



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
A EQUAÇÃO DE ALLEN-CAHN**

Salinópolis - Pa

2019

EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
A EQUAÇÃO DE ALLEN-CAHN**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

D111s da Paixão Teixeira, Edson Danilo  
Solução exata e estabilização exponencial para a  
equação de Allen-Cahn / Edson Danilo da Paixão Teixeira. —  
2019.  
36 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Coorientador(a): Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso de  
Licenciatura em Matemática, Campus Universitário de  
Salinópolis, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, 2019.

1. Equação de Allen-Cahn. 2. solução exata. 3.  
decaimento exponencial. 4. simulação computacional. I.  
Título.

CDD 515.353

---

EDSON DANILO DA PAIXÃO TEIXEIRA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
A EQUAÇÃO DE ALLEN-CAHN**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

Data da apresentação: 05/07/2019

Banca examinadora

---

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

---

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

---

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas

Salinópolis - Pa

2019

# DEDICATÓRIA

*Dedico a Deus e à minha família*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por estar sempre ao meu lado principalmente nos momentos mais difíceis, sempre me ajudando e me mostrando o melhor caminho a seguir. Por sempre me conceder saúde, firmeza, dedicação e paciência, por sempre me dar forças e jamais permitir que eu desistisse dos meus sonhos.

À minha família em especial aos meus pais: Celina Almeida da Paixão por sempre se dedicar à família dando sempre carinho e amor para mim e meus irmãos e Edson Roberto da Costa Teixeira por ser um homem trabalhador, exemplo de honestidade e espelho para seus filhos.

Ao meu orientador professor Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos pelo excelentíssimo profissional que é, por ter acreditado no meu potencial e sempre estar à disposição para me ajudar e esclarecer muitas dúvidas.

Aos meus queridos amigos de graduação: Carlos Alberto, Edson Marcos, Fabia Michelle, João Ricardo, Marcel Dias, Maysa Fernanda, Samuel Sarmiento, Valtenis Corrêa, Werlen Lisboa e William Mozart pelos momentos de descontração e pela dedicação que todos tiveram para que a nossa turma se tornasse um exemplo de união respeito e comprometimento.

À minha amada, amiga e companheira Dielle Costa que sempre esteve ao meu lado me ajudando me apoiando e me cobrando quando foi preciso, e por ter me proporcionado os melhores momentos da graduação com afeto carinho e descontração. E também a todos os outros colegas de turma que por algum motivo não conseguiram chegar conosco até o final da graduação.

Agradeço a todo o corpo docente do Campus de Salinópolis que sempre estiveram à disposição dos seus alunos para ajudar no que fosse preciso. Em especial à Rejane Faria e Midori Makino.

# RESUMO

Neste trabalho estudamos algumas propriedades quantitativas e qualitativas da equação de Allen-Cahn. A equação de Allen-Cahn tem sido amplamente estudada em diversas áreas da ciência e principalmente na evolução de microestruturas durante o processo de solidificação de um metal puro ou liga metálica. Os principais resultados obtidos neste trabalho são: a solução exata, a energia de Ginzburg-Landau  $\mathcal{G}(t)$  e a propriedade de decaimento exponencial do sistema. A resolução analítica do problema foi obtida pelo método da separação de variáveis graças a uma escolha adequada do coeficiente de reação. Com isto, passamos a considerar um problema um de valor inicial e outro de valor de contorno, os quais são resolvidos. No que diz respeito a estabilização exponencial da energia total, usamos técnicas multiplicativas para encontrarmos a lei de dissipação e a partir daí, aplicamos as desigualdades de Poincaré e de Jensen para construirmos a estimativa de decaimento exponencial.

**Palavras Chaves:** Equação de Allen-Cahn, solução exata, decaimento exponencial, simulação computacional.

# ABSTRACT

In this paper we study some quantitative and qualitative properties of the Allen-Cahn equation. The Allen-Cahn equation has been widely studied in several areas of science and especially in the evolution of microstructures during the solidification process of a pure metal or alloy. The main results obtained in this work are: the exact solution, the Ginzburg-Landau energy  $\mathcal{G}(t)$  and the exponential decay property of the system. The analytical resolution of the problem was obtained by the variable separation method thanks to an appropriate choice of the reaction coefficient. With this, we start to consider a problem of initial value and another of contour value, which are solved. Regarding the exponential stabilization of total energy, we use multiplicative techniques to find the dissipation law and from there we apply the Poincaré and Jensen inequalities to construct the exponential decay estimate

**Key Words:** Allen-Cahn equation, exact solution, exponential decay, computer simulation.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	Objetivos do trabalho . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1	Alguns resultados . . . . .	13
2.2	Séries de Fourier . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Equação de Allen-Cahn</b>	<b>19</b>
3.1	Solução exata . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Abordagem energética</b>	<b>26</b>
4.1	Energias do problema . . . . .	26
4.2	Estabilidade exponencial . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Simulação computacional</b>	<b>31</b>
5.1	Solução exata - Caso: $n = 2$ . . . . .	31
5.2	Solução exata - Caso: $n = 4$ . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>34</b>
	<b>Referências</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A evolução de microestruturas durante o processo de solidificação de um metal puro ou liga metálica, pode ser estudada com o auxílio de modelos matemáticos de campo de fase “*phase-field*”, que considera a transição entre uma fase e outra através de uma interface e ocorre de forma contínua e gradual em uma região reduzida chamada interface difusa [KOBAYASHI, 1993]. Dentre os modelos que utilizam o método campo de fase, destacamos o modelo de Allen-Cahn [ALLEN and CAHN, 1979]. A equação abaixo, postulada por Allen e Cahn

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -M \frac{\delta G}{\delta \phi}, \quad (1.1)$$

em que  $\phi = \phi(x, t)$  é a variável de fase,  $\delta G / \delta \phi$  é a derivada funcional da energia livre em relação à variável de fase e  $M$  denominada mobilidade da interface ou a facilidade com que  $\phi$  varia com o tempo, garante a evolução do sistema (1.1). Em certas ocasiões, a mobilidade é considerada anisotrópica, como adotado por [KARMA and RAPPEL, 1998], mas também pode ser considerada como uma constante (isotrópica), como adotado por [KOBAYASHI, 1993].

Usando o modelo de Allen-Cahn, Xinfu Chen em [CHEN, 2004] considerou o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = \varepsilon^2 u_{xx}^\varepsilon - f(u^\varepsilon), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

relacionado com o estudo de movimentos no limite de fase de materiais cristalinos, genética de população e também com a propagação de pulsos nervosos, onde  $\varepsilon > 0$  é um pequeno parâmetro e  $f(\cdot)$  é uma função suave tendo exatamente três zeros em  $\{-1, 0, 1\}$  e satisfazendo  $f'(\pm 1) > 0$ ,  $f'(0) < 0$  e  $\int_{-1}^1 f(s) ds = 0$ . Um exemplo típico de  $f$  é a função  $f(s) = s^3 - s$ . Na dinâmica do problema, existem quatro estágios observados. No primeiro temos, a *fase de separação* de  $O(|\ln \varepsilon|)$ , no segundo, a geração de padrões *metaestáveis* de  $O(\varepsilon^{-1})$ , no terceiro, a propagação em movimento *super-câmera lenta* de interfaces de  $O(e^{1/\varepsilon})$  e por último, a fase de

aniquilação de interfaces de  $O(1)$ . O autor faz um estudo analítico desses estágios com maior rigor para o segundo e o quarto estágio, fornecendo uma análise full-time para o comportamento da dinâmica.

Em [UZUNCA and KARASOZEN, 2017], os autores consideraram a equação de Allen-Cahn dada por

$$u_t = \xi \Delta u - f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1.3)$$

onde  $\Omega \cup \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$ ) é um domínio limitado. A norma em  $L^2$  é induzida por

$$u_t = -\frac{\delta \mathcal{E}(u)}{\delta u}, \quad (1.4)$$

que é caracterizada pela minimização da energia funcional de Ginzburg-Landau

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\xi}{2} |\Delta u|^2 + F(u) \right) dx, \quad (1.5)$$

com potencial  $F(u)$ . Segundo os autores a principal característica da equação de Allen-Cahn (1.3) é a rápida formação das camadas transientes e a formação exponencialmente lenta das camadas terminais para valores muito pequenos de  $\xi$ . Isto é interessante porque nos faz pensar na possibilidade de existir um limite inferior para  $\xi$ . Portanto, baseado nesta afirmação fazemos a seguinte pergunta:

*“Existe uma constante  $c > 0$  tal que a taxa do decaimento exponencial da energia da equação de Allen-Cahn (1.3) enfraquece quando  $\xi \rightarrow c$ ?”*

Acerca deste questionamento, ressaltamos que não temos conhecimento de nenhum trabalho na literatura que faça uma investigação nesta direção e muito menos acerca do valor limite de  $\xi$  que afeta o decaimento exponencial da energia total associada à equação de Allen-Cahn. Outro fato que também merece ser investigado é como explicitar a solução exata de tais problemas.

É bem conhecido que em problemas lineares a solução exata pode ser facilmente obtida pelo método da separação de variáveis [Figueiredo, 2018], no entanto em problemas não lineares são raros os casos em que conseguimos explicitar a solução exata do problema.

Para o caso soluções exatas de problemas não lineares destacamos [Zemskov and Loskutov, 2010]. Neste artigo os autores estudaram a equação de Fisher-Kolmogorov dada por

$$u_t - Du_{xx} - \left( a - \frac{u}{\cos x} \right) u = 0, \quad \text{com } a > 0. \quad (1.6)$$

Usando o método da separação de variáveis supondo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  os autores encontra-

ram as equações diferenciais ordinárias dadas por

$$T_t - qT + T^2 = 0 \quad \text{e} \quad DX_{xx} - (q - a)X = 0, \quad (1.7)$$

onde  $q \in \mathbb{R}$  é o parâmetro de separação desconhecido, e em seguida, mostraram as soluções gerais que são da forma

$$T(t) = \begin{cases} \frac{q}{1 + e^{c_0 - qt}}, & \text{se } q \neq 0, \\ \frac{1}{c_0 - t}, & \text{se } q = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

e ainda,

$$X(x) = \begin{cases} A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} & \text{com } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(q - a)/D} \text{ se } q > a, \\ B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \text{sen}(\lambda x) & \text{com } \lambda = \sqrt{(a - q)/D} \text{ se } q < a, \\ C_1 x + C_2, & \text{se } q = a, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde a constante  $c_0$  é definida pelas condições iniciais. Eles mostraram que a solução exata do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{(a - D) \cos x}{1 + e^{[c_0 - (a - D)]t}}, & \text{se } q = a - D \text{ com } q < a, \\ \frac{(a + D) \cosh x}{1 + e^{[c_0 - (a + D)]t}}, & \text{se } q = a + D \text{ com } q > a, \end{cases} \quad (1.10)$$

Na Figura 1.1 estão as soluções exatas referentes à (1.10).

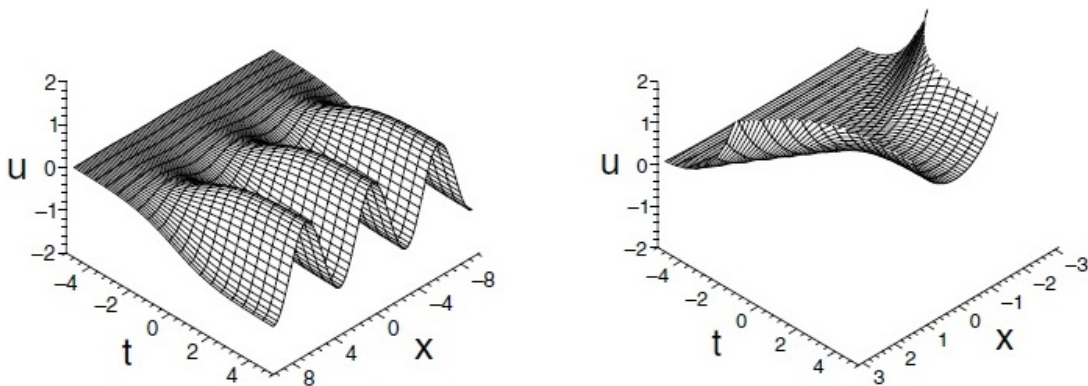


Figura 1.1: Solução exata com  $c_0 = 0$  e  $a - D = 1$  (lado esquerdo) e com  $c_0 = 0$  e  $a + D = 1$  (lado direito). Fonte: [Zemskov and Loskutov, 2010]

Notamos na Figura 1.1 que a solução exata se estabiliza no zero quando  $t \rightarrow -\infty$ . Mas por outro lado, quando  $t \rightarrow \infty$  notamos a presença de oscilações espaciais. Para entendermos o comportamento assintótico da equação (1.6) fizemos uma análise baseada em argumentos de energia.

Para isto consideramos o domínio compacto  $[0, L]$  e definimos a energia total de (1.6) por

$$E(t) = \int_0^L |u|^2 dx, \quad (1.11)$$

e notamos que a mesma satisfaz a taxa de variação

$$\frac{d}{dt}E(t) = -D \int_0^L |u_x|^2 dx + a \int_0^L |u|^2 dx - \int_0^L \frac{u^3}{\cos x} dx. \quad (1.12)$$

Com isto, percebemos que a taxa de variação da energia não possui sinal definido, ou seja, temos uma “competição” entre as constantes  $a > 0$  e  $D > 0$  que altera qualitativamente o comportamento do modelo quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Baseado nos trabalhos supracitados, consideramos a equação de Allen-Cahn unidimensional dada por

$$\begin{cases} u_t - \xi^2 u_{xx} - u \left(1 - \frac{1}{k(x)} u^2\right) = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

onde  $k(x) > 0$  é o coeficiente de reação. A equação (1.13) introduzida por Allen e Cahn [ALLEN and CAHN, 1979], descreve a fase de uma mistura binária. A variável de fase  $u = u(x, t)$  denota a concentração da mistura e o parâmetro  $\xi > 0$  está relacionado à largura da interface capturando o efeito dominante da cinética de reação.

## 1.1 Objetivos do trabalho

O objetivo principal deste trabalho consiste em estudar a equação de Allen-Cahn com a finalidade de provarmos o decaimento exponencial da energia total e encontrarmos a solução exata do problema seguindo os passos dos autores em [Zemskov and Loskutov, 2010].

O trabalho está organizado da seguinte forma:

1. No Capítulo 2, temos as preliminares onde mostramos as principais proposições e definições usadas no trabalho.
2. No Capítulo 3, consideramos o problema (1.13) onde  $0 < k(x) \leq 1$  é o coeficiente de reação determinado posteriormente.

3. No Capítulo 4, fazemos uma análise do problema baseada em argumentos de energia e provamos o decaimento exponencial da energia total.
4. Finalmente no Capítulo 5, fazemos algumas simulações computacionais para exemplificar nossos resultados.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo descrevemos alguns resultados importantes que foram usados no decorrer deste trabalho.

### 2.1 Alguns resultados

**Proposição 2.1.1 (Princípio da superposição de solução)** *Seja*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.1}$$

*uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes  $a, b$  constantes. Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de (2.1) então para quaisquer constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  temos que*

$$y_g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{2.2}$$

*também é solução de (2.1).*

**Prova:** De fato, se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de (2.1) segue que

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \tag{2.3}$$

Daí temos que,

$$\begin{aligned} y_g'' + by_g' + cy_g &= (c_1y_1(x)'' + c_2y_2(x)'' ) + a(c_1y_1(x)' + c_2y_2'(x)) + b(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= c_1(y_1(x)'' + ay_1(x)' + by_1(x)) + c_2(y_2(x)'' + ay_2(x)' + by_2(x)) = 0. \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.1.2 (Equação de Bernoulli)** *Seja*

$$y' = f(t)y + g(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}_*, \quad (2.4)$$

uma equação diferencial de 1ª ordem com  $f(t)$  e  $g(t)$  definidas e contínuas no mesmo intervalo aberto  $I$ . A solução da equação (2.4) é dada por

$$y = e^{(1-\alpha)\int f(t)dt} \left( k + (1-\alpha) \int g(t)e^{-(1-\alpha)\int f(t)dt} dt \right). \quad (2.5)$$

**Prova:** Para  $y \neq 0$  a equação (2.4) é equivalente a

$$y^{-\alpha}y' = f(t)y^{1-\alpha} + g(t). \quad (2.6)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = y^{1-\alpha}$  implica em

$$\frac{du}{dt} = (1-\alpha)y^{-\alpha}y', \quad (2.7)$$

e conseqüentemente obtemos a equação linear

$$\frac{du}{dt} = (1-\alpha)f(t)u + (1-\alpha)g(t), \quad (2.8)$$

com solução dada por

$$y = e^{(1-\alpha)\int f(t)dt} \left( k + (1-\alpha) \int g(t)e^{-(1-\alpha)\int f(t)dt} dt \right), \quad (2.9)$$

onde as integrais indicam primitivas particulares dos integrandos.

■

**Proposição 2.1.3 (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(a) = 0$ ,  $f'$  exista e seja contínua por partes. Então,*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \quad (2.10)$$

**Prova:** Como  $f(a) = 0$  temos do Teorema fundamental do cálculo que

$$f(x) = \int_a^x f'(y)dy, \quad (2.11)$$

com  $a \leq x \leq b$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|f(x)|^2 = \left( \int_a^x f'(y) dy \right)^2 \leq \left( \left( \int_a^x 1^2 dy \right)^{1/2} \left( \int_a^x |f'(y)|^2 dy \right)^{1/2} \right)^2 \quad (2.12)$$

$$= \left( \int_a^x 1 dy \right) \left( \int_a^x |f'(y)|^2 dy \right) \leq (x-a) \int_a^b |f'(y)|^2 dy \quad (2.13)$$

Integrando ambos os lados em  $[a, b]$  obtemos

$$\int_a^b |f(x)|^2 \leq \left( \frac{x^2}{2} - ax + c \right) \Big|_a^b \int_a^b |f'(y)|^2 dy = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \quad (2.14)$$

■

**Proposição 2.1.4 (Desigualdade de Jensen)** *Seja  $g$  uma função convexa suave. Então vale*

$$g\left(\int_0^1 v(x) dx\right) \leq \int_0^1 g(v(x)) dx. \quad (2.15)$$

**Prova:** Desde que  $g$  seja uma função convexa e suave, segue da Série de Taylor que (11.77)

$$g(t-h) = g(t) - hg'(t) + O(h^2), \quad (2.16)$$

onde  $O(h^2) := \frac{h^2}{2!} g''(t) \geq 0$ . Tomando  $t-h = s$  e desprezando  $O(h^2)$  temos

$$g(t) + (s-t)g'(t) \leq g(s), \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Fazendo,

$$s = v(x), \quad t = \int_0^1 v(x) dx, \quad (2.18)$$

e integrando em  $[0, 1]$  com relação a  $x$  concluímos que

$$g\left(\int_0^1 v(x) dx\right) \leq \int_0^1 g(v(x)) dx. \quad (2.19)$$

■

**Proposição 2.1.5** *Suponha que as funções  $u_n$  sejam contínuas e que a série  $\sum_{n+1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma*

$$u(x) = \sum_{n+1}^{\infty} u_n(x) \quad (2.20)$$

é também uma função contínua.

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.6** *Suponha que as funções  $u_n$  sejam integráveis em um intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx. \quad (2.21)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.7** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer intervalo limitado.*

(i) *Se  $f$  é uma função par então*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (2.22)$$

(ii) *Se  $f$  é uma função ímpar então*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (2.23)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.8 (Relações de Ortogonalidade)** *Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$  então*

$$\int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+^* \quad (2.24)$$

$$\int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } m = n \geq 1 \\ 0, & \text{se } m \neq n \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } m = n \geq 1 \\ 0, & \text{se } m \neq n \geq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Definição 2.1.1 (Função periódica)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  é periódica de período  $p$  se*

$$f(x) = f(x + p), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

## 2.2 Séries de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.28)$$

Isto significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de  $f$ . De acordo com [Figueiredo, 2018], uma questão que surge naturalmente é: Que relação há entre  $f$  e sua série de Fourier? Seria bom que fosse de igualdade mas nem sempre isso ocorre!

O teorema abaixo nos dá uma condição suficiente para que isto ocorra.

**Teorema 2.2.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  converge em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ , i.e.,*

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.29)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

Para integrarmos uma série de Fourier devemos ter em mente as hipóteses do teorema abaixo.

**Teorema 2.2.2 (Integração de Séries de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.30)$$

*sua série de Fourier. Então*

(i) *a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de  $f$ ; mais precisamente,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right); \quad (2.31)$$

(ii) *a função*

$$F(x) = \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt, \quad (2.32)$$

*é periódica de período  $2L$ , contínua, tem derivada  $F'$  seccionalmente contínua e é representada*

por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} - \frac{b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.33)$$

e

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx \quad (2.34)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

# Capítulo 3

## Equação de Allen-Cahn

Neste capítulo apresentamos o primeiro resultado deste trabalho que é a solução exata do problema (3.1)–(3.4) para um coeficiente de reação escolhido convenientemente. Esta escolha foi feita de modo a tornar possível transformar o problema de resolver uma equação diferencial parcial não linear, no problema de resolver duas equações diferenciais ordinárias, sendo uma delas um problema de contorno e a outra um problema de valor inicial. A ideia por trás deste método é fazer com que o problema de valor de contorno seja uma equação linear e o problema de valor inicial seja uma equação não linear do tipo Bernoulli.

### 3.1 Solução exata do problema

Consideramos o problema de difusão não linear dado por

$$u_t - \xi^2 u_{xx} - u \left( 1 - \frac{1}{k(x)} u^2 \right) = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

onde  $0 < k(x) \leq 1$  é o coeficiente de reação determinado posteriormente. O termo de reação não linear dado por

$$f(x, s) := s \left( 1 - \frac{1}{k(x)} s^2 \right), \quad (3.2)$$

é o potencial de energia que conduz a solução ao estado  $u = 0$ . As condições de contorno de Neumann homogêneas são dadas por

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3)$$

e a condição inicial por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.4)$$

Na proposição seguinte apresentamos a solução exata do problema em séries de Fourier.

**Proposição 3.1.1** A solução exata do problema (3.1)–(3.4) com  $k(x) = \cos^2(n\pi x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) é dada em série de Fourier por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-(\xi^2 n^2 \pi^2 - 1)t}}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{\xi^2 n^2 \pi^2 - 1} \left(1 - e^{-2(\xi^2 n^2 \pi^2 - 1)t}\right)}} \cos(n\pi x), \quad \text{com } \xi > 1/\pi, \quad (3.5)$$

onde  $c_n$  é o coeficiente de Fourier dado por

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \cos(n\pi x) dx. \quad (3.6)$$

**Prova:** Considerando o *ansatz* da forma

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad (3.7)$$

segue que

$$\frac{\xi^2 F''(x) + F(x)}{F(x)} = \frac{G(t) + \frac{1}{k(x)} F^2(x) G^3(t)}{G(t)}. \quad (3.8)$$

Escolhendo  $k(x) = F^2(x)$  ficamos com

$$\frac{\xi^2 F''(x) + F(x)}{F(x)} = \frac{G(t) + G^3(t)}{G(t)}. \quad (3.9)$$

Observamos que o lado esquerdo da equação acima depende apenas de  $x$ , enquanto que o lado direito depende apenas de  $t$ . Logo podemos concluir que ambos os lados, são independentes de  $x$  e  $t$ . Isto quer dizer que,

$$\frac{\xi^2 F''(x) + F(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + G^3(t)}{G(t)} = \sigma, \quad \text{para algum } \sigma \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, substituindo  $u(x, t) = F(x)G(t)$  nas condições de contorno  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  temos,

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 & \Rightarrow & F'(0)G(t) = 0 & \Rightarrow & F'(0) = 0, \\ u_x(1, t) = 0 & \Rightarrow & F'(1)G(t) = 0 & \Rightarrow & F'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

e substituindo nas condições inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  temos

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \Rightarrow \quad F(x)G(0) = u_0(x), \quad (3.12)$$

de onde adotamos  $G(0) = G_0 \in \mathbb{R}_*$ .

Com isto, passamos a considerar o problema de contorno

$$\begin{cases} \xi^2 F''(x) + (1 - \sigma)F(x) = 0 & \text{em } (0, 1), \\ F'(0) = F'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} G'(t) - \sigma G(t) + G^3(t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ G(0) = G_0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Primeiramente resolvemos o problema de valor inicial. Para isto, linearizamos a equação em (3.14) multiplicando por  $G(t)^{-3}$ . Com isto, obtemos

$$G(t)^{-3} G'(t) = \sigma G(t)^{-2} - 1. \quad (3.15)$$

Usando a mudança de variável  $y(t) := G(t)^{-2}$  temos

$$y(t)' = -2G(t)^{-3} G'(t). \quad (3.16)$$

Logo a equação (3.15) pode ser reescrita na forma linear

$$y'(t) = -2\sigma y(t) + 2. \quad (3.17)$$

Resolvendo a equação acima temos

$$\begin{aligned} y &= e^{-2\sigma \int dt} \left( k + 2 \int e^{2\sigma \int dt} dt \right) = e^{-2\sigma t} \left( k + 2 \int e^{2\sigma t} dt \right) = e^{-2\sigma t} \left( k + \frac{e^{2\sigma t}}{\sigma} \right), \\ &= ke^{-2\sigma t} + \frac{1}{\sigma} = \frac{k\sigma e^{-2\sigma t} + 1}{\sigma}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Retornando à variável  $G(t)$  temos

$$G(t)^{-2} = \frac{k\sigma e^{-2\sigma t} + 1}{\sigma} \Rightarrow G(t) = \sqrt{\frac{\sigma}{k\sigma e^{-2\sigma t} + 1}}. \quad (3.19)$$

Para  $t = 0$  temos  $G(0) = G_0$ . Logo,

$$G(0) = \sqrt{\frac{\sigma}{k\sigma + 1}} \Rightarrow k\sigma = \frac{\sigma - G_0^2}{G_0^2}. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19) temos

$$G(t) = \sqrt{\frac{\sigma G_0^2}{(\sigma - G_0^2)e^{-2\sigma t} + G_0^2}} = \frac{G_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{G_0^2}{\sigma}\right)e^{-2\sigma t} + \frac{G_0^2}{\sigma}}}, \quad (3.21)$$

$$= \frac{G_0}{\sqrt{e^{-2\sigma t} - e^{-2\sigma t}\left(1 - e^{2\sigma t}\right)\frac{G_0^2}{\sigma}}}. \quad (3.22)$$

Finalmente obtemos que

$$G(t) = \frac{G_0 e^{\sigma t}}{\sqrt{1 - \frac{G_0^2}{\sigma}\left(1 - e^{2\sigma t}\right)}} \quad \text{com } t \geq 0. \quad (3.23)$$

Por outro lado, para resolvermos o problema de contorno (3.13) precisamos analisar três casos.

**Caso 1:** Supondo  $1 - \sigma > 0$  e considerando  $F(x) = e^{\mu x}$  temos a equação característica

$$\mu^2 \xi^2 + (1 - \sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm i \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi}. \quad (3.24)$$

Segue daí que

$$F(x) = e^{i \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x} \quad \text{e} \quad F(x) = e^{-i \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x}. \quad (3.25)$$

Pelo *Princípio da superposição de solução* temos que

$$F(x) = c_1 e^{i \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x} + c_2 e^{-i \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x}, \quad (3.26)$$

também é solução do problema. Usando a relação de Euler  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$  podemos escrever

$$F(x) = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} x\right). \quad (3.27)$$

Segue das condições de contorno  $F'(0) = F'(1) = 0$  que

$$\begin{cases} F'(0) = -C_1 \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} \sin(0) + C_2 \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} \cos(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\ F'(1) = -C_1 \frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi} \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \sigma}}{\xi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Como não estamos interessados na solução trivial, devemos considerar  $C_1 \neq 0$ . Com isto obte-

mos a equação

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1-\sigma}}{\xi}\right) = 0 \Rightarrow \sigma_n = 1 - \xi^2 n^2 \pi^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Logo temos a solução

$$F_n(x) = C_1 \cos(n\pi x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Consequentemente, obtemos o coeficiente de reação

$$k_n(x) = \cos^2(n\pi x) \quad \text{com } x \in (0, 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.31)$$

que é uma condição suficiente para usarmos o método da separação de variáveis.

Combinando as equações (3.23) e (3.30) e usando o *Princípio da superposição de solução* temos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-(\xi^2 n^2 \pi^2 - 1)t}}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{\xi^2 n^2 \pi^2 - 1} \left(1 - e^{-2(\xi^2 n^2 \pi^2 - 1)t}\right)}} \cos(n\pi x), \quad \text{com } \xi > 1/\pi, \quad (3.32)$$

onde  $G_0 \neq 0$  é constante e os coeficiente de Fourier  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) são escolhidos de modo que tomando  $t = 0$  em (3.32) temos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{\xi^2 n^2 \pi^2 - 1} (1 - 1)}} \cos(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x). \quad (3.33)$$

Como  $u(x, 0) = u_0(x)$  segue que

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.34)$$

Portanto os  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) devem ser coeficientes de Fourier da função  $u_0(x)$ , dada em  $[0, 1]$ . Note que  $u_0(x)$  deve se escolhida de modo a ser uma função par e periódica de período  $2\pi$ , a fim de termos uma série de cossenos de argumento  $n\pi$ .

Para encontrarmos os valores de  $c_n$ , multiplicamos a equação (3.34) por  $\cos(k\pi x)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) e integramos em  $[0, 1]$ . Com isto, obtemos

$$\int_0^1 u_0(x) \cos(k\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(k\pi x) dx, \quad (3.35)$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_0(x) \cos(k\pi x) dx &= c_1 \int_0^1 \cos(\pi x) \cos(k\pi x) dx + c_2 \int_0^1 \cos(2\pi x) \cos(k\pi x) dx \\
&+ c_3 \int_0^1 \cos(3\pi x) \cos(k\pi x) dx + c_4 \int_0^1 \cos(4\pi x) \cos(k\pi x) dx \\
&+ \dots + \dots \\
&+ c_{n-1} \int_0^1 \cos((n-1)\pi x) \cos(k\pi x) dx + c_n \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(k\pi x) dx \\
&+ \dots + \dots
\end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade entre as funções  $\cos(n\pi x)$  e  $\cos(k\pi x)$  (ver Proposição 2.1.8) segue que

$$\int_0^1 u_0(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{2} c_n, \quad (3.36)$$

ou ainda,

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \cos(n\pi x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

**Caso 2:** Supondo  $1 - \sigma = 0$  o problema de contorno é dado por

$$\begin{cases} F''(x) = 0 & \text{em } (0, 1), \\ F'(0) = F'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Segue daí que  $F(x) = C_1 x + C_2$  e devido as condições de contorno  $F'(0) = F'(1) = 0$  temos

$$F'(x) = C_1 \Rightarrow F'(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0. \quad (3.39)$$

Logo temos que  $F$  é uma solução constante dada por

$$F(x) = C_2, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.40)$$

Como não estamos interessados na solução constante, o parâmetro  $1 - \sigma = 0$  não serve.

**Caso 3:** Supondo  $1 - \sigma < 0$  temos a equação característica

$$\mu^2 \xi^2 + (1 - \sigma) = 0 \Rightarrow \mu = \pm \frac{\sqrt{\sigma - 1}}{\xi}. \quad (3.41)$$

Segue do *Princípio da superposição de solução* que

$$F(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi} x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi} x}, \quad (3.42)$$

é uma solução do problema. Considerando a relação trigonométrica  $e^{\pm\theta} = \cosh \theta \pm \sinh \theta$  temos que

$$F(x) = C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}x\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}x\right). \quad (3.43)$$

Por outro lado, usando as condições de contorno  $F'(0) = F'(1) = 0$  temos que

$$\begin{cases} F'(0) = C_1 \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi} \sinh(0) + C_2 \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi} \cosh(0) = 0 & \Rightarrow C_2 = 0, \\ F'(1) = C_1 \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi} \sinh\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Como estamos interessados na solução não trivial, devemos considerar  $C_1 \neq 0$ . Com isto temos a equação

$$\sinh\left(\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\xi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1. \quad (3.45)$$

Com  $\sigma = 1$  temos a solução constante

$$F(x) = C_1, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.46)$$

Como não estamos interessados na solução constante para  $F$ , o parâmetro  $1 - \sigma < 0$  não serve. Portanto a solução  $u(x, t)$  do problema (3.1)–(3.4) é dada em (3.32).

■

# Capítulo 4

## Abordagem energética

### 4.1 Energias do problema

Iniciamos este capítulo tratando das questões referentes a estabilização assintótica da equação de Allen-Cahn (3.1)–(3.4) usando o *método multiplicativo*. Isto nos permitiu construir dois funcionais energia. O primeiro denominado energia de Ginzburg-Landau é responsável pela dinâmica de transição entre as fases e o segundo denominado energia total é responsável pela dinâmica global do sistema. Estes resultados são tratados nas duas proposições abaixo.

**Proposição 4.1.1** *A energia de Ginzburg-Landau do problema (3.1)–(3.4) é dada por*

$$\mathcal{G}(t) := \int_0^1 \left( \frac{\xi^2}{2} |u_x|^2 + f(u, x) \right) dx \quad (4.1)$$

onde  $f(u, x) := \frac{k(x)}{4} \left( 1 - u^2/k(x) \right)^2$ , satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = - \int_0^1 |u_t|^2 dx. \quad (4.2)$$

**Prova:** Multiplicando a equação (3.1) por  $u_t$  e integrando por partes em  $[0, L]$  temos

$$\int_0^1 |u_t|^2 dx + \xi^2 \int_0^1 u_x u_{xt} dx - \int_0^1 u_t u dx + \int_0^1 \frac{1}{k(x)} u_t u^3 dx = 0, \quad (4.3)$$

e conseqüentemente,

$$\int_0^1 |u_t|^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x|^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u|^2 dx + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{k(x)} |u|^4 dx = 0. \quad (4.4)$$

Desde que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u|^2 dx + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{k(x)} |u|^4 dx = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 \frac{k(x)}{4} \left(1 - \frac{u^2}{k(x)}\right)^2 dx \right], \quad (4.5)$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left( \frac{\xi^2}{2} |u_x|^2 + f(u, x) \right) dx + \int_0^1 |u_t|^2 dx = 0, \quad (4.6)$$

onde

$$f(u, x) := \frac{k(x)}{4} \left(1 - \frac{u^2}{k(x)}\right)^2. \quad (4.7)$$

Assim fica provado que a energia de Ginzburg-Landau associada ao problema (3.1)–(3.4) é dada por

$$\mathcal{G}(t) := \int_0^1 \left( \frac{\xi^2}{2} |u_x|^2 + f(u, x) \right) dx \quad (4.8)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = - \int_0^1 |u_t|^2 dx. \quad (4.9)$$

■

## 4.2 Estabilidade exponencial

Aqui estudamos a estabilização da solução do problema (3.1)–(3.4) através da energia total. Em seguida provaremos o decaimento exponencial quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposição 4.2.1** *A energia total do problema (3.1)–(3.4) com  $0 < k(x) \leq 1$  é dada por*

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 dx \quad (4.10)$$

e satisfaz lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \left( \frac{\xi^2}{c_p} - 1 \right) \int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 |u|^4 dx, \quad (4.11)$$

desde que  $\xi \geq \sqrt{c_p}$ , onde  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré.

**Prova:** Multiplicando a equação (3.1) por  $u$  e integrando por partes em  $[0, 1]$  temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u|^2 dx + \xi^2 \int_0^1 |u_x|^2 dx - \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{k(x)} |u|^4 dx = 0. \quad (4.12)$$

Definindo a energia total por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 dx, \quad (4.13)$$

segue que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\xi^2 \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 \frac{1}{k(x)} |u|^4 dx. \quad (4.14)$$

Usando a desigualdade de Poincaré e levando em conta que  $0 < k(x) \leq 1$ , temos que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\left(\frac{\xi^2}{c_p} - 1\right) \int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 |u|^4 dx, \quad (4.15)$$

onde  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré. Desde que  $\xi > \sqrt{c_p}$ , garantimos a lei de dissipação.

■

**Teorema 4.2.1** *A energia total do problema (3.1)–(3.4) com  $0 < k(x) \leq 1$ , decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ , i.e., existe uma constante  $\beta \geq 1$  tal que*

$$E(t) = \frac{(\xi^2 - c_p)E(0)}{\xi^2 - c_p \left[ 1 - 2E(0) \left( 1 - e^{-\frac{2}{c_p\beta}(\xi^2 - c_p)t} \right) \right]} e^{-\frac{2}{c_p\beta}(\xi^2 - c_p)t}, \quad (4.16)$$

onde  $\xi^2 > c_p$  e  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré.

**Prova:** Inicialmente consideramos a lei de dissipação dada na Proposição (4.2.1)

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\left(\frac{\xi^2}{c_p} - 1\right) \int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 |u|^4 dx. \quad (4.17)$$

Por outro lado, considerando a desigualdade de Jensen

$$g\left(\int_0^L v(x) dx\right) \leq \int_0^L g(v(x)) dx, \quad (4.18)$$

para  $L = 1$ ,  $g(x) = x^2$  com  $g'' > 0$  e  $v(x) = |u|^2$  é fácil ver que,

$$\left(\int_0^1 |u|^2 dx\right)^2 \leq \int_0^1 |u|^4 dx. \quad (4.19)$$

e conseqüentemente podemos escrever

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -2\left(\frac{\xi^2}{c_p} - 1\right)E(t) - 4E^2(t). \quad (4.20)$$

Agora note que existe uma constante  $\beta > 1$  tal que

$$\beta \frac{d}{dt}E(t) = -2\left(\frac{\xi^2}{c_p} - 1\right)E(t) - 4E^2(t). \quad (4.21)$$

A equação acima é conhecida como equação de Bernoulli.

Para resolvermos a equação acima multiplicamos ambos os lados por  $E^{-2}$ . Com isto, obtemos

$$\beta \frac{d}{dt}E(t)E^{-2} = -2\left(\frac{\xi^2}{c_p} - 1\right)E(t)^{-1} - 4. \quad (4.22)$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = E^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u = -\frac{dE}{dt}E^{-2}, \quad (4.23)$$

e substituindo em (4.22) temos

$$\frac{d}{dt}u = f(t)u + g(t), \quad (4.24)$$

onde  $f(t) = 2\pi^2/\beta = 2(\xi^2/c_p - 1)/\beta$  e  $g(t) = 4/\beta$ . Segue daí que a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int f(t)dt} \left[ k + \int g(t)e^{-\int f(t)dt} dt \right] = e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} \int dt} \left[ k + \frac{4}{\beta} \int e^{-\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} \int dt} dt \right] \\ &= e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} t} \left[ k - \frac{2}{(\xi^2/c_p - 1)} e^{-\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} t} \right] = ke^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} t} - \frac{2}{(\xi^2/c_p - 1)} \\ &= \frac{k(\xi^2/c_p - 1)e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} t} - 2}{(\xi^2/c_p - 1)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como  $u = E^{-1}$ , voltamos para a variável  $E$ , i.e., ficamos com

$$E(t) = \frac{(\xi^2/c_p - 1)}{k(\xi^2/c_p - 1)e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta} t} - 2}, \quad \text{com } \beta > 1. \quad (4.26)$$

Fazendo  $t = 0$  obtemos a energia inicial  $E(0)$  dada por

$$E(0) = \frac{(\xi^2/c_p - 1)}{k(\xi^2/c_p - 1) - 2} \Rightarrow k(\xi^2/c_p - 1) = \frac{(\xi^2/c_p - 1) + 2E(0)}{E(0)}. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.26) temos

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{(\xi^2/c_p - 1)}{\left(\frac{(\xi^2/c_p - 1) + 2E(0)}{E(0)}\right) e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} - 2} = \frac{(\xi^2/c_p - 1)E(0)}{((\xi^2/c_p - 1) + 2E(0))e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} - 2E(0)}, \\ &= \frac{(\xi^2/c_p - 1)E(0)}{(\xi^2/c_p - 1)e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} + 2E(0)e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} - 2E(0)}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{(\xi^2/c_p - 1)E(0)}{(\xi^2/c_p - 1)e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} + 2E(0)\left(e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t} - 1\right)} \\ &= \frac{(\xi^2/c_p - 1)E(0)}{\left[(\xi^2/c_p - 1) + 2E(0)\left(1 - e^{-\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t}\right)\right]e^{\frac{2(\xi^2/c_p - 1)}{\beta}t}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Portanto, temos que

$$E(t) = \frac{(\xi^2 - c_p)E(0)}{\xi^2 - c_p \left[1 - 2E(0)\left(1 - e^{-\frac{2}{c_p\beta}(\xi^2 - c_p)t}\right)\right]} e^{-\frac{2}{c_p\beta}(\xi^2 - c_p)t}, \quad (4.30)$$

onde  $\xi^2 > c_p$  e  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré. Assim fica provado que a energia total do problema (3.1)–(3.4) decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ .

■

# Capítulo 5

## Simulação computacional

Para realizamos as simulações computacionais da solução exata e da energia total do problema (3.1)–(3.4), usamos o MatLab.

### 5.1 Solução exata e energia total - Caso: $n = 2$

Consideramos os dados  $T = 0.1$ ,  $G_0 = 1$ ,  $n = 2$  e assumimos os valores de  $\xi = 1$  e  $\xi = 0.15$ .

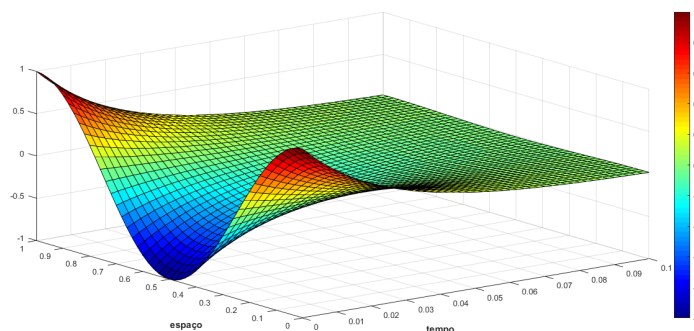


Figura 5.1: Solução exata  $u(x,t)$  com  $\xi = 1$

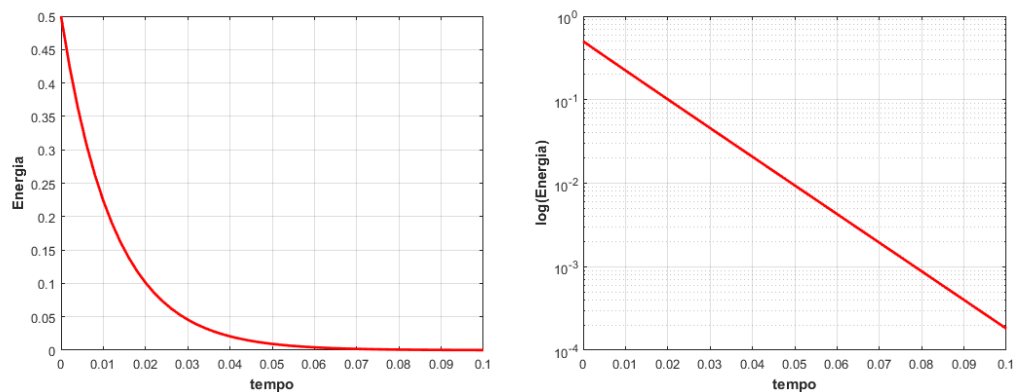


Figura 5.2: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

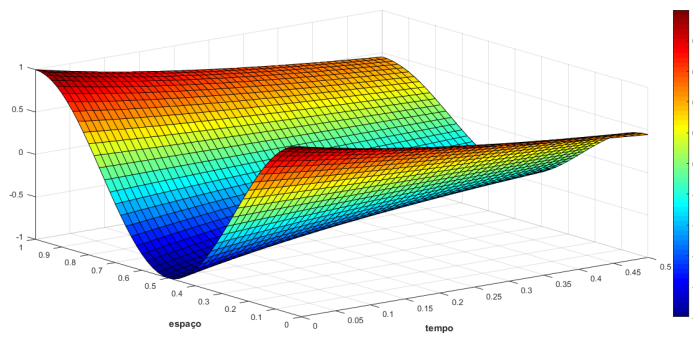


Figura 5.3: Solução exata  $u(x,t)$  com  $\xi = 0.15$ .

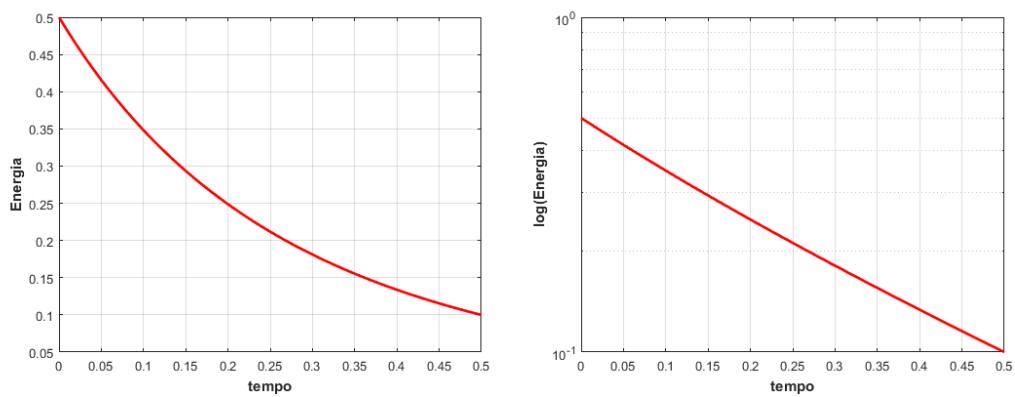


Figura 5.4: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

## 5.2 Solução exata e energia total - Caso: $n = 4$

Consideramos os dados  $T = 0.1$ ,  $G_0 = 1$ ,  $n = 4$  e assumimos os valores de  $\xi = 1$  e  $\xi = 0.15$ .

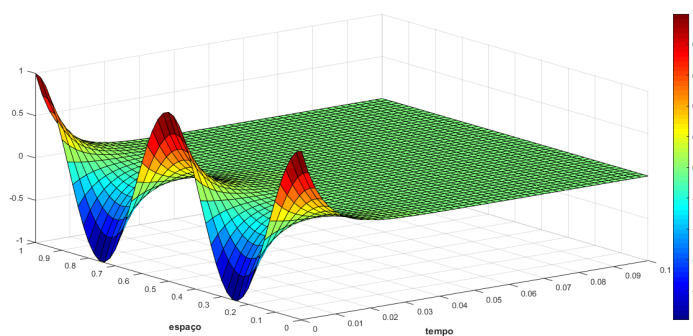


Figura 5.5: Solução exata  $u(x,t)$  com  $\xi = 1$ .

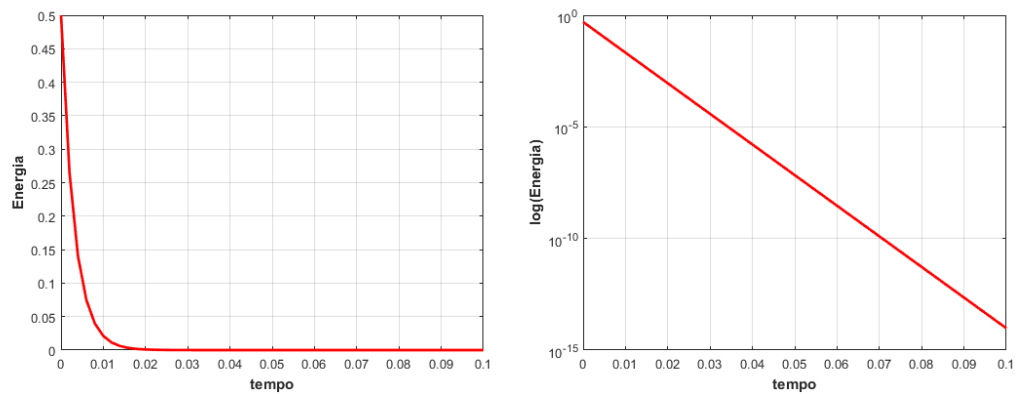


Figura 5.6: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

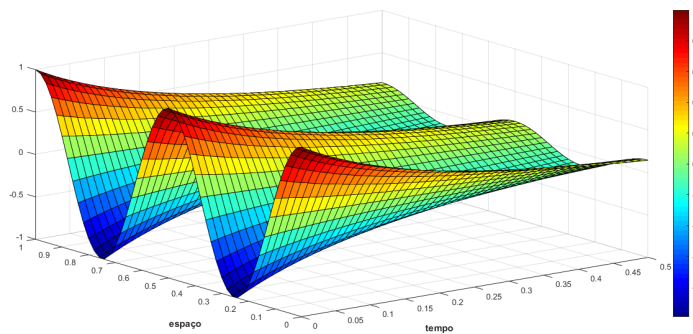


Figura 5.7: Solução exata  $u(x,t)$  com  $\xi = 0.15$ .

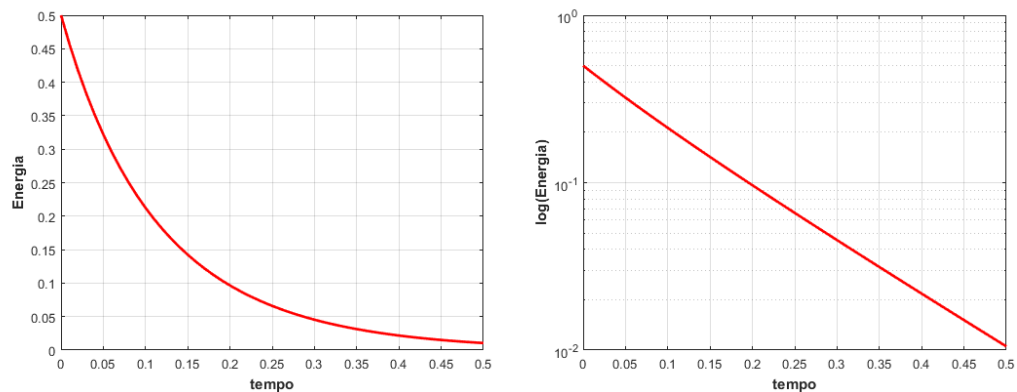


Figura 5.8: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

**Comentário:** Nas simulações realizadas acima percebemos que a solução exata possui comportamentos bem distintos dependendo do valor que se escolhe para o coeficiente  $\xi$ . Nas Figuras 5.1 e 5.5 percebemos que a solução decai muito rápido para zero sem oscilação enquanto que nas Figuras 5.3 e 5.7 notamos a presença oscilações espaciais, ou seja, o sistema não possui homogeneidade espacial. No entanto, em ambos os casos ( $\xi = 1$ ,  $\xi = 0.15$ ), percebemos pelas Figuras 5.2, 5.4, 5.6 e 5.8 que o problema continua exponencialmente estável.

## Capítulo 6

### Considerações finais

Neste trabalho estudamos alguns aspectos quantitativos e qualitativos da equação de Allen-Cahn. Os principais resultados obtidos são: a solução exata do problema não linear e a propriedade de decaimento exponencial da energia total. Esperamos que este trabalho possa motivar a resolução de outros problemas não lineares e futuramente pretendemos fazer um estudo numérico desse problema usando o método de diferenças finitas e comparar com a solução exata obtida neste trabalho.

## Referências

- [ALLEN and CAHN, 1979] ALLEN, S. and CAHN, J. (1979). A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall*, 27:1084–1095.
- [CHEN, 2004] CHEN, X. (2004). Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns. **Journal of Differential Equations**, 206:399–437.
- [Figueiredo, 2018] Figueiredo, D. G. (2018). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. SBM.
- [KARMA and RAPPEL, 1998] KARMA, A. and RAPPEL, W. (1998). Quantitative phase-field modeling of dendritic growth in two and three dimensions. **Physical Review E Physics**, 57:4323–4349.
- [KOBAYASHI, 1993] KOBAYASHI, R. (1993). Modeling and numerical simulations of dendritic crystal growth. **Physica D**, 63(3-4):410–423.
- [UZUNCA and KARASOZEN, 2017] UZUNCA, M. and KARASOZEN, B. (2017). Energy stable model order reduction for the allen-cahn equation. In *Model Reduction of Parametrized Systems*, pages 403–419. Springer.
- [Zemskov and Loskutov, 2010] Zemskov, E. P. and Loskutov, A. (2010). Exact analytical solutions for nonlinear waves in the inhomogeneous fisher-kolmogorov equation. *The European Physical Journal B*, 79(1):79–84.