



**Universidade Federal do Pará  
Campus Universitário de Castanhal  
Faculdade de Matemática  
Curso de Licenciatura em Matemática**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

---

**O Problema de Dirichlet para Equação  
de Laplace em um Retângulo**

---

**Afonso Barata Gonçalves**

Castanhal  
2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

---

**Licenciatura**

03/2019 – 04/2025

Submissão 26/04/2025

Defesa 02/04/2025

Versão Final 05/04/2025

Universidade Federal do Pará  
Campus Universitário de Castanhal  
Faculdade de Matemática  
Curso de Licenciatura em Matemática

**Afonso Barata Gonçalves**

[afonsobg27@gmail.com](mailto:afonsobg27@gmail.com)

Licenciando em Matemática  
*UFPA-Castanhal*

**Banca Examinadora**

**Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida**

Orientador

**Prof. Msc. Marcos Vinícius Orguen Gouvêa**

Avaliador interno

**Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal**

Avaliador interno

---

## Agradecimentos

A Deus criador de todas as coisas, por todo o seu amor e proteção e por me guiar durante todos os dias de minha vida e na realização deste trabalho. À minha mãe e meu falecido pai por me colocarem no mundo e me dado o prazer pelos estudos, às minhas irmãs Cláudia, Aline e Adriane por me darem apoio e incentivo na minha vida acadêmica. Ao meu orientador prof. Arthur pela inspiração de estudar e ensinar teorias matemáticas. À Prof. Carla pela indicação do tema deste TCC e por sua sagacidade em me estimular na construção deste trabalho. E a todos os professores e colegas que tornaram possível a minha caminhada até aqui.

*"Porque todo o que é nascido de Deus vence o mundo; e esta é a vitória que vence o mundo:  
a nossa fé."*

João 5:4

# Resumo

---

Este trabalho aborda o Problema de Dirichlet no retângulo, um dos problemas fundamentais da teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O objetivo principal é estudar a equação de Laplace em um domínio retangular e analisar o comportamento das soluções sob condições de contorno bem definidas. Para isso, utilizamos a técnica de separação de variáveis e a teoria das séries de Fourier, que desempenham um papel essencial na solução analítica do problema. Além do embasamento teórico, destacamos as aplicações do Problema de Dirichlet em áreas como física, engenharia e matemática aplicada, evidenciando sua relevância tanto no contexto acadêmico quanto em problemas do mundo real.

**Palavras-chaves:** Problema de Dirichlet; Equação de Laplace; Séries de Fourier; Equações Diferenciais Parciais.

# Abstract

---

This work addresses the Dirichlet Problem in the rectangle, one of the fundamental problems in the theory of Partial Differential Equations (PDEs). The main objective is to study the Laplace equation in a rectangular domain and analyze the behavior of solutions under well-defined boundary conditions. To achieve this, we employ the method of separation of variables and Fourier series theory, which play a crucial role in the analytical solution of the problem. In addition to the theoretical foundation, we highlight the applications of the Dirichlet Problem in fields such as physics, engineering, and applied mathematics, emphasizing its relevance in both academic contexts and real-world problems.

**Keywords:** Dirichlet Problem; Laplace Equation; Fourier Series; Partial Differential Equations.

---

## Lista de Figuras

4.1	O retângulo $\mathfrak{R} = (a, 0) \times (0, b)$ . . . . .	45
4.2	O problema de Dirichlet para o caso em que $f$ se anula em $y = 0, y = b$ e $x = 0$ .	45
4.3	Problema em que $w_1(x, 0) = w_1(a, y) = w_1(0, y) = 0, w_1(x, b) = h_1(x)$ para $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ . . . . .	56
4.4	Problema em que $w_2(a, y) = w_2(x, 0) = w_2(x, b) = 0, w_2(0, y) = h_2(y)$ para $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ . . . . .	57
4.5	Problema em que $w_3(0, y) = w_3(a, y) = w_3(x, b) = 0, w_3(x, 0) = h_3(x)$ para $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ . . . . .	58

---

## **Lista de Abreviações**

EDO Equação Diferencial Ordinária

EDP Equação Diferencial Parcial

TCC Trabalho de Conclusão de Curso

UFPA Universidade Federal do Pará

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos e Resultados Preliminares</b>	<b>14</b>
2.1	Funções harmônicas . . . . .	14
2.2	Séries de Fourier . . . . .	17
2.2.1	Funções periódicas . . . . .	17
2.2.2	Convergência uniforme . . . . .	19
2.2.3	Coefficientes de Fourier . . . . .	23
2.2.4	Série de Fourier . . . . .	25
2.2.5	Funções pares e ímpares para séries de Fourier . . . . .	26
2.3	Equações Diferenciais Parciais . . . . .	29
2.3.1	Linearidade e Superposição . . . . .	33
2.3.2	Condições de Contorno e Iniciais . . . . .	36
<b>3</b>	<b>O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace em um Retângulo</b>	<b>40</b>
3.1	Equação de Laplace . . . . .	40
3.2	O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace . . . . .	41
<b>4</b>	<b>O Problema de Dirichlet em um Retângulo</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>60</b>
	<b>Referências</b>	<b>61</b>

# 1

---

## Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é o de estudar o chamado **Problema de Dirichlet** em um retângulo e entender o comportamento das soluções da Equação de Laplace nesse contexto geométrico específico. vejamos a seguir como essa equação é aplicável em alguns casos segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2017).

Uma das equações diferenciais parciais mais importantes que ocorrem em matemática aplicada está associada ao nome de Laplace. Em duas dimensões, a equação é dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1)$$

E em três dimensões, a equação assume a forma

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (2)$$

Por exemplo, em um problema de calor a duas dimensões espaciais, a temperatura  $u(x, y, t)$  deve satisfazer a equação diferencial

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \quad (3)$$

onde  $\alpha$  é a difusividade térmica. Se existir um estado estacionário,  $u$  só depende de  $x$  e  $y$  e a derivada em relação a  $t$  desaparece; nesse caso, a Eq. (3) se reduz à Eq. (1). Analogamente, para a solução estado estacionário do problema de condução de calor tridimensional a temperatura deve satisfazer a equação de Laplace tridimensional. As Eq. (1) e (2) também ocorrem em outros ramos da física matemática. Na consideração de campos eletrostáticos a função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas deve satisfazer a Eq. (1) ou a Eq. (2), dependendo do número de dimensões espaciais envolvidas. Analogamente, a função potencial de uma partícula livre no espaço, sob a ação apenas de forças gravitacionais, satisfaz a mesma equação. Por essa razão, a equação de Laplace também é conhecida como a **equação do potencial**. Outro exemplo aparece no estudo do movimento irrotacional em estado estacionário (independente do tempo) de um fluido bidimensional incompressível e não viscoso. Esse estudo está centrado em duas funções, conhecidas como função potencial de velocidade e função de

fluxo, ambas das quais satisfazem a Eq. (1). Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da função de deformação, que também satisfaz a Eq. (1).

Desta forma, o **Problema de Dirichlet** emerge como uma questão central na teoria das equações diferenciais parciais. Este problema, que foi nomeado em homenagem ao matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, tem desafiado mentes brilhantes por gerações, proporcionando um terreno fértil para a exploração das propriedades das funções harmônicas em domínios complexos.

O foco deste TCC é a investigação do **Problema de Dirichlet** especificamente em um retângulo, um cenário que, apesar de sua aparente simplicidade, revela uma riqueza surpreendente de fenômenos matemáticos. Ao delimitar nosso estudo a este domínio, somos capazes de aprofundar nossa compreensão das soluções harmônicas e suas implicações para uma variedade de disciplinas, incluindo física, engenharia e ciências computacionais.

Nesta introdução, exploraremos as origens históricas do Problema de Dirichlet, delineando suas aplicações práticas e relevância contemporânea. Posteriormente, iremos delinear a estrutura deste trabalho, apresentando os principais tópicos a serem abordados e os métodos analíticos a serem empregados. Ao final, será evidente que a resolução do Problema de Dirichlet no retângulo não apenas ressoa com a beleza intrínseca da matemática pura, mas também tem implicações profundas e tangíveis na compreensão e solução de problemas do mundo real.

Neste trabalho de conclusão de curso, discutiremos o **Problema de Dirichlet** em um caso bem simples:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u &= f & \text{on } \partial\Omega,\end{aligned}$$

onde  $\Omega$  é um domínio do  $\mathbb{R}^2$ , um retângulo, e  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua conhecida.

Quando olhamos o enunciado teórico acima, sentimos, a princípio, que caminharemos para cálculos simples até solucionar o problema, entretanto, precisa-se de conhecimentos apurados nos estudos de matemática superior pura. Diante disso, fundamentamos nossa ideia de que os métodos e processos abordados nos tópicos desse conteúdo mesclam a matemática pura à aplicada. Mostram que o desenvolvimento de ferramentas resultante desse estudo são importnatíssimos para a própria matemática e também para a física.

Ao escolhermos tal problema como tema central deste Trabalho de Conclusão de Curso, tivemos em mente dois motivos básicos que deve ser o fio condutor do estudo de

qualquer tópico relevante em Matemática:

- (i) Primeiramente, tal problema é oriundo de várias questões físicas, tais como Teoria do Potencial, Escoamento Estacionário de Fluidos, Elasticidade Não-Linear, etc., além de surgir em várias fenômenos geométricos entre os quais destacamos as Superfícies Mínimas.
- (ii) Em segundo lugar, a busca de soluções levou à criação e ao desenvolvimento de várias áreas centrais da Matemática, ou seja, o **Problema de Dirichlet** desempenha papel proeminente tanto na Matemática Pura como em suas aplicações.

Neste ponto, é bastante instrutivo as palavras do Prof. Djairo:

Por volta do meio do século passado, ele [o **Problema de Dirichlet**] começa a surgir ligado com outras questões de Matemática, como, por exemplo, nos trabalhos de Riemann sobre integrais elípticas. Sua importância foi crescendo à medida que as aplicações aumentavam, O interesse dos matemáticos por resolvê-los foi aumentando à proporção que os métodos criados só se mostravam satisfatórios em casos particulares, ou, o que é mais sério, revolviam-se incorretos à luz do rigor que começava a dominar a Análise, na segunda metade do século XIX. Essencialmente cada método desenvolvido para resolver o problema, mesmo em casos particulares, originou um campo da Matemática, assim é que nasceram a Teoria das Séries de Fourier, o Cálculo das Variações com integrais múltiplas, a Teoria das Equações Integrais do tipo de Fredholm, e partes da Análise Funcional.

A história do **Problema de Dirichlet** é um exemplo de como um problema pode desempenhar um papel importante na evolução da Matemática, e, se um bom problema, como pode impulsionar esse desenvolvimento num caminho profícuo. essa proficiência está demonstrada pela enorme aplicabilidade da Matemática criada aos vários ramos do conhecimento humano. É importante compreender que cada um dos ramos criados passou a ter uma vida independente e, ao gerar novos problemas, teve mais desenvolvimento, e ao produzir novos resultados, passou a ter novas aplicações na Matemática e fora dela. Eis que o **Problema de Dirichlet** nos ensina que não existem Matemática Aplicada e Matemática Pura como coisas isoladas. Elas se interpenetram, ou seja, uma precisa da outra. (FIGUEIREDO, 2014)

As palavras do autor ressoam a relevância histórica do **Problema de Dirichlet**, que, no século XIX, impulsionou o desenvolvimento de vários ramos da Matemática. E essa evolução com base em problemas como esse demonstra a interdependência entre Matemática Pura e Aplicada. Esse processo exemplifica como questões fundamentais podem enriquecer o conhecimento matemático e outras áreas do saber humano. Para dar seguimento a este trabalho, iniciaremos com os Conceitos Preliminares que caracterizarão as funções harmônicas, Séries de Fourier com destaque para o **Teste de M Weierstras** e o **Teorema de Fourier** que concluem a convergência das funções, Equações Diferenciais Parciais e o Prín-

cipio do Máximo que concluirá a unicidade da solução encontrada no decorrer da pesquisa. Após essas mostrações teóricas será discutido a parte central deste trabalho, o **Problema de Dirichlet no Retângulo**, que através da Equação de Laplace e com o método de Separação de Variáveis, será solucionado.

## Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, desenvolveremos a base teórica necessária para a formulação e solução do Problema discutido. Para isso, começaremos com o estudo das funções harmônicas no  $\mathbb{R}^n$ , com destaque as suas propriedades e caracterização da equação de Laplace nesse domínio. Em seguida, introduziremos as Séries de Fourier, exploraremos as propriedades fundamentais dessas séries, enfatizaremos sua utilidade na representação de funções periódicas e na decomposição de soluções de equações diferenciais parciais.

Por fim, abordaremos a teoria das equações diferenciais parciais, com foco na equação de Laplace e sua relação com o Problema de Dirichlet. Bem como uma ferramenta poderosa auxiliar para solucionar este problema, a superposição. E também as condições de contorno e iniciais, e alguns exemplos de problemas de contorno semelhantes ao que será discutido neste trabalho.

### 2.1 Funções harmônicas

As funções harmônicas desempenham um papel central na teoria das equações diferenciais parciais, especialmente na resolução do problema de Dirichlet. Definidas como funções que satisfazem a equação de Laplace,  $\Delta u = 0$ , essas funções aparecem naturalmente em diversas áreas da matemática e da física, modelando fenômenos como condução de calor, eletrostática e escoamento de fluidos.

No contexto do problema de Dirichlet em um retângulo, as funções harmônicas representam as soluções que atendem a condições de contorno previamente estabelecidas. A formulação e análise dessas soluções fazem uso intensivo de conceitos como séries de Fourier e o princípio do máximo, garantindo unicidade e existência das soluções. Nos próximos tópicos, exploraremos detalhadamente suas propriedades e aplicações. Para iniciarmos os conceitos norteadores deste trabalho, vamos caracterizá-las no espaço do  $\mathbb{R}^N$ .

Então, comecemos com um pouco de notação. Um subconjunto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , é dito um domínio ou região se ele for aberto e conexo.

Para  $k \geq 0$ , inteiro,  $C^k(\Omega)$  designa o conjunto das funções reais  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais contínuas e limitadas até ordem  $k$  em  $\Omega$ .

O conjunto das funções reais e contínuas  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  será designado por  $C^0(\bar{\Omega})$ , onde  $\bar{\Omega}$  é o fecho ou aderência de  $\Omega$ .

Para  $k \geq 1$ , inteiro,  $C^k(\bar{\Omega})$  é o conjunto das funções reais  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que admitem extensões diferenciáveis até ordem  $k$  para um aberto  $U$  contendo  $\bar{\Omega}$ . De maneira mais precisa  $u \in C^k(\bar{\Omega})$ , se existir um aberto  $U \supset \bar{\Omega}$  e uma função  $v \in C^k(U)$  tal que  $v(x) = u(x)$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$ .

O operador

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

é chamado Laplaciano ou operador de Laplace em  $\mathbb{R}^N$ .

Para  $u \in C^1(\Omega)$ ,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

designa o gradiente de  $u$  (algumas vezes representado por  $grad u$ ), que é uma função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^N$ , ou seja um campo vetorial em  $\Omega$

$$\nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto \nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_N)$ .

Para um campo vetorial  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ , que a cada  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  associa  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x)) \in \mathbb{R}^N$ ,  $F_j \in C^1(\Omega)$ , para  $j = 1, \dots, N$ , define-se o divergente de  $F$ , designado por  $div F$ , por

$$div F(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

que é uma função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ . Verifica-se facilmente que

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

Nesta seção inicial, a menos que se diga algo contrário,  $\Omega$  representará um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$ .

Uma função contínua  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita harmônica se ela satisfizer à equação de Laplace

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

Exemplos de funções harmônicas:

1.  $u(x) = \sum_{j=1}^N a_j x_j + b$ , onde  $a_j, 1 \leq j \leq N$ , e  $b$  são constantes e  $x = (x_1, \dots, x_N)$  é uma função harmônica em  $\mathbb{R}^N$ .
2.  $u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$  é uma função harmônica em  $\mathbb{R}^2$ .
3. Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função analítica complexa  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , então suas partes real e imaginária, respectivamente,  $u$  e  $v$  são funções harmônicas em  $\Omega$ . Isto decorre das equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

De fato, das equações (1.2) decorre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

em vista do Teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{e assim}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

4. Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . se  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  for harmônica em  $I$ , isto é,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad \text{em } I,$$

então

$$u(x) = ax + b,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.

## 2.2 Séries de Fourier

O desenvolvimento das Séries de Fourier e sua aplicação na resolução de problemas de contorno, é um dos tópicos mais importantes para solução do problema abordado neste trabalho. Inicialmente, nesta seção, serão apresentados os conceitos fundamentais das séries trigonométricas e sua convergência, para estabelecer a base teórica necessária e compreender a decomposição de funções em termos de senos e cossenos. Em seguida, discutiremos a formulação do Problema de Dirichlet e as condições de contorno envolvidas, com a importância das autofunções do operador de Laplace na solução do problema. A exposição culminará com a aplicação das Séries de Fourier para determinar soluções explícitas, evidenciando a relevância desse método na análise de equações diferenciais parciais. Ressaltamos que esta seção baseia-se em (FIGUEIREDO, 2014).

### 2.2.1 Funções periódicas

**Definição 2.2.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica de período  $T$  se  $f(x+T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Exemplos

1. A função  $\text{sen}(x)$  é periódica de período  $2\pi$ .
2. A função  $f(x) = x - [x]$ , onde  $[x]$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ , é periódica de período 1.

Se  $T$  é um período da função  $f$ , então  $2T$  também é um período, pois

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x).$$

3. O período fundamental  $T$  da função  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  pode ser determinado do seguinte modo. Devemos ter

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi(x + T)}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Utilizando a fórmula de soma de ângulos para o seno, temos

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.2.1)$$

para  $x = \frac{L}{2n}$  obtemos,

$$\text{sen}\left(\pi + \frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right).$$

isso implica que

$$\cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1. \quad (2.2.2)$$

e, daí, utilizando a identidade trigonométrica  $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ , obtemos

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 0.$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de  $T$  que satisfaça as equações (2.2.1) e (2.2.2) simultaneamente, obtemos:

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi.$$

Isto é, o período fundamental de  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é dado por

$$T = \frac{2L}{n}.$$

O período fundamental de  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  também é  $\frac{2L}{n}$ . Por quê? Isso ocorre porque o cosseno também possui a mesma frequência angular que o seno, e a periodicidade é determinada pelo fator  $\frac{n\pi}{L}$ .

### 2.2.2 Convergência uniforme

**Definição 2.2.2.** Uma série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge se a sucessão das somas parciais, também chamadas de reduzidas, converge. Lembremos que a sucessão das reduzidas é aquela cujo termo geral é dado por,

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j \quad (\text{reduzida de ordem } n).$$

lembremos que as séries

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ com } \alpha > 1; \quad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n, \text{ com } |\lambda| < 1$$

,

convergem. A segunda série é chamada de série geométrica, e sua soma, que é definida como o limite da sucessão das reduzidas, é

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Por outro lado, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , com  $\alpha \leq 1$ , não converge, e, então, diz-se que ela diverge. Para  $\alpha = 1$ , essa série é conhecida como a *série harmônica*.

**Definição 2.2.3.** Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais definidas em um subconjunto  $I$ , convergirá pontualmente se, para cada  $x_0 \in I$  fixado, a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convergir. Isso equivale a dizer que, dados  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro  $N$ , dependendo de  $\varepsilon$  e de  $x_0$ , tal que,

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \varepsilon$$

para todos  $m < n$ , tais que  $n \geq N$ .

**Definição 2.2.4.** Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convergirá uniformemente se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir um inteiro  $N$ , dependendo apenas de  $\varepsilon$  (e não de  $x$ ), tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{para todos } m > n \geq N.$$

### Exemplos

1. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n(x) = \frac{x}{n^2}$  e  $x \in [0, 1]$ , converge uniformemente. De fato, temos

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2}.$$

Como a série  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$  converge (é uma série  $p$ -admissível com  $p = 2 > 1$ ), a convergência uniforme segue da desigualdade acima e da independência de  $x$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos determinar um inteiro  $N$ , independente de  $x$  e dependente apenas de  $\varepsilon$ , tal que

$$\sum_{j=n}^m \frac{1}{j^2} < \varepsilon, \quad \text{para } m > n \geq N.$$

2. A série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde

$$u_1(x) = x, \quad u_n(x) = x^n - x^{n-1}, \quad n > 1,$$

é uma função definida para  $0 \leq x \leq 1$  e converge pontualmente para cada  $x \in [0, 1]$ . De fato, a reduzida de ordem  $n$ ,  $U_n(x) = x^n$ , converge para 0 se  $0 \leq x < 1$ , e para 1 se  $x = 1$ .

Tal série não converge uniformemente, pois, dados  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  e  $N$  inteiro, tomamos

$$x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Nesse caso, para a soma parcial  $\sum_{j=N}^m u_j(x)$ , temos:

$$\sum_{j=N}^m u_j(x) = x^m - x^{N-1}.$$

Dai,  $|x^m - x^{N-1}| = |(2\varepsilon)^{\frac{m}{N-1}} - 2\varepsilon|$ . Logo, se  $m$  for suficientemente grande,  $(2\varepsilon)^{\frac{m}{N-1}} < \varepsilon$ , e obtemos que

$$\left| \sum_{j=N}^m u_j(x) \right| > \varepsilon$$

para  $x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{N-1}}$ .

Na verificação de que a série do Exemplo 1 acima converge uniformemente, utilizamos o artifício de majorar a série de funções por uma série numérica convergente. Essa ideia está por trás do chamado *teste M de Weierstrass*, que veremos a seguir.

Esse critério não só assegura a convergência uniforme, mas também a convergência absoluta. Uma série  $\sum u_n(x)$  convergirá absolutamente se a série  $\sum |u_n(x)|$  dos valores absolutos convergir.

**Teorema 2.2.1.** (Teste M de Weierstrass) *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uma série de funções  $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um subconjunto  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Suponha que existam constantes  $M_n \geq 0$  tais que:*

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I,$$

*e que a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  convirja. Então, a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniforme e absolutamente em  $I$ .*

### Demonstração:

Vamos mostrar, em primeiro lugar, que a série converge pontualmente em  $I$ : de fato, como a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$l \geq n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} M_k < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Logo, para qualquer  $x \in I$ , temos:

$$\left| \sum_{k=n}^l u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^l |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^l M_k < \varepsilon, \quad (2.2.3)$$

o que prova que a série  $\sum u_n(x)$  converge pontualmente pelo critério de Cauchy.

Vamos então denotar por  $u(x)$  a soma da série, ou seja

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad x \in I.$$

Para cada  $x \in I$  fixo, tomando o limite (já sabemos que existe!) em (2.2.3) quando  $l \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} M_k \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N \quad (2.2.4)$$

mas então, quaisquer que sejam  $x \in I$  com  $n \geq N$ , usando (2.2.4), temos

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k < \varepsilon,$$

isso conclui que  $u(x)$  é bem definida como a soma uniforme e absoluta da série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ .

**Proposição 2.2.1.** *Suponhamos que as funções  $u_n$  sejam contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então, a função  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  também é contínua.*

**Proposição 2.2.2.** *Suponhamos que as funções  $u_n$  sejam integráveis em um intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

**Proposição 2.2.3.** *Suponhamos que as funções  $u_n(x)$  definidas em um intervalo  $I$  sejam continuamente deriváveis e que a série das derivadas  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado  $x_0 \in I$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convirja. Então*

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

### 2.2.3 Coeficientes de Fourier

Se uma função  $f(x)$  puder ser expressa como:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.2.5)$$

é de se esperar que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  estejam intimamente ligados à função  $f$ .

Que expressões possuem esses coeficientes em termos da função  $f$ ? Para determiná-las, vamos supor que a igualdade em (2.2.5) seja válida e, além disso, que a série em (2.2.5) convirja uniformemente.

Observe que, como consequência da Proposição 2.2.1, a função  $f$  deve ser contínua (e, portanto, integrável).

Além disso, a função  $f(x)$  deve ser periódica de período  $2L$ , pois o período fundamental de  $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  é  $2L$ , e  $2L$  é também período para as demais funções seno e cosseno que aparecem na série. Assim, usando a Proposição 2.2.2, podemos integrar ambos os lados de (2.2.5) para obter

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

e, daí, temos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (2.2.6)$$

pois

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (2.2.7)$$

Para obter os demais coeficientes, exploramos a mesma ideia e usamos as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1, \quad (2.2.8)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Para demonstrar as igualdades (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.10), podemos utilizar as identidades trigonométricas que expressam produtos de senos, ou de cossenos, ou de seno por cosseno, como soma de senos ou de cossenos.

Agora, multiplicando (2.2.5) por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ , para  $m \geq 1$  fixado, e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m L. \quad (2.2.11)$$

De modo semelhante, multiplicando (2.2.5) por  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m L. \quad (2.2.12)$$

Finalmente, a partir de (2.2.6), (2.2.11) e (2.2.12), obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (2.2.13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (2.2.14)$$

Com isso, podemos apreciar a introdução do fator  $\frac{1}{2}$  antes de  $a_0$  em (2.2.5), pois, dessa forma, temos uma única fórmula válida para todos os  $a_n$ .

Agora estamos em condições de dar uma boa definição.

**Definição 2.2.5.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular,

$$\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty.$$

Os números  $a_n$ , para  $n \geq 0$ , e  $b_n$ , para  $n \geq 1$ , dados em (2.2.13) e (2.2.14), são definidos como os coeficientes de Fourier da função  $f$ . A exigência de integrabilidade e integrabilidade absoluta de  $f$  é necessária para que as expressões (2.2.13) e (2.2.14) façam sentido.

Observe que

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx.$$

### 2.2.4 Série de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier pelas expressões (2.2.24) e (2.2.25) da Seção 2.2.3. Assim, podemos escrever:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.2.15)$$

e isso significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de  $f$ .

Uma questão natural surge imediatamente: que relação há entre  $f$  e sua série de Fourier? Seria bom se fosse uma igualdade! Infelizmente, isso não ocorre sempre. Algo mais grave pode acontecer: a série de Fourier pode até divergir.

A seguir, estudaremos condições suficientes para que a função  $f$  seja igual à sua série de Fourier.

**Definição 2.2.6.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será chamada de seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

É claro que toda função contínua é seccionalmente contínua. A função  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em  $x = 0$  é de segunda

espécie. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie; acontece, porém, que, no intervalo  $(0, 1)$ , há um número infinito de tais descontinuidades.

**Teorema 2.2.2.** (Teorema de Fourier) *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$ , dada por*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.2.16)$$

converge, em cada ponto  $x$ , para

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

isto é,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em FIGUEIREDO (2018).

## 2.2.5 Funções pares e ímpares para séries de Fourier

**Definição 2.2.7.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **par** se

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que o gráfico da função  $f$  é simétrico com relação ao eixo  $y$ .

**Definição 2.2.8.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **ímpar** se

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que o gráfico da função  $f$  é simétrico com relação à origem.

### Exemplos

1. As funções  $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $f(x) = x^{2n}$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , são funções pares.
2. As funções  $f(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e  $f(x) = x^{2n-1}$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , são funções ímpares.

**Proposição 2.2.4.**

- i.* A soma de duas funções pares é uma função par.
- ii.* A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.
- iii.* O produto de duas funções pares é uma função par.
- iv.* O produto de duas funções ímpares é uma função par.
- v.* O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

**Demonstração de (iv):** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar. Então,

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Sabemos que  $f(-x) = f(x)$  (pois  $f$  é par) e  $g(-x) = -g(x)$  (pois  $g$  é ímpar). Logo:

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(fg)(x).$$

Portanto,  $fg$  é uma função ímpar.

Outro fato importante que será utilizado será exposto a seguir.

**Proposição 2.2.5.**

- (i) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

- (ii) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

**Demonstração de (i).** Basta observar que

$$\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f dx \quad (2.2.17)$$

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_L^0 f(-y) dy = \int_0^L f(y) dy \quad (2.2.18)$$

onde fizemos a mudança de variável  $y = x$ , para obter a segunda integral em (2.2.18), e usamos o fato de que  $f$  é par para obter a terceira integral. De modo análogo se demonstra (ii).

Agora aplicamos as duas proposições anteriores ao cálculo da série de Fourier de funções pares e ímpares.

(a) Se  $f$  for uma função par, periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = 0,$$

pois, em virtude da Proposição 2.2.4, a função  $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é par e a função  $f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  é ímpar, e os valores dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  acima são obtidos usando-se a Proposição 2.2.5. Portanto, a série de Fourier de uma função par é uma série de cossenos.

(b) Se  $f$  for uma função ímpar, periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então

$$a_n = 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

usando as Proposições 2.2.4 e 2.2.5 como fizemos no caso de  $f$  par, em (a) acima. Assim, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

## 2.3 Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais parciais (EDPs) são fundamentais para o estudo de modelagem matemática de fenômenos naturais, engenharia e ciências aplicadas. Diferentemente das equações diferenciais ordinárias (EDOs), que envolvem derivadas de funções de uma única variável, as EDPs englobam derivadas parciais de funções de múltiplas variáveis, permitindo descrever fenômenos como a difusão do calor, propagação de ondas e dinâmica dos fluidos.

Historicamente, as EDPs começaram a ser formalmente estudadas no século XVIII, impulsionadas pelo desenvolvimento da física matemática. Um marco importante foi a equação da onda, derivada por Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) no contexto da teoria das cordas vibrantes. Pouco depois, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) aprofundou os estudos sobre vibrações mecânicas, enquanto Pierre-Simon Laplace (1749–1827) formulou sua famosa equação, essencial para a teoria do potencial. No século XIX, Joseph Fourier (1768–1830) revolucionou a análise das EDPs com sua teoria da decomposição de funções em séries trigonométricas, fornecendo uma ferramenta poderosa para resolver a equação do calor. Os conceitos teóricos a seguir baseiam-se no livro (IÓRIO, 2018).

Dessa forma, definamos o conceito desse tipo de equações.

**Definição 2.3.1.** Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$ , e derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ . De maneira mais precisa, uma EDP em  $n$  variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma equação da forma

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que queremos determinar. É claro que, com uma definição tão geral, existem EDPs absurdas, como por exemplo  $\exp(u_x + u_y) = 0$ .

A classificação de EDPs segundo ordem e linearidade é semelhante à classificação das equações diferenciais ordinárias (EDOs). A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação; por exemplo, a ordem da equação (1.1) é  $k$  se  $F$ , como função de alguma das derivadas de ordem  $k$ , é não constante. Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em  $u$  e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário, a EDP é dita não linear. A forma mais geral de uma EDP linear de primeira

ordem é

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \quad (2.3.1)$$

onde algum dos coeficientes  $a_j$  não é identicamente nulo. Para equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (2.3.2)$$

onde algum dos coeficientes  $a_{ij}$  não é identicamente nulo. No caso de duas variáveis independentes, as equações (1.3.1) e (1.3.2) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u + D(x, y) = 0 \quad (2.3.3)$$

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u + G(x, y) = 0. \quad (2.3.4)$$

**Definição 2.3.2** Dizemos que uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a equação (2.3.3) é homogênea se e somente se a função  $D(x, y)$  é identicamente nula e (2.3.4) é homogênea se e somente se  $G(x, y) = 0$ . Observe que a função identicamente nula é sempre solução de qualquer EDP linear homogênea.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem determina, em muitos casos, propriedades das soluções; essa é a chamada parte principal da EDP. Por exemplo, as partes principais das equações (2.3.2) e (2.3.3) são, respectivamente,

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y \quad (2.3.5)$$

e

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} \quad (2.3.6)$$

Dentre as equações não lineares, as que têm parte principal linear são chamadas *semilineares*. Por exemplo, uma EDP de primeira ordem semilinear com três variáveis independentes  $x, y, z$  é da forma

$$A(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = F(x, y, z, u). \quad (2.3.7)$$

A forma mais geral de uma EDP semilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u = f(x, u, D_1 u, \dots, D_n u). \quad (2.3.8)$$

Vejam os alguns exemplos.

1. A equação

$$xu_x - yu_y = \sin(xy) \quad (3.3.9)$$

é uma EDP linear não homogênea de primeira ordem.

2. A equação

$$U_t = U_{xxx} + u u_x \quad (2.3.10)$$

é semilinear de terceira ordem. Essa equação é conhecida como KdV (uma abreviação de Korteweg e deVries).

3. Uma equação mais simples é a equação de Burger com viscosidade

$$\partial_t u + u \partial_x u = v \partial_x^2 u, \quad (2.3.11)$$

onde  $v$  é constante, que é também semilinear, mas de segunda ordem.

4. Outro exemplo de EDP semilinear de segunda ordem é a equação de *Sine-Gordon*,

$$U_{tt} - U_{xx} + s \operatorname{sen} u = 0. \quad (2.3.12)$$

5. A equação de Poisson,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y), \quad (2.3.13)$$

é uma equação linear de segunda ordem não homogênea se a função  $h$  não for identicamente nula. No caso em que  $h \equiv 0$ , a equação é homogênea e chamada de *equação de Laplace*. A equação de Poisson está associada a fenômenos físicos estacionários, ou seja, independentes do tempo, como, por exemplo, potenciais eletrostáticos gerados por distribuições fixas de carga (veja PURCELL (1965)).

6. Outra equação importante é a equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.3.14)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , e  $\alpha^2$  é uma constante. Em dimensões maiores, a equação de calor fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad (2.3.15)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ , e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$  (nas variáveis espaciais  $x_1, \dots, x_n$ ). A equação (2.3.15) é de segunda ordem, linear e homogênea.

7. A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.3.16)$$

é também linear, homogênea e de segunda ordem. A variável  $t > 0$  representa o tempo,  $x \in \mathbb{R}$  é a variável espacial e  $c > 0$  é uma constante (velocidade de propagação da onda). A equação de onda em dimensões maiores fica

$$u_{tt} = C^2 \Delta u,$$

onde

$$u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (2.3.17)$$

e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3.1 Linearidade e Superposição

No estudo das equações diferenciais parciais (EDPs), a linearidade é uma propriedade fundamental que simplifica a análise e resolução dessas equações. As considerações que faremos a seguir são válidas para EDPs lineares de qualquer ordem, mas, para fixar as ideias, vamos considerar uma EDP de primeira ou segunda ordem com  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$ . Estamos considerando então uma equação do tipo:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_iD_ju + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_ju + c(x)u + d(x) = 0. \quad (2.3.18)$$

Denotaremos por  $k$  a ordem da equação,  $k = 1$  ou  $k = 2$ . Note que, se  $k = 1$ , então  $a_{ij} \neq 0$  quaisquer que sejam  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  e existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tal que  $b_j \neq 0$ .

Podemos reescrever a equação (2.3.18) na forma:

$$Lu = f, \quad (2.3.19)$$

onde  $f(x) = -d(x)$  e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_iD_ju(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_ju(x) + c(x)u(x). \quad (2.3.20)$$

A cada função  $u$  (suficientemente diferenciável) corresponde uma única função  $Lu$ ; dessa maneira, definimos um operador ou transformação  $L$ . De forma mais precisa, seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e suponha que as funções  $a_{ij}, b_j$  e  $c$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , são contínuas em  $\Omega$  e tomam valores reais. Podemos então definir:

$$\begin{aligned} L : C^k(\Omega) &\rightarrow C(\Omega) \\ u &\mapsto Lu \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

onde  $Lu$  é dado pela fórmula (2.3.20), e  $C^k(\Omega)$  (respectivamente,  $C(\Omega)$ ) é o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas).

Denotaremos por  $C^k(\Omega)$  (respectivamente,  $C(\Omega)$ ) o conjunto das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  que são  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente, contínuas).

A terminologia operador (ou transformação) é usada para enfatizar que a função  $L$  está definida entre espaços de funções, ou seja,  $L$  leva uma função  $u$  (com determinadas propriedades) em outra função  $Lu$ . O operador  $L$  é um exemplo de um operador diferencial

parcial. O fato de que a Equação (2.3.18) é linear implica que o operador definido por (2.3.20) é um operador linear, ou seja:

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv, \quad (2.3.22)$$

quaisquer que sejam  $u, v$  no domínio de  $L$  e qualquer que seja o escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A propriedade (2.3.22) pode ser deduzida facilmente da expressão (2.3.20).

Como no caso de EDOs, podemos associar à EDP não homogênea (2.3.19) a EDP linear homogênea:

$$Lu = 0, \quad (2.3.23)$$

que é chamada a equação homogênea associada à equação (2.3.19). Usando a linearidade do operador  $L$  e o princípio de indução, é fácil ver que qualquer combinação linear de soluções da equação (2.3.23) é também solução. Ou seja, se  $u_1, \dots, u_m$  satisfazem (2.3.23) e se  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  são escalares, então:

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$$

é também solução de (2.3.23). Em linguagem de álgebra linear,  $L$  é um operador linear definido em um espaço vetorial  $V$  de funções ( $V = C^*(\Omega)$ ), e as soluções  $u$  e  $V$  da equação (2.3.23) formam um subespaço de  $V$ . Esse resultado é conhecido como o **princípio da superposição** (na sua forma finita).

Ao contrário do que acontece com EDOs lineares homogêneos, o espaço de soluções da equação (2.3.23) pode ter dimensão infinita. Além disso, existem EDPs lineares de primeira ordem que não têm solução! (O primeiro exemplo de tal equação com coeficientes complexos foi dado por H. Lewy em 1957: ele provou que existe uma função  $f$  tal que a equação

$$u_x + i\bar{u}_y - 2i(x + iy)u_t = f$$

não admite solução.)

**Proposição 2.3.1** (Princípio da Superposição.) *Seja  $L$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $k$  cujos coeficientes estão definidos em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$  seja um conjunto de funções da classe  $C^k$  em  $\Omega$  satisfazendo a EDP linear homogênea (2.3.23), e que  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$  seja uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \quad (2.3.24)$$

*é convergente e  $k$ -vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ . Então  $u$  satisfaz (2.3.23).*

**Demonstração:** Enunciamos a proposição no caso geral, mas demonstraremos no caso em que  $k = 1$  ou  $k = 2$ , ou seja, quando  $L$  é definido por (2.3.20). Nesse caso, por hipótese, quaisquer que sejam  $x \in \Omega$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , temos,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x), \\ D_i u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x), \\ D_i D_j u(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x), \end{aligned}$$

e essas séries convergem. Portanto, para todo  $x \in \Omega$ ,

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x),$$

o que implica

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x).$$

e ainda

$$(Lu)(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right]$$

Como  $u_m(x)$  satisfaz (2.3.23), temos portanto que,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0,$$

o que demonstra a (Proposição 2.3.1) no caso em que  $k = 1$  ou  $k = 2$ .

### 2.3.2 Condições de Contorno e Iniciais

Existem algumas diferenças importantes para a unicidade de solução entre EDOs e EDPS. No caso de EDPs, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . É natural substituir os extremos do intervalo (caso  $n = 1$ ) pelo bordo (ou fronteira)  $\partial\Omega$  da região  $\Omega$ .

**Definição 2.3.3.** (Condições de contorno) São condições impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno), temos um problema de valores de contorno ou, simplesmente, problema de contorno.

Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (ou seja, independentes do tempo). Encontraremos muitas vezes condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.3.25)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas,  $f$  é uma função dada em  $\partial\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$  é a derivada de  $u$  na direção normal a  $\partial\Omega$ .

No caso em que  $\beta = 0$ , a condição (1.3.28) é conhecida como condição de Dirichlet; no caso em que  $\alpha = 0$ , temos uma condição de Neumann.

Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de EDOs) para EDPs? Como no caso de EDPs temos mais de uma variável independente (por exemplo,  $x$  e  $t$ ), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo,  $t = 0$ ) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis. Por exemplo, para  $t = 0$  podemos ter:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas.

Observe que, no caso  $n = 2$  com variáveis  $x$  e  $t$ , isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva  $t = 0$ . Analogamente, no caso  $n = 3$  com variáveis  $x$ ,  $y$  e  $t$ , fixar  $t = 0$  significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície  $t = 0$ .

Podemos então generalizar o conceito de condições iniciais, assim, consideremos a

definição a seguir.

**Definição 2.3.4.** (Condições iniciais) São condições impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva (se  $n = 2$ ) ou superfície (se  $n = 3$ ) inicial. O problema correspondente é chamado de problema de Cauchy ou de valor inicial.

Em problemas físicos dependentes do tempo, como é o caso de fenômenos de difusão e de fenômenos oscilatórios, é muitas vezes conveniente separar a variável temporal  $t$  das variáveis espaciais  $x, y, z$ . Com frequência, os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem  $k - 1$  (supondo que a EDP é de ordem  $k$  em  $t$ ) são descritos no instante  $t = 0$  em função de  $x, y, z$  (condição inicial). Simultaneamente, são impostas condições de contorno, para todo  $t \geq 0$  em relação às variáveis espaciais. Tais problemas são chamados de problemas mistos.

Os conceitos acima ficarão talvez mais claros com a descrição dos problemas a seguir.

- O problema

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, p(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

Onde  $p, f \in C(\mathbb{R})$  são funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a EDP é de primeira ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial  $y = p(x)$  no plano.

- O problema para a equação de onda em um intervalo finito

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty),$$

com as condições de contorno

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \geq 0,$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, l],$$

também pode ser considerado como misto ou como um problema de contorno na região ilimitada  $[0, l] \times [0, \infty)$ .

Observe que, como a equação de onda é de segunda ordem em relação à variável temporal  $t$ , precisamos de duas condições iniciais. Para que exista solução, é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade

$$f(0) = 0 = f(l).$$

- Outro problema envolvendo a equação de onda é

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

onde  $n = 1, 2$  ou  $3$  e  $\Delta$  é o laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ . Este Problema é um problema de Cauchy e tem uma única solução.

- Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto. Então,

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f, \tag{2.3.26}$$

é um problema de contorno e, de fato, um problema de Dirichlet. Estudaremos este problema no próximo capítulo, no caso em que a região  $\Omega$  é delimitada por um retângulo. E mostraremos que este problema tem uma única solução.

- Outro problema de contorno para a equação de Laplace é

$$\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \tag{2.3.27}$$

onde  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ , que é um problema de Neumann. Observe que nesse caso não tem solução única: se  $u$  for uma solução, então  $u + c$  também será uma solução para qualquer constante  $c$ .

Assim, estudaremos o problema em que  $\Omega$  é uma região retangular, condição de Dirichlet, considerando três fatos:

- (a) Existência de solução;
- (b) Unicidade de solução;

(c) Dependência contínua com relação ao dado de fronteira (isto será esclarecido mais adiante).

Um problema de Equações Diferenciais Parciais que satisfaça às três exigências (a), (b) e (c), acima, é chamado bem posto no sentido de Hadamard. Na maioria dos casos o Problema de Dirichlet é bem posto, sendo que a dificuldade mais séria, como veremos futuramente, está relacionada com o item (a).

Para discutir a existência, é preciso especificar não somente a classe de funções onde procuramos solução, mas também em que sentido as condições de contorno e/ou iniciais são satisfeitas. Uma vez obtida a existência, o significado da unicidade é claro: deseja-se saber se a solução é única dentro da classe especificada.

A discussão da dependência da solução nos dados iniciais e/ou de contorno é muito importante. Devemos lembrar que os dados de um problema físico são dados experimentais que necessariamente contêm erros de medida; é, portanto, natural perguntar se pequenas variações nos dados acarretam pequenas variações na solução: se este for o caso, diremos que a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou de contorno. É claro que o significado de "pequenas variações" depende do problema em questão.

---

<sup>0</sup>Obs: alguns entendimentos dessa seção foram baseados em (NUNES, 2019).

# 3

## O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace em um Retângulo

O Problema de Dirichlet consiste em determinar uma função harmônica em uma região delimitada do espaço, a partir de valores prescritos na fronteira dessa região. Este problema é fundamental na teoria das equações diferenciais parciais e tem aplicações em diversas áreas da física e engenharia, como eletrostática, mecânica dos fluidos e transmissão de calor.

Neste capítulo, estudaremos o Problema de Dirichlet no contexto da equação de Laplace aplicada a um domínio retangular. Inicialmente, revisaremos a equação de Laplace e suas propriedades fundamentais. Em seguida, apresentaremos o Princípio do Máximo e alguns teoremas essenciais que garantem a existência e unicidade das soluções. Por fim, aplicaremos o método de separação de variáveis para resolver analiticamente o problema em um retângulo, considerando condições de contorno homogêneas e não homogêneas.

A abordagem adotada neste capítulo baseia-se nas discussões apresentadas em (IÓRIO, 2018) e (FIGUEIREDO, 2014), bem como na compreensão de outros textos clássicos da literatura sobre equações diferenciais parciais. Nosso objetivo é fornecer uma compreensão detalhada dos conceitos matemáticos subjacentes ao Problema de Dirichlet e demonstrar a resolução do problema em um retângulo de forma sistemática e rigorosa.

### 3.1 Equação de Laplace

Do exemplo (6) da seção 2.3 (Cap. 2) tiramos as características que recorrem a uma das mais importantes EDPs na área de matemática aplicada que associa Laplace<sup>1</sup>. Que foi

---

<sup>1</sup>Laplace - este pequeno trecho está baseado em (BOYCE; DIPRIMA, 2017)

descrita no  $\mathbb{R}^n$  no Capítulo 1. Agora, definamos as funções harmônicas para o  $\mathbb{R}^2$ , assim, temos

**Definição 3.1.1.**<sup>2</sup> *Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $u$  será harmônica se a mesma satisfizer a equação de Laplace, no caso em que:*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

**Exemplo.** *vejamos que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 - y^2$  é harmônica.*

De fato, notemos que a função  $f$  é contínua e, seguindo imediatamente a definição, temos que:

$$\Delta f(x, y) = 2 - 2 = 0.$$

## 3.2 O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace

Consideremos uma região  $\Omega$  do plano; daqui em diante, região e domínio serão expressões usadas para designar conjuntos abertos e conexos. Assim, designaremos por  $\bar{\Omega}$  a aderência de  $\Omega$  e  $\partial\Omega$  a fronteira de  $\Omega$ . Vejamos agora uma definição para o Problema de Dirichlet.

**Definição 3.2.1.** *Seja uma função contínua  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Desejamos determinar uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as seguintes condições:*

- (i)  $u$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ ;
- (ii)  $u$  é harmônica em  $\Omega$ , ou seja,  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ ;
- (iii)  $u = f$  em  $\partial\Omega$  (condição de fronteira).

Para mostrar que, caso o Problema de Dirichlet seja solúvel, a solução será única, utilizaremos um lema essencial denominado **Princípio do Máximo**, que a seguir enunciaremos e provamos de acordo com a demonstração apresentada por Privalov ([PRIVALOV, 1940](#)).

---

<sup>2</sup>(Definição 3.1.1.) Esta definição está fundamentada em ([JúNIOR, 2021](#))

**Lema 3.2.1.** (Princípio do Máximo) *Sejam  $\Omega$  uma região limitada do plano e  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $\Omega$  e harmônica em  $\Omega$ . Então o máximo de  $u$  é atingido na fronteira.*

**Demonstração.** Sendo  $\Omega$  limitada, segue-se que  $\bar{\Omega}$  e  $\partial\Omega$  são conjuntos compactos (isto é, fechados e limitados) do plano. Utilizaremos um teorema de Análise que estabelece: "toda função real contínua  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , em um compacto  $K$ , tem um valor máximo  $\mu$ , i.e., existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$  tal que  $f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$ , para todo  $(x, y) \in K$ ." Sejam

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u(x, y) \quad e \quad m = \max_{\partial\Omega} u(x, y),$$

e suponhamos, por contradição, que  $m < M$ . Então  $u$  assume seu máximo em um ponto  $(x_0, y_0)$  que deve estar em  $\Omega$ , e não em  $\partial\Omega$ . Definamos a função

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \quad (3.1)$$

onde  $d$  é o diâmetro da região  $\Omega$ , i.e.,  $d$  é o supremo das distâncias entre pares de pontos de  $\Omega$ . Agora, observando que

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M \quad (3.2)$$

e, sendo

$$u(x, y) \leq m + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = \frac{M + m}{2} < M \text{ para } (x, y) \in \partial\Omega,$$

concluimos que a função  $v$  assume seu máximo em um ponto  $(x_1, y_1)$  de  $\Omega$ , não de  $\partial\Omega$ . Portanto, neste ponto  $v_x(x_1, y_1) \leq 0$  e  $v_y(x_1, y_1) \leq 0$  temos que

$$\Delta v(x_1, y_1) \leq 0.$$

Por outro lado, temos, a partir de (5), que

$$\Delta v = \frac{M - m}{d^2} \cdot 2d > 0.$$

Para todos os pontos de  $\Omega$ . As desigualdades (6) e (7) são contraditórias. Q.E.D.

**Corolário 2.2.1.** *Seja  $u$  como no Teorema 7.1. Então  $u$  assume seu mínimo em  $\partial\Omega$ .*

**Demonstração.** Aplica-se o Teorema 7.1 à função  $-u$ .

**Teorema 2.2.2.** *Sejam  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções do problema de Dirichlet, para um mesmo  $f$ . Então  $u_1 \equiv u_2$ .*

**Demonstração.** A função  $u_1 = u_2$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ , harmônica em  $\Omega$  e igual a 0 em  $\partial\Omega$ . Logo, pelo Princípio do Máximo,  $u(x, y) \leq 0$ , para todo  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ , e, pelo Corolário 7.1,  $u(x, y) \geq 0$ . Daí  $u \equiv 0$ . Q.E.D.

O resultado seguinte, cuja demonstração omitimos, é o análogo do teorema da singularidade removível na Teoria das Funções de Variáveis Complexas que diz o seguinte: "Sejam  $\Omega$  um aberto do plano complexo  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  e se  $f : \Omega \setminus z_0 \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica, que é limitada nas vizinhanças de  $z_0$ , então  $\lim f(z)$  existe quando  $z \rightarrow z_0$  representando por  $\Omega$  esse limite, a função  $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\tilde{f}(z) = f(z)$  se  $z \neq z_0$  e  $\tilde{f}(z_0) = \omega$ , então ela é analítica". Isso quer dizer que uma singularidade isolada  $z_0$ , que não seja pólo ou singularidade essencial, é removível; isto é, a função pode ser estendida analiticamente a  $z_0$ .

**Teorema 2.2.3.** *Sejam  $\Omega$  uma região do plano,  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $\Omega$  e  $u : \Omega \setminus \{x_0, y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica, que é limitada nas vizinhanças de  $(x_0, y_0)$ . (Em particular, se  $u$  for contínua em  $\Omega$ ). Então, existe  $u_0$  tal que  $u(x, y) \rightarrow u_0$ , quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , e a função  $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\tilde{u}(x_0, y_0) = u_0$  e  $\tilde{u}(x, y) = u(x, y)$ , para  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  é harmônica.*

# 4

## O Problema de Dirichlet em um Retângulo

A resolução analítica por separação de variáveis é uma abordagem fundamental na solução do Problema de Dirichlet em um retângulo. Este problema, que descreve a distribuição estacionária de temperatura, potencial elétrico ou outros fenômenos físicos em uma região, neste caso, delimitada por um retângulo, é frequentemente resolvido utilizando técnicas matemáticas avançadas. A estratégia de separação de variáveis permite expressar a solução como o produto de funções unidimensionais, simplificando assim as equações diferenciais parciais associadas. Nesta prova analítica, exploraremos detalhadamente o processo de separação de variáveis para encontrar soluções precisas para este Problema de Dirichlet, e proporcionar uma compreensão profunda das propriedades físicas e matemáticas subjacentes.

Discutiremos a seguir o problema de Dirichlet em um caso bem simples:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

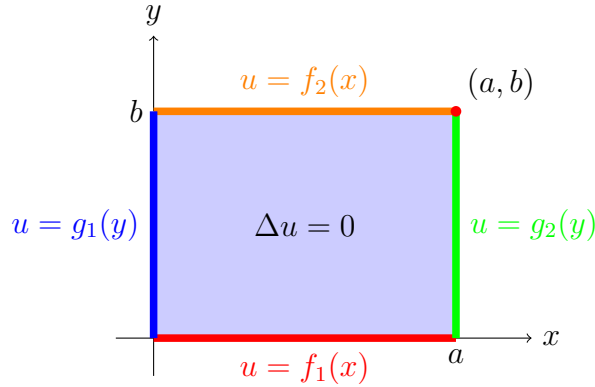
onde  $f \in C(\partial\Omega)$  é uma função dada em  $\mathbb{R}^2$  e  $\Omega$  é o interior de um retângulo.

O problema geral consiste em analisar os quatro lados de um retângulo representado pela região  $\Omega$ , onde  $\mathfrak{R} = (a, 0) \times (0, b)$ . Assim, consideremos as seguintes condições de fronteira abaixo.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & \text{em } \Omega &= (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= f_1(x), & u(x, b) &= f_2(x), & x &\in [0, a] \\ u(0, y) &= g_1(y), & u(a, y) &= g_2(y), & y &\in [0, b], \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora vejamos cada condição acima destacada no retângulo abaixo (Figura 4.1).

**Figura 4.1:** O retângulo  $\mathfrak{R} = (a, 0) \times (0, b)$



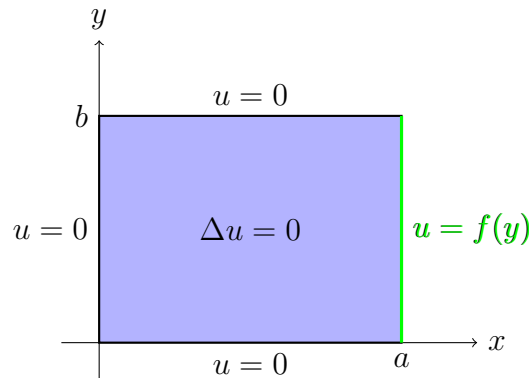
Fonte: Compilação do autor (2025).<sup>1</sup>

Desta forma, vamos começar resolvendo, pelo método de separação de variáveis, o problema (3.1) no caso em que  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  e que  $f$  se anula para  $y = 0$  e  $y = b$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta u + \nabla u &= 0 \quad \text{em } (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= 0 = u(x, b), \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= 0, u(a, y) = f(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $f \in C([0, b])$  satisfaz  $f(0) = 0 = f(b)$  (Figura 4.2).

**Figura 4.2:** O problema de Dirichlet para o caso em que  $f$  se anula em  $y = 0, y = b$  e  $x = 0$ .



Fonte: Compilação do autor (2025).

<sup>1</sup>(2025) Montagem do gráfico a partir da imagem coletada em (IÓRIO, 2018).

Procuramos soluções da equação de Laplace em duas dimensões, onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.3)$$

suponhamos então que  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , substituindo na equação (3.3) e derivando duas vezes em relação a cada uma das duas variáveis correspondentes, obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Agora, fazemos o processo de separação de variáveis, ou seja, em cada lado da igualdade teremos expressões com a mesma variável, veja

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0,$$

daí, para que a igualdade seja satisfeita, precisamos igualá-la a uma constante que aqui representaremos por  $\lambda$ , onde

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

impondo as condições de contorno homogêneas, chegamos aos problemas

$$\begin{aligned} Y''(y) &= -\lambda Y(y) && \text{em } (0, b), \\ Y(0) &= 0, \quad Y(b) = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) && \text{em } (0, a), \\ X(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

As soluções para os problemas (3.4) e (3.5), serão determinadas a partir de  $\lambda$  que conduzirá a autovalores não triviais ( $u \not\equiv 0$ ), e conseqüentemente estas serão às autofunções correspondentes a esses autovalores. Nessas condições, devemos evitar os casos em que ( $\lambda \equiv 0$ ), já que estes resultam em soluções constantes  $u(x, y) \equiv 0$ , que não são úteis para a formulação geral da solução.

Assim, teremos:

**Solução para  $Y(y)$ :** consideremos o problema 3.4 onde

$$Y''(y) = -\lambda Y(y) \quad \text{em } (0, b),$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Assumimos uma solução da forma  $Y(y) = e^{ry}$  e substituímos na equação

$$Y''(y) = -\lambda Y(y) \Rightarrow r^2 e^{ry} + \lambda e^{ry} = 0,$$

fatorando  $e^{ry}$  (que nunca é zero), obtemos a equação característica:

$$r^2 + \lambda = 0.$$

As soluções dependem do sinal de  $\lambda$ , assim vamos analisar os casos a seguir para determinar a solução não trivial.

**(Caso 1).**  $\lambda = 0$  :

$$Y''(y) = 0 \implies Y(y) = A + By.$$

Impondo  $Y(0) = 0$  e  $Y(b) = 0$ :

$$Y(0) = A = 0, \quad Y(b) = Bb = 0 \implies B = 0$$

Portanto,  $Y(y) = 0$ , que é uma solução trivial.

**(Caso 2).**  $\lambda > 0$ . Para valores positivos de  $\lambda$  teremos  $r = \sqrt{\lambda}i$  que nos dará a solução  $Y(y) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y) + C \operatorname{cos}(\sqrt{\lambda}y)$ .

$$\text{Impondo } Y(0) = 0: Y(0) = C = 0 \Rightarrow Y(y) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y).$$

$$\text{Impondo } Y(b) = 0, Y(b) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}b) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}b) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}b = k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{b},$$

$$\text{portanto, } \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{b^2} \text{ e as soluções são } Y_k(y) = B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**(Caso 3).**  $\lambda < 0$  (suponhamos que  $\lambda = -\mu^2$ ). Assim teremos uma solução do tipo

$$Y(y) = C_1 e^{\mu y} + C_2 e^{-\mu y}.$$

Aplicando as condições de contorno  $Y(0) = 0$   $C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$ .

Assim, a solução pode ser escrita como  $Y(y) = 2C_1 \left( \frac{e^{\mu y} - e^{-\mu y}}{2} \right) = 2C_1 \operatorname{senh}(\mu y)$ .

Agora,  $Y(b) = 0 \Rightarrow 2C_1 \operatorname{senh}(\mu b) = 0$ .

Para obter uma solução não trivial, precisamos que  $C_1 \neq 0$ , então deve valer  $\operatorname{senh}(\mu b) = 0$ . Como  $\operatorname{senh}(x) = 0$  apenas para  $x = 0$ , isso implica  $\mu b = 0$ , ou seja,  $\mu = 0$ , o que contradiz a suposição de que  $\lambda < 0$ .

Portanto, não existem autovalores negativos, ou seja,  $\lambda < 0$  não gera soluções não triviais.

**Solução para  $X(x)$ :** do pressuposto de soluções não triviais, dado que  $X''(x) = \lambda X(x)$  temos logo que

para  $\lambda = \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{b^2}$ :

$$X''(x) = \frac{k^2 \pi^2}{b^2} X(x) \implies X(x) = A_k e^{\left(\frac{k\pi x}{b}\right)} + C_k e^{\left(-\frac{k\pi x}{b}\right)},$$

tomando  $X(0) = 0$ , teremos  $X(0) = A_k + C_k \implies A_k = -C_k$ , ou seja,

$$X(x) = 2C_k \left( \frac{e^{\left(\frac{k\pi x}{b}\right)} - e^{\left(-\frac{k\pi x}{b}\right)}}{2} \right) \implies X(x) = B_k \operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right)$$

assim, encontramos uma solução geral para  $u(x, y)$ ,

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right)$$

onde os coeficientes  $B_k$  são determinados pelas condições iniciais do problema. E assim, impondo a condição de contorno não homogênea,

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right), \quad y \in [0, b], \quad (3.5)$$

e portanto

$$B_k = \frac{b_k}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$b_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right) dt \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Logo

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b] \quad (3.7)$$

é um candidato à solução do problema (3.2). Observe que, se pudermos derivar a série termo a termo,  $u$  dada por (3.7) é de fato solução da equação de Laplace. Como a função seno hiperbólico é estritamente crescente,

$$0 \leq \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)} \leq 1, \quad \forall x \in [0, a], \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e a série em (3.7) convergirá se a série de Fourier de  $f$  convergir. A convergência da série das derivadas é mais complicada e, aparentemente, precisaríamos de muita diferenciabilidade de  $f$ . Mas, para evitar isso, podemos reescrever a série (3.7) de forma um pouco diferente, usando (3.6):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{b} \right) dt \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right) = \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt,$$

onde

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi x}{b} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right) \quad (3.8)$$

**Teorema 3.1.** Seja  $f \in C([0, b])$  diferenciável em  $(0, b)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, b])$  e suponha que  $f(0) = 0 = f(b)$ . Então a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$  e  $u$  é solução de (3.3).

Antes de provar o teorema, vamos analisar a função  $K$ :

**Lema 3.2.** A função  $K$  definida por (1.8) está em  $C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e satisfaz  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ .

**Demonstração:** Para simplificar a notação, seja

$$K(x, y, t) = \frac{2 \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{b \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right).$$

$k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (0, a)$ ,  $y, t \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$K(x, y, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} K_k(x, y, t).$$

Vamos primeiro mostrar que a série em (1.8) converge uniformemente em  $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  qualquer que seja  $\varepsilon \in (0, a)$ : de fato, se  $0 \leq \bar{x} = \frac{\pi x}{b} < \bar{a} = \frac{\pi a}{b}$ ,

$$0 \leq \frac{\operatorname{senh}(k\bar{x})}{\operatorname{senh}(k\bar{a})} = \frac{e^{k\bar{x}} - e^{-k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}} - e^{-k\bar{a}}} = e^{-k(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 - e^{-2k\bar{x}}}{1 - e^{-2k\bar{a}}} < e^{-k(\bar{a}-\bar{x})}$$

e, portanto, se  $x \in [0, a - \varepsilon]$ ,

$$\frac{b}{2} |K_k(x, y, t)| \leq \exp\left(-k \frac{\pi(a-x)}{b}\right) \leq \exp\left(-k \frac{\pi\varepsilon}{b}\right).$$

Como a série  $\sum \exp\left(-k \frac{\pi\varepsilon}{b}\right)$  converge, pelo teste M de Weierstrass, a série em (1.8) converge uniformemente. Isso prova que  $K$  é contínua em  $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  para qualquer  $\varepsilon \in (0, a)$  e, portanto,  $K \in C([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Vamos analisar agora a série das derivadas. É claro que  $K_k \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ; derivando em relação a  $x$ ,

$$D_1 K_k(x, y, t) = \frac{2k\pi \cosh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{b^2 \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{b}\right)$$

e, portanto, se  $x \in [0, a - \varepsilon]$ ,

$$|D_1 K_k(x, y, t)| \leq \frac{2\pi}{b^2} k e^{-k(\bar{a}-\bar{x})} \frac{1 + e^{-2k\bar{x}}}{1 - e^{-2k\bar{a}}} \quad (4.1)$$

$$\leq \frac{2\pi}{b^2} k \exp\left(-\frac{k\pi\varepsilon}{b}\right) \frac{2}{1 - \exp(-2\pi a/b)} \quad (4.2)$$

$$= C k e^{-\alpha k} \quad (4.3)$$

onde  $C$  e  $\alpha$  são constantes positivas. Como a série  $\sum k e^{-\alpha k}$  converge, novamente pelo teste M

de Weierstrass, a série das derivadas  $\sum D_1 K_k$  converge uniformemente. Derivando em relação a  $y$  ou  $t$  obtemos resultados análogos. Por indução, é fácil ver que, seja  $j = 1, 2$  ou  $3$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|D_j^n K_k| \leq C k^n e^{-\alpha k}$$

onde  $C$  e  $\alpha$  são constantes positivas ( $\alpha = \pi\varepsilon/b$ ,  $C$  depende de  $j$  e de  $n$ ) e, portanto, a série das derivadas de qualquer ordem converge uniformemente em  $[0, a - \varepsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Usando indução, o Teorema 1.5 do Capítulo 7 (para cada variável) e o fato de que  $\varepsilon \in (0, a)$  é arbitrário, concluímos que  $K \in C^\infty([0, a) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e que suas derivadas são obtidas derivando a série termo a termo.

Falta apenas mostrar que  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ , mas isso é consequência do fato de que, qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\partial_x^2 K_k + \partial_y^2 K_k = 0$ .

**Lema 3.3.** Seja  $f \in C([0, b])$  como no enunciado do Teorema 1.1. Então a série em (1.7) converge uniformemente em  $[0, a) \times [0, b]$ ; além disso,

$$u(x, y) = \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt, \quad \forall (x, y) \in [0, a) \times [0, b]. \quad (3.9)$$

**Demonstração:** Seja  $F'$  a extensão ímpar e periódica de período  $2b$  de  $f$ . Então  $F \in C_{\text{per}}(2b)$  e  $F \in SC_{\text{per}}(2b)$ , logo (veja a demonstração do Teorema 3.2 do Capítulo 7) a série  $\sum \widehat{F}(k)$  dos coeficientes de Fourier complexos de  $F$  converge absolutamente. Por outro lado, como  $F$  é uma função ímpar, sua série de Fourier real é uma série em senos e, portanto, os coeficientes complexos satisfazem

$$\widehat{F}(0) = 0, \quad \widehat{F}(k) = -ib_k/2, \quad \widehat{F}(-k) = ib_k/2, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$b_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(t) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{b} \right) dt = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{b} \right) dt.$$

Concluimos então que a série  $\sum b_k$  converge absolutamente. Mas, se  $(x, y) \in [0, a) \times [0, b]$ ,

$$\left| b_k \frac{\operatorname{senh}(k\pi x/b)}{\operatorname{senh}(k\pi a/b)} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi y}{b} \right) \right| \leq |b_k|,$$

logo a série em (3.7) converge uniformemente em  $[0, a) \times [0, b]$ .

Para provar a fórmula (3.9), vamos fixar  $x \in [0, a)$ . Tomando  $0 < \delta < a - x$ , a

série (3.8) que define  $K$  converge uniformemente em  $(0, a - \delta) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (como vimos na demonstração do Lema 1.2) e  $x \in [0, a - \delta]$ .

Logo, podemos trocar a ordem da série com a integral:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh(k\pi x/b)}{\sinh(k\pi a/b)} \int_0^b f(t) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{b} \right) dt \\ &= \int_0^b \sum_{k=1}^{+\infty} f(t) K(x, y, t) dt \\ &= \int_0^b f(t) K(x, y, t) dt. \end{aligned}$$

Precisamos agora derivar a expressão integral que define  $u$ . Vamos então provar um teorema geral sobre derivação de integrais em intervalos finitos.

**Teorema 3.4.** Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo (finito ou infinito) e suponha que  $F \in C([a, b] \times I)$  é tal que a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial y}$  existe e é contínua em  $[a, b] \times I$ . Seja

$$f(y) = \int_a^b F(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (3.10)$$

Então  $f$  é continuamente diferenciável em  $I$  e

$$f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in I. \quad (3.11)$$

**Demonstração:** Vamos mostrar em primeiro lugar que  $f$  definida por (1.10) é contínua em  $I$ . Fixe  $y_0 \in I$ . Se  $y_0$  está no interior do intervalo, então existe  $\eta > 0$  tal que  $J = [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq I$ ; se  $y_0$  é um dos extremos do intervalo  $I$ , tomaremos  $J = [y_0, y_0 + \eta] \subseteq I$  ou  $J = [y_0 - \eta, y_0] \subseteq I$ , dependendo se  $y_0$  é o menor ou o maior valor possível de  $y \in I$ , respectivamente. Em qualquer caso,  $F$  é uniformemente contínua em  $[a, b] \times J$ , portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , que podemos escolher menor que  $\eta$ , tal que

$$y \in J, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Logo, como  $\delta < \eta$ ,

$$y \in i, |y - y_0| < \delta \Rightarrow y \in j, |y - Y_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| \leq \int_0^b |F(x, y) - F(x, y_0)| dx < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de  $f$  em  $y_0$ .

Antes de mostrar a diferenciabilidade de  $f$  em  $I$ , gostaríamos de lembrar que, se  $I = [c, d]$ , a diferenciabilidade de  $f$  em  $c$  significa a existência do limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h};$$

e, analogamente, a diferenciabilidade de  $f$  em  $d$  significa a existência de

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(d+h) - f(d)}{h}.$$

Vamos agora provar a diferenciabilidade de  $f$  em  $I$ . Dado  $y_0 \in I$ , seja  $J$  como acima. Como  $\frac{\partial F}{\partial y}$  é uniformemente contínua em  $[a, b] \times J$ , existe  $\delta > 0$ ,  $\delta < \eta$ , tal que

$$z \in J, |z - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial F}{\partial y}(z, z) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Por outro lado, se  $z \in J$  é tal que  $0 < |z - y| < \delta$ , pelo teorema do valor médio, existe um ponto intermediário  $\bar{z}_x$  (que depende de  $x$  em geral) entre  $z$  e  $y$  tal que

$$\frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x).$$

E, portanto,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Mas então

$$\begin{aligned} z \in I, |z - y| < \delta &\Rightarrow z \in J, |z - y| < \delta \\ \Rightarrow \frac{f(z) - f(y)}{z - y} &= \int_a^b \frac{F(x, z) - F(x, y)}{z - y} dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right] dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \\ \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(y)}{z - y} - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{z}_x) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

Logo  $f$  é diferenciável em  $I$  e vale (3.11).

Finalmente, como  $\frac{\partial F}{\partial y}$  é contínua em  $[a, b] \times I$ , procedendo como no início da demonstração, vemos que a integral em (3.11) define, de fato, uma função contínua. Agora ficou fácil

mostrar o Teorema 3.1:

**Demonstração do Teorema 3.1.** Pelo Lema 3.3, a série em (3.7) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$  e portanto  $u \in C([0, a] \times [0, b])$ . Pelo Lema 3.2,  $K \in C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e  $K_{xx} + K_{yy} = 0$ . Usando então o Teorema 3.4, a expressão (3.9) e indução, obtemos que  $u \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$  e

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \int f(t)[K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t)] dt = 0$$

sempre que  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ . Além disso, como

$$K_k(x, 0, t) = 0, \quad K_k(x, b, t) = 0 \quad \text{e} \quad K_k(0, y, t) = 0$$

quaisquer que sejam  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x, y, t \in \mathbb{R}$ . Como a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em  $[b]$ , é claro que  $u(a, y) = f(y)$  para todo  $y \in [0, b]$ . Portanto  $u$  é solução de (3.3).

O problema (3.2) é um caso particular do **Problema de Dirichlet** com  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  e  $f \in C(\partial\Omega)$  particularmente simples. Para uma  $f \in C([0, a])$  arbitrária, o problema fica:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega = (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad x \in [0, a] \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde  $f_1, f_2 \in C([0, a])$  e  $g_1, g_2 \in C([0, b])$  são dadas e satisfazem

$$\begin{aligned} f_1(0) &= g_1(0), \quad f_1(a) = g_2(0), \\ f_2(0) &= g_1(b), \quad f_2(a) = g_2(b). \end{aligned} \tag{3.13}$$

**Obs:** estamos nos referindo aqui, as condições de contorno no caso geral em que são satisfeitos todos os lados do retângulo (veja o problema 3.2).

Para resolver (3.12), vamos primeiro transformá-lo em um problema do mesmo tipo, mas com valor zero nos pontos  $(a, 0)$  e  $(a, b)$ : para isso basta definir

$$u(x, y) = u(x, y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b). \tag{3.14}$$

Um cálculo imediato mostra que  $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução

de (3.12) se e somente se  $v \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução de

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ v(x, 0) &= F_1(x), \quad v(x, b) = F_2(x), \quad x \in [0, a], \\ v(0, y) &= G_1(y), \quad v(a, y) = G_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f_1(x) - f_1(a), \\ F_2(x) &= f_2(x) - f_2(a), \\ G_1(y) &= g_1(y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b), \\ G_2(y) &= g_2(y) - \frac{b-y}{b}g_2(0) - \frac{y}{b}g_2(b). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Observe que, de (3.13),

$$F_1(0) = G_1(0), \quad F_1(a) = G_2(0) = 0, \quad F_2(0) = G_1(b), \quad F_2(a) = G_2(b) = 0. \quad (3.17)$$

O problema (3.15), por sua vez, pode ser dividido em dois, ou seja, se  $U, V \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  são soluções, respectivamente, dos problemas

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ em } \Omega, \\ U(x, 0) &= F_1(x), \quad U(x, b) = F_2(x), \quad x \in [0, a], \\ U(0, y) &= G_1(y), \quad U(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 \text{ em } \Omega, \\ V(x, 0) &= 0 = V(x, b), \quad x \in [0, a], \\ V(0, y) &= 0, \quad V(a, y) = G_2(y), \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (3.19)$$

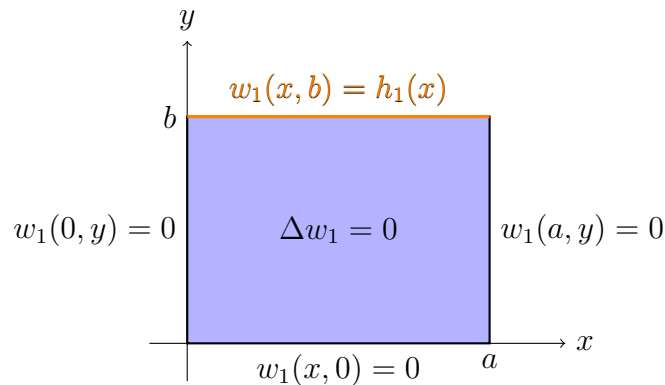
então  $v = U + V \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^2((0, a) \times (0, b))$  é solução de (3.15).

O problema (3.19) já sabemos resolver (já que este é o mesmo problema de 3.2); quanto a (3.18), podemos novamente transformá-lo em um problema do mesmo tipo mas com valores nulos em  $(0, 0)$  e  $(0, b)$ ; a solução desse último problema, por sua vez é a soma das soluções de três problemas do tipo que veremos a seguir. Assim, solucionando 3.19 e 3.18

solucionaremos 3.15 e, conseqüentemente, teremos a solução para o caso geral em 3.1.

Analisemos cada um dos três subproblemas de 3.15, a saber 3.18, denotados por  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , cada um deles é determinado de forma semelhante ao que foi feito em 3.2.

**Figura 4.3:** Problema em que  $w_1(x, 0) = w_1(a, y) = w_1(0, y) = 0, w_1(x, b) = h_1(x)$  para  $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ .



Fonte: compilação do autor (2025).

Consideremos as seguintes condições de fronteira para  $\Delta w_1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_1(0, y) &= w_1(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \\ w_1(x, 0) &= 0, w_1(x, b) = h_1(x), \quad x \in [0, a], \end{aligned} \tag{3.20}$$

com  $h_1(x) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada.

Semelhante aos cálculos no problema 3.2, conseqüentemente, encontraremos a seguinte solução,

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{senh} \left( \frac{k\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{a} \right),$$

com os coeficientes  $A_k$  determinados por

$$A_k = \frac{a_k}{\operatorname{senh} \left( \frac{k\pi b}{a} \right)}$$

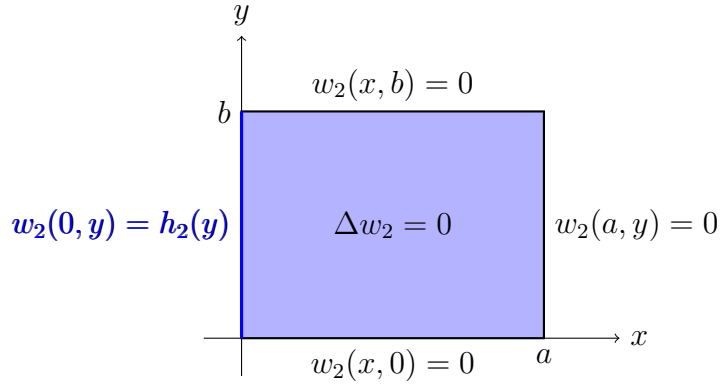
onde

$$a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{a} \right)$$

logo

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$$

**Figura 4.4:** Problema em que  $w_2(a, y) = w_2(x, 0) = w_2(x, b) = 0, w_2(0, y) = h_2(y)$  para  $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ .



Fonte: Compilação do autor (2025).

Agora consideremos as seguintes condições de fronteira para  $\Delta w_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta w_2 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_2(0, y) &= h_2(y), \quad w_2(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \\ w_2(x, 0) &= 0 = w_2(x, b), \quad x \in [0, a], \end{aligned}$$

com  $h_2(y) : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada.

Novamente, com cálculos semelhantes aos problemas 3.2 e 3.20, obteremos a seguinte solução,

$$w_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right),$$

com os coeficientes  $C_k$  determinados por

$$C_k = \frac{c_k}{\operatorname{senh}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}$$

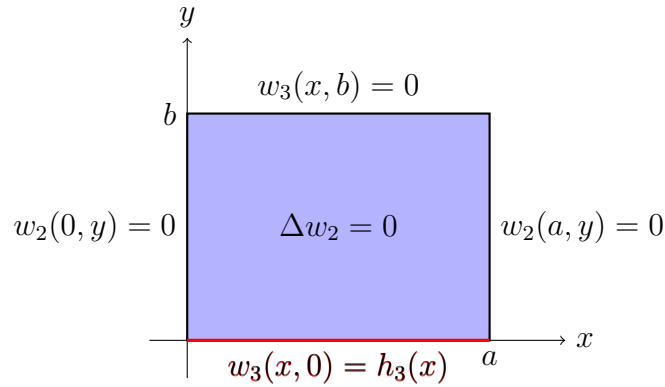
onde

$$c_k = \frac{2}{b} \int_0^a f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$$

logo

$$w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{k\pi(x-a)}{b}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{-k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$$

**Figura 4.5:** Problema em que  $w_3(0, y) = w_3(a, y) = w_3(x, b) = 0, w_3(x, 0) = h_3(x)$  para  $\mathfrak{R} = (0, a) \times (0, b)$ .



Fonte: Compilação do autor (2025).

Com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} \Delta w_3 &= 0 \text{ em } \Omega, \\ w_3(0, y) &= 0 = w_3(a, y), \quad x \in [0, a], \\ w_3(x, 0) &= h_3(x), \quad w_3(x, b) = 0, \quad x \in [0, a], \end{aligned}$$

com  $h_3(x) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada.

Da mesma forma, a solução do Problema de Dirichlet pode ser expressa como

$$w_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi(y-b)}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

com os coeficientes  $D_k$  determinados por,

$$D_k = \frac{d_k}{\operatorname{senh}\left(\frac{-k\pi b}{a}\right)}$$

onde

$$d_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx$$

logo

$$w_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-k\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$$

Para os três casos anteriores, a solução para  $U$  é dada pela soma das soluções

$$U(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y).$$

Vale ressaltar, que nesses três casos as soluções são conjunto de funções harmônicas.

Assim, o problema fica  $v = U + V$ , dado que a solução de  $V$  equivale a  $u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$ , ou seja, a solução referente ao problema 3.2 ou 3.15 é a função,

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{-k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-k\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \end{aligned}$$

agora, consideremos  $b_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy$  com  $k \in \mathbb{N}$ , assim, podemos simplificar a soma acima, logo

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx \left( \frac{\sinh\left(\frac{k\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-k\pi b}{a}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} \right) \\ &+ \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \int_0^a f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \left( \frac{\sinh\left(\frac{k\pi(x-a)}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{-k\pi a}{b}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

è a solução para o **Problema de Dirichlet** para o retângulo  $\mathfrak{R} = (a, 0) \times (0, b)$ .

<sup>1</sup>A solução simplificada em (3.21) pode ser encontrada em (Júnior, 2021).

# 5

---

## Considerações Finais

Durante o processo de discussão e resolução do problema em questão, destacamos que a abordagem detalhada no presente Trabalho de Conclusão de Curso sobre o Problema de Dirichlet em um Retângulo, revela a profundidade e a complexidade intrínseca dessa problemática matemática. Ao seguir a demonstração de Privalov, empregando técnicas como a separação de variáveis e as Séries de Fourier, pudemos estabelecer além da existência de uma solução para o problema, sua unicidade por meio do poderoso Princípio do Máximo.

A jornada através da resolução deste problema demonstrou a aplicação magistral de métodos analíticos, a elegância e a robustez teórica dessas ferramentas matemáticas. O desenvolvimento do raciocínio lógico ao longo das etapas da demonstração e a manipulação habilidosa das equações diferenciais e integrais enriquecem nossa compreensão do conteúdo, reforçando a importância da análise matemática.

Ao estabelecer a unicidade da solução, reconhecemos a singularidade desse Problema de Dirichlet, que se destaca como uma contribuição significativa para a teoria dos problemas de contorno em matemática aplicada. A aplicação do Princípio do Máximo solidifica a solidez da análise, e ressalta a relevância dessas técnicas em diversos contextos matemáticos.

Em última análise, este estudo oferece uma perspectiva aprofundada sobre a resolução do problema abordado, destacando as conclusões obtidas, e a importância de métodos específicos, como os propostos por Privalov, na resolução de problemas matemáticos desafiadores. Este trabalho contribui, assim, para o avanço contínuo do conhecimento em análise matemática e fortalece a base teórica para futuras investigações neste campo fascinante.

---

## Referências

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2017. ISBN 9788521618679. 10, 40
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. 12, 17, 40
- IÓRIO, V. d. M. *EDP: Um Curso de Graduação*. 4<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0422-1. 29, 40, 45
- JÚNIOR, L. T. V. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), *O problema de Dirichlet para a equação de Laplace: Uma aplicação no retângulo*. Maceió, AL: [s.n.], 2021. Orientador: Moreno Pereira Bonutti. 41, 59
- NUNES, T. I. d. S. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), *Existência e unicidade de solução para problemas envolvendo o operador Laplaciano*. Recife, PE: [s.n.], 2019. Orientadora: Yane Lísley Ramos Araújo. 39
- PRIVALOV, I. I. *Problemas de Valores de Fronteira nas Funções Analíticas*. Moscou: Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., 1940. 41