



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

THALINE GONÇALVES EVANGELISTA

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES: UMA
ABORDAGEM NUMÉRICA.**

**CASTANHAL – PA
2018**

THALINE GONÇALVES EVANGELISTA

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES: UMA
ABORDAGEM NUMÉRICA.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida.

CASTANHAL – PA

2018

THALINE GONÇALVES EVANGELISTA

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES: UMA
ABORDAGEM NUMÉRICA.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida.

Aprovado em _____ de _____ de _____

Conceito: _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

Faculdade de Matemática / UFPA – Orientador

Prof. Ms. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva

Faculdade de Matemática / UFPA – Membro

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal

Faculdade de Matemática / UFPA – Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus por ter me ajudado iniciar e finalizar meu curso com êxito, por ter segurado minhas mãos nos momentos mais difíceis sem Ele não teria chegado até aqui.

A meu namorado Samuel Faro pelo incentivo, amor, carinho e por todas as palavras que me determinaram a chegar até o fim.

A minha irmã Fabiane Gonçalves que acreditou no meu potencial e me inscreveu no curso de Matemática e ainda pagou o boleto, sou imensamente grata, também pelas incontáveis noites que ficastes acordadas comigo me dando forças e me auxiliando.

A meus pais Fábio Evangelista e Francília Gonçalves, por terem me ensinado no caminho em que eu deveria andar e por todo incentivo do início ao fim do meu curso, em especial ao meu pai que me motiva sempre a buscar a realização dos meus sonhos e projetos.

Aos meus amigos Joás Salomão e Mayara Ramos, pela amizade e por todas as mensagens de encorajamento para finalizar meu trabalho.

A meu primo Igor Pinheiro, pela tradução com excelência do meu resumo, por ter dedicado um pouco do seu tempo para fazer o abstract.

Ao meu orientador prof. Dr. Arthur Almeida pela dedicação e incentivo com palavras positivas, por todo conhecimento transmitido a mim, que contribuíram para minha formação acadêmica e pela oportunidade de participar do PIBIC e a todos os professores que contribuíram com tantos conhecimentos preciosos.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho tem como desígnio estudar os sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares no que se trata de problemas práticos de interesse científico e social, tais como aumento e diminuição de populações, circuitos elétricos, etc, que serão modelados e resolvidos matematicamente através de métodos numéricos e com o auxílio de ferramentas computacionais. Sabemos que as equações diferenciais ordinárias (EDO's) nem sempre podem ser solucionadas de forma analítica, as equações não-lineares, por exemplo, em geral, é impossível resolvê-las por métodos analíticos, dessa forma os métodos numéricos são uma alternativa para tais soluções. Os métodos numéricos são aproximações da solução de um problema de valor inicial, em destaque temos os métodos de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), como a solução é mais precisa no RK4, ou seja, aproxima-se mais da solução exata daremos maior ênfase a ele. Para tanto foi utilizado o programa R para plotar os gráficos e também obter as soluções aproximadas do sistema e por fim apenas tabelamos os resultados obtidos. Vale ressaltar que as ferramentas computacionais tornam a resolução do sistema mais prática, já que, em alguns casos quanto menor a amplitude torna-se mais trabalhoso resolvê-lo à mão.

Palavras-chave: Métodos Numéricos. EDO's. Euler. Runge-kutta.

ABSTRACT

This research aims to study the system of linear ordinary differential equations regarding practical problems of social and scientific interest, such as the increase and decrease of populations, electrical circuits and etc. Those will be modeled and solved mathematically through numerical methods and with support of computational tools. It's known that ordinary differential equations (ODE's) cannot always be solved analytically, the non-linear equations, for instance, in general, are impossible to solve using only analytical methods, thus, the numerical methods are an alternative for such problems. The numerical methods are approximations of the solution of an initial value problem, as famous methods there are the Euler and the fourth order Runge-Kutta (RK4) methods, the solution is proven to be more precisely through the RK4, in other words, it is closer to the exact solution, that is why this method is more emphasized in the research. Therefore the software R was used to plot graphics and also obtain the approximate solutions of the system and also the obtained results were tabulated. It is important to emphasize that the solutions of the system becomes easier to obtain using the computational tools, because in some cases as smaller is the amplitude then it is harder to solve by hand.

Keywords: Numerical Methods, ODE's. Euler. Runge-Kutta.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aproximação através de $y(x_1)$ através de uma reta tangente.....	12
Figura 2 - Sucessivas aproximações.....	12
Figura 3 - Diferença do incremento h	13
Figura 4 - Representação do método de Euler Aprimorado aproximando $y(x_1)$	15
Figura 5 - Solução exata e aproximada do PVI $y' = 2xy$, $y(1) = 1$ utilizando o Método de Euler com incremento $h = 0,1$	19
Figura 6 - Solução exata e aproximada do PVI $y'=2xy$, utilizando o Método de Euler Aprimorado com incremento $h=0,1$	20
Figura 7 - Solução exata e aproximada do PVI $y'=2xy$, $y(1) = 1$ utilizando o Método de Runge Kutta de quarta ordem com incremento $h=0,1$	21
Figura 8 - Solução Numérica para Sistema EDO.....	25
Figura 9 - Solução Numérica para Sistema de EDO.....	26
Figura 10 - Solução Numérica para Sistema de EDO.....	27
Figura 11 - Solução Numérica para Sistema de EDO.....	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Método de Euler com $h=0,1$	19
Tabela 2 - Método de Euler Aprimorado com $h=0,1$	20
Tabela 3 - Método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h=0,1$	21
Tabela 4 - Comparações de métodos numéricos $h=0,1$	22
Tabela 5 - Método de Runge-Kutta com $h=0,2$	25
Tabela 6 - Método de Runge-Kutta com $h=0,1$	26
Tabela 7 - Método de Euler com $h=0,2$	27
Tabela 8 - Método de Euler com $h=0,1$	28

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
1.1 OBJETIVOS	8
1.1.1. Objetivo Geral	8
1.1.2. Objetivos Específicos	8
2. MATERIAIS E MÉTODOS.....	9
3. SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES	10
4. SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	11
4.1. MÉTODO DE EULER.....	11
4.2. MÉTODO DE EULER APRIMORADO	14
4.3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA.....	15
4.3.1. Método de Runge-Kutta de primeira ordem	15
4.3.2. Método de Runge-Kutta de segunda ordem.....	17
4.3.3. Método de Runge-Kutta de quarta ordem	18
4.3.4. Resultados	18
5. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM	23
5.1. MÉTODO DE EULER.....	23
5.2. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM.....	24
5.3. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS AOS SISTEMAS LINEARES DE EDO'S.....	24
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
REFERÊNCIAS.....	31

1. INTRODUÇÃO

Ocorrem com frequência fenômenos na natureza que envolvem diversos elementos associados de determinadas maneiras. Vários fenômenos tais como: circuitos elétricos, aumento ou diminuição de populações e dissipação de calor em objetos sólidos têm essas características, assim como problemas em mecânica e em outros campos que são modelados e resolvidos matematicamente por meio das equações diferenciais (EDO's). Nesse e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem (BOYCE & DIPRIMA, 1999).

Existem diversos métodos para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias analiticamente, mas nem sempre estes métodos são aplicáveis a todos os problemas, daí surge a necessidade de recorrer a técnicas com métodos numéricos para obter soluções aproximadas.

Em termos mais simples, os métodos numéricos correspondem a um conjunto de ferramentas ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada, sendo aplicados a problemas que não apresentam uma solução exata.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo Geral

Usar a matemática e a informática como ferramentas para o entendimento e solução de problemas práticos de interesse científico e social, proporcionando assim ao estudante do curso de licenciatura, uma visão integrada da pesquisa como componente de sua formação docente.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Aprender e unificar as abordagens numéricas para a análise e solução de sistemas de EDO's lineares.
- Aprender a utilizar o programa R, na parte em que ele trata de soluções numéricas e gráficos de sistemas de EDO's lineares.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa foi essencialmente feita de forma bibliográfica. Foram usados textos matemáticos como os citados nas Referências. Alguns problemas de aplicação dos métodos serão selecionados, resolvidos, analisados e discutidos durante a apresentação. Um estudo prático será feito usando-se o programa R para o tratamento dos métodos numéricos como os de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem.

3. SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Segundo ZILL e CULLEN (2001) em algumas aplicações como o movimento de uma massa apensa a uma mola ou para a resposta de um circuito elétrico em série pode-se para descrever o sistema físico por uma única equação diferencial relativamente simples de forma $ay'' + by' + cy = f(t)$. No entanto, se tiver duas (ou mais) molas ou se formar um circuito elétrico, necessitaria de duas (ou mais) equações conectadas ou simultâneas para descrever o movimento das massas ou as respostas da rede.

As equações diferenciais ordinárias simultâneas envolvem duas ou mais equações de duas ou mais funções incógnitas de uma única variável independente. Conforme Zill (2012) um sistema com n equações diferenciais de primeira ordem tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Quando cada função g_1, g_2, \dots, g_n for linear nas variáveis dependentes x_1, x_2, \dots, x_n , obtêm-se então a forma normal de um sistema linear de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}$$

Alguns sistemas de equações diferenciais podem ser resolvidos por meio de eliminação sistemática ou da transformada de Laplace.

Estuda-se aqui, algumas soluções para resolver equações diferenciais.

4. SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial não tem necessariamente uma solução, e mesmo que a possua, nem sempre se pode encontra-la explicitamente ou implicitamente (ZILL e CULLEN, 2001). Ou seja, mesmo que se possa demonstrar que existe a solução de uma equação diferencial, pode ser que não seja possível mostrar esta solução de forma analítica. Em muitos casos, especialmente nas equações não lineares deve-se contentar-se com aproximações da solução. Para se contornar esta problemática, usa-se uma abordagem alternativa, a utilização de métodos numéricos aproximados para achar uma aproximação da solução de um problema de valor inicial. (BOYCE,1999).

4.1. MÉTODO DE EULER

O método de Euler, ou método das tangentes, constitui uma das técnicas mais simples para aproximar soluções de equações diferenciais (ZILL e CULLEN, pg. 104, 2001).

Admitindo que o problema de valor inicial de primeira ordem,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

tenha uma solução. Considera-se que se pode aproximar a solução do PVI próximo de $x = x_0$. Sabe-se que o gráfico da solução contém o ponto (x_0, y_0) , sabe-se também, que a inclinação da reta tangente ao gráfico é $f(x_0, y_0)$. Então, uma equação para a reta tangente à curva solução em (x_0, y_0) , é

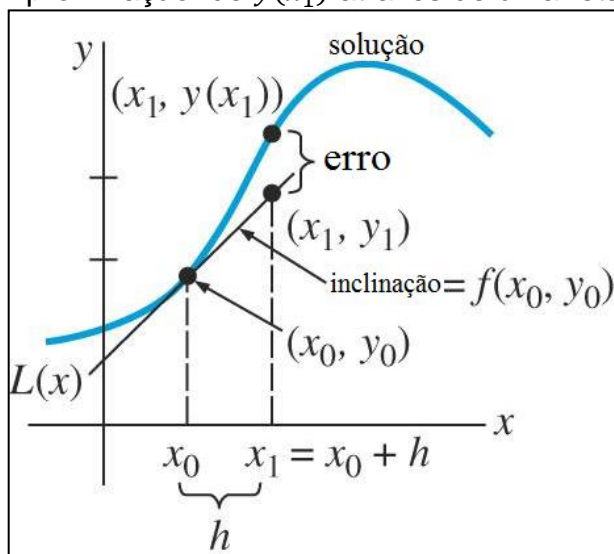
$$y = L(x) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

Sendo $h > 0$, um incremento suficientemente pequeno no eixo-x, conforme mostrado na Figura 1, pode-se encontrar o ponto $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_1)$, logo:

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_0 + h - x_0)$$

ou

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Figura 1 - Aproximação de $y(x_1)$ através de uma reta tangente.

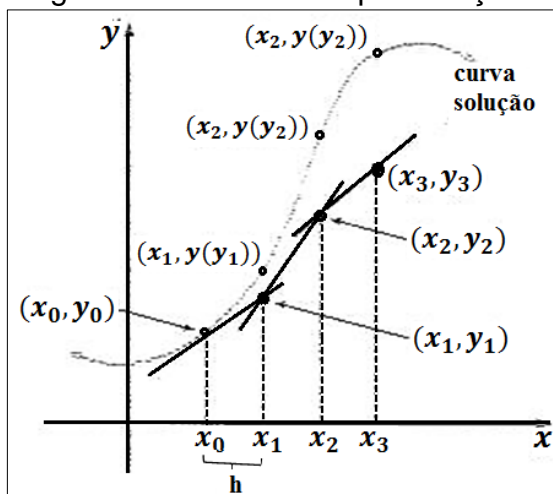
Fonte: A autora.

Nota-se que o ponto (x_1, y_1) na tangente é uma aproximação do ponto $(x_1, y(x_1))$ da curva solução, ou seja, $y_1 \approx y(x_1)$. Repetindo o processo, com mais um incremento h , a partir de x_1 $x = x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$ obtêm-se a aproximação $y_2 \approx y(x_2)$, correspondente a dois passos a partir de x_0 , obtendo:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

Supondo uma constante h pode-se obter uma sucessão de pontos (x_1, y_1) , $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ próximos aos pontos $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \dots, (x_n, y(x_n))$.

Figura 2 - Sucessivas aproximações.



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Generalizando, decorre que

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

onde $x_n = x_0 + n \cdot h$, com $n = 0, 1, 2, \dots$ obtendo aproximações $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. Este procedimento de calcular repetidamente, usando resultado de cada passo para calcular o próximo, é chamado de método de Euler.

O erro absoluto é calculado como

$$|\text{valor verdadeiro} - \text{aproximação}|$$

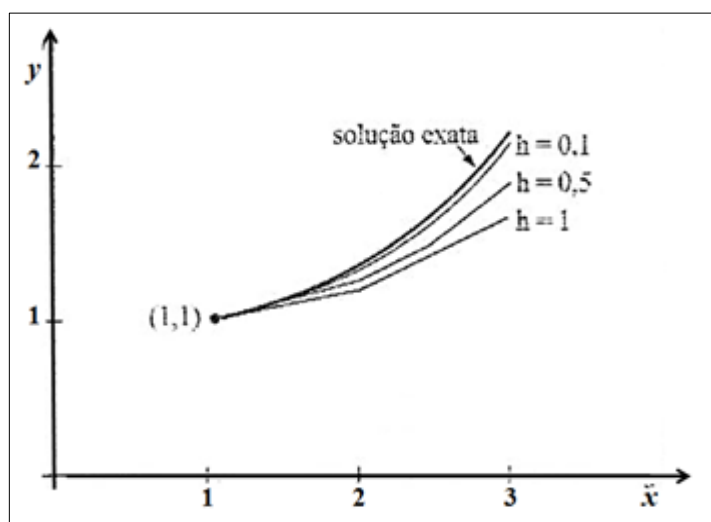
Enquanto que o erro relativo e erro relativo percentual são respectivamente,

$$\frac{|\text{valor verdadeiro} - \text{aproximação}|}{|\text{valor verdadeiro}|}$$

$$\frac{\text{erro absoluto}}{|\text{valor verdadeiro}|} * 100$$

Zill e Cullen (2001) fazem uma comparação, no intervalo $[1, 3]$ do gráfico da solução exata do PVI $y' = 0,2xy$, $y(1) = 1$ com os gráficos obtidos pelo método de Euler utilizando diferentes h : $h = 1$, $h = 0,5$, e $h = 0,1$. Pode-se notar que a aproximação melhora quando o passo h diminui.

Figura 3 - Diferença do incremento h .



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Eventualmente, segundo Zill e Cullen (2001), pode-se desejar uma maior precisão, então, tenta-se com um tamanho de passo ainda menor. No entanto, será

mais vantajoso usar um método numérico alternativo, em vez de tentar encontrar um incremento significativo.

O método de Euler é apenas uma dentre as várias maneiras nas quais uma solução de uma equação diferencial pode ser aproximada. Embora atraente por sua simplicidade, o método de Euler raras vezes é usado em cálculos importantes (ZILL, pg. 80, 2012).

4.2. MÉTODO DE EULER APRIMORADO

O método definido pela fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2}$$

onde

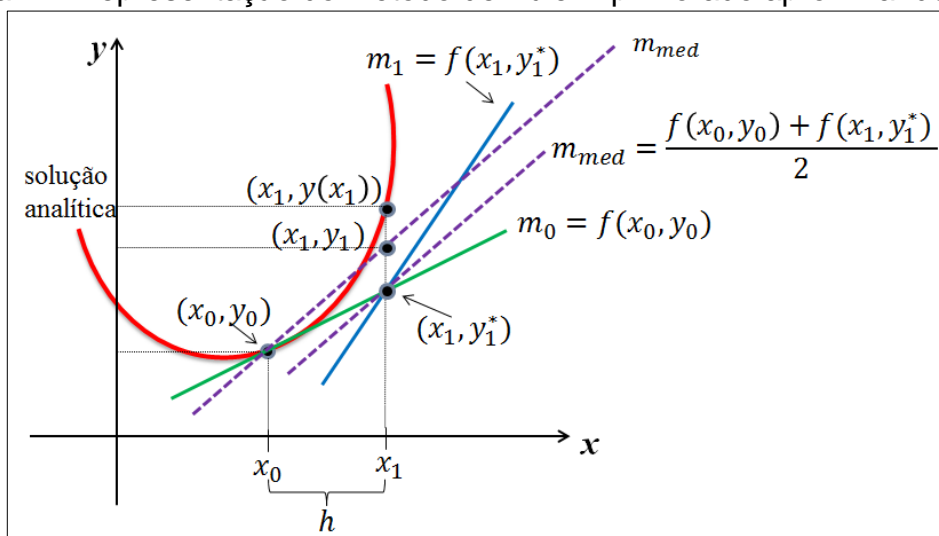
$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

é conhecida como fórmula de Euler melhorada (ZILL e CULLEN, 2001). Em cada passo é usado primeiramente o método de Euler. As aproximações $f(x_n, y_n)$ e $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ do coeficiente angular da curva em $(x_n, y(x_n))$ e $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ e dão consequência o quociente

$$\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2}$$

podendo ser interpretado como coeficiente angular médio no intervalo entre x_n e x_{n+1} .

Figura 4 - Representação do método de Euler Aprimorado aproximando $y(x_1)$.



Fonte: A autora.

Pode-se notar na Figura 4 que $m_0 = f(x_0, y_0)$ e $m_1 = f(x_1, y_1^*)$ são coeficientes angulares retas as quais passam nos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1^*) respectivamente. Para obter o coeficiente angular das retas tracejadas basta tomar a média dos coeficientes angulares, ou seja,

$$m_{med} = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$$

A partir disto, avança-se ao longo da reta que passa por (x_0, y_0) com coeficiente angular m_{med} até atingir x_1 , em vez de avançar ao longo da reta do coeficiente angular $m_0 = f(x_0, y_0)$ até a ordenada y_1^* obtido pelo método de Euler. Portanto, pela figura 4 pode-se perceber que y_1 seja uma aproximação melhor que y_1^* .

4.3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Para Zill (2012), o **método de Runge-Kutta de quarta ordem** é provavelmente um dos métodos numéricos mais precisos e também um dos mais populares para se obter soluções aproximadas de problemas de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Existem de diferentes ordens.

4.3.1. Método de Runge-Kutta de primeira ordem

Zill (2012) diz que, fundamentalmente, todos os métodos de Runge-Kutta são generalizações da fórmula básica de Euler, em que a inclinação da função f é

substituída por uma média ponderada das inclinações ao longo do intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Isto é,

$$y_{n+1} = y_n + h \underbrace{(w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_m k_m)}_{\text{média ponderada}}$$

onde os pesos $w_i, i=1,2,\dots,m$, são constantes que geralmente satisfazem $w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1$. O número m é chamado de ordem do método e cada $k_i, i = 1,2, \dots, m$ é o resultado da função f num dado ponto (x,y) selecionado, tal que $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

Sendo $m=1, w_1 = 1$ e $k_1=f(x_n,y_n)$, obtemos a fórmula básica de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Portanto, diz-se que o método básico de Euler é um **método Runge-Kutta de primeira ordem**.

Os parâmetros são escolhidos de forma que a expressão se assemelhe com um polinômio de Taylor de grau m .

Se uma função $y(x)$ tiver $k+1$ derivadas contínuas em um intervalo aberto contendo a e x , podemos escrever:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

onde c é algum número entre a e x . Se substituirmos a por x_n e x por $x_{n+1}=x_n+h$, a fórmula se torna.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n+h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

↓

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Agora c é algum número entre x_n e x_{n+1} .

Quando $y(x)$ é uma solução de $y' = f(x, y)$, no caso $k = 1$, e o restante $\frac{1}{2}h^2 y''(c)$ é desprezível, vemos que um polinômio de Taylor ... de grau 1 se assemelha com a fórmula de aproximação do método de Euler.

4.3.2. Método de Runge-Kutta de segunda ordem

Para ilustrar ainda mais a fórmula,

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + \dots + w_mk_m)$$

considere agora o procedimento de Runge-Kutta de segunda ordem,

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha h; y_n + \beta h k_1)$$

que consiste em encontrar constantes ou parâmetros w_1 , w_2 , α e β de tal modo que a fórmula coincida com um polinômio de Taylor de grau dois. (ZILL, 2012).

De acordo (ZILL, 2012), pode-se dizer que pode ser feito sempre que as constantes satisfizerem algumas condições.

$$w_1 + w_2 = 1 \quad w_2\alpha = \frac{1}{2} \quad w_2\beta = \frac{1}{2}$$

$$w_1 = 1 - w_2 \quad \alpha = \frac{1}{2w_2} \quad \beta = \frac{1}{2w_2}$$

Onde $w_2 \neq 0$. Este um sistema algébrico de três equações em quatro incógnitas com infinitas soluções. Fazendo

$$w_2 = \frac{1}{2} \quad w_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha = 1 \quad \beta = 1$$

Resulta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

com

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_n + h; y_n + h k_1)$$

Desde que $x_n + h = x_{n+1}$ e $y_n + h k_1 = y_n + h f(x_n, y_n)$ o resultado citado é denominado método de Euler Aprimorado. Sendo que há muitos outros métodos de Runge-Kutta possíveis de segunda ordem.

Ignorar qualquer discussão sobre os métodos de terceira ordem, a fim de chegar ao principal ponto de discussão: método RK4.

4.3.3. Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Conforme (ZILL, 2012) método de Runge-Kutta (RK4) de quarta ordem consiste em encontrar constantes apropriadas de tal forma que a fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4)$$

onde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3)$$

coincida com o desenvolvimento de Taylor de grau quatro. Segundo (ZILL, 2012), isso resulta em 11 equações e em 13 incógnitas e o conjunto de valores geralmente mais usado para os parâmetros dá espaço ao resultado seguinte

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)$$

Note nas fórmulas que k_2 depende de k_1 , k_3 depende de k_2 e k_4 depende de k_3 . Além disso, k_2 e k_3 envolvem aproximações do coeficiente angular no ponto médio do intervalo definido por $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

4.3.4. Resultados

Considerando o problema de valor inicial $y' = 2xy$, $y(1) = 1$ e a solução analítica (ou solução exata) e^{x^2-1} , utilizando os métodos de Euler, de Euler Aprimorado e de Runge-Kutta de quarta ordem para obter uma aproximação do valor de $y(1,5)$ e um tamanho de passo $h = 0,1$, dar-se resultado as tabelas e os gráficos.

Usando o método de Euler, nota-se na Tabela 1 abaixo, que no cálculo da aproximação de $y(1,5)$ ocorreu um erro relativo de 16%, sendo totalmente inaceitável.

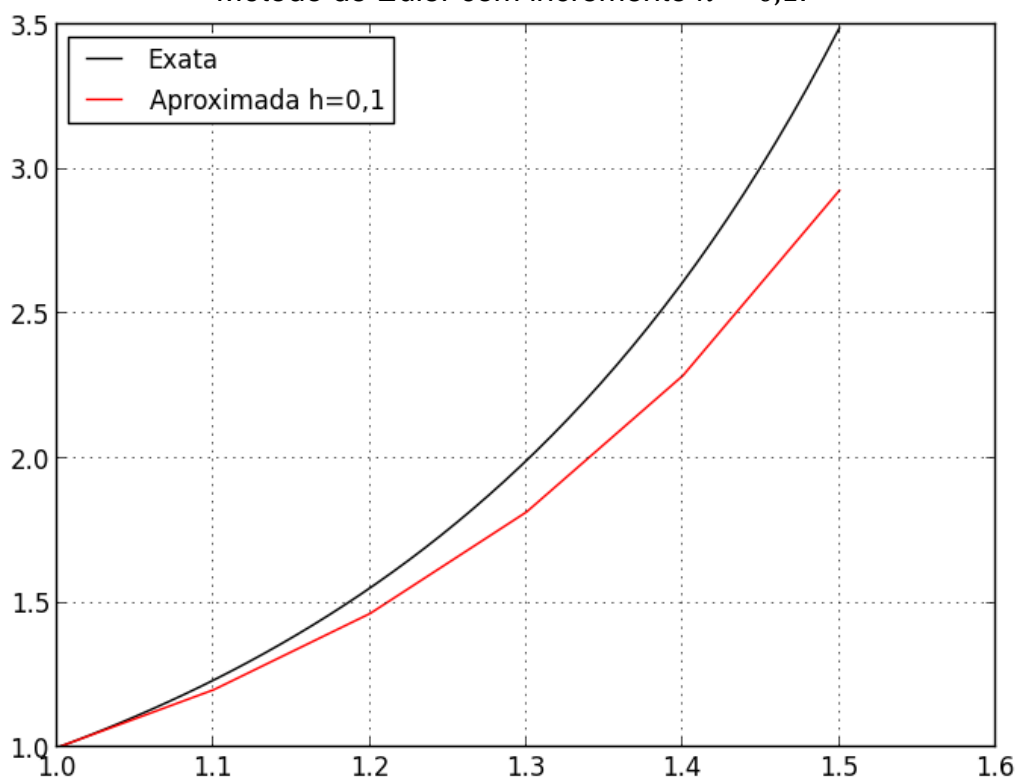
Tabela 1 - Método de Euler com $h=0,1$.

x_n	y_n	Valor exato	Erro absoluto	Erro relativo (%)
1,00	1,0000	1,0000	0,0000	0,00
1,10	1,2000	1,2337	0,0337	2,73
1,20	1,4640	1,5527	0,0887	5,71
1,30	1,8154	1,9937	0,1784	8,95
1,40	2,2874	2,6117	0,3244	12,42
1,50	2,9278	3,4903	0,5625	16,12

Fonte: A Autora.

Visualizando este resultado na Figura 5, tem-se que de fato é bem visível este erro de 16%, pois quando $y(1,5)$ o valor exato é 3,4903 mas sua aproximação é de apenas 2,9278.

Figura 5 - Solução exata e aproximada do PVI $y' = 2xy$, $y(1) = 1$ utilizando o Método de Euler com incremento $h = 0,1$.



Fonte: A Autora.

Utiliza-se então o método de Euler Aprimorado para esta mesma aproximação do mesmo incremento e obtêm-se o erro relativo em $y(1,5)$ de 1,13%, sendo assim aceitável.

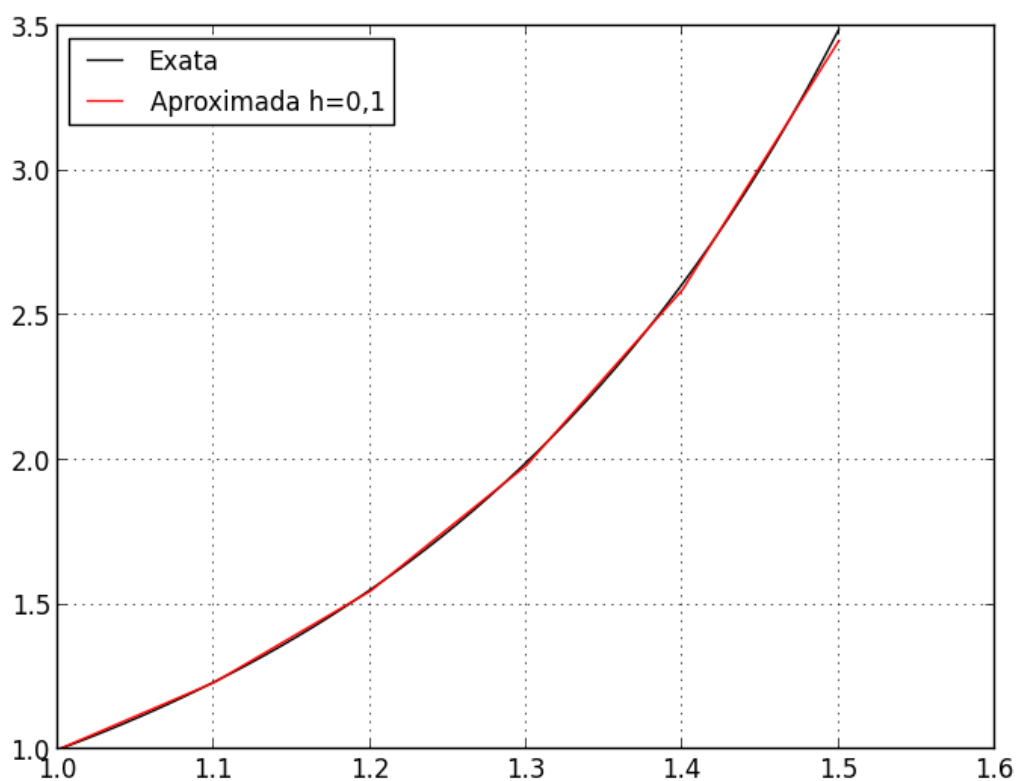
Tabela 2 - Método de Euler Aprimorado com $h=0,1$.

x_n	y_n	Valor exato	Erro absoluto	Erro relativo (%)
1,00	1,0000	1,0000	0,0000	0,00
1,10	1,2320	1,2337	0,0017	0,14
1,20	1,5479	1,5527	0,0048	0,31
1,30	1,9832	1,9937	0,0106	0,53
1,40	2,5908	2,6117	0,0209	0,80
1,50	3,4509	3,4904	0,0394	1,13

Fonte: A Autora.

Percebe-se também graficamente esta aproximação na figura 6.

Figura 6 - Solução exata e aproximada do PVI $y'=2xy$, utilizando o Método de Euler Aprimorado com incremento $h=0,1$.



Fonte: A Autora.

Uma análise da tabela 3 mostra por que o método de Runge-Kutta de quarta ordem é tão popular. Se quatro casas decimais de precisão for o suficiente, então a aproximação é ótima e não se tem a necessidade de diminuir o incremento h .

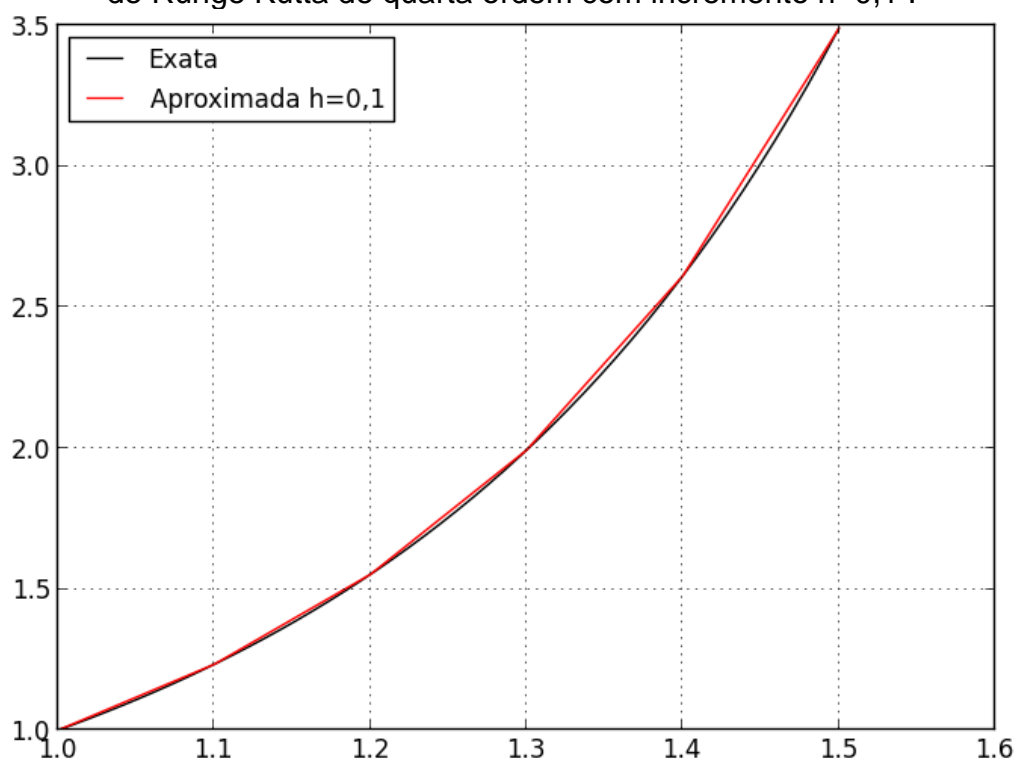
Tabela 3 - Método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h=0,1$.

x_n	y_n	Valor exato	Erro absoluto	Erro relativo (%)
1,00	1,0000	1,0000	0,0000	0,00
1,10	1,2337	1,2337	0,0000	0,00
1,20	1,5527	1,5527	0,0000	0,00
1,30	1,9937	1,9937	0,0000	0,00
1,40	2,6116	2,6117	0,0001	0,00
1,50	3,4902	3,4904	0,0002	0,01

Fonte: A Autora.

Na figura 7 é notada esta precisão.

Figura 7 - Solução exata e aproximada do PVI $y'=2xy$, $y(1)=1$ utilizando o Método de Runge Kutta de quarta ordem com incremento $h=0,1$.



Fonte: A Autora.

Comparando todos os resultados dos métodos de Euler, de Euler Aprimorado e de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) na aproximação do PVI $y' = 2xy$, $y(1) = 1$ na aproximação do valor de $y(1,5)$ e um tamanho de passo $h = 0,1$, dar-se resultado a tabela 4 a seguir:

Tabela 4 - Comparações de métodos numéricos $h=0,1$

x_n	Euler	Euler melhorado	RK4	Valor exato
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,10	1,2000	1,2320	1,2337	1,2337
1,20	1,4640	1,5479	1,5527	1,5527
1,30	1,8154	1,9832	1,9937	1,9937
1,40	2,2874	2,5908	2,6116	2,6117
1,50	2,9278	3,4509	3,4902	3,4904

Fonte: A Autora.

5. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Os métodos de Euler e Runge-Kutta podem também ser aplicados a sistemas de equações de primeira ordem, ou a equações de ordem mais elevada. Uma equação de ordem mais elevada, como $d^2x/dt^2 = f(t, x, dx/dt)$ pode ser reduzida ao sistema de equações de primeira ordem $dx/dt = y$, $dy/dt = f(t, x, y)$, e esta transformação é quase sempre feita antes de se implementar um método numérico. Portanto é suficiente considerar exclusivamente, sistemas de equações de primeira ordem. (Boyce, DiPrima)

Por simplicidade, vamos considerar um sistema com duas equações de primeira ordem

$$x' = f(t, x, y), \quad y' = g(t, x, y) \quad (1)$$

com as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

5.1. MÉTODO DE EULER

O problema de valor inicial (1) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

onde \mathbf{x} é o vetor com componentes x e y , \mathbf{f} é a função vetorial com componentes f e g e \mathbf{x}_0 é o vetor com componentes x_0 e y_0 . Assim, por exemplo, a fórmula de Euler se torna

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{f}_n$$

ou, escrevendo as componentes

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_n, x_n, y_n) \\ g(t_n, x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Note que as condições iniciais são usadas para determinar \mathbf{f}_0 , que é o vetor tangente à solução $\mathbf{X} = \varphi(t)$ no plano xy . Para encontrar \mathbf{X}_1 , temos que avançar na direção deste vetor tangente de um incremento h na variável t . Em seguida, calculamos um novo vetor tangente \mathbf{f}_1 , avançamos de um incremento h para determinar \mathbf{X}_2 e assim sucessivamente.

5.2. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Segundo Zill (2012), o método de Runge-Kutta de quarta ordem é um dos métodos mais precisos, então vamos considerar o RK4. Para passar de t_n a t_{n+1} , temos:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \left(\frac{h}{6}\right) (\mathbf{k}_{n1} + 2\mathbf{k}_{n2} + 2\mathbf{k}_{n3} + \mathbf{k}_{n4}),$$

Onde

$$\mathbf{k}_{n1} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{X}_n)$$

$$\mathbf{k}_{n2} = \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{X}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n1}]$$

$$\mathbf{k}_{n3} = \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{X}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n2}]$$

$$\mathbf{k}_{n4} = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{X}_n + h\mathbf{k}_{n3}).$$

5.3. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS AOS SISTEMAS LINEARES DE EDO'S

Considere o problema de valor inicial

$$x' = 2x + 4y$$

$$y' = -x + 6y$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 6,$$

Utilize o método de Runge-Kutta de quarta ordem para aproximar $x(0,6)$ e $y(0,6)$. Compare os resultados para $h = 0,2$ e $h = 0,1$

Solução: Ilustramos os cálculos de x_1 e y_1 com $h = 0,2$. Com as identificações $f(t, x, y) = 2x + 4y$, $g(t, x, y) = -x + 6y$, $t_0 = 0$, $x_0 = -1$ e $y_0 = 6$.

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-1, 6) \\ g(-1, 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1.2, 9.7) \\ g(1.2, 9.7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41,2 \\ 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(3.12, 11.7) \\ g(3.12, 11.7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53,04 \\ 67,08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_4 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(9.608, 19.416) \\ g(9.608, 19.416) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96,88 \\ 106,888 \end{pmatrix}$$

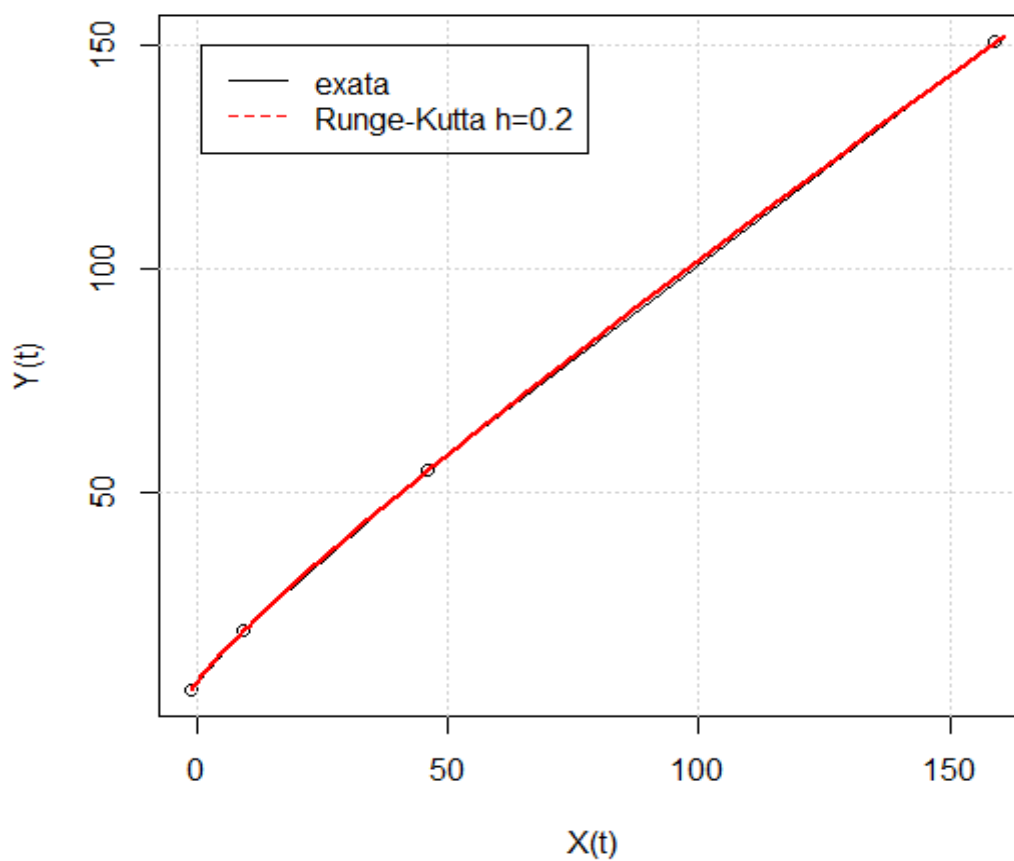
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{0,2}{6} \left[\begin{pmatrix} 22 \\ 37 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 41,2 \\ 57 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 53,04 \\ 67,08 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 96,88 \\ 106,888 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 9,2453 \\ 19,0683 \end{pmatrix}$$

Tabela 5 - Método de Runge-Kutta com $h=0,2$.

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0,00	-1,0000	6,0000
22,0000	41,20000	53,0400	96,8800	37,0000	57,0000	67,0800	106,8880	0,20	9,2453	19,0683
94,7635	155,782	189,435	318,424	105,1645	158,7865	184,858	289,107	0,40	46,0327	55,1203
312,5465	488,9315	580,0315	936,8345	284,689	424,2475	490,344	757,0955	0,60	158,9430	150,8192

Fonte: A autora.

Figura 8 - Solução Numérica para Sistema EDO.



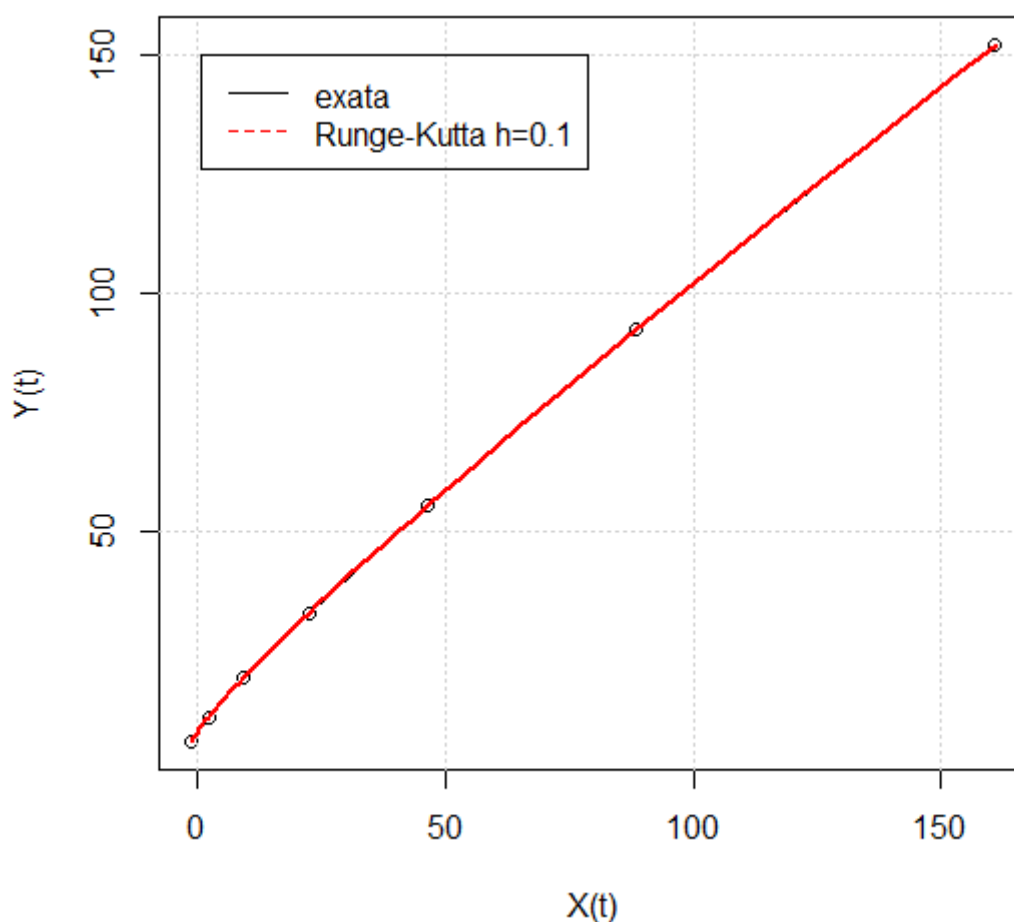
Fonte: A Autora.

Tabela 6 - Método de Runge-Kutta com $h=0,1$.

m_1	m_2	m_3	m_4	k_1	k_2	k_3	k_4	t_n	x_n	y_n
								0,0	-1,0000	6,0000
22,0000	31,6000	34,5600	48,7200	37,0000	49,520	49,5200	63,2560	0,1	2,3840	10,8883
48,3210	65,7420	70,7780	95,8700	62,9460	83,482	83,4820	105,9570	0,2	9,3379	19,1332
95,2080	125,8210	134,2580	177,6090	105,4610	138,872	138,8720	175,3580	0,3	22,5541	32,8539
176,5240	229,0900	243,0550	316,5540	174,5690	228,549	228,549	287,3930	0,4	46,5103	55,4420
314,7880	403,4960	426,3870	549,2020	286,1410	356,245	372,840	467,2070	0,5	88,5729	93,3006
546,3480	694,0290	731,247	934,1070	465,2310	577,482	603,774	754,3700	0,6	160,7563	152,0025

Fonte: A autora.

Figura 9 Solução Numérica para Sistema de EDO.



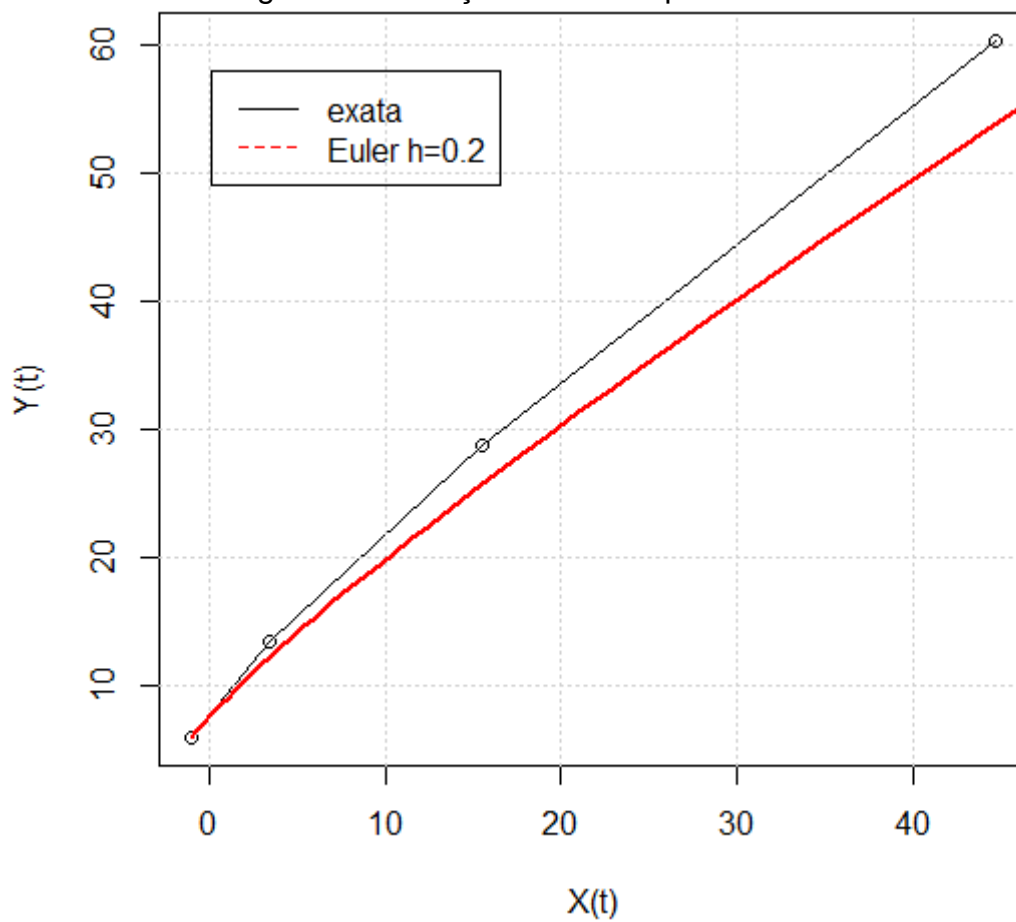
Fonte: A Autora.

Tabela 7 - Método de Euler com $h=0.2$.

tn	Xn	Yn
0.0	-1.000	6.000
0.2	3.400	13.400
0.4	15.480	28.800
0.6	44.712	60.264

Fonte: A Autora.

Figura 10 - Solução Numérica para Sistema de EDO.



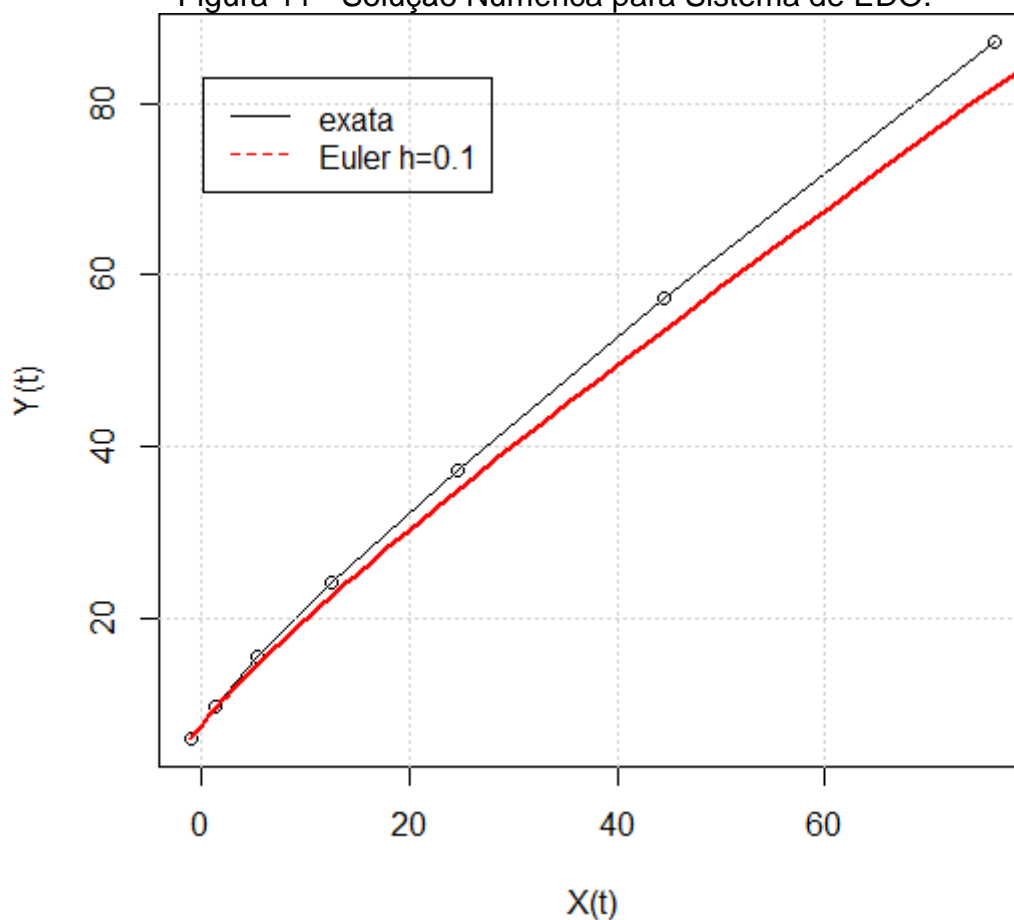
Fonte: A Autora.

Tabela 8 - Método de Euler com $h=0.1$.

tn	Xn	Yn
0.0	-1.00000	6.00000
0.1	1.20000	9.70000
0.2	5.32000	15.40000
0.3	12.54400	24.10800
0.4	24.69600	37.31840
0.5	44.56256	57.23984
0.6	76.37101	87.12749

Fonte: A Autora.

Figura 11 - Solução Numérica para Sistema de EDO.



Fonte: A Autora.

Note que o método analítico do PVI é dado por $x(t) = (26t - 1)e^{4t}$, $y(t) = (13t + 6)e^{4t}$. Por essas equações, vemos que os valores exatos são $x(0,6) = 160,9384$ e $y(0,6) = 152,1198$. Desta forma podemos concluir que a medida que o incremento h diminui, mais preciso se torna o cálculo e que o método de Runge-Kutta se aproxima mais da solução exata.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares mostrando que as EDO's nem sempre apresentam solução analítica ou exata e que muitas vezes temos que recorrer a métodos alternativos, como o numérico, já que os métodos numéricos têm a vantagem de sempre poderem ser aplicados, principalmente quando o problema possui equações não-lineares e é difícil de ser solucionado analiticamente.

Os métodos numéricos consistem na aproximação da solução de um problema, dentre eles destacamos o método de Euler e Runge Kutta de quarta ordem, que são os métodos que mais se aproximam da solução exata.

Para tanto utilizamos o programa R para facilitar os resultados dos sistemas, já que tem casos que quanto menor a amplitude de um dado problema de valor inicial, mais trabalhoso se torna o cálculo para ser resolvido à mão.

Portanto a abordagem numérica de EDO's com auxílio de ferramentas computacionais para a compreensão de problemas práticos de interesse científico e social, desperta no estudante do curso de matemática uma visão mais ampliada sobre aplicações de equações diferenciais ordinárias e ainda torna o resultado dos cálculos mais precisos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Horacio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2ª Ed. São Paulo: Engagé Learning, 2012.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3ª Ed. Volume 02. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.