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ , então temos  $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{MN}$  e  $\overrightarrow{YX} // \overrightarrow{MN}$ , isto é,  $MNXY$  é um paralelogramo de diagonais  $\overrightarrow{MX}$  e  $\overrightarrow{NY}$ . Agora pelo problema 2, o ponto em que se intersectam as diagonais de  $MNXY$  é o ponto médio de ambas e, no caso, é também o ponto  $G$ . Daí segue que  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$  e  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG}$ . E como  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $\overrightarrow{AG}$  e  $\overrightarrow{BG}$ , então  $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GX}$  e  $\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GY}$ , logo  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GX}$  e  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GY}$ . Isto significa que se  $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GX}$  e  $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GY}$  então  $\overrightarrow{AX} = 3 \cdot \overrightarrow{AM}$  e  $\overrightarrow{BY} = 3 \cdot \overrightarrow{BN}$ , mas como  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$  e  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG} = 2 \cdot \overrightarrow{BN}$ . Utilizando-se de procedimento análogo a  $\overrightarrow{CZ}$ , conclui-se que:  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BY}$ , e  $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CZ}$   $\square$

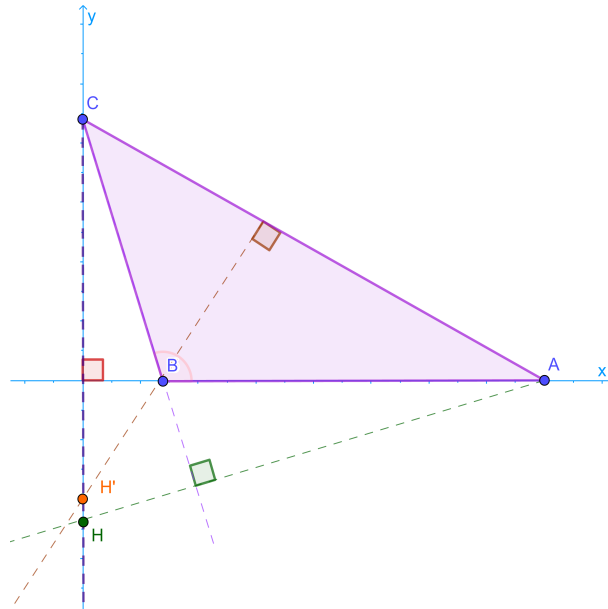
Como consequência se tem:

**Corolário 8.** *O baricentro de qualquer triângulo divide as medianas na proporção de dois para um.*

### 3.2.4 Problema 9

**Problema 9.** *Mostre que as três alturas de um triângulo qualquer cortam-se em um único ponto, o ortocentro.*

*Demonstração.* Esta é uma adaptação da demonstração de Veloso (2015, pag. 60). No sistema de coordenadas  $OXY$  fixamos o triângulo  $CBA$  de modo que o lado  $\overline{AB}$  esteja sobre  $OX$  e uma de suas alturas sobre o eixo  $OY$ . Respaldados pela desigualdade triangular, podemos afirmar que  $A = (a, 0)$ ,  $B = (b, 0)$  e  $C = (0, c)$  em que  $a \neq b$  e  $c \neq 0$ . Disto segue que  $\overrightarrow{AC} = (0 - a, c - 0) = (-a, c)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (0 - b, c - 0) = (-b, c)$ .



**Figura 3.10:** Ortocentro do triângulo ABC

Tomemos dois pontos  $H$  e  $H'$  pertencentes ao eixo  $OY$ , de modo que  $\overrightarrow{BH'} \perp \overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ , portanto:

$$H = (0, h) \text{ e } H' = (0, h'), \text{ daí}$$

$$\overrightarrow{BH'} = (0 - b, h' - 0) = (-b, h') \text{ e } \overrightarrow{AH} = (0 - a, h - 0) = (-a, h)$$

Como

$$\overrightarrow{BH'} \perp \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}, \text{ pela propriedade 10:}$$

$$\langle \overrightarrow{BH'}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0 = \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle$$

$$(-b) \cdot (-a) + ch' = (-a) \cdot (-b) + ch$$

$$ab + ch' = ab + ch$$

$$h = h' \iff h = h' = \frac{-ba}{c}$$

Como  $h = h'$  pertencem a própria altura sobre o eixo  $OY$ , está provado que as três alturas se encontram num mesmo ponto.  $\square$

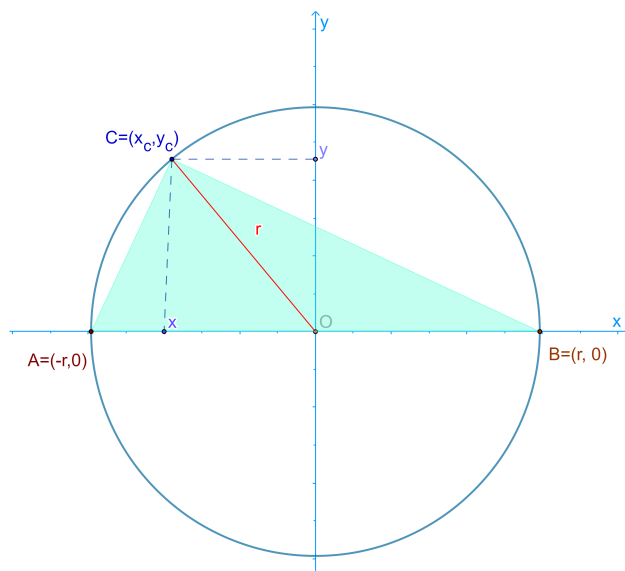
Consequentemente podemos ter:

**Corolário 9.** *As três alturas de um triângulo qualquer intersectam-se em um único ponto, o ortocentro.*

## 3.2.5 Problema 10

**Problema 10.** Seja  $\overline{AB}$  um diâmetro da circunferência  $\mathbf{G}$  e  $C$  um ponto de  $\mathbf{G}$  diferente de  $\overline{AB}$ . Mostrar que o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $C$ .

Nesta demonstração tomaremos do triângulo  $ABC$  os lados  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$  que, através das propriedades do produto interno entre vetores, mostraremos que são ortogonais e relacionaremos o ponto  $C$  ao raio da circunferência  $\mathbf{G}$ .



**Figura 3.11:** Triângulo  $ABC$ , inscrito na circunferência  $\mathbf{G}$  e retângulo em  $C$

*Demonstração.* Sejam  $A = (-r, 0)$ ,  $B = (r, 0)$  e  $C = (x_c, y_c)$  vértices do triângulo  $ABC$  no plano e que também pertençam à circunferência  $\mathbf{G}$ . Este triângulo é retângulo em  $C$  se os vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  forem ortogonais. Assim, queremos mostrar que  $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0$ .

Temos que  $\overrightarrow{CA} = (-r - x_c, 0 - y_c)$  e  $\overrightarrow{CB} = (r - x_c, 0 - y_c)$ , e disto segue:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-r - x_c) \cdot (r - x_c) + (-y_c) \cdot (-y_c)$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -(r^2) + (-x_c)^2 + (-y_c)^2$$

Mas como  $C(x_c, y_c)$  pertence à circunferência, vem da definição que  $x_c^2 + y_c^2 = r^2$ , implica que  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ , demonstrando a proposição.  $\square$

**Corolário 10.** *Todo triângulo inscrito numa circunferência tal que um lado seja o diâmetro, tem como sendo retângulo este triângulo.*

### 3.3 Áreas

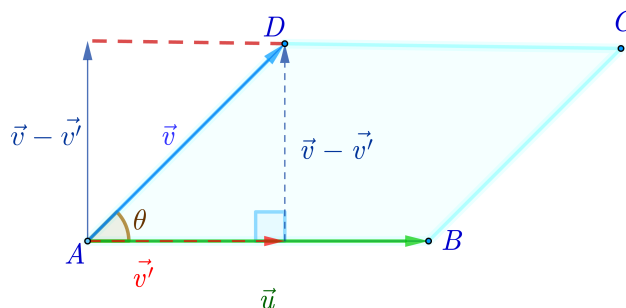
#### 3.3.1 Problema 11

**Problema 11.** Seja o paralelogramo  $ABCD$ , tal que  $\overrightarrow{AB} = (\alpha, \beta)$  e  $\overrightarrow{AD} = (\alpha', \beta')$ . Então o módulo do determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

é a área do paralelogramo.

A partir de Delgado, Frensel & Crissaff (2017), Delgado, Frensel & Crissaff (2015) e Lima (2002) alcançamos o resultado obtido nesta construção. Partiremos do conhecimento geométrico de projeção ortogonal de vetores, e de algumas particularidades de adição de vetores para que então possamos relacionar as relações geométricas da figura formada pelos vetores ao que foi enunciado no problema.



**Figura 3.12:** Área do paralelogramo

*Demonstração.* Seja o paralelogramo  $ABCD$  de área  $P = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$  onde  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (\alpha, \beta)$  e  $\overrightarrow{AD} = \vec{v} = (\alpha', \beta')$ . Temos que:  $P = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \right| = \alpha\beta' - \beta\alpha'$ , assim  $P^2$

$$\begin{aligned} &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 \\ &= (\alpha\beta')^2 - 2\alpha\beta'\beta\alpha' + (\beta\alpha')^2 \\ &= (\alpha\beta')^2 + (\beta\alpha')^2 - 2\alpha\beta'\beta\alpha' \quad (\text{e agora somando } 0 = (\alpha\alpha')^2 - (\alpha\alpha')^2 + (\beta\beta')^2 - \beta\beta')^2) \\ &= (\alpha\alpha')^2 + (\alpha\beta')^2 + (\beta\alpha')^2 + \beta\beta')^2 - [(\alpha\alpha')^2 + 2\alpha\beta'\beta\alpha' + \beta\beta')^2] \\ &= [\alpha^2(\alpha')^2 + \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2] - [(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2] \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) \cdot [(\alpha')^2 + (\beta')^2] - [\alpha\alpha' + \beta\beta']^2 \end{aligned}$$

Como  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$  e  $\vec{v} = (\alpha', \beta')$ , então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$  e  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2$ , assim

como  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$  e  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$ , logo:

$$\begin{aligned} P^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2, \text{ e como } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, \text{ teremos} \\ P^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Mas  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , a projeção  $\vec{v}'$  sobre  $\vec{u}$  é paralela a  $\vec{u}$ , enquanto que a componente perpendicular  $\|\vec{v} - \vec{v}'\|$  é a própria altura do paralelogramo. Observemos então que pelo triângulo formado por  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{v}'\|$  e  $\|\vec{v} - \vec{v}'\|$ , temos:

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{v} - \vec{v}'\|}{\|\vec{v}\|} \implies \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta = \|\vec{v} - \vec{v}'\|$$

substituindo, segue que:  $P^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v} - \vec{v}'\|^2$ , onde  $\|\vec{u}\|^2$  é a base. Isto é:  $P^2 = b^2 \cdot h^2$

Portanto,  $P = \left| \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \right|$  é a própria área  $A = b \cdot h$  do paralelogramo  $ABCD$ . □

**Corolário 11.** *O valor da área  $A = b \cdot h$  de um paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$  é igual ao valor do determinante estabelecido a partir das coordenadas de dois vetores concorrentes que coincidem com dois de seus lados também concorrentes.*

Tomado o resultado acima nos basta conhecer as formas geométricas obtidas através da soma de vetores para chegarmos à seguinte constatação.

**Corolário 12.** *O valor da área de um triângulo é igual ao valor da metade da área do paralelogramo.*

---

## Considerações finais

No presente trabalho mostramos como é possível chegarmos às proposições e conceitos básicos de GP pela GA utilizando distância entre dois pontos, coordenadas cartesianas e vetores.

Estes conteúdos, por sua vez, são simples, de fácil assimilação e introdução didática podendo ser inseridos em qualquer momento do ensino básico assim que o aluno já tenha conhecimento das operações de potenciação e radiciação inicialmente; e de maneira bastante superficial, que ele saiba operar o determinante, o que ocorreria a partir do 7º ano em diante, de acordo com os [PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS \(1998\)](#).

Consideramos de antemão, neste trabalho, que o leitor tivesse alguns conhecimentos básicos de GP como os axiomas para acompanhar as noções preliminares introduzidas e também para que ao final deste o trouxéssemos para a reflexão comparativa de que nenhuma das proposições da GP - previamente sabidas pelo mesmo - fossem necessárias à resolução dos problemas propostos; o que indica que a preocupação com uma sequência didática de certos assuntos não necessariamente é sempre a melhor escolha.

Nesse sentido mostramos que se pode introduzir a GA antes do momento em que ela é abordada atualmente dentro da educação brasileira. E mais, ela pode ser uma grande ferramenta aliada do ensino da GP. Nessa direção, nada impede que a GA seja ministrada anteriormente à muitos assuntos de GP e, talvez, seja até mais sensível de compreensão observados os pontos positivos da álgebra que a GA traz consigo. Principalmente, quando se trata de conjecturar figuras geométricas como medidas, ângulos, e até pontos próximos (ao que se quer indicar, ou ao que é conhecido), mas que não são de fato iguais. Isto é, inclinações próximas ao ângulo reto, por exemplo, comprimentos de lados semelhantes de uma figura (ou mais), pontos aproximados, etc, muitas vezes podem fazer com que o aluno tenha a impressão de que são iguais sem, de fato, o ser ou não possuírem mesma localização.

A exemplo disso, podemos observar nas figuras dos problemas 2 e 9 que os pontos e ângulos exibidos não condizem com os resultados obtidos, pois eles nos mostram que  $M$  e  $N$  assim como  $H$  e  $H'$  são pontos coincidentes, diferentemente do mostrado nas figuras.

Em outras palavras, uma figura geométrica pode facilmente enganar os olhos do observador. Entretanto, os valores numéricos alcançados por meio de cálculos algébricos são absolutos, o que tornam factíveis as investigações sem necessariamente estarmos presos às figuras como comumente os alu-

nos do ensino básico ficam ao observá-las. A GA em sua teoria possibilita que o aluno conjecture a contrução geométrica atingindo o que chamou-se de concreto-pensado.

O ensino preso à concretude de uma figura desenhada sujeita o aprendiz a uma maior possibilidade de errar na solução de tal problema e/ou até na compreensão de conceitos básicos da própria GP se ele não estiver preparado para enxergar a diferença infinita e significativa que há nas aproximações, sejam elas grandes ou pequenas, e aqui está a GA para demonstrar essa diferença de maneira bastante entendível.

Destacamos, com isto que, esta propensa falha na abstração [causada por uma apresentação precoce de figuras para explicar conceitos] pode também ser um dos fatores não diagnosticados pelos investigadores, mas que contribui para a dificuldade de abstração presente no interdiscurso da comunidade e pode ser tomada como uma proposta de investigação para um próximo estudo.

No mais, não buscamos aqui esgotar as maneiras de se encontrar ou investigar o uso de intradisciplinaridade nas Geometrias em questão. Buscamos instigar o leitor a respeito desta proposta que aqui trouxemos.

Incentivar novas investigações como o uso das equações da reta para demonstrar novas proposições da GP como as propriedades de outros pontos notáveis do triângulo, além do uso do produto vetorial na demonstração de áreas e volumes, distâncias entre planos e figuras espaciais, etc.

Enfim, são inúmeras as propriedades, proposições e conceitos de GP que podem ser alcançados utilizando a vastidão da GA como ferramenta.

---

## Referências

- BLUMENTHAL, G. Os pcn's e o ensino fundamental em matemática: um avanço ou um retrocesso. *Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS*, 2013. 9
- CRAIZER, M. *Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2015. 32
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. 4, 9, 10
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria analítica. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015. 38
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica e Cálculo Vetorial*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: GGM IME UFF, 2017. 26, 28, 38
- FARIA, R. W. S. d. C. Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra com o geogebra. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016. 8
- GIARDINETTO, J. R. B. Abstrato e o concreto no ensino da matemática: algumas reflexões. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 11, n. 12, p. 45–57, 1997. 4, 8, 9
- KAMINSKI, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A. F. The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 320, n. 5875, p. 454–455, 2008. 4, 8, 9
- LIMA, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear*. [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002. 10, 28, 38
- LIMA, E. L. *Coordenadas no plano*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: IMPA/VITAE, 2014. 4, 9, 10, 21
- MACHADO, N. J. *Matemática e realidade*. [S.l.]: Cortez São Paulo, 1987. 7, 8
- MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e matemática. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 24–34, 1993. 8
- PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, M. terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. *Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental*, 1998. 40
- PATRÍCIO, R. S. et al. As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Universidade Federal do Pará, 2010. 7
- PREDIGER, J.; BERWANGER, L.; MÖRS, M. F. Relação entre aluno e matemática: Reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. *Revista Destaques Acadêmicos*, v. 1, n. 4, 2013. 7, 8

RIBEIRO, I. B.; GOMES, E. A matemática do ensino médio e a disciplina de vetores e geometria analítica na graduação em engenharia relacionadas a partir da etapa precedente da metodologia de ensino. *Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia, São Caetano do Sul, SP, Brasil. Recuperado de* < <https://www.maua.br/files/122017/matematica-do-ensino-medio/disciplina-vetores-geometria-analitica-graduacao-engenharia-relacionadas-partir-etapa-precedente-metodologia-dipcing-261726.pdf>, 2017. 7

SILVEIRA, M. R. A. da. Matemática é difícil!: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. 2002. 7

SILVEIRA, M. R. A. da. A dificuldade da matemática no dizer do aluno: ressonâncias de sentido de um discurso. *Educação & Realidade*, v. 36, n. 3, 2011. 7

SPINELLI, W. *A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. 8

VELOSO, A. F. d. O. V. Uma proposta para a utilização dos vetores como ferramenta de resolução de problemas de geometria. Universidade Federal do Tocantins, Campus Universitário de Palmas. Profmat-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Palmas, TO, Brasil, 2015. 27, 30, 33, 35