



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

**O Teorema Fundamental do Cálculo: na reta, no
plano e na curva**

Alana Carolina do Rosário Seixas

BRAGANÇA – PA

2022

O Teorema Fundamental do Cálculo: na reta, no plano e na curva

Alana Carolina do Rosário Seixas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciada Plena em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Marly dos Anjos Nunes

BRAGANÇA – PA

2022

O Teorema Fundamental do Cálculo: na reta, no plano e na curva

Alana Carolina do Rosário Seixas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciada Plena em Matemática.

Bragança, 02 de Dezembro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Marly dos Anjos Nunes
Orientadora – UFPA

Prof^ª. Dr^ª. Edilene Farias Rozal
Examinador Interno – UFPA

Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Examinador Interno – UFPA

Sumário

1	Introdução	10
2	Uma breve teoria do Cálculo Diferencial e Integral	12
2.1	Limites	12
2.1.1	Limites laterais	13
2.1.2	Continuidade	14
2.1.3	Teorema do Confronto	15
2.2	Derivadas	16
2.2.1	Máximos e mínimos de uma função	18
2.2.2	Teorema do Valor Extremo.	18
2.2.3	Teorema do Valor Médio para Derivadas	18
2.3	Integrais	19
2.3.1	Propriedades de Integral	20
2.3.2	Teorema do Valor Médio para integrais	20
2.3.3	Corpos e corpos ordenados	21
2.3.4	Ínfimo e Supremo	21
2.3.5	Somas Inferiores e Superiores	22
2.4	Campo vetorial	23
2.4.1	Funções vetoriais e Curvas parametrizadas	23
2.4.2	Rotacional	24
2.4.3	Integral de linha de campo vetorial	25
3	O Teorema Fundamental do Cálculo na Reta	28
4	O Teorema Fundamental do Cálculo no \mathbb{R}^2: Teorema de Fubini	34
5	O Teorema Fundamental do Cálculo na Curva: Teorema de Green	40
6	Aplicações usando o Teorema Fundamental do Cálculo	45
6.1	Sólidos de Revolução	45
6.1.1	Volume do Sólido de Revolução obtido através da rotação em torno do eixo x (Método dos discos)	45

6.1.2	Volume do Sólido de Revolução obtido através da rotação em torno do eixo y (Método dos cilindros)	46
6.2	Centro de Massa	52
6.3	Planímetro	57
7	Considerações Finais	58

Agradecimentos

- Ao meu Deus, Senhor da vida e fonte do amor que me abastece todos os dias, que não desampara os seus. Que me fortaleceu e me abasteceu de misericórdia e sabedoria durante minha vida acadêmica.
- A Nossa Senhora de Nazaré, minha mãe amada, que com o seu amor inigualável de mãe sempre intercedeu por minha vida, meus objetivos e sonhos. Por ter rogado a seu filho, Jesus, por meu ingresso na Universidade e que por diversas vezes me acolheu em seu regaço acolhedor nos momentos de aflição.
- Aos meus pais, Evandro de Jesus Mota de Seixas e Nádia Cilene do Rosário Seixas por terem sido o pilar para toda essa construção, por sempre priorizarem meu estudo. Por todo o suporte, compreendendo meu tempo, meus objetivos, meus medos, minhas inseguranças e por sempre ofertarem o melhor, no amor, na paciência, na motivação, orientação. Por me acompanharem e cuidarem de mim, diversas noites em claro.
- A meus avós maternos Francisca Neuza do Rosário Bailosa e Carlos Bailosa Leite (in memoriam) por todo o incentivo e apoio. A minha avó que com a graça de Deus hoje, pode está vivenciando a finalização de mais uma etapa de minha vida, e ao meu avô, e que mesmo não estando presente fisicamente, por todo seu amor demonstrado em vida, me dá a certeza que sempre está a zelar por mim. A todos meus familiares, que compartilharam essas vivências e emoções comigo, em especial minha tia e madrinha Nilda Maria do Rosário Bailosa, meus primos Isabelle Caroline do Rosário Bailosa e Marcos Augusto Gama do Rosário.
- Aos meus professores do Ensino Básico pela confiança depositada em mim, por todo o ensinamento, companheirismo, inspiração, motivação, excelência e pela amizade que se perpetua até hoje. Aos meus professores do Ensino Superior, por cumprirem seu dever com importância, me auxiliando sempre que necessário.
- A minha professora e orientadora, que foi a responsável pela minha identificação com o Cálculo, em que ministrou de forma impecável as disciplinas referente a essa componente curricular. Por aceitar o desafio de me orientar neste trabalho.

- Ao grupo de Oração Universitário Deus Conosco e juntamente todos os seus integrantes, em especial Renato Rodrigues e Daniela Silva, por terem sido o sinal dos planos e principalmente da misericórdia, amor e força, do Pai para comigo.
- A todos os amigos da matemática 2018 pela parceria e intensa motivação. A todos os meus amigos, que de forma direta ou indireta sonharam comigo, e me ajudaram na realização desse sonho.
- Por fim, agradecer a todo o quadro de colaboradores do Campus de Bragança. Em especial, a Prof^a. Dr^a. Edilene Farias Rozal e Prof^a. Dr^a. Marly dos Anjos Nunes, que respectivamente, quanto diretora e vice-diretora da Faculdade de Matemática, cumpriram com maestria suas funções e nunca mediram esforços para nos ouvir e auxiliar. Muito obrigada a todos!

A ciência humana de maneira nenhuma nega a existência de Deus. Quando considero quantas e quão maravilhosas coisas o homem compreende, pesquisa e consegue realizar, então reconheço claramente que o espírito humano é obra de Deus, e a mais notável.

(Galileu Galilei)

Resumo

O presente trabalho sugere uma investigação quanto ao Teorema Fundamental do Cálculo, que por vez nos possibilita a atrelação do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral. Seu principal objetivo é estudá-lo como aplicação na reta, no plano com o Teorema de Fubini e na curva, com o Teorema de Green., compreendendo conceitos das disciplinas de Análise Real e Cálculo Diferencial e Integral. Em específico, pretendemos demonstrá-los aliando com aplicações em situações reais, e modo especial, com o desejo de agregar conceitos importantes do Cálculo e da disciplina Análise Real. A metodologia se deu através de pesquisa bibliográfica, analisando trabalhos e livros. Ao final, pudemos comprovar a importância em estudar os Teoremas propostos neste, para cálculo de volume, centro de massa e área.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Teorema de Fubini; Teorema de Green; Aplicações.

1 Introdução

O século XVIII, foi um período muito produtivo para a matemática, entretanto a descoberta que mais se destacou foi a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, feito de forma independente, por Isaac Newton (1643-1727) e Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Os problemas iniciais do Cálculo se referem ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Apesar das formas determinadas por linhas retas já serem estudadas a milênios, houve então a necessidade de abranger o estudo para regiões ainda não consideradas, formadas por linhas curvas.

O Teorema Fundamental do Cálculo é um resultado que nos possibilita calcular integrais definidas em um determinado intervalo, estabelecendo uma conexão entre o Cálculo diferencial e o Cálculo integral. Desse modo, este trabalho tem como objetivo estudá-lo em regiões unidimensionais e bidimensionais com o Teorema de Fubini e o Teorema de Green.

Na prática, o Teorema Fundamental do Cálculo nos possibilita abranger os resultados já encontrados para figuras regulares. Agora para regiões curvas. Trazemos aplicações no cálculo de áreas, volumes e centro de massa de regiões não regulares.

Este trabalho é uma pesquisa de carácter qualitativo, que propõem o estudo bibliográfico de demonstrações do Teorema Fundamental do Cálculo na reta, no plano sendo o Teorema de Fubini e na curva com o Teorema de Green, com o objetivo de compreender conceitos das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial e de Análise Real através de aplicações.

Quanto a estrutura do trabalho, ele está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, veremos uma breve revisão teórica quantos aos assuntos necessários para o desenvolvimento do trabalho, como limites, derivadas e integrais.

O capítulo 3, será onde abordaremos a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo na reta, estudando dois modos diferentes de prova.

Ainda, abordando dois métodos distintos de demonstração, no capítulo 4, estudaremos o Teorema de Fubini.

Traremos no capítulo 5, a prova do Teorema de Green, que corresponde ao Teorema Fundamental do Cálculo na curva.

O capítulo 6 abordará as aplicações do Teorema na reta, com sólidos de revolução, no Plano com o centro de massa e na curva com o cálculo de área.

E por fim, no capítulo 7 temos as considerações finais, ao qual concluimos os resultados.

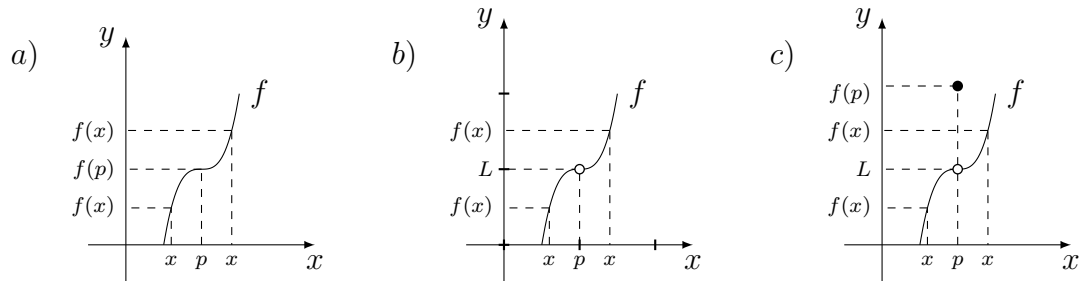
2 Uma breve teoria do Cálculo Diferencial e Integral

2.1 Limites

Intuitivamente, dizer que o limite de uma função $f(x)$, quando x tende a p (representação: $x \rightarrow p$), é igual a L , que simbolicamente representamos por

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L,$$

significa dizer que quando x se aproxima de p , $f(x)$ se aproxima de L . Vejamos os gráficos a seguir



No gráfico (a), observe que f está definida no ponto p . Logo, quando x tende a p , $f(x)$ tende a $f(p)$, e portanto $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Já no gráfico (b), f não está definida no ponto, portanto quando x tende a p , $f(x)$ tende a L . Assim, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

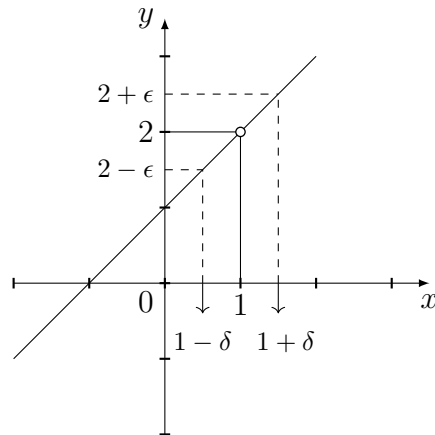
Por sua vez no gráfico (c), f está definida no ponto p , porém observe que $L \neq f(p)$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

Nas últimas duas situações descritas acima, o valor de L é o valor que f deveria ter no ponto p , para ser contínua em p . Estudaremos a seguir os conceitos de continuidade.

Vamos agora pensar na seguinte função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Considere o gráfico da $f(x)$ a seguir,



Observe que f não está definida no ponto $x = 1$, pois teríamos uma indeterminação, entretanto, está bem definida em todos os outros pontos da reta.

O limite desta função quando $x \rightarrow 1$, representa o valor que essa função admite quando x está próximo de 1, tanto pela direita quanto pela esquerda, mas sem chegar a ser o próprio 1.

Desse modo, diremos que L é o limite de f quando x se aproxima de p , se atribuindo valores para x próximos de p , os valores de $f(x)$ estão próximos de L .

Definição 2.1.1. Diremos que L é o limite de uma função f , quando $x \rightarrow p$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

2.1.1 Limites laterais

O limite lateral é o valor para qual uma função converge quando x se aproxima de p por valores maiores que p (pela direita), ou para valores menores que p (pela esquerda).

Definição. Diremos que L é o limite pela esquerda da função f quando x se aproxima a p por valores menores que p . Isto é, se para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$0 < p - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Este limite é denotado como

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L.$$

De modo análogo, diremos que L é o limite pela direita da função f quando x se aproxima a p por valores maiores que p . Isto é, se para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ satisfazendo

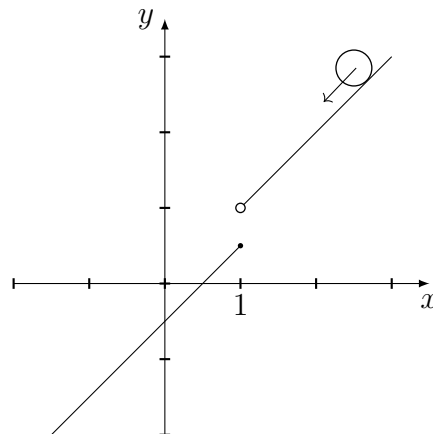
$$0 < x - p < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \epsilon,$$

e denotamos como

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L.$$

2.1.2 Continuidade

Na imagem a seguir, temos uma bola deslizando suavemente até que no ponto $x = 1$ ocorre um salto e ainda, podemos observar que o limite dessa função não existe quando x tende a 1. Esse é um exemplo claro de uma função descontínua em um determinado ponto.



Definição. Diremos que uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ quando são satisfeitas as seguintes propriedades.

- O valor de $f(a)$ está definido, ou seja, o ponto $x = a$ pertence ao domínio da função.
- O $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Basicamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, nos quer dizer que dado quaisquer intervalo que contenha $f(a)$ por exemplo, $]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$ deve existir um intervalo que contenha a , por exemplo $]a - \delta, a + \delta[$ tal que

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Ou ainda, podemos dizer que uma função f é contínua no ponto $x = a$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição. Diremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, se existe uma constante positiva M satisfazendo

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida sobre um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f é uma função limitada.

2.1.3 Teorema do Confronto

Definição. Sejam f, g e h funções definidas sobre os números reais satisfazendo a desigualdade

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Prova. Dado $\epsilon > 0$, por definição, existe

$$\delta_1 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$\delta_2 > 0; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon.$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Para todo x com $0 < |x - x_0| < \delta$ temos

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \quad (1)$$

e

$$L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon. \quad (2)$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, segue de (1) e (2) que

$$\begin{aligned} L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon \\ L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon. \end{aligned}$$

E portanto,

$$|g(x) - L| < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

2.2 Derivadas

Definição 2.2.2. Diremos que f é diferenciável no ponto x se existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Caso exista, diremos que o seu valor é a derivada de f no ponto x , sendo denotado da seguinte forma

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $x = x_0$, então f é uma função contínua no ponto x_0 .

Prova. Sabendo que f é diferenciável, então existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Como o denominador da fração tende a zero, o numerador também deverá ir para zero, ou então não existiria o limite. Temos então

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$

Este limite implica que f é contínua no ponto $x = x_0$. Se considerarmos $y = x_0 + h$, notamos que

$$y \rightarrow x_0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0.$$

E portanto,

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0),$$

demonstrando o resultado. Porém, a recíproca não é verdadeira. Vejamos a seguir um exemplo da contraprova.

Exemplo: A função $f(x) = |x|$ é uma função contínua, mas não é uma função diferenciável.

Solução: Observe que f é uma função contínua, por se tratar de uma função modular. Para mostrarmos que f não é diferenciável, utilizaremos a definição 2.2.2. Sendo assim, consideremos o seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Por definição de módulo,

$$|h| = \begin{cases} h, & \text{se } h \geq 0 \\ -h, & \text{se } h < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Ou seja, os limites laterais são divergentes, o que nos quer dizer que o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

não existe.

Portanto, f não é diferenciável.

2.2.1 Máximos e mínimos de uma função

Definição. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que x_0 é um ponto de máximo local para f se existe uma vizinhança $V \subset (a, b)$ de x_0 , tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in V.$$

De forma análoga, diremos que x_0 é mínimo local para f , se existe uma vizinhança $V \subset (a, b)$ de x_0 , tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in V.$$

Definição. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que x_0 é um ponto de máximo global para f se

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

E diremos que x_0 é ponto de mínimo global para f , se

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Também são denominados de máximos e mínimos absolutos. E seus valores são chamados de valores extremos de f .

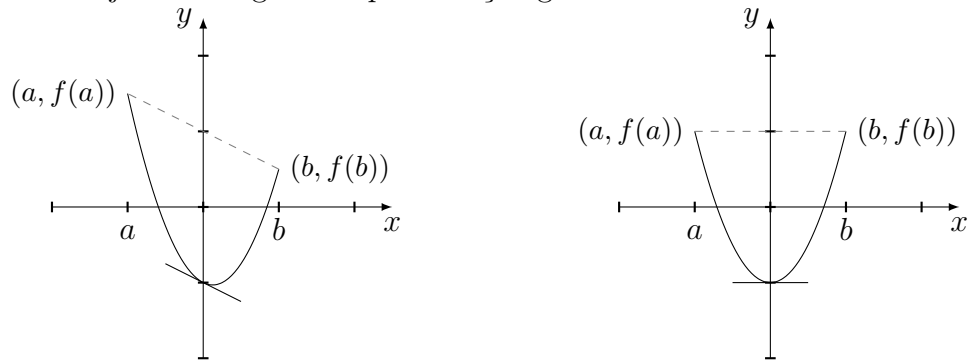
2.2.2 Teorema do Valor Extremo.

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor mínimo absoluto $f(u)$ e um valor máximo absoluto $f(v)$ nos pontos u e v em $[a, b]$.

2.2.3 Teorema do Valor Médio para Derivadas

O Teorema do Valor Médio tem como resultado que dada qualquer reta secante que corte uma curva em dois pontos, sempre haverá uma reta tangente à curva que é

paralela à secante. Vejamos a seguir a representação gráfica do teorema.

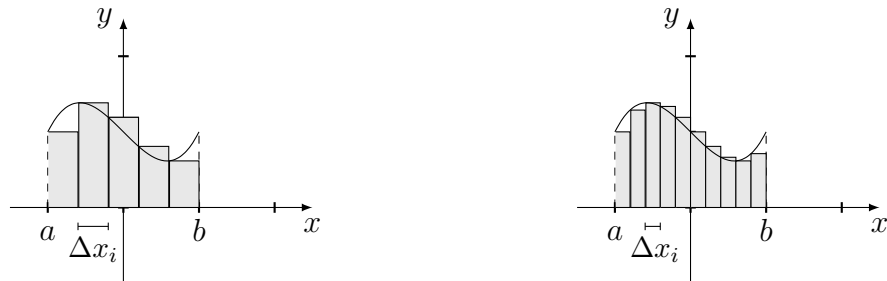


Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.3 Integrais

A definição de integral está relacionada com o cálculo de áreas sob uma determinada curva. Utiliza-se a ideia de aproximar a área abaixo da curva com a área de retângulos. Estas são chamadas somas de Riemann.



Analisando os gráficos, podemos perceber que a medida que a variância no eixo das abscissas (Δx_i) fica cada vez menor, a soma das áreas dos retângulos se aproximam ainda mais da área sob a curva $f(x) = y$ no intervalo $[a, b]$. Ou seja, a base de cada retângulo é a própria variância $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. A medida que aumentamos a quantidade de pontos x_i pertencentes ao intervalo $[a, b]$, a soma dos retângulos obtidos é o valor aproximado para a área abaixo do gráfico de f .

A soma das áreas dos n retângulos alusivos no intervalo $[a, b]$ é denotada por S_n e representada da seguinte forma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$

O limite quando $n \rightarrow \infty$ será a área da curva definida pela função f no intervalo $[a, b]$ que denotamos por A , sendo

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

E representamos da seguinte forma

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

2.3.1 Propriedades de Integral

1. $\int_a^b c dx = c(b - a)$, onde c é uma constante qualquer.
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
3. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$
4. $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, onde c é uma constante qualquer.
5. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$
6. Se $f(x) \geq 0$, para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$
7. Se $f(x) \geq g(x)$, para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$
8. Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então

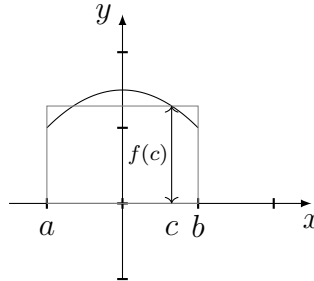
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

2.3.2 Teorema do Valor Médio para integrais

Definição. Se $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

O Teorema do Valor Médio nos traz como resultado que a área sob o gráfico de uma determinada função $f(x) > 0$ em um intervalo $[a, b]$ é igual a área do retângulo de altura $f(c)$ e base $(b - a)$.



2.3.3 Corpos e corpos ordenados

Um *corpo* é um conjunto K , munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem o que chamamos de axiomas de corpo. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x + y \in K$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in K$.

Axiomas da adição: Associatividade, Comutatividade, Elemento neutro e Elemento inverso.

Axiomas da multiplicação: Associatividade, Comutatividade, Elemento neutro e Elemento inverso.

As operações de adição e multiplicação num corpo K acham-se relacionadas por um axioma, que completa a definição de corpo, o axioma da distributividade.

Um *corpo ordenado* é um corpo K , no qual destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K , que satisfaça as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos.

P2. Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre:

$$\text{ou } x = 0, \text{ ou } x \in P, \text{ ou } -x \in P.$$

2.3.4 Ínfimo e Supremo

Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado superiormente quando existe $b \in K$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$, ou seja, cada $b \in K$ que satisfaça $X \subset [-\infty, b]$ é chama-se de maiorante ou cota superior de X .

Analogamente, $X \subset K$ diz-se limitado inferiormente quando existe $a \in K$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, em outras palavras, temos $X \subset [a, +\infty]$. Cada elemento $a \in K$ com esta propriedade, chama-se de minorante ou cota inferior de X .

Definiremos como supremo do subconjunto X a menor das cotas superiores. E representamos por

$$\sup K.$$

De forma semelhante, o ínfimo do subconjunto K é a maior das cotas inferiores, e representamos como

$$\inf K.$$

Axioma do Supremo. Todo conjunto limitado superiormente possui um elemento máximo ou supremo.

Teorema. Todo conjunto limitado inferiormente possui um ínfimo.

Prova. Seja A o conjunto limitado inferiormente, então existe m tal que

$$m \leq x, \quad \forall x \in A.$$

Considerando

$$-S = \{-x; x \in A\}$$

temos que

$$x \leq -m, \quad \forall x \in -A.$$

De fato, podemos concluir que m é ínfimo de A , pois $-m$ é o supremo do conjunto $-A$.

2.3.5 Somas Inferiores e Superiores

Dizemos que as somas superiores são os excessos de retângulos sobre a curva e somas inferiores quando os retângulos estão sob ou dentro da curva.

A Integral Superior é definida pelo ínfimo das somas superiores, assim como a

Integral Inferior é o supremo das somas inferiores. Com isso, dizemos que uma função é integrável quando as somas superiores e as somas inferiores coincidem.

Denotamos a soma inferior de f , sendo

$$s(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) \quad (3)$$

e a soma superior de f como,

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i). \quad (4)$$

Definição Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, então chamaremos de integral superior de f ao valor que denotaremos por

$$\int_a^b f(s) ds = \sup \{s(f, P); P \subset [a, b]\}.$$

De modo análogo, temos a integral inferior de f denotada por

$$\int_a^b f(s) ds = \inf \{S(f, P); P \subset [a, b]\}.$$

2.4 Campo vetorial

2.4.1 Funções vetoriais e Curvas parametrizadas

Definição. Chamamos de função vetorial, uma função f cujo domínio é um conjunto de números reais e a imagem é um conjunto de vetores.

Denotamos uma função vetorial definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em \mathbb{R}^2 sendo

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I, \quad (5)$$

onde $x(t), y(t)$ são funções reais definidas em I .

O vetor $\sigma(t)$ é representado geometricamente pelo vetor OP , onde $P = (x(t), y(t))$. Quando $\sigma(t)$ é contínua em I , o ponto P descreve uma curva C em \mathbb{R}^2 , ou seja, para cada

$t \in I$, temos um ponto $P = (x, y) \in C$ tal que

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t) \quad (6)$$

Dizemos que (5) é uma parametrização da curva C e (6) são equações paramétricas da curva C onde a variável t é o parâmetro.

Uma função vetorial $\sigma(t)$ é de classe C^1 em I se $\sigma(t)$ é diferenciável em I e $\sigma'(t)$ é contínua em I . Uma região é dita fechada se seu ponto final coincide com seu ponto inicial.

Definição. Uma região fechada e limitada D do plano xy é simples se não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades, ou seja D pode ser descrita como uma região do tipo I ,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

e do tipo II simultaneamente,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1(y) \leq x \leq v_2(y), \quad c \leq y \leq d.\}$$

2.4.2 Rotacional

Consideremos um campo vetorial

$$\vec{f} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

definido em um certo domínio D . Se P , Q , e R admitem derivadas parciais de 1^a ordem, contínuas em D , então o rotacional de \vec{f} , denotado por $rot \vec{f}$, é o campo vetorial definido em D como

$$rot \vec{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Demonstração. Obtemos a expressão acima através do produto vetorial do operador gradiente ∇ pelo campo vetorial \vec{f} . Sabendo que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

temos assim,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{f} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R & P & Q \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{k} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} + \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial R}{\partial x} \vec{j} \right) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \text{rot} \vec{f}. \end{aligned}$$

2.4.3 Integral de linha de campo vetorial

Sejam

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

um campo vetorial e C uma curva no \mathbb{R}^2 , definida por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

Suponhamos que F representa um campo de forças e queremos calcular o trabalho realizado pela força F ao deslocar uma partícula ao longo de uma curva C .

Se C é um segmento de reta AB e F é uma força constante, temos que o trabalho realizado por F ao deslocar uma partícula ao longo de C é dado por

$$T = F \cdot AB = (\text{força na direção do deslocamento}) \times (\text{deslocamento})$$

Se C não é um segmento de reta, podemos aproximá-la por uma linha poligonal com vértices em C , dividindo o intervalo $I = [a, b]$ em partição regular de ordem n , tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Assim, obtêm-se uma linha poligonal de vértices $\sigma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, \dots, n - 1$.

Observe que se n é excessivo, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é pequeno, então o deslocamento da partícula de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é aproximado pelo vetor $\Delta s_i = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)$, e F pode ser considerada constante e igual a $F(\sigma(t_i))$ no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

Supondo que $\sigma'(t)$ existe para todo $I \in [a, b]$ então, pela definição de derivada vem

que

$$\Delta s_i \approx \sigma'(t) \Delta(t_i).$$

Portanto o trabalho realizado para deslocar uma partícula de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é aproximadamente

$$F(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx (F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)) \Delta t_i$$

Desse modo, o trabalho T realizado é dado por

$$T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)) \Delta t_i \right)$$

Se σ' é contínua em $[a, b]$ e $F(x, y, z)$ é contínua em C , limite acima existe e é igual

a

$$T = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt.$$

Definição. Consideremos uma curva C em \mathbb{R}^2 parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ onde σ é de classe C_1 , e $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial contínuo em C . A integral de linha de F ao longo de C é definido por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) dt \quad (7)$$

Se a curva C for fechada, ou seja, $\sigma(b) = \sigma(a)$, denota-se a integral de linha por

$$\oint_C F \cdot dr.$$

Utilizando as componentes de F e de $\sigma'(t)$, podemos reescrever (7) de modo a seguir

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b [P(\sigma(t)) x'(t) + Q(\sigma(t)) y'(t)] dt$$

Assim, podemos denotar a integral de linha também por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b P dx + Q dy.$$

Teorema. Seja F um campo vetorial contínuo definido em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ para qual existe uma função real f tal que $\nabla f = F$ em U . Se C é uma curva em U com ponto inicial A e final B , parametrizada por uma função $\sigma(t)$, C^1 por partes, então

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A).$$

O campo vetorial F é chamado campo gradiente ou campo conservativo, enquanto a função f é uma função potencial.

3 O Teorema Fundamental do Cálculo na Reta

O Teorema estudado neste capítulo nos dará como resultado que a integral e a derivada são funções inversas, possibilitando o estudo da área sob uma função.

Na primeira parte do Teorema Fundamental, iremos trabalhar com funções definidas por equações da seguinte forma

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (8)$$

onde f é uma função contínua de $[a, b]$, fixando a como limite inferior, e x como limite superior, variando entre a e b .

Caso, o limite superior seja um número fixo, então podemos dizer que a integral $\int_a^x f(t) dt$ é um número definido. Como estamos variando x , o número $\int_a^x f(t) dt$ também varia e define uma função de x que denotamos de $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então podemos interpretar $g(x)$ como a área sob o gráfico de f compreendido de a até x . E ainda, denotamos g como primitiva de f .

Teorema (Fundamental do Cálculo - TFC). Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e ainda $g'(x) = f(x)$.

Prova. Se x e $x + h$ estão em (a, b) , então

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \quad (9)$$

Observe que pela propriedade 5 das integrais,

$$\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Substituindo em (9), obtemos

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Para $h \neq 0$, temos

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (10)$$

Considerando o Teorema dos Valores Extremos, e assumindo $h > 0$, uma vez que f é contínua em $[x, x+h]$, podemos afirmar que existem números u e v em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores de mínimo e máximo absolutos respectivamente, de f em $[x, x+h]$.

Pela propriedade 8 das integrais, temos

$$m[(x+h) - x] \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M[(x+h) - x]$$

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh,$$

ou seja,

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h$$

Como assumido anteriormente $h > 0$, dividindo a desigualdade por h , tem-se

$$\frac{1}{h} f(u)h \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \frac{1}{h} f(v)h$$

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v). \quad (11)$$

Substituindo (10) em (11),

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v). \quad (12)$$

Como u e v estão no intervalo fechado $[x, x + h]$, se tomarmos $h \rightarrow 0$, então $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$.

Desse modo, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x).$$

Uma vez que f é contínua em x . Aplicando o limite com $h \rightarrow 0$ em (12), obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(v).$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto concluímos que

$$f(x) \leq g'(x) \leq f(x)$$

$$g'(x) = f(x).$$

Corolário. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova. Vimos que, se $g(x) = \int_a^b f(x) dx$, então $g'(x) = f(x)$, ou seja, g é uma primitiva de f .

Se F por sua vez, for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, temos que F e g se diferenciam por uma constante C , de modo que

$$F(x) = g(x) + C, \tag{13}$$

onde $x \in [a, b]$. Logo,

$$F(a) = g(a) + C$$

e

$$F(b) = g(b) + C,$$

desde que g é primitiva da f , segue de (8) que

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

e

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Subtraindo $F(a)$ de $F(b)$, temos

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$F(b) - F(a) = g(b) + C - g(a) - C$$

$$F(b) - F(a) = g(b) - g(a)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - 0$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Agora enunciaremos novamente o Teorema Fundamental do Cálculo e traremos uma segunda possibilidade de demonstração, por meio de ínfimos e supremos.

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, e denotamos por F uma primitiva de f , isto é $F'(x) = f(x)$, então teremos que

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

Prova. Seja P uma partição de $[a, b]$, temos

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\},$$

onde $t_0 = a$ e $t_n = b$.

Como f é uma função contínua em $[a, b]$, logo f é limitada, então

$$m = \inf \{f(x); x \in [t_i, t_{i+1}]\}$$

e

$$M = \sup \{f(x); x \in [t_i, t_{i+1}]\}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\epsilon_i \in (a, b)$, tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \quad (14)$$

Seja $s(f, P)$ as somas inferiores e $S(f, P)$ as somas superiores de f , definida em 2.3.5,

$$s(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) \quad (15)$$

e

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i). \quad (16)$$

Observe que

$$m_i \leq F'(\xi_i) = f(\xi_i) \leq M_i$$

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq F'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \leq M_i(t_{i+1} - t_i).$$

Aplicando o somatório na desigualdade

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i).$$

De (14), (15) e (16) temos,

$$s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P). \quad (17)$$

Sabendo que

$$\underline{\int_a^b} f(s) ds = \sup \{s(f, P); P \subset [a, b]\}$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(s) ds = \inf \{S(f, P); P \subset [a, b]\}.$$

Como

$$\underline{\int_a^b} f(s) ds \leq s(f, P) \quad (18)$$

$$S(f, P) \leq \overline{\int_a^b} f(s) ds. \quad (19)$$

De (17), (18) e (19), temos

$$\underline{\int_a^b} f(s) ds \leq s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P) \leq \overline{\int_a^b} f(s) ds$$

$$\underline{\int_a^b} f(s) ds \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(s) ds$$

Como f é uma função integrável, temos que

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

4 O Teorema Fundamental do Cálculo no \mathbb{R}^2 : Teorema de Fubini

Neste capítulo abordaremos o Teorema Fundamental do Cálculo no plano, ou seja, o Teorema de Fubini, que é intitulado dessa forma em homenagem a Guido Fubini.¹

Teorema. Se a função $z = f(x, y)$ é contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, então a integral dupla de f sobre R pode ser obtida através de integrais iteradas,

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Prova. Iremos mostrar que

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Para cada $x \in [a, b]$, definamos

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

Particionando o intervalo $[c, d]$ regularmente em ordem n , temos

$$P_1 = y_0, \dots, y_k, \dots, y_n,$$

onde $y_0 = c$ e $y_n = d$.

Assim,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) \, dy. \quad (20)$$

Para cada x fixado, aplicamos o teorema do valor médio para integrais no intervalo $[y_k, y_{k+1}]$, onde $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

¹Guido Fubini (1879-1943): matemático italiano que trabalhou em diversas áreas, incluindo análise, cálculo de variações e teoria de grupos, e teve importante influência de seu pai, Lazzaro Fubini, professor de matemática.

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k),$$

onde $Y_k(x) \in [y_k, y_{k+1}]$.

Substituindo em (20), temos que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k). \quad (21)$$

Seja P_2 uma partição do intervalo $[a, b]$ de forma regular de ordem n

$$P_2 = x_0, \dots, x_j, \dots, x_n,$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Pela definição de integral de funções de uma variável (limite de somas de Riemann), temos

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),$$

onde p_j é um ponto qualquer de $[x_j, x_{j+1}]$.

Tomando $c_{ij} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, obtemos de (21)

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(p_j, Y_k(p_j))(y_{k+1} - y_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ij})(y_{k+1} - y_k) \right] (x_{j+1} - x_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k,j=0}^{n-1} f(c_{ij})(x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k) \\ \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \iint_R f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy = \iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

E, portanto

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Agora iremos provar o Teorema de Fubini usando supremos e ínfimos.

Teorema: Se $f(x, y)$ for integrável no retângulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

e se, para todo $y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y) \, dx$ existir, então

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Prova. Seja P_1 uma partição de $[a, b]$,

$$P_1 = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\},$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

E seja P_2 uma partição de $[c, d]$, temos

$$P_2 = \{y_0 < y_1 < \dots < y_m\},$$

onde $y_0 = c$ e $y_m = d$.

Como $f(x, y)$ é limitada, vem que

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y); x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}]\}$$

e

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y); x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}]\}$$

Seja $s(f, P)$ as somas inferiores e $S(f, P)$ as somas superiores de f , definidos a seguir

$$s(f, P) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

e

$$S(f, P) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Observe que para todo $(r_i, s_j) \in R_{ij}$,

$$m_{ij} \leq f(r_i, s_j) \leq M_{ij} \quad (22)$$

Aplicando os somatórios, a variância em relação a x e a variância em relação a y em (22),

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(r_i, s_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$s(f, P) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(r_i, s_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leq S(f, P)$$

Como M_{ij} é o supremo do conjunto dos números $f(x, y)$ com $(x, y) \in R_{ij}$, temos que para todo $\epsilon_1 > 0$ dado, existe $(\bar{r}_i, \bar{s}_j) \in R_{ij}$ tal que

$$\begin{aligned} M_{ij} - \epsilon_1 &< f(\bar{r}_i, \bar{s}_j) \\ M_{ij} - (\bar{r}_i, \bar{s}_j) &< \epsilon_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Multiplicando a variância de x e a variância de y em (23), temos

$$[M_{ij} - (\bar{r}_i, \bar{s}_j)](x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) < \epsilon_1(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) - (\bar{r}_i, \bar{s}_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) < \epsilon_1(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Observe que

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_1 (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \epsilon_1 (b-a)(d-c),$$

onde $(b-a)(d-c)$ é a do retângulo R .

Queremos mostrar que se $f(x, y)$ é integrável em R ,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{(\Delta x_i, \Delta y_j) \rightarrow (0,0)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \\ \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{(\Delta x_i, \Delta y_j) \rightarrow (0,0)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned}$$

De fato, se f é integrável, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_R f(x, y) dx dy \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (24)$$

Por outro lado, para toda partição P em R , tem se

$$0 \leq S(f, P) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j < \frac{\epsilon}{2}. \quad (25)$$

Para uma escolha conveniente (\bar{r}_i, \bar{s}_j) em R , segue de (24) e (25) que para toda partição P em R com $\Delta < \delta$,

$$\begin{aligned} I &= \left| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - \iint_R f(x, y) dx dy \right| \\ &= \left| S(f, P) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_R f(x, y) dx dy \right| \\ &\leq \left| S(f, P) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j \right| + \left| \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{r}_i, \bar{s}_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_R f(x, y) dx dy \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\text{Assim,} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

De modo análogo, temos para m_{ij} , isto é,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Portanto,

$$\iint_R f(x) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

ou

$$\iint_R f(x) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

5 O Teorema Fundamental do Cálculo na Curva: Teorema de Green

Veremos que o teorema a ser estudado nesse capítulo se trata de uma aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, em uma curva. Entretanto, antes de o enunciarmos, é necessário uma breve definição acerca da orientação positiva de uma curva, na fronteira ∂D .

Dizemos que a fronteira ∂D de uma região limitada D do plano xy está orientada positivamente, se ao percorrermos a fronteira ∂D definida pela função vetorial $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, a região D fica à esquerda.

Teorema: Seja D uma região fechada e limitada do plano xy , cuja fronteira ∂D é formada por um número finito de curvas fechadas, simples, regulares por partes, disjunta, orientada positivamente e é parametrizada por uma função C^1 por partes, de modo que ∂D seja percorrida apenas uma vez. Se $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto que contém D , então

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Prova. Desde que consideramos a região D simples, D pode ser descrita simultaneamente como uma região do tipo *I* e *II*. Queremos provar

$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx \tag{26}$$

e

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \tag{27}$$

Para provarmos (26) vamos considerar uma região do tipo *I*, logo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

Se dividirmos a fronteira ∂D em duas curvas C_1 e C_2 , parametrizando-as quanto

ao parâmetro x temos

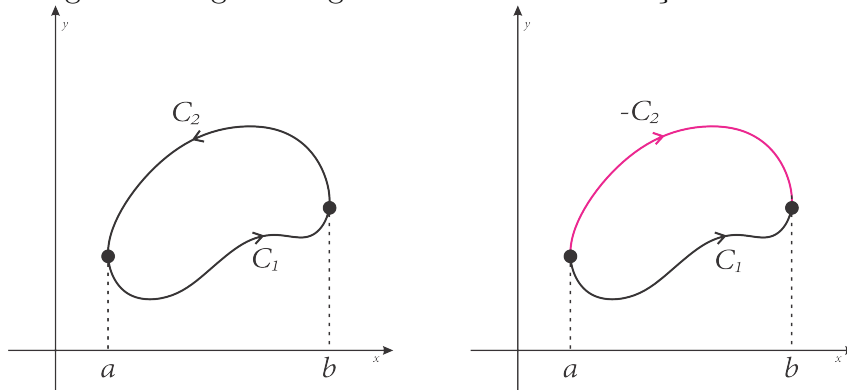
$$C_1(x) = (x, u_1(x)), \quad a \leq x \leq b$$

$$C_2(x) = (x, u_2(x)), \quad a \leq x \leq b.$$

Daí,

$$\oint_{\partial D} P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx$$

Figura 1: Região integrada e troca de orientação da curva.



Fonte: Própria da autora (2022)

Como C_2 está orientada no sentido "errado", pois seu intervalo se dá do maior para o menor. Consideremos a curva $-C_2$, o que muda a orientação para o modo "correto". Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{-C_2} P dx \\ &= \int_{C_1} P dx - \int_{C_2} P dx \\ &= \int_a^b P(x, u_1(x)) dx - \int_a^b P(x, u_2(x)) dx \end{aligned} \quad (28)$$

Por outro lado, como $\frac{\partial P}{\partial y}$ é contínua, vem que

$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [-P(x, u_2(x)) - (-P(x, u_1(x)))] dx \\ &= \int_a^b P(x, u_1(x)) dx - \int_a^b P(x, u_2(x)) dx. \end{aligned} \quad (29)$$

De (28) e (29), concluímos

$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx. \quad (30)$$

De modo análogo, provaremos (27). Agora consideremos D uma região do tipo II .

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; v_1(y) \leq x \leq v_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Dividindo ∂D em duas curvas C_1 e C_2 , segue a parametrização

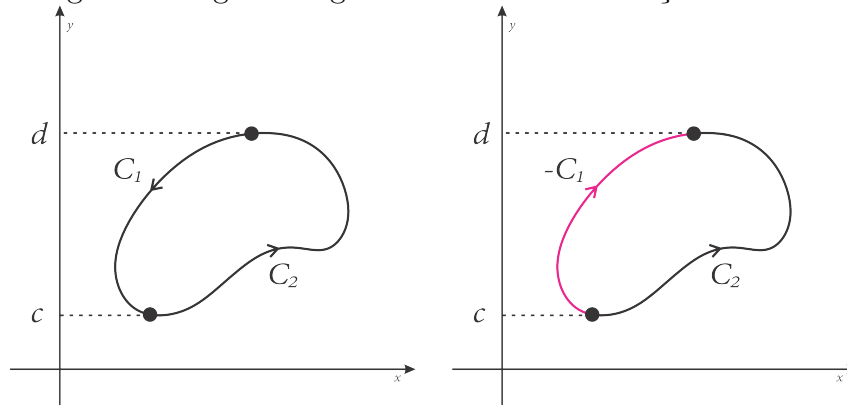
$$C_1 = (v_1(y), y), \quad c \leq y \leq d$$

$$C_2 = (v_2(y), y), \quad c \leq y \leq d.$$

Assim,

$$\oint_{\partial D} Q dy = \int_{C_1} Q dy + \int_{C_2} Q dy.$$

Figura 2: Região integrada e troca de orientação da curva.



Fonte: Própria da autora (2022)

Como a curva C_1 está orientada de forma "errada", consideraremos a curva $-C_1$.

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Q \, dy &= \int_{-C_1} Q \, dy + \int_{C_2} Q \, dy \\ &= - \int_{C_1} Q \, dy + \int_{C_2} Q \, dy \\ &= - \int_c^d Q(v_1(y), y) \, dy + \int_c^d Q(v_2(y), y) \, dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Desde que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ é contínua, desenvolvendo o segundo membro de (27), temos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_c^d \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy \\ &= \int_c^d [Q(v_2(y), y) - Q(v_1(y), y)] \, dy \\ &= - \int_c^d Q(v_1(y), y) \, dy + \int_c^d Q(v_2(y), y) \, dy \end{aligned} \quad (32)$$

Assim de (31) e (32), vem que

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} Q \, dy. \quad (33)$$

Somando (30) e (33), concluímos

$$\oint_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Se ∂D é uma fronteira formada por um número infinito de curvas simples, por tratar de um 'resultado' significativamente abstrato, não faremos a prova e traremos apenas o resultado de forma sucinta. Decompomos a região como união infinita de regiões simples, ou seja $D = D_1 \cup \dots \cup D_k \cup \dots \cup D_n$, onde cada região simples D_k tem fronteira $\partial D_k \in C^1$ por partes, onde $k = 1, \dots, n$.

Aplicando o teorema de Green em cada região, temos

$$\iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \oint_{\partial D_k} P \, dx + Q \, dy.$$

E, portanto

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\partial D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \dots + \iint_{\partial D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{\partial D_1} P dx + Q dy + \dots + \oint_{\partial D_n} P dx + Q dy.\end{aligned}$$

6 Aplicações usando o Teorema Fundamental do Cálculo

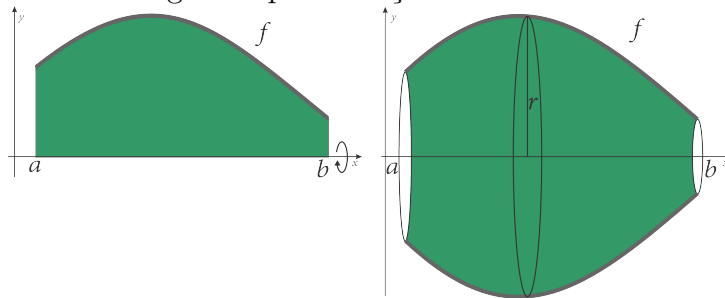
6.1 Sólidos de Revolução

Definição: Os sólidos de revolução são figuras no \mathbb{R}^3 obtidas através da rotação de uma figura plana, ou seja no \mathbb{R}^2 , em torno de uma reta fixa que pertence ao mesmo plano da curva, que chamamos eixo de giro.

Chamaremos a região plana de **curva geratriz** que é compreendida entre o gráfico de uma função $f(x)$ e as retas perpendiculares ao eixo das abscissas $x = a$ e $x = b$. O eixo de giro (ou rotação) poderá ser o eixo x das abscissas ou o eixo y das ordenadas.

A imagem a seguir nos mostra um sólido de revolução gerado através da rotação de uma função f em torno do eixo das abscissas.

Figura 3: Sólido gerado pela rotação em torno do eixo de giro x .



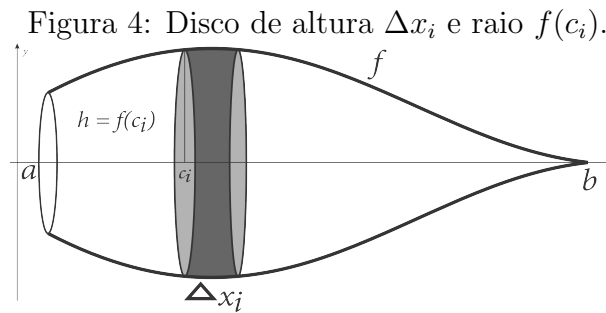
Fonte: Própria da autora (2022)

Observe que o eixo de rotação passa pelo centro do sólido, resultando que as secções transversais formam círculos de raio $r = f(x)$. Portanto, os sólidos de revolução são objetos simétricos em que seu eixo de simetria é o próprio eixo de giro, por este motivo é conhecido também por corpos cilíndricos.

6.1.1 Volume do Sólido de Revolução obtido através da rotação em torno do eixo x (Método dos discos)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$, positiva e $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ a soma de Riemann.

Sabendo que uma soma de Riemann é a soma da área de vários retângulos. Ao rotacionarmos esses retângulos em torno do eixo x , obtemos cilindros (discos) retangulares retos com o raio da base sendo $r = f(c_i)$ e altura $h = \Delta x_i$.



Fonte: Própria da autora (2022)

Sabendo que o volume do cilindro é

$$V = \pi r^2 h$$

Temos então que o volume de cada um desses discos é dado por

$$V = \pi [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

Sendo assim, a soma dos volumes de todos esses discos é o valor aproximado para o volume do sólido. Definimos então o volume do sólido sendo

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

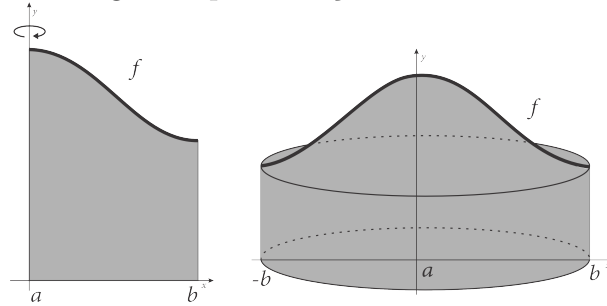
$$V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (34)$$

Quando $\Delta x_i \rightarrow 0$ temos que $n \rightarrow \infty$. Isso nos quer dizer que quando menor a base, a quantidade de discos tende ao infinito, e o somatório de seus volumes se aproxima cada vez mais do volume do sólido de revolução.

6.1.2 Volume do Sólido de Revolução obtido através da rotação em torno do eixo y (Método dos cilindros)

Seja f uma função contínua definida em $[a, b]$, positiva e A a região compreendida pelo gráfico de $f(x)$ e pelas retas perpendiculares ao eixo das abscissas $x = a$ e $x = b$. Se girarmos a região A ao redor do eixo y das ordenadas obtemos o seguinte sólido.

Figura 5: Sólido gerado pela rotação em torno do eixo de giro y .

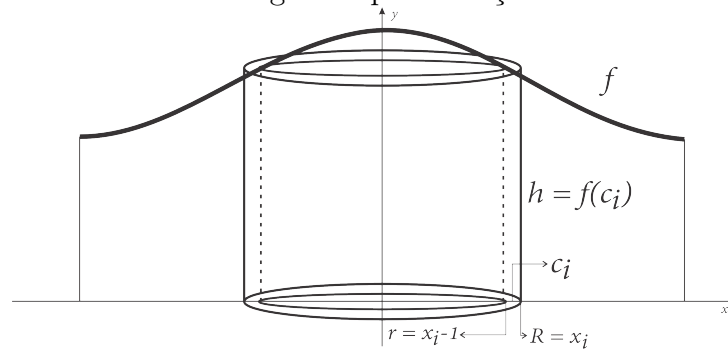


Fonte: Própria da autora (2022)

Seja $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ a soma de Riemann. Ao rotacionarmos os retângulos em torno do eixo y geramos cilindros retos, sendo a altura $h = f(c_i)$, o raio menor $r = x_{i-1}$, o raio maior $R = x_i$, e o raio médio dos cilindros dado por

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Figura 6: Cilindro reto gerado pela rotação em torno do eixo y .



Fonte: Própria da autora (2022)

O volume do cilindro genérico V_i será a diferença entre o cilindro de raio maior e o cilindro de raio menor. Desse modo temos a seguir

$$\begin{aligned}
V_i &= \pi.R^2.h - \pi.r^2.h \\
&= \pi.(x_i)^2.f(c_i) - \pi.(x_{i-1})^2.f(c_i) \\
&= \pi.[(x_i)^2 - (x_{i-1})^2].f(c_i) \\
&= \pi.(x_i + x_{i-1}).(x_i - x_{i-1}).f(c_i) \\
&= 2\pi.\frac{(x_i + x_{i-1})}{2}.(x_i - x_{i-1}).f(c_i) \\
V_i &= 2\pi.c_i.\Delta x_i.f(c_i)
\end{aligned}$$

Ao somarmos os volumes de todos os cilindros contidos no sólido de revolução, temos uma boa aproximação para o volume do sólido.

$$\begin{aligned}
V_y &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi c_i \Delta x_i f(c_i) \\
V_y &= \int_a^b 2\pi x f(x) dx
\end{aligned} \tag{35}$$

Temos que $\Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$. Logo, quanto menor a variância em x , a quantidade de cilindros tende ao infinito, e o somatório de seus volumes se aproxima cada vez mais do volume do sólido estudado.

Aplicação 1 (Volume do Toro). Toro ou toróide é definido como a região geométrica formada através da rotação de uma superfície circular de raio r em torno de um eixo. Se assemelha com a imagem de uma "rosquinha" ou câmara de ar.

A figura refere-se a uma torre localizada na cidade de Ciechanów, na Polônia. Um tanque de expansão construído em 1972, chamado caixa d'água.

Figura 7: Caixa d'água no formato toroidal (Polônia).



Fonte: Google Imagens

Desse modo, temos que r é o raio do tubo do toro e R é o raio do centro do tubo até o centro do toro.

Por se tratar de uma superfície circular, temos

$$\begin{aligned}y^2 + x^2 &= r^2 \\y^2 &= r^2 - x^2 \\y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Entretanto, a superfície não está localizada na origem. Deste modo, devemos calcular o volume do toro gerado pela rotação, em torno do eixo das abscissas, da região circular definida por

$$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} + R,$$

no intervalo $[-r, r]$.

Como o eixo de rotação do toro neste caso, é o eixo x , utilizaremos a igualdade (34).

$$V_x = \int_{-r}^r \pi [(\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 - (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2] dx. \quad (36)$$

Desenvolvendo $A = (\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 - (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2$, temos

$$A = r^2 - x^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 - (r^2 - x^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2)$$

$$A = 4R\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Assim, temos

$$(\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 - (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 = 4R\sqrt{r^2 - x^2} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (36),

$$V_x = \int_{-r}^r \pi 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$V_x = \pi 4R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \quad (38)$$

Por coordenadas polares, fazendo $x = r \cos \theta$ e derivando ambos os lados da igualdade, temos $dx = -r \sin \theta d\theta$. Observe que se $x \rightarrow -r$, então $\theta \rightarrow \pi$ e se $x \rightarrow r$, então $\theta \rightarrow 0$. De (38),

$$V_x = \pi 4R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= \pi 4R \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - (r \cos \theta)^2} \cdot (-r \sin \theta d\theta)$$

$$= \pi 4R \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \theta} \cdot (-r \sin \theta d\theta)$$

$$= \pi 4R \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 (1 - \cos^2 \theta)} \cdot (-r \sin \theta d\theta).$$

Da relação fundamental da trigonometria, temos

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi 4R \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 (1 - \cos^2 \theta)}. (-r \sin \theta d\theta) \\
 &= \pi 4R \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 \sin^2 \theta}. (-r \sin \theta d\theta) \\
 &= \pi 4R \int_{\pi}^0 r \sin \theta. (-r \sin \theta d\theta) \\
 &= -r^2 \pi 4R \int_{\pi}^0 \sin^2 \theta d\theta
 \end{aligned} \tag{39}$$

Sabendo que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, de (39), temos

$$\begin{aligned}
 V_x &= -r^2 \pi 4R \int_{\pi}^0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= -r^2 \pi 2R \int_{\pi}^0 1 - \cos 2\theta d\theta \\
 &= -r^2 \pi 2R \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \\
 &= -r^2 \pi 2R \left[\left(0 - \frac{\sin 2 \cdot 0}{2} \right) - \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) \right] \\
 &= -r^2 \pi 2R (-\pi) \\
 V_x &= (\pi r^2)(2\pi R).
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que o volume do toro formado pela rotação em torno do eixo x , (V_x) é o produto da secção transversal (πr^2) pelo comprimento da circunferência média ($2\pi R$).

6.2 Centro de Massa

O principal objetivo dessa aplicação é encontrar um ponto em que uma determinada placa em um formato qualquer se equilibra horizontalmente. Este ponto chamamos de centro de massa.

Tomemos uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ finita, com distribuição de densidade de massa constante (massa por unidade de área) sendo $\delta(x, y)$, para todo $(x, y) \in D$.

A massa da região D , é definida como a integral dupla da função densidade de massa $\delta(x, y)$ sobre D , denotada por

$$m(D) = \iint_D \delta(x, y) dA. \quad (40)$$

Os momentos $M_{x=x_0}$ e $M_{y=y_0}$ da massa da região D nos eixos x_0 e y_0 são dados respectivamente por

$$M_{x=x_0} = \iint_D \delta(x, y)(x - x_0) dA \quad (41)$$

e

$$M_{y=y_0} = \iint_D \delta(x, y)(y - y_0) dA. \quad (42)$$

Quando $M_{x=x_0}$ é zero, podemos concluir que a região plana D se encontra em equilíbrio em relação ao eixo x , ou seja, não há rotação no eixo x . De modo análogo para $M_{y=y_0}$.

Se $M_{x=x_0}$ e $M_{y=y_0}$ são iguais a zero, temos que o centro de centro de massa $G(x_g, y_g)$ será a interseção das retas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Consideremos então

$$M_{x=x_g} = 0. \quad (43)$$

Substituindo (41) em (43) temos,

$$\begin{aligned}
\iint_D \delta(x, y)(x - x_g) dA &= 0 \\
\iint_D \delta(x, y)x dA - \iint_D \delta(x, y)x_g dA &= 0 \\
\iint_D \delta(x, y)x dA - x_g \iint_D \delta(x, y) dA &= 0 \\
x_g \iint_D \delta(x, y) dA &= \iint_D \delta(x, y)x dA.
\end{aligned}$$

Portanto,

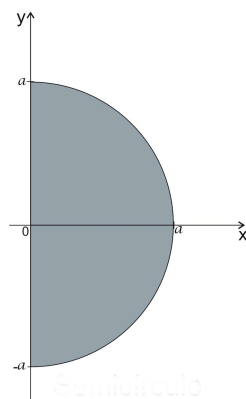
$$x_g = \frac{\iint_D \delta(x, y)x dA}{\iint_D \delta(x, y) dA} = \frac{M_{x=0}}{m(D)}.$$

De modo semelhante, obtemos

$$y_g = \frac{\iint_D \delta(x, y)y dA}{\iint_D \delta(x, y) dA} = \frac{M_{y=0}}{m(D)}.$$

Aplicação 2. Calcular o centro de massa de uma placa de ferro galvanizado cujo seu formato é dado por um semicírculo de raio $a = 0,20 m$.

Figura 8: Região semicircular



Fonte: Própria da autora (2022)

Consideremos a densidade de massa superficial $\delta(x, y) = 5,09 \text{ kg/m}^2$. Devido a região ser circular, afim de facilitar o processo de integração, faremos uso do método das coordenadas polares. Temos então

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

A massa da placa é dada a seguir, pelo cálculo da integral dupla da constante densidade.

$$\begin{aligned} m(D) &= \iint_D \delta(x, y) \, dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{0,2} 5,09 \, r \, dr \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{0,2} 5,09 \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5,09 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{0,2} \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 5,09 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{0,2} \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(5,09 \cdot \frac{(0,2)^2}{2} \right) \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(5,09 \cdot \frac{(0,2)^2}{2} \right) \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,1018 \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0,1018 \, d\theta \\ &= 0,1018 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 0,1018 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= 0,1018 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 0,1018 \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 0,1018 \pi \\ m(D) &= 0,3196. \end{aligned}$$

Encontremos agora, o momento em relação a x . Pela propriedade (5) das integrais

$$\begin{aligned}
 M_{x=0} &= \iint_D \delta(x, y) x \, dA \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{0,2} 5,09 \cos \theta r^2 \, dr \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{0,2} 5,09 \cos \theta r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5,09 \cos \theta \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{0,2} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 5,09 \cos \theta \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{0,2} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5,09 \frac{(0,2)^3}{3} \cos \theta \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 5,09 \frac{(0,2)^3}{3} \cos \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,0135 \cos \theta \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0,0135 \cos \theta \, d\theta \\
 &= 0,0135 \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 0,0135 \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= 0,0135 \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin(0) \right] + 0,0135 \left[\sin(0) - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= 0,0135 (1 - 0) + 0,0135 (0 - (-1)) \\
 M_{x=0} &= 0,027.
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 x_g &= \frac{M_{x=0}}{m(D)} \\
 x_g &= \frac{0,027}{0,31} = 0,087.
 \end{aligned}$$

Façamos o momento quando $y = 0$

$$\begin{aligned}
 M_{y=0} &= \iint_D \delta(x, y) y \, dA \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{0,2} 5,09 \sin \theta r^2 \, dr \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{0,2} 5,09 \sin \theta r^2 \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5,09 \sin \theta \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{0,2} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 5,09 \sin \theta \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{0,2} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5,09 \frac{(0,2)^3}{3} \sin \theta \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 5,09 \frac{(0,2)^3}{3} \sin \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,0135 \sin \theta \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0,0135 \sin \theta \, d\theta \\
 &= -0,0135 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 0,0135 \cos \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= -0,0135 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos(0) \right] - 0,0135 \left[\cos(0) - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= -0,0135 (0 - 1) - 0,0135 (1 - 0) \\
 M_{y=0} &= 0,0135 - 0,0135 = 0.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 y_g &= \frac{M_{y=0}}{m(D)} \\
 y_g &= \frac{0}{0,31} = 0.
 \end{aligned}$$

E portanto, obtemos que o centro de massa da placa metálica sendo a intersecção das retas $x = 0,087$ e $y = 0$,

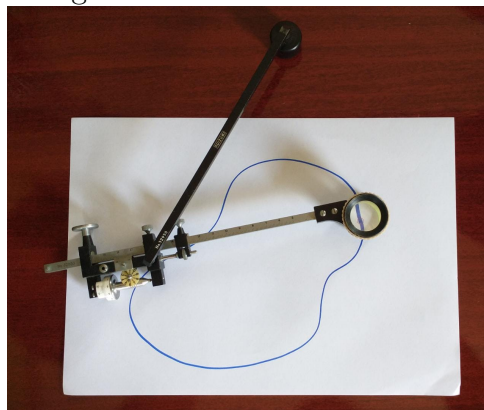
$$G(x_g, y_g) = (0,087, 0).$$

6.3 Planímetro

Com a dificuldade de calcular áreas de figuras planas e irregulares, no ano de 1854, após cinco anos de pesquisa, o matemático, físico, engenheiro e fabricante Suíço, Jacob Amsler, inventou um instrumento mecânico capaz de medir área de regiões planas limitadas, o então denominado planímetro polar.

Mecanicamente, o planímetro é estruturado de forma simples. Composto por dois braços metálicos que podem ou não possuir mesmo tamanho, e que podem variar o ângulo entre eles de 0° a 180° . Em uma de suas extremidades temos uma ponta que serve para fixar fora da figura plana, e na extremidade do outro braço há uma espécie de rodinha, que gira de forma perpendicular ao eixo em que está fixada, contando a quantidade de voltas que ela dá ao percorrer a figura. Quando percorre toda a região desejada, o contador indica a área da região limitada.

Figura 9: Planímetro mecânico



Fonte: Própria da autora (2022)

7 Considerações Finais

A matemática proporciona, ao decorrer dos anos, significativos resultados para o meio científico. Leibniz e Newton, ao desenvolverem o Cálculo Diferencial e Integral, desencadearam a possibilidade de estudo quanto a fenômenos físicos e naturais de regiões ainda não estudadas.

Neste trabalho, trouxemos como abordagem principal um dos maravilhosos resultados encontrados no desenvolvimento do Cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo. Juntamente com a sua aplicação no plano e na curva, sendo o Teorema de Fubini e Teorema de Green, respectivamente. E por fim, aplicamos esses teoremas em situações usuais de diversas áreas como física, engenharia e topografia.

De modo geral, a principal dificuldade encontrada foi unificar em um só trabalho, os três Teoremas, sendo dois estudados de perspectivas diferentes, diante do extenso conteúdo necessário para suas respectivas abordagens, e atrela-los a situações reais, mostrando os importantes resultados desse estudo na prática.

Por este motivo, acreditamos na relevância desse trabalho, pois além de demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo, se estimulou o estudo de outros dois Teoremas, em que é aplicado o TFC e para fim de motivação, aplicações de conceitos importantes através do Cálculo.

Em suma, desejamos que este trabalho seja esclarecedor quanto a importância de seus resultados e motivador para a perpetuação do estudo dessa área e de suas aplicações. Sugerimos como continuidade, um estudo atrelando o Teorema Fundamental do Cálculo e Teorema de Fubini na física, estudando conceitos como deslocamento, velocidade e aceleração.

Referências

- [1] BRAGA, A. S. **Teorema de Green e aplicação**. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1540/1/Alcimar20de20Souza20Braga.pdf>. Acesso em: 02/10/2022.
- [2] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo, vol 1**. 5^a ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2015.
- [3] MEDEIROS, D. M. C.; COSTA, P. T. **Sólidos de revolução e o Cálculo, uma extensão do estudo do volume e da área**. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, vol 3. 3^a ed. Disponível em: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/solidos-de-revolucao>. Acesso em: 05/07/2022.
- [4] PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. **Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ / SR-1, 1997.
- [5] RIBEIRO, P. V. S. **Teorema Fundamental do Cálculo**. Trabalho de conclusão de curso. Bragança: 2019.
- [6] RIVERA, J. E. M. **Cálculo Diferencial e Integral I**. Rio de Janeiro, Petrópolis 2004.
- [7] SAMPAIO, **Integrais definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo**. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/calculo1-aula17.pdf>. Acesso em: 20/07/2022.
- [8] SILVA, R. F. **O teorema de Green e o Planímetro**. Trabalho de Conclusão de Curso. Bragança: 2018.
- [9] STEWART, J. **Cálculo, vol 1**. 7^a ed. São Paulo : Editora Cengage Learning, 2013.