



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
FACULDADE DE GEOFÍSICA

**FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA APLICADO A IMAGENS SÍSMICAS**

Belém  
2016

**NATIÊ ALMEIDA ALBANO**

**FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA APLICADO A IMAGENS SÍSMICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para a obtenção do título de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Prof. Jessé Carvalho Costa.

Belém-Pará  
2016

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)  
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFGA

---

Albano, Natiê Almeida, 1991 -

Filtro de difusão complexa aplicado a imagens  
sísmicas / Natiê Almeida Albano. – 2015.

67 f : il.; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Jessé Carvalho Costa

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –  
Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências,  
Faculdade de Geofísica, Belém, 2015.

1. Processamento de imagens. 2. Prospecção  
sísmica. I. Título.

---

CDD 22 ed. 621.367

NATIÊ ALMEIDA ALBANO

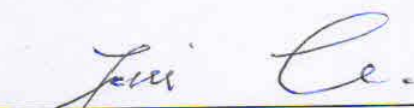
FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA APLICADO À IMAGENS SÍSMICAS


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção de grau de Bacharel em Geofísica.


Data da defesa: 20 de maio de 2016.

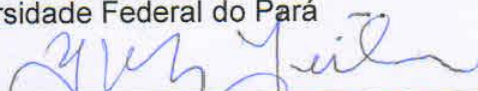
Conceito: EXC

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jessé Carvalho Costa - Orientador  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Cristiano Mendel Martins - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Lourenildo Willame Barbosa Leite - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

Para Antônio Albano, meu querido  
e amado pai (*in memoriam*).

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meu amado pai que, mesmo estando presente em minha vida por poucos anos, teve tempo necessário para me passar muitos dos princípios que tenho hoje. Sou grata também a minha mãe, Elba Almeida, pelos seus ensinamentos e incentivos ao longo da minha caminhada.

Às minhas irmãs, Ellen, Luana e Suzana pelos momentos em que tivemos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para nossa educação. Ao meu irmão Helder pelo incentivo e a toda família Bandeira que torceu por mim.

Aos meus sobrinhos, Ian Bernardo, Isabela Vitória e Ana Louise, pelos momentos felizes e descontraídos.

Agradeço ao prof<sup>o</sup>. Dr. Jessé Costa pelas orientações prestadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

A todo o corpo docente desta faculdade, uma vez que todos, de alguma forma contribuíram para o meu crescimento social e intelectual.

Agradeço a todos os colegas da turma 2010 que torceram por mim. Em especial, às minhas amigas Erlane Santos e Glessiane Vasconcelos por estarem ao meu lado durante esses quatro anos de curso, pela troca de conhecimento, conselhos, carinhos, pelos momentos felizes e desesperados que sempre passamos juntas.

Ao meu amigo e companheiro Iverson Angelim por estar ao meu lado em todos os momentos, me apoiando, incentivando, ajudando e trocando ensinamentos, sempre com carinho e delicadeza, fazendo com que o peso da graduação fosse mais leve para mim.

A todo corpo administrativo desta faculdade por toda a ajuda prestada nas partes burocráticas do curso, em especial à secretária Socorro por ter sido tão prestativa. À banca examinadora deste trabalho Cícero Régis, Cristiano Mendel e Lourenildo Leite que certamente irá contribuir para a sua melhora. E a todos que, de alguma maneira contribuíram para a elaboração e conclusão do mesmo.

Eu quero ficar perto de tudo que acho certo até o dia em que eu mudar de opinião. A minha experiência, meu pacto com a ciência, meu conhecimento é minha distração.

(Danni Carlo)

## RESUMO

Filtros de difusão vêm sendo uma opção para atenuação de ruído em imagens sísmicas. Este trabalho discute Filtro de Difusão Complexa como metodologia para suavização estrutural. Filtros de Difusão são construídos a partir da solução de equações diferenciais parciais (EDPs). Neste trabalho, o Filtro de Difusão Complexa é construído através de uma extensão da proposta de Hale para suavização estrutural de imagens sísmicas, na qual o tensor de difusividade é ponderado por um parâmetro complexo. O Filtro de difusão complexo produz duas imagens de saída, uma associada a parte real e outra associada a parte imaginária. A parte real é suavizada ao longo dos refletores sísmicos, enquanto que a parte imaginária ressalta mais fortemente eventos normais aos refletores, apresentando-se como um possível detector de descontinuidades. Neste trabalho, discutimos a teoria desses tipos de filtros e fazemos aplicações ao processamento de imagem sísmica como: suavização direcional de modelos de velocidade, filtragem estrutural de imagens migradas e condicionamento do gradiente de funções objetivo usadas na inversão do campo de onda sísmico.

Palavras chaves: Processamento de imagem sísmica. Suavização. Filtro de Difusão Complexa.

## **ABSTRACT**

Diffusion filters have been an option for noise attenuation in seismic imaging. This paper discusses Complex diffusion filter as a methodology for structural smoothing. Diffusion filters are constructed from the solution of partial differential equations (PDEs). The Complex Diffusion filter is constructed through an extension of Hale's filter for structural smoothing of seismic images where the diffusivity tensor is weighted by a complex parameter. The complex diffusion filter produces two output images, one associated to real part and another associated to imaginary part . The real part is smoothed over the seismic reflectors, while the imaginary part emphasizes more strongly normal events to reflector, appearing as a possible discontinuities detector. In this paper, we discuss the theory of these types of filters and make applications to seismic image processing as directional smoothing of speed models, structural filtering of migrated images and preconditioning of the objective functions gradient used in the inversion of seismic wave field.

Key words: Seismic Image Processing. Smoothing. Complex Diffusion Filter.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Relação entre intensidade de difusão e $\sigma$ .....	15
Figura 2 - Difusão Isotrópica aplicado à imagens sísmicas.....	15
Figura 3 - Filtragem por difusão isotrópica não linear aplicado no processamento de imagens sísmicas.....	16
Figura 4 - Matrizes tensoras e suas respectivas elipsoides .....	18
Figura 5 - Demonstração da anisotropia em uma imagem de Van Gogh.....	12
Figura 6 - Imagem original de “Lena” .....	22
Figura 7 - Resultado da filtragem anisotrópica em imagens sísmicas.....	24
Figura 8 - Difusão complexa com valor de teta grande ( $\theta = 14\pi/30$ ).....	27
Figura 9 - Difusão complexa com valor de teta pequeno ( $\theta = \pi/30$ ) .....	28
Figura 10 - Comportamento do parâmetro $\beta$ para o operador gradiente 2D como uma função da frequência (número de onda) e do ângulo.....	32
Figura 11 - Efeito da variação crescente dos parâmetros $\sigma_x$ e $\sigma_z$ na fotografia na Cameraman.....	35
Figura 12 - Variação crescente do parâmetro $\alpha_r$ na fotografia Cameraman .....	35
Figura 13 - Aplicação do Filtro De Difusão Complexa em uma imagem totalmente formada por ruído aleatório. ....	36
Figura 14 - Efeito do filtro de suavização na pintura de Van Gogh. ....	37
Figura 15 - Modelo de velocidade do Dado Sigsbee.....	38
Figura 16 - Gradiente do Modelo Sigsbee: informações sobre a orientação local da imagem.....	39
Figura 17 - Tensor de Estrutura ( $\mathcal{S}$ ) do Modelo Sigsbee .....	39
Figura 18 - Tensor de Difusão ( $\mathcal{D}$ ) do Modelo Sigsbee. ....	40
Figura 19 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa no modelo sigsbee.....	41
Figura 20 - Modelo de velocidade do Dado Marmousi. ....	42
Figura 21 - Gradiente do Dado Marmousi: informações sobre a orientação local da imagem. ....	43
Figura 22 - Tensor de Estrutura ( $\mathcal{S}$ ) do Modelo Marmousi.....	43
Figura 23 - Tensor de Difusão ( $\mathcal{D}$ ) do Modelo Marmousi .....	44
Figura 24 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa sobre o modelo de velocidade do Dado Marmousi. ....	45

Figura 25 - Verificação das direções de suavização na imagem ruído do Modelo Marmousi.....	46
Figura 26 - Dado Marmousi Migrado no tempo .....	47
Figura 27 - Gradiente do RTM Marmousi: informações sobre a orientação local da imagem.....	48
Figura 28 - Tensor de Estrutura ( $S$ ) do Marmousi- RTM.....	48
Figura 29 - Tensor de Difusão ( $D$ ) do RTM Marmousi. ....	49
Figura 30 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa no Modelo Marmousi -RTM ...	50
Figura 31 - Verificação das direções de suavização na imagem Marmousi - RTM. .	51
Figura 32 - Gradiente da imagem FWI: informações sobre a orientação local da imagem.....	55
Figura 33 - Tensor de Estrutura ( $S$ ) para a aplicação FWI .....	55
Figura 34 - Tensor de Difusão ( $D$ ) para a aplicação FWI .....	56
Figura 35 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexo para aplicação FWI.....	57
Figura 36 - Verificação das direções de suavização na imagem ruído FWI .....	58

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2 DIFUSÃO E FILTROS CONVENCIONAIS</b> .....	14
2.1 FILTROS DE DIFUSÃO .....	14
<b>3 FILTRO DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICA APLICADO AO PROCESSAMENTO DE IMAGENS SÍSMICAS</b> .....	18
3.1 FILTRO DE VAN GOGH APLICADO A IMAGENS SISMICAS .....	20
3.1.1 Orientação local da imagem .....	20
3.1.2 O tensor de difusão.....	21
3.1.3 O fator de continuidade: Detecção de descontinuidade para seções sísmicas .....	22
3.1.4 Vantagens e desvantagens do filtro de difusao convencional.....	23
<b>4 FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA</b> .....	25
4.1 FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA LINEAR .....	25
<b>5 METODOLOGIA</b> ..	29
5.1 EQUAÇÃO DE HALE .....	29
5.1.1 Gradiente analítico 2D.....	30
<b>6 APLICAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS</b> .....	34
6.1 APLICAÇÃO EM IMAGENS SÍSMICAS.....	37
6.1.1 Suavização de modelos de velocidades .....	37
6.1.2 Filtragem estrutural de imagens migradas .....	46
6.1.3 Precondicionamento do gradiente de funções objetivo usadas na inversão do campo de onda sísmico.....	52
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	59
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	60
<b>APÊNDICES</b> .....	61
<b>APÊNDICE A</b> .....	62
<b>APÊNDICE B</b> ..	64
<b>APÊNDICE C</b> ..	66

## 1 INTRODUÇÃO

Durante o processamento sísmico é importante a utilização de metodologias que atenuem o ruído das imagens. Este trabalho discute uma alternativa para suavização de ruído através de uma nova proposta para implementar filtros de difusão.

Fehmers and Hocher (2003) trouxeram para o processamento de imagens sísmicas a técnica de suavização orientada com base na equação de difusão. Em seu trabalho, foi construído um filtro de suavização usando a equação de difusão anisotrópica; este processo ficou conhecido como Filtro de Difusão de Van Gogh. Seus resultados mostraram que este procedimento poderia ser muito útil para Interpretação Sísmica, uma vez que atenuava o ruído e melhorava as informações estruturais da imagem, caso isso fosse desejado. Por ser constituído basicamente pela solução numérica da equação de difusão, este é um filtro de fácil implementação através do método diferenças finitas; entretanto, o passo de evolução no tempo deve ser pequeno para garantir estabilidade numérica o que demanda um maior custo computacional.

Hale (2009), em seus trabalhos sobre filtros de suavização direcional, utilizou-se de uma equação diferencial parcial estacionária que possui maior eficiência computacional do que a equação de difusão e apresenta resultados semelhantes que os obtidos por Fehmers and Hocher (2003). Neste trabalho, adotamos a equação de Hale mas modulamos o tensor de difusividade com número complexo, transformando-a em um filtro de difusão complexa. Como resposta, este filtro tem duas imagens de saída, a parte real e a parte imaginária.

Segundo Gilboa (2003), a parte imaginária pode ser assumida como um detector de descontinuidades (segunda derivada suavizada), enquanto que a suavização da parte real é atuante na direção do auto-vetor associado ao maior auto-valor do tensor de difusão. No caso do processamento de imagens sísmicas, espera-se que a parte real seja suavizada ao longo das reflexões sísmicas e a parte imaginária detecte o contorno das descontinuidades estruturais e estratigráficas, como falhas e mudanças de litologia.

Com aplicação em diversas áreas da ciência, Filtros de Difusão Complexa vem sendo uma importante ferramenta de melhoramento de imagens médicas. No entanto, ainda não foi utilizado no processamento de imagens sísmicas anteriormente, dando a este trabalho um caráter experimental de tal método na área da Geofísica.

A organização deste trabalho é feita da seguinte forma: No capítulo 2 descrevemos a teoria dos filtros de difusão convencionais. No capítulo 3 apresentamos como filtro de difusão é adaptado para o processamento de imagens sísmicas. O capítulo 4 apresenta a teoria de uma nova classe desses filtros (Filtro de Difusão Complexa). O capítulo 5 é reservado para a exposição da metodologia utilizada para o filtro de difusão complexa. A aplicação numérica em imagens sísmicas e os resultados obtidos aparecem no capítulo 6, seguido da conclusão no capítulo 7.

## 2 DIFUSÃO E FILTROS CONVENCIONAIS

O fenômeno da difusão surge da interação dinâmica entre partículas que estão em um determinado meio. A propriedade de equilíbrio desta interação é expressa pela 1ª lei de Fick:

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D} \cdot \nabla u \quad (1)$$

Sendo  $\mathbf{j}$  a densidade de fluxo,  $\mathbf{D}$  o tensor de difusão e  $u$  a densidade de partículas. O próprio sistema tende a se compensar em direção ao equilíbrio de concentração no espaço. A observação de que o processo de difusão transporta massa sem destruí-la ou criá-la pode ser expressa matematicamente pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.1)$$

Substituindo (1) em (1.1) obtém-se a equação de difusão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla u) \quad (1.2)$$

### 2.1 FILTROS DE DIFUSÃO

O efeito da difusão depende da classe de simetria do tensor  $\mathbf{D}$ :

**a)** Se  $\mathbf{D} = D(\mathbf{x}) \mathbf{I}$ , o tensor de difusão é isotrópico e a difusividade  $D$  é um escalar.

Esta é a forma mais simples para o tensor de difusão. A equação de difusão linear e isotrópica:

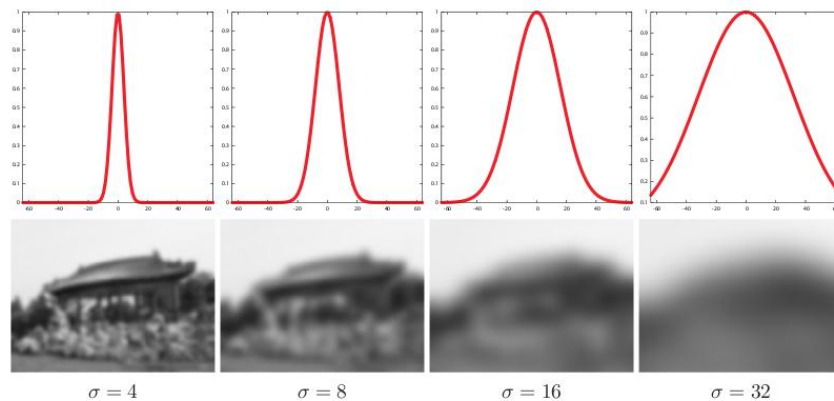
$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3)$$

Este processo é análogo ao processo da Covolução Gaussiana, sendo assim, a equação (1.3) tem solução analítica para um meio homogêneo e seu resultado é uma função gaussiana dada por:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-x^2/\sigma^2} \quad (1.4)$$

A fórmula (1.4) corresponde ao chamado Filtro Gaussiano. Ele possui dois parâmetros: a dimensão da janela e um valor para o desvio padrão máximo ( $\sigma$ ). O quanto a imagem será suavizada dependerá do ( $\sigma$ ), como pode ser observado na figura abaixo (figura 1).

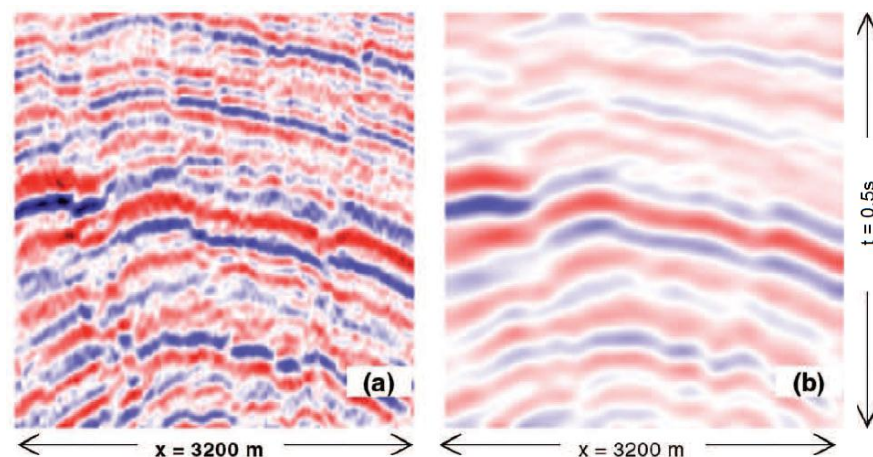
Figura 1- Relação entre intensidade de difusão e  $\sigma$ .



Fonte: <http://lvelhoimpa.br>.

Este tipo de filtragem remove o ruído das imagens, mas provoca perda de resolução da descontinuidade e com a ação de atenuação destas, os eventos relacionados às falhas podem ser deslocados de suas posições originais (figura 2).

Figura 2: Difusão Isotrópica aplicado à imagens sísmicas. (a) Imagem de entrada e (b) imagem filtrada.



Fonte: Adaptada de Fehmers and Hoher (2003).

**b)** Em um meio isotrópico heterogêneo,  $D(\mathbf{x})$ .

A equação de difusão é isotrópica linear:

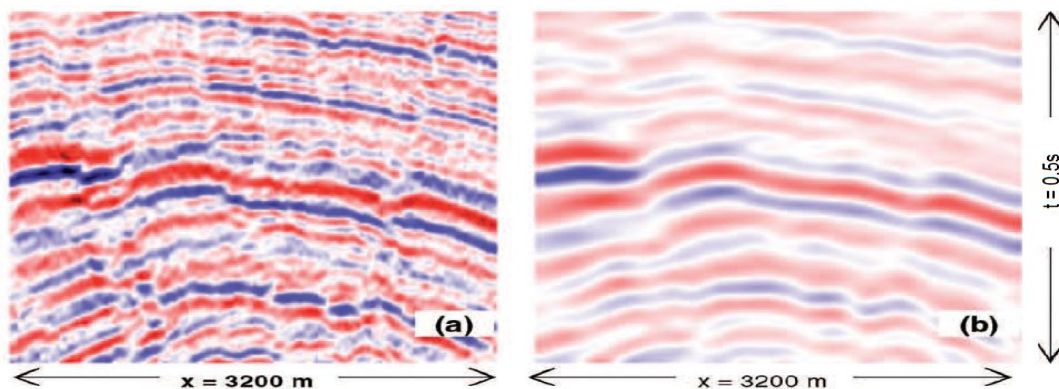
$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t))$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla D(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) + D(\mathbf{x}) \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

Esta proposta sugere a mesma construção do filtro de suavização gaussiano. Em cada pixel da imagem o modelo calcula, interativamente, uma máscara gaussiana com desvio padrão regulada por uma função parada de borda.

Fehmers and Hocher (2003) aplicaram este processo em imagens sísmicas e perceberam que algumas discontinuidades foram conservadas, no entanto, o efeito de borramento na imagem pode ter deslocado as falhas de sua localização original (Figura 3).

Figura 3- Filtragem por difusão isotrópica não linear aplicado no processamento de imagens sísmicas. (a) imagem de entrada e (b) o resultado da filtragem.



Fonte- Adaptada de Fehmers and Hocher(2003).

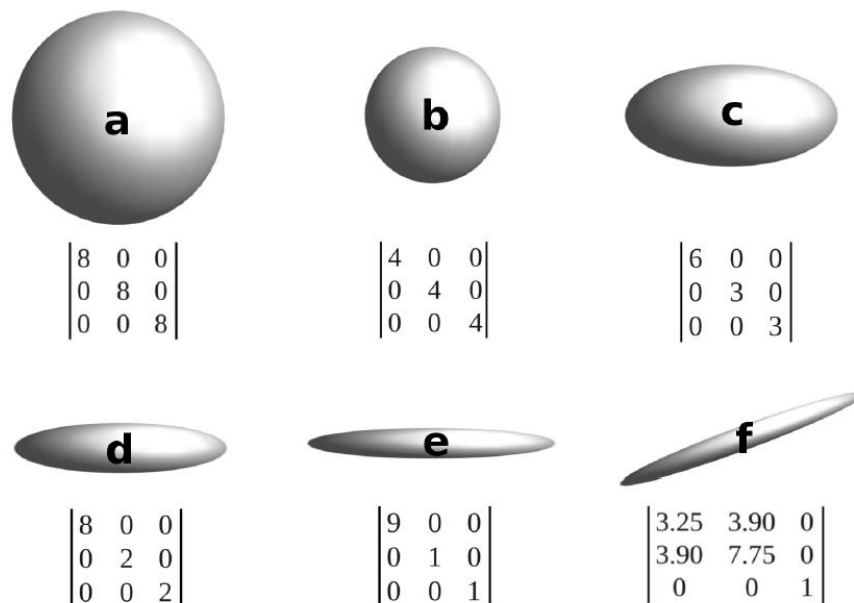
c)  $D$  é anisotrópico.

$D$  é tensor e introduz anisotropia à difusão, distinguindo as direções de orientação. Em termos matemáticos, as medidas de difusão em diferentes orientações são uteis para preencher o tensor de difusão dado pela matriz abaixo (1.6):

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Os termos da diagonal correspondem às medidas nos três eixos ortogonais,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A resolução do tensor de difusão segue por álgebra linear com o cálculo de autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  e autovetores  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  da matriz (1.6). Os autovalores informam a intensidade de difusão para cada orientação e os autovetores a direção em que a difusão ocorre, Senra (2013). A figura 4 mostra o comportamento dos tensores para cada tipo de difusão.

Figura 4- Matrizes tensoras e suas respectivas elipsoides. Os tensores em “a” e “b” são ambos isotrópicos, veja pelos valores de mesma intensidade na diagonal principal e suas variâncias nulas. Os autovalores de “e” e “f” são idênticos, porém seus autovetores são distintos (as orientações das orientações da difusão são diferentes).



Fonte: Senra (2013).

### 3 FILTRO DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICA APLICADO AO PROCESSAMENTO DE IMAGENS SÍSMICAS.

Weickert (1998) propôs um estudo interdisciplinar a cerca dos conceitos do fenômeno da difusão. Sua proposta era desenvolver um filtro que suavizasse toda e qualquer imagem. Em seguida, em 1999 foi criada uma geração de filtros que exerciam sob as imagens uma suavização orientada preservando suas descontinuidades. Fehmers and Hoher (2003) aplicaram este método em imagens sísmicas.

Estes filtros baseiam-se em uma aplicação da técnica de difusão anisotrópica e, devido características mostradas na figura 5, este processo ficou conhecido como “Filtro de Van Gogh”.

Figura 5- Demonstração da anisotropia em uma imagem de Van Gogh. O artista orientava as pinceladas de tinta diferentemente para cada direção, adicionando assim uma anisotropia em suas imagens.



Fonte- Fehmers and Hoher (2003).

A construção e adaptação do filtro de difusão anisotrópico para o processamento de imagens sísmicas devem conter as seguintes características:

- 1- Análise da orientação: Determinação da orientação local da reflexão sísmica.
- 2- Detecções de borda: detecção de possíveis terminações de reflexões.
- 3- Suavização dos dados na orientação local da imagem, com mínima ou nem uma filtragem através das descontinuidades, isso irá garantir que o filtro preserve as descontinuidades presentes nas imagens sísmicas, como as falhas.

Difusão anisotrópica age sobre o ruído presente nas imagens. O algoritmo é construído de modo que difunda a amplitude sísmica. Este resultado é obtido a partir da imposição de que o tensor de difusão  $\mathbf{D}$  deve ser calculado a partir da estrutura local da imagem, fazendo com que a difusão seja sempre paralela às reflexões (a orientação das reflexões não muda, somente sua amplitude é suavizada).

### 3.1 FILTRO DE VAN GOGH APLICADO A IMAGENS SISMICAS

Para que o filtro de difusão anisotrópico seja aplicado em imagens sísmicas, devemos lembrar algumas equações e renomear alguns parâmetros. Começando pela equação 1 (1ª Lei de Fick):

$$\mathbf{j} = -\mathbf{D} \cdot \nabla u$$

Para nós, esta equação expressa que o gradiente da amplitude sísmica provoca um fluxo a partir das altas para as baixas amplitudes. Onde  $\nabla u$  é o gradiente da amplitude sísmica  $u$ , e  $\mathbf{D}$  é o tensor de difusão.

Quanto a equação da continuidade (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\text{div } \mathbf{j} \quad ,$$

aqui, esta expressão é a garantia de que a amplitude sísmica média não muda. Ligando a equação da continuidade com a 1ª Lei de Fick, se tem a equação da difusão já apresentada:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla (\mathbf{D} \cdot \nabla u) \quad (2)$$

Para que as discontinuidades presentes na imagem sísmica não desapareçam a partir de alguns passos de difusão, se introduz um fator de continuidade  $\varepsilon$  em (2), logo:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{D} \nabla u) \quad (2.1)$$

Temos agora uma equação de difusão anisotrópica aplicável em imagens sísmicas que depende de três parâmetros:  $u$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\varepsilon$ . “ $u$ ” é a amplitude da imagem sísmica de entrada, mas o tensor de difusão  $\mathbf{D}$  e o fator de continuidade  $\varepsilon$  ainda não são conhecidos. As seções que seguem mostram como calcular o tensor de difusão a partir da orientação local da imagem e por último, como obter o fator de continuidade.

### 3.1.1 Orientação local da imagem

A orientação em uma imagem é calculada através do seu gradiente, no caso,  $\nabla u$ . Como o gradiente é horizontal aos refletores sísmicos, este contém informações sobre a orientação local da imagem. Mas, para calcular a orientação média da imagem em uma determinada região, calcular-se a média da orientação através do cálculo do gradiente do tensor quadrado, ou seja, através de um tensor de estrutura  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \nabla u (\nabla u)^T \quad (2.2),$$

onde o subscrito “ $T$ ” significa a transposição.  $\mathbf{S}$  é um tensor semidefinido simétrico e positivo de posto 1 (classifica um meio que, de todos os autovalores de  $\mathbf{S}$ , um seja diferente de zero).  $\mathbf{S}$  é um tenor de estrutura e contém a mesma informação que  $\nabla u$ .

A orientação local da imagem é obtida a partir do cálculo da média real desta orientação em diferentes escalas. Para isto, aplica-se um filtro passa-baixa em  $\mathbf{S}$ , elemento por elemento, ao longo de uma região determinada pelo parâmetro de escala  $\beta$ . Este filtro é obtido a partir da convolução de  $\mathbf{S}$  com um Kernel simétrico e positivo  $K_\beta$ , assim:  $\mathbf{S}_\beta = \mathbf{S} * K_\beta$ .

Esta operação é aplicada a todos os elementos do tensor  $\mathcal{S}$  separadamente.  $\mathcal{S}_\beta$  torna-se um tensor estrutural de escala  $\beta$ , e conseqüentemente a estrutura da orientação ficará na mesma escala.

O fato de  $\mathcal{S}_\beta$  ser um tensor semidefinido simétrico e positivo condiciona que todos os seus autovalores sejam reais e maiores do, que ou igual a zero, ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 = 0$ ). Fazendo uma análise tensorial, os autovetores e autovalores de  $\mathcal{S}$  contêm informações sobre a orientação local da imagem.

### 3.1.2 O tensor de difusão

Uma vez definido o tensor de estrutura, a construção do tensor de difusão torna-se simples.  $\mathcal{S}_\beta$  e  $\mathbf{D}$  possuem os mesmos autovetores, diferindo entre si em seus autovalores. Sendo  $\mathcal{S}_\beta$  um tensor simétrico, o seu espectro de decomposição pode ser representado pelo somatório:

$$\mathcal{S}_\beta = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i v_i^T \quad (2.3),$$

onde  $v_i^T v_j = \delta_{ij}$ ,  $d$  é a dimensão da imagem e  $\lambda_i$  são os autovetores que formam uma base ortogonal normalizada. Assim como  $\mathcal{S}$ , o tensor de difusão pode também ser formalmente escrito como:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^d \mu_i v_i v_i^T \quad (2.4),$$

Em que  $\mu_i$  são os autovalores de  $\mathbf{D}$ . Ao adotar  $\mu_1 = 0, \mu_2 = \mu_3 = 1$ , para os autovetores paralelos às estruturas obtém-se autovalores igual a 1, enquanto que o autovalor do autovetor perpendicular às reflexões é definido como 0. Isto inibe a amplitude sísmica na direção perpendicular a reflexão, como deveria, uma vez que difusão nesta direção levaria a destruir rapidamente as reflexões.

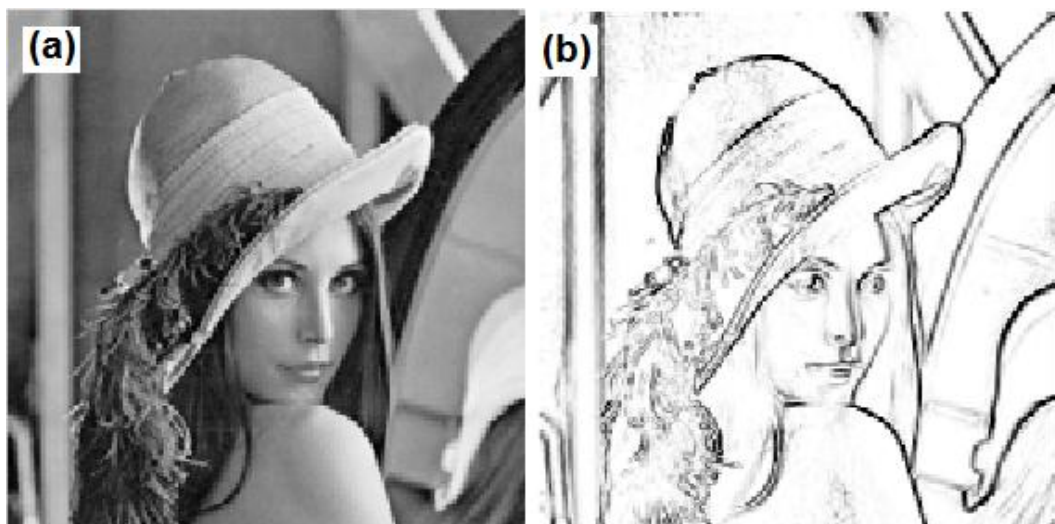
### 3.1.3 O fator de continuidade: detecção de descontinuidade para seções sísmicas

Para que filtros de atenuação de ruído não reduzam a resolução do dado sísmico por suavizar também as descontinuidades, a técnica de detecção de borda pode ser emprestada da literatura do processamento de imagem digital para identificar as descontinuidades em uma seção sísmica.

No processamento de imagem como um todo, “borda” como quantidade pode ser identificada como a mudança brusca em uma imagem digital. Estas, muitas vezes precisam ser tratadas de forma diferente para cada local da imagem. Um tipo de algoritmo de detecção de borda amplamente utilizado é o baseado na magnitude do gradiente em diferentes sentidos, estes algoritmos são suficientemente eficientes para detectar as arestas de imagens digitais, Xinxiang Li (2005).

Esta eficiência pode facilmente ser observada na figura 6, onde é mostrado uma imagem (a) e as suas bordas detectadas por este tipo de algoritmo (b).

Figura 6 - Imagem original de “Lena”. (a) e as bordas detectadas pelo algoritmo (b).



Fonte- Xinxiang Li (2005)

As arestas importantes para o processamento e interpretação de dados sísmicos são descontinuidades de eventos de reflexão. Fehmers et al (2003) desenvolveu um algoritmo de detecção de descontinuidades sísmica baseado em

diferentes resultados de tamanhos de operações de suavização, obtendo bons resultados.

Como vimos na seção 3.1.1, o tensor estrutural traz informações sobre a coerência da orientação. A mudança do tensor estrutural sobre escala pode ser expresso em um fator de continuidade  $\varepsilon$ :

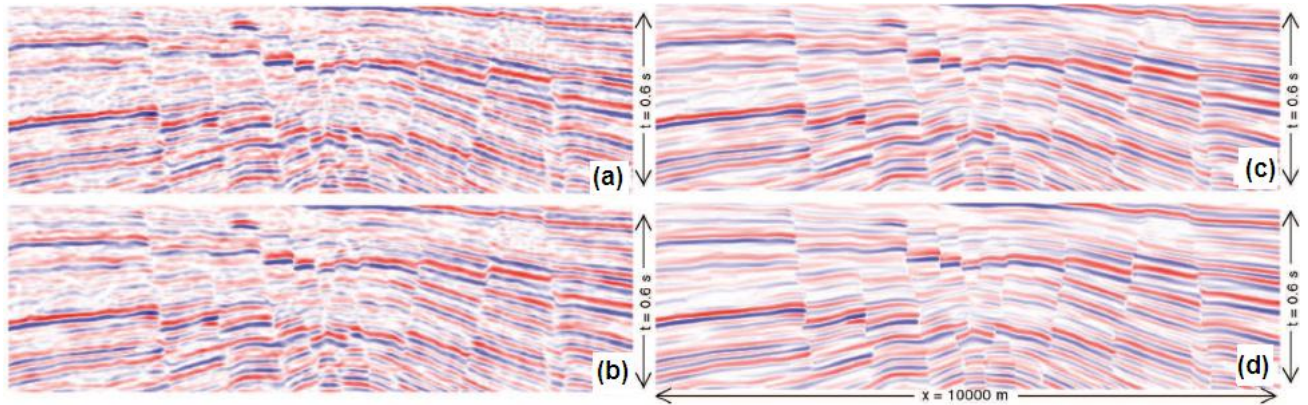
$$\varepsilon = \frac{T_r(\mathcal{S}_\sigma \mathcal{S}_p)}{T_r(\mathcal{S}_\sigma) \cdot T_r(\mathcal{S}_p)} \quad (2.5),$$

onde  $\mathcal{S}_\sigma$  e  $\mathcal{S}_p$  são tensores estruturais em duas escalas diferentes.  $T_r$  denota o traço e o produto do tensor no numerador é obtido através de uma multiplicação matricial padrão. Nesta equação, pode ser mostrado que  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , onde o menor valor indica a presença de uma falha, enquanto que o maior valor o contínuo. Quando uma descontinuidade é detectada, a filtragem neste local não é aplicada, ou seja,  $\varepsilon = 0$ . Mas quando não forem detectadas descontinuidades, a força total do filtro é aplicada,  $\varepsilon = 1$ .

### **3.1.4- Vantagens e desvantagens do filtro de difusão anisotrópico convencional**

Filtro de Difusão Anisotrópico preserva suas características quando aplicado em imagens sísmicas: suaviza o modelo. A operação de suavização age paralela às reflexões sísmicas condicionadas por um fator de continuidade a não operar além das terminações da reflexão – falhas, (figura 7). Por ser constituído basicamente pela solução numérica da equação de difusão, este é um filtro de fácil implementação através do método diferenças finitas; entretanto, o passo de evolução no tempo deve ser pequeno para garantir estabilidade numérica, o que demanda um maior custo computacional.

Figura 7- Resultado da filtragem anisotrópica em imagens sísmicas. A sequencia segue de (a) – (d), onde (a) é a imagem de entrada e (d) o resultado final da filtragem.



Fonte- Adaptada de Fehmers and Hoher (2003).

## 4 FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA

Uma alternativa de filtro de suavização que vem sendo utilizada em outras áreas de estudo é a aplicação da difusividade complexa. Filtro de Difusão Complexa é construído de forma que o coeficiente de difusão seja modulado por um valor complexo. Como resultado obtêm-se duas imagens de saída: uma representa a parte real e a outra, a sua correspondente imaginária.

Analises preliminares da difusão complexa em outras áreas de conhecimento mostram que a parte real é suavizada como um todo, enquanto que a parte imaginária pode ser assumida como um possível detector de descontinuidades (segunda derivada suavizada), pois preserva o contorno da imagem. Aqui mostraremos o caso em que a difusão complexa é linear.

### 4.1 FILTRO DE DIFUSÃO COMPLEXA LINEAR

A equação de difusão linear é análoga ao processo de Convolução Gaussiana. Na representação original de Gauss, a imagem original é convolvida com uma Gaussiana de desvio padrão  $\sigma = \sqrt{2}$ . Esta relação é semelhante com a resolução da equação difusiva linear, sendo o coeficiente de difusão constante  $c = 1$ .

$$I_t = c\nabla^2 I, \quad I_{t=0}, \quad 0 < c \in \mathbb{R} \quad (3),$$

onde  $I$  representa a imagem.

Para construção do Filtro de Difusão Complexa Linear, consideramos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} I_t &= cI_{xx}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \\ I(\mathbf{x}; 0) &= I_0 \in \mathbb{R}, \quad c, I \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Quando  $c \in \mathbb{R}$  dois casos podem ocorrer: para  $c > 0$  a difusão constitui-se num processo “bem-colocado” para a frente, enquanto que para  $c < 0$  um processo

de difusão inverso “mal colocado” é obtido. No caso geral, a condição inicial é que a imagem original ( $I_0$ ) seja complexa.

A solução fundamental  $h(x, t)$  deste problema deve satisfazer a relação:

$$I(x, t) = I_0 * h(x, t) \quad (3.2)$$

Reescrevendo o coeficiente de difusão complexo como  $c = re^{i\theta}$  e como não existe solução fundamental estável para o processo de difusão inverso, a análise é restrita para um valor positivo e real de  $\theta$ , que é  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

A variável real  $t$  é substituída por um tempo complexo  $\tau = ct$ , produzindo então  $I_\tau = I_{xx}$ ,  $I(x; \tau) = I_0$ . Como é idêntica com a forma da equação da difusão de valor real, a solução fundamental pode assumir a forma de uma Gaussiana.

Satisfazendo a condição inicial  $I(x; 0) = I_0$ , então:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} h(x, \tau \rightarrow 0) dx = 1 \quad (3.3)$$

$$(b) \int_{|x|=\epsilon} |h(x, \tau \rightarrow 0)| dx \rightarrow 0, \text{ onde } \epsilon = \epsilon(\tau), \lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(\tau) = 0$$

Revertendo de volta para  $t$ , encontramos:

$$h(x; t) = \frac{K}{2\sqrt{\pi t c}} e^{-x^2/(4tc)} \quad (3.4),$$

onde  $k$  é uma constante calculada de acordo com as condições iniciais. Para  $c \in \mathbb{R}$  temos  $c = 1$ , separando os expoentes reais e imaginários obtemos:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{K e^{-i\theta/2}}{2\sqrt{\pi t r}} e^{-x^2 \cos\theta/(4tr)} e^{ix^2 \sin\theta/(4tr)} \\ &= K A g_\sigma(x; t) e^{i\alpha(x, t)}, \end{aligned} \quad (3.5),$$

onde :

$$A = \frac{e^{-i\theta/2}}{\sqrt{\cos\theta}}, \quad g_\sigma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x)}} e^{-x^2/2\sigma^2(t)}$$

e

$$\alpha(\mathbf{x}; t) = \frac{x^2 \sin \theta}{4tr}, \quad \sigma(t) = \sqrt{\frac{2tr}{\cos \theta}} \quad (3.6)$$

A condição inicial  $I(\mathbf{x}; 0) = I_0$  requer  $h(\mathbf{x}; t \rightarrow 0) = \delta(t)$ . Uma vez que  $\lim_{t \rightarrow 0} g_\sigma(\mathbf{x}, t)e^{i\alpha} = \delta(\mathbf{x})$ , logo  $K = \frac{1}{A}$  (onde  $K = 1$  para o caso do real positivo  $c(\theta = 0)$ ). A solução fundamental é portanto:

$$h(\mathbf{x}, t) = g_\sigma(\mathbf{x}, t)e^{i\alpha(\mathbf{x}, t)} \quad (3.7)$$

Com o desvio padrão da gaussiana  $\sigma$  e a função expoente  $\alpha$  como dado na em (3.6).

Quando  $\theta \rightarrow 0$ , a parte imaginária pode ser considerada como uma segunda derivada suavizada do sinal inicial, fatorado por  $\theta$  e pelo tempo  $t$ . Deve-se então fazer uma aproximação para os menores valores de teta (Apêndice A). As figuras 8 e 9 mostram o efeito da escolha do teta para o filtro complexo.

Figura 8 - Difusão complexa com valor de teta grande ( $\theta = 14\pi/30$ ). Na sequência de imagens do topo - valores real; na sequência de imagens inferiores - valores imaginários.



Fonte - Gilboa (2003).

Figura 9 - Difusão complexa com valor de teta pequeno ( $\theta = \pi/30$ ). Na sequência de imagens do topo - valores reais; na sequência de imagens inferiores – valores imaginários.



Fonte- Gilboa (2003)

## 5 METODOLOGIA

Hale (2009), em seus trabalhos sobre filtros de suavização direcional, utilizou-se de uma equação diferencial parcial estacionária que possui maior eficiência computacional que a equação de difusão e apresenta resultados semelhantes que os obtidos por Fehmers and Hocher (2003).

Utilizamos então a equação de Hale, mas modulamos o tensor de difusividade com número complexo, transformando-a em um Filtro de Difusão Complexa. Para o cálculo da orientação da imagem, seguimos a construção do operador gradiente proposta por Mahammed (2013), onde ele mostra que o seu operador possui melhor eficiência para detecção das orientações da imagem que os demais.

### 5.1 EQUAÇÃO DE HALE

A Equação de Hale é dada como:

$$g(\mathbf{x}) - \alpha \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad (4),$$

onde  $f(\mathbf{x})$  representa a imagem de entrada e  $g(\mathbf{x})$  a imagem de saída suavizada. O fator difusividade do filtro ( $\alpha$ ) controla a extensão e a forma da suavização.

Ao contrário do modelo proposto por Fehmers (2003), a solução numérica desta equação não depende do tempo. Porém, suavização com a Equação de Hale requer solução numérica de um grande sistema de equações esparsas. Estas equivalem a uma única etapa da solução numérica da equação diferencial parcial convencional, mas possivelmente com um grande tempo numa solução numérica implícita e incondicionalmente estável.

Aproximação por diferenças finitas é o suficiente para obtenção de um sistema simétrico positivo-semidefinido esparso. Podemos resolver tais equações usando interações por gradiente conjugado, como mostramos no Apêndice B.

Como o objetivo da aplicação é modelar o processo de difusão complexa, o fator de difusividade ( $\alpha$ ) é modulado por uma quantidade complexa ( $\tilde{\alpha}$ ).

Sendo  $\alpha = \tilde{\alpha} = \alpha_r e^{i\theta}$ , a equação (4) pode ser reescrita como:

$$g(\mathbf{x}) - \alpha_r e^{i\theta} \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

O gradiente da imagem ( $\nabla g$ ) foi calculado segundo a demonstração de Mohammed (2013). A construção deste operador obedece 3 etapas:

- 1- Generalização de todos os operadores numéricos em uma representação parametrizada por um parâmetro ajustável  $\beta$ .
- 2- Aplicação deste operador em uma onda plana congelada (equivalente a um único Harmônico de Fourier).
- 3- Equalização do resultante numérico das derivadas direcionais com aqueles obtidos analiticamente pela fórmula da onda plana e resolver para o parâmetro mencionado na primeira etapa.

Com o objetivo de obter uma maior precisão direcional, este método é baseado no “sentido único”. O parâmetro resultante é uma função da frequência e direção, mas não é altamente sensível a eles. O operador gradiente é construído em 2D, mas pode ser facilmente generalizado para o caso 3D, Mohammed (2013).

Aqui consideramos o caso em que ele é 2D.

### 5.1.1 Gradiente analítico 2D

Uma onda plana em um tempo congelado é equivalente a um único harmônico Fourier e pode ser expressa como:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = e^{i\pi k(l_x x + l_z z)} \quad (5),$$

onde:

$$l_x = \text{sen}\theta \quad e \quad l_z = \text{cos}\theta;$$

sendo  $\theta$  o ângulo da onda incidente relativo ao eixo  $\mathbf{z}$  e  $k$  a frequência normalizada ou número de onda.

O gradiente analítico é obtido a partir da diferenciação da equação (5) :

$$\begin{cases} \nabla_x = \frac{\partial F}{\partial x} = i\pi k F l_x = i\pi k F \text{sen}\theta \\ \nabla_z = \frac{\partial F}{\partial z} = i\pi k F l_z = i\pi k F \text{cos}\theta \end{cases} \quad (5.1)$$

O ângulo do gradiente analítico A e a magnitude B são dados por:

$$\begin{cases} A = \tan^{-1} \left( \frac{\nabla_x F}{\nabla_z F} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{i\pi k F \text{sen}\theta}{i\pi k F \text{cos}\theta} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \right) = \theta \\ B = \left| \sqrt{\nabla_x^2 F + \nabla_z^2 F} \right| = k\pi |F| \end{cases} \quad (5.2)$$

Cada operador gradiente 2D pode ser expresso por meio de uma matriz ou, equivalentemente, de forma algébrica. Mohammed (2013) propôs a seguinte fórmula parametrizada para representar genericamente todos os operadores gradientes numéricos:

$$\mathbf{G}_x = \frac{1}{(2+4\beta)} \begin{bmatrix} -\beta & 0 & \beta \\ -1 & 0 & 1 \\ -\beta & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_z = \frac{1}{(2+4\beta)} \begin{bmatrix} -\beta & -1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & \beta \end{bmatrix} \quad (5.3),$$

em que o operador generalizado expresso pelas matrizes  $\mathbf{G}_x$  e  $\mathbf{G}_z$  é ajustado com o parâmetro  $\beta$ . A fórmula (5.3) é interpretada como uma cascata de um operador de Diferenças Finitas central, seguido por uma suavização na direção ortogonal (a derivada  $x$  é suavizada na direção  $z$ ) usando uma média aritmética ponderada com pesos  $(1, \beta^{-1}, -1)$ .

A expressão algébrica para o gradiente numérico (5.3) pode é expressa como:

$$\mathbf{D}_x = \frac{1}{(2+4\beta)} [F_{x+1,z} - F_{x-1,z} + \beta(F_{x+1,z+1} + F_{x+1,z-1} - F_{x-1,z+1} - F_{x-1,z-1})] \quad (5.4)$$

$$\mathbf{D}_z = \frac{1}{(2+4\beta)} [F_{x,z+1} - F_{x,z-1} + \beta(F_{x+1,z+1} + F_{x-1,z+1} - F_{x+1,z-1} - F_{x-1,z-1})]$$

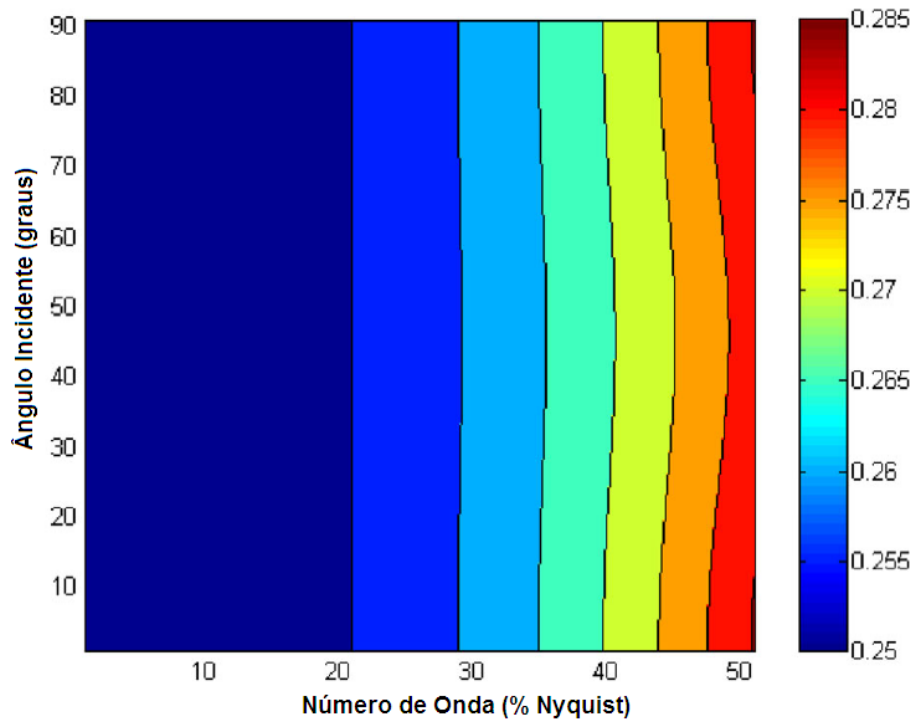
A proposta é igualar a representação algébrica do gradiente generalizado (5.4) com o gradiente analítico da onda plana esférica (5.1) e resolver para o parâmetro ajustável ( $\beta$ ), obtém-se:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{l_x S_z - l_z S_x}{l_x C_x S_z - l_z C_z S_x} \quad (5.5),$$

onde os parâmetros  $l_x, l_z, S_x, S_z, C_x$  e  $C_z$  são simplificações de expressões que estão bem detalhadas no Apêndice C, em que mostramos os detalhes deste processo.

O parâmetro ( $\beta$ ) depende da frequência e da direção da onda. A Figura 10 avalia empiricamente este parâmetro adimensional como uma função do ângulo e da frequência, expresso por um gráfico, sendo o ângulo variado entre  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

Figura 10 - Comportamento do parâmetro  $\beta$  para o operador gradiente 2D como uma função da frequência (número de onda) e do ângulo.



Fonte- Mohammed (2011).

Observando a figura (10) fazemos as seguintes observações:

1. O parâmetro  $\beta$  varia entre 0,25 e 0,285, uma diferença marginal de apenas 14% em relação a uma banda de largura de 50% de Nyquist.

2. O Parâmetro  $\beta$  é mais sensível à frequência espacial do que para direção. Na verdade, para uma frequência fixa,  $\beta$  pode ser considerado independentemente do ângulo constante.

3. A escolha de  $\beta = 0,25$  é razoável quando se lida com baixas à moderadas frequências. Usando este valor,  $\beta$  é quase exato até uma frequência de 22% de Nyquist.

Quanto ao tensor de difusão, é obtido a partir da mesma formulação que a mostrada para o Filtro de difusão anisotrópico, (ver capítulo 3).

## 6 APLICAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Sendo (4.1) a expressão para Filtro de Difusão Complexa, lembrando:

$$g(\mathbf{x}) - \alpha_r e^{i\theta} \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$$

A construção e aplicação computacional deste processo de filtragem dependem de quatro parâmetros básicos,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\alpha_r$  e  $\theta$ ;

onde:

$\sigma_x$  e  $\sigma_z$  referem-se aos coeficientes de difusão aplicados nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente;  $\alpha_r$  o coeficiente de difusão aplicada em toda a imagem e  $\theta$  a fase do número complexo.

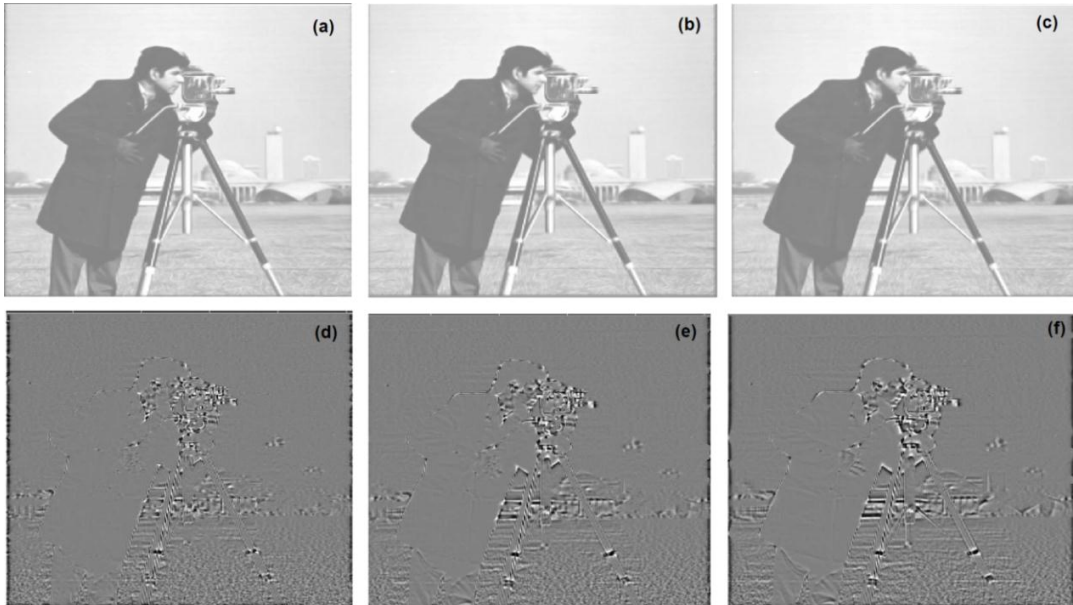
A solução numérica da equação diferencial (4.1) é obtida a partir de uma aproximação por diferenças finitas como mostrado no Apêndice C.

Para fins comparativos aplicamos o filtro nas imagens “Van Gogh” e “fotografia Cameraman”. Além da aplicação em imagens referentes ao verdadeiro objetivo deste trabalho: o comportamento do filtro em imagens sísmicas.

Para cada imagem foram executados 15 testes variando os parâmetros envolvidos. De maneira geral, quanto maior o valor de  $\alpha_r$ , maior a suavização aplicada na imagem, o mesmo vale para os outros parâmetros. Certamente há um valor limite aplicado aos parâmetros de modo que a suavização não seja extrema a ponto de deformar informações importantes da imagem.

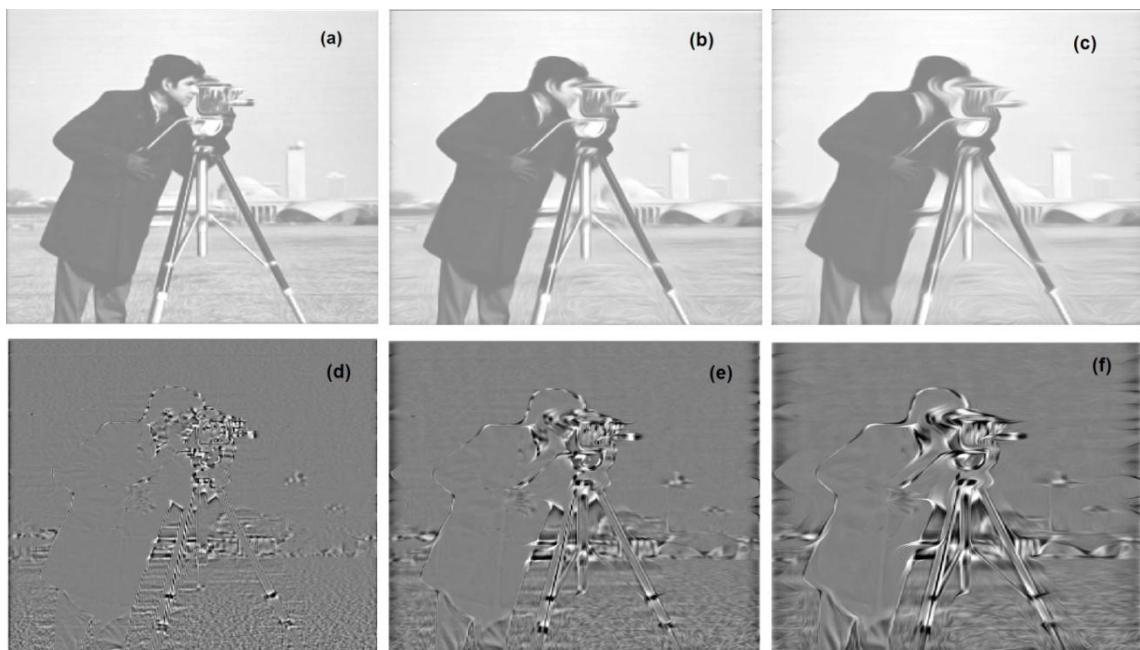
O efeito da variação dos parâmetros  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  nas partes real e imaginária da filtragem na fotografia “Cameraman” pode ser verificado na figura abaixo ( Figura 11).

Figura 11- Efeito da variação crescente dos parâmetros  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  na fotografia Cameraman. (a), (b) e (c) parte real da imagem e (d), (e) e (f) parte imaginária.



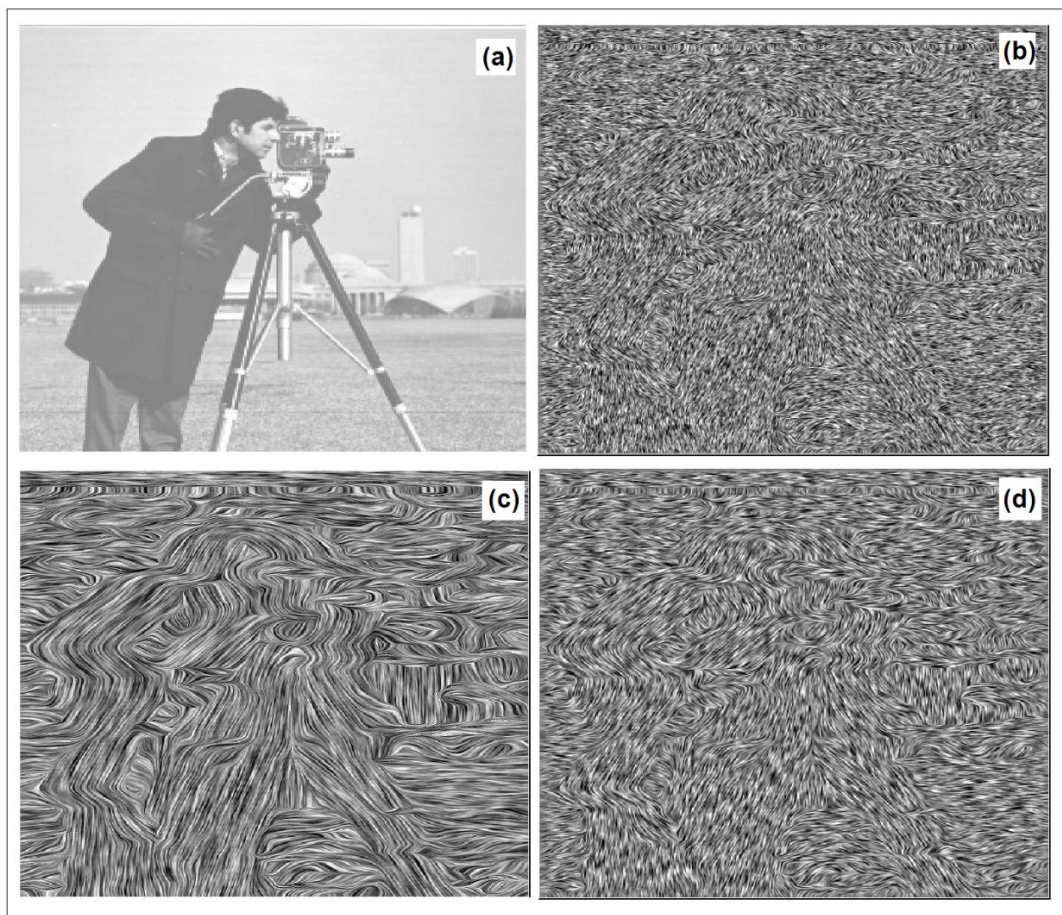
Os maiores efeitos na variação da suavização foram observados nos testes em que havia mudança do parâmetro  $\alpha_r$  (Figura 12).

Figura 12 - Efeito da variação crescente do parâmetros  $\alpha_r$  na fotografia Cameraman. (a), (b) e (c) parte real da filtragem e (d), (e) e (f) parte imaginária.



Transformamos a respectiva imagem de entrada do filtro em uma imagem somente com valores aleatórios, em outras palavras, uma respectiva imagem ruído. Isto nos permitiu a melhor percepção da orientação da imagem e a capacidade do filtro de suavizar e destacar descontinuidades de uma imagem completamente ruidosa. Segundo a figura 13, o filtro consegue atuar de maneira expressiva mesmo na imagem ruído. A parte real apresenta-se visivelmente suavizada enquanto que, a parte imaginária consegue detectar, suavemente, o contorno da imagem.

Figura 13 - Aplicação do Filtro De Difusão Complexa em uma imagem totalmente formada por ruído aleatório. (a), Fotografia Camaraman; (b), Imagem Ruído da fotografia; (c) Parte real da filtragem que atuou em (b) e em (d) a parte imaginária.



A aplicação do filtro na pintura de Van Gogh é mostrada na figura 14 e como podemos ver, as características do filtro são mantidas, ou seja, suavização na imagem proveniente da parte real da filtragem e detecção do seu contorno na imagem proveniente da parte imaginária do processo.

Figura 14 - Efeito do filtro de suavização na pintura de Van Gogh. Imagem de entrada (a), parte real da imagem filtrada (b) e (c) a parte imaginária.



## 6.1 APLICAÇÃO EM IMAGENS SÍSMICAS

Testamos as seguintes aplicações do Filtro de Difusão Complexa ao processamento de imagens sísmicas: suavização direcional de modelos de velocidade, filtragem estrutural de imagens migradas e condicionamento do gradiente de funções objetivo usadas na inversão do campo de onda sísmico.

### 6.1.1 Suavização de modelos de velocidade

Realizamos testes em dois modelos de velocidade: O Modelo Sigsbee e o Modelo Marmousi.

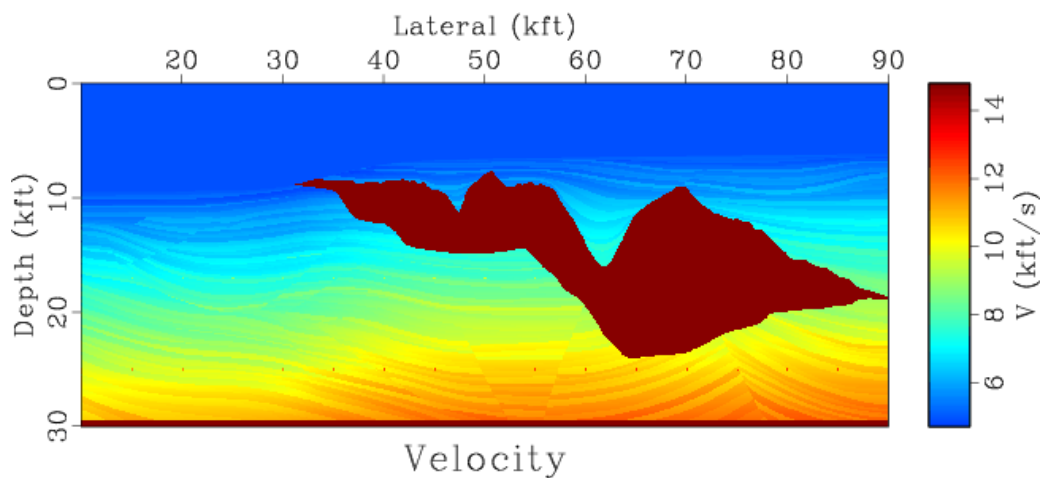
#### a- Modelo Sigsbee

O conjunto de dados Sigsbee foi modelado através da simulação das características geológicas encontradas na escarpa Sigsbee no Golfo de águas profundas do México. Este modelo contém uma seqüência sedimentar quebrada por

uma série de falhas normais e axiais. Além disso, existe uma estrutura complexa de sal encontrado dentro do modelo que resulta em problemas de iluminação durante o processamento e a migração dos dados.

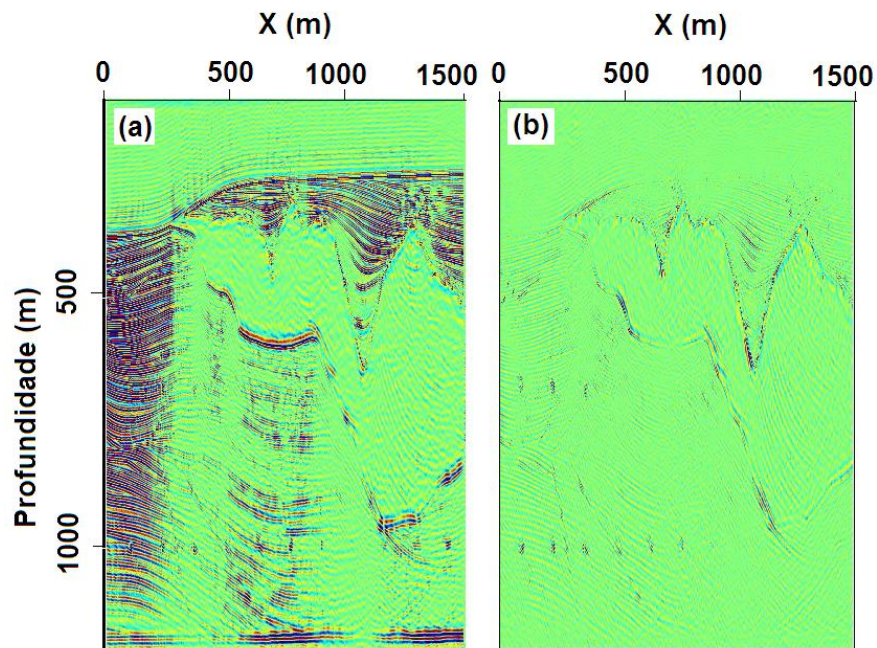
Os modelos Sigsbee são encontrados no compartilhamento de repositório Madagascar. O modelo tem 9.144 km (30 000 pés) de profundidade e 24,384 km (80 000 pés) de comprimento, (figura 15).

Figura 15- Modelo de velocidade do Dado Sigsbee.



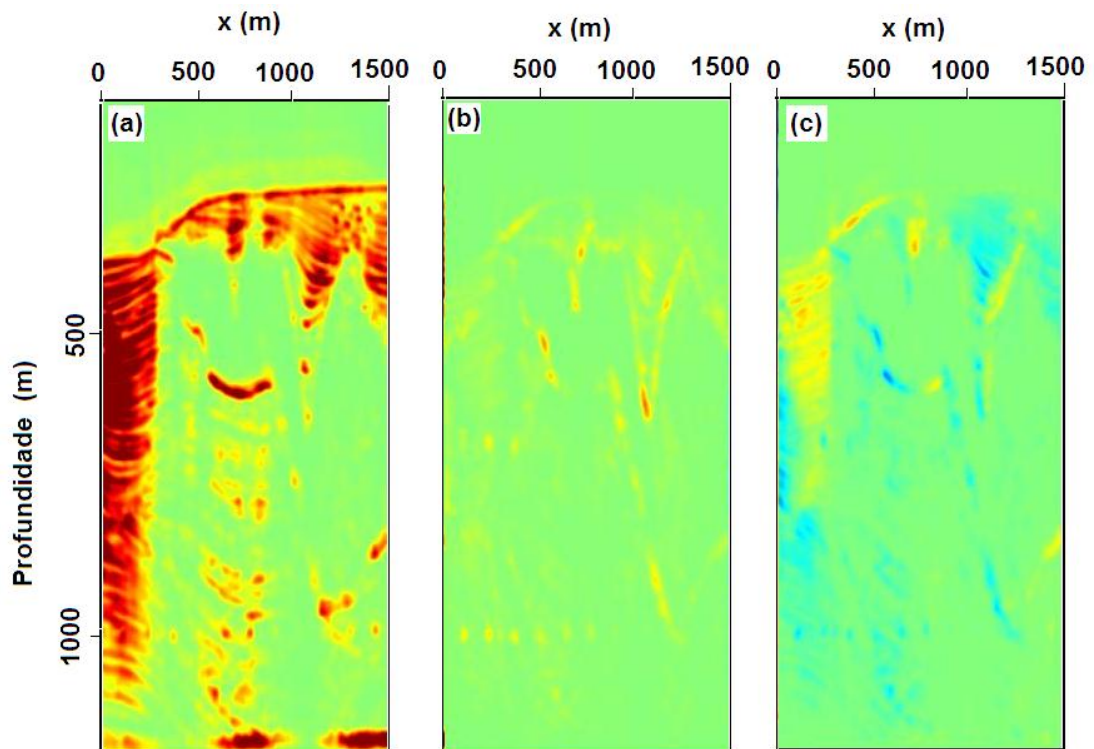
Calculamos o gradiente deste modelo e em concordância com Mohammed (2011), verificamos que de fato o operador por ele desenvolvido e que foi aplicado neste Filtro possui grande eficácia, uma vez que de suas orientações desenha a grande parte das informações da imagem original, figura 16. Calculamos ainda os tensores de estrutura e de difusão, (Figura 17 e 18, respectivamente).

Figura 16 - Gradiente do Modelo Sigsbee: informações sobre a orientação local da imagem. (a) Componente ( $zz$ ) e (b) Componente ( $xx$ ).



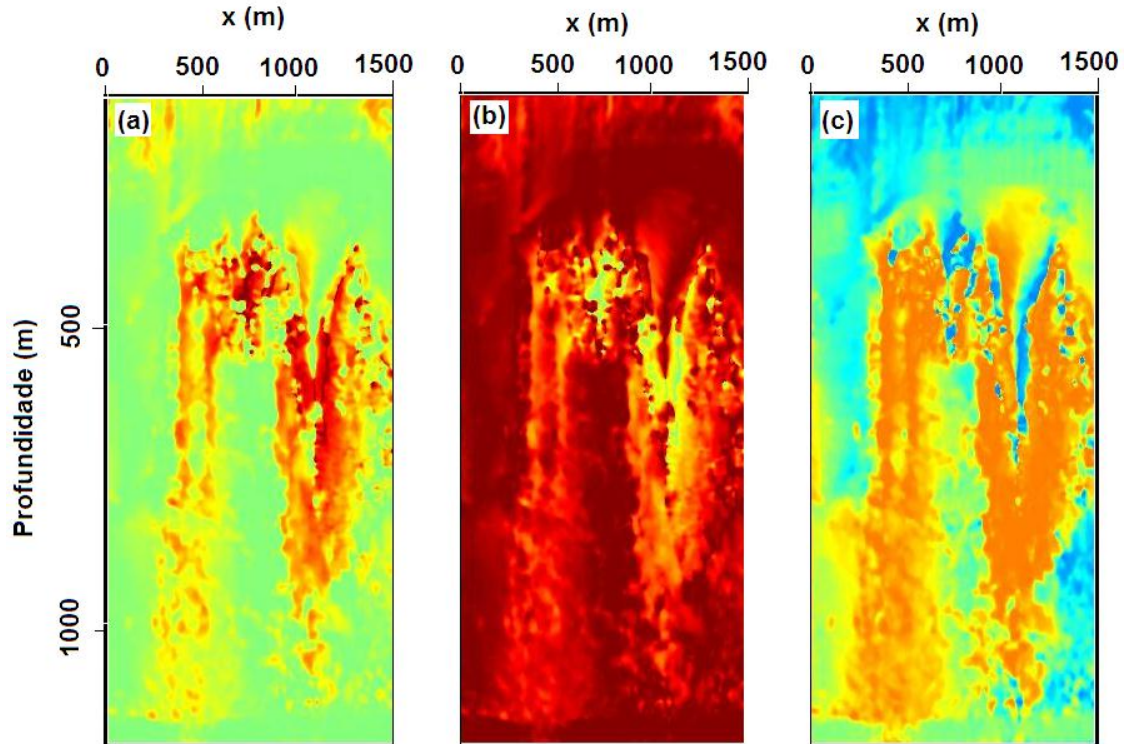
Fonte: Autora.

Figura 17- Tensor de Estrutura ( $S$ ) do Modelo Sigsbee. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

Figura 18 - Tensor de Difusão ( $\mathbf{D}$ ) do Modelo Sigsbee. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).

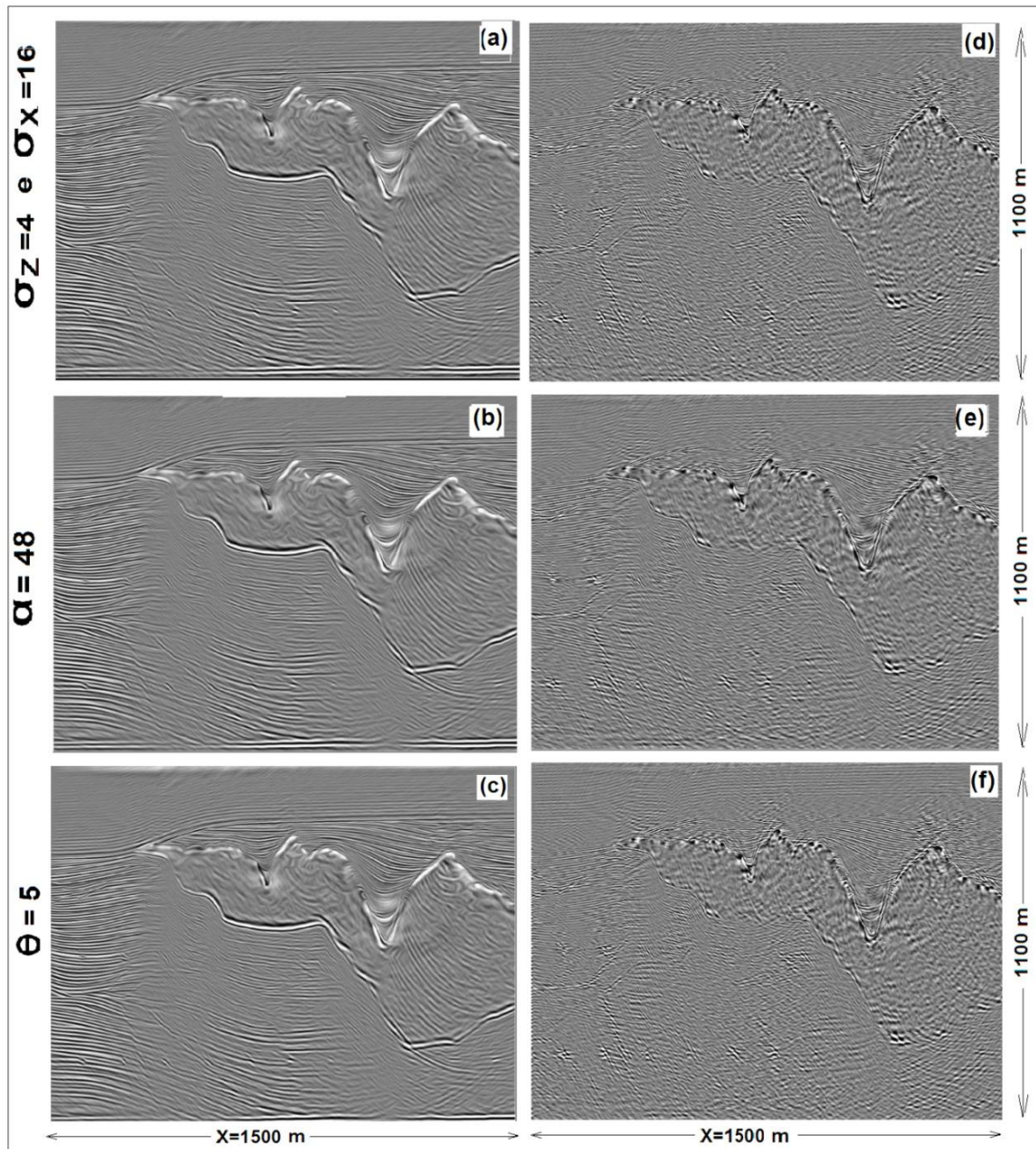


Fonte: Autora.

Os efeitos da filtragem no Modelo Sigsbee podem ser verificados nas figuras que seguem. As imagens provenientes da parte real foram suavizadas ao longo das reflexões. Como a geometria do modelo é complexa, em pontos em que há conflito entre eventos horizontais e verticais, muito rapidamente ocorre distorções neste local da imagem.

As descontinuidades sísmicas do Modelo podem ser visivelmente observadas através da parte imaginária. O topo da camada salina é mais fortemente destacado devido possuir maior contraste. Mas, mesmo contornos com menores contrastes, como a base da camada salina, são possíveis de serem detectadas pelo filtro (figura 19).

Figura 19 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa no modelo sigsbee. Os parâmetros adotados aparecem ao lado de cada par de resultado (real e imaginária). Sendo (a), (b) e (c) as partes reais e (d), (e) e (f) as respectivas partes imaginárias.



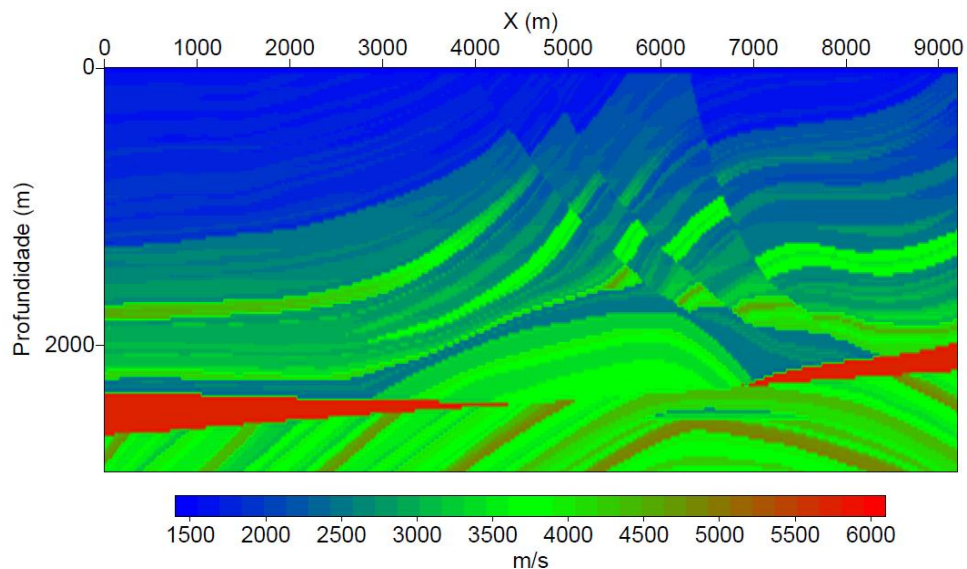
Fonte: Autora.

Ao ser suavizado a imagem proveniente da parte real do processo de filtragem, o ruído tende a ser absorvido pela parte imaginária, o que justifica a presença destes nas imagens imaginárias.

### b- Modelo Marmousi

O modelo Marmousi foi criado em 1988 pelo Institut Francais du Petrole (IFP). A geometria deste modelo baseia-se num perfil através da calha do Norte do Quenguela na Bacia do Cuanza. O modelo de geometria e velocidade foi criado para produzir dados sísmicos complexos e que exigem técnicas avançadas de processamento. Este modelo apresenta dobras, cunhas salinas e falhas que apresentam grande quantidade de diapirismo (figura 20).

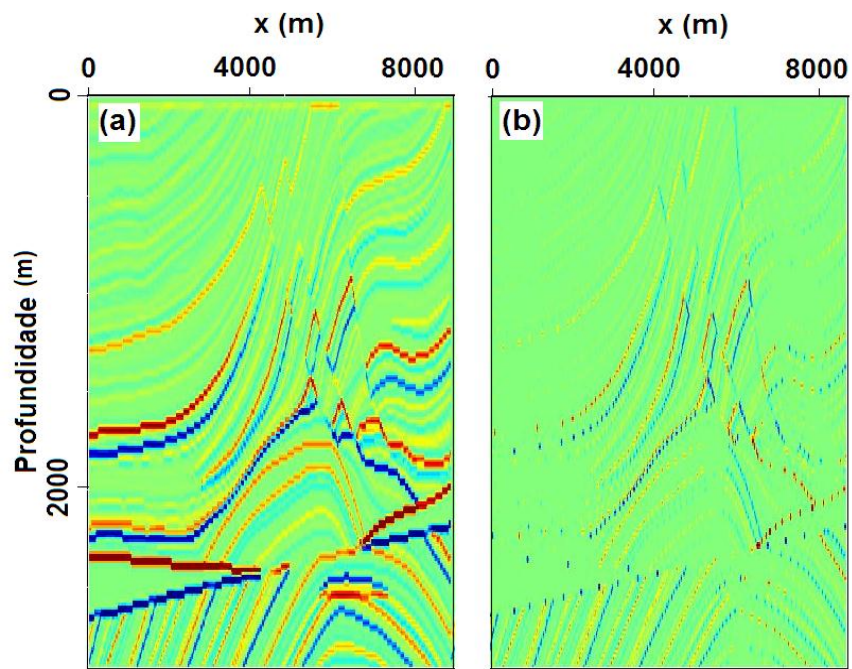
Figura 20- Modelo de velocidade do Dado Marmousi.



Fonte- <http://sepwww.stanford.edu>.

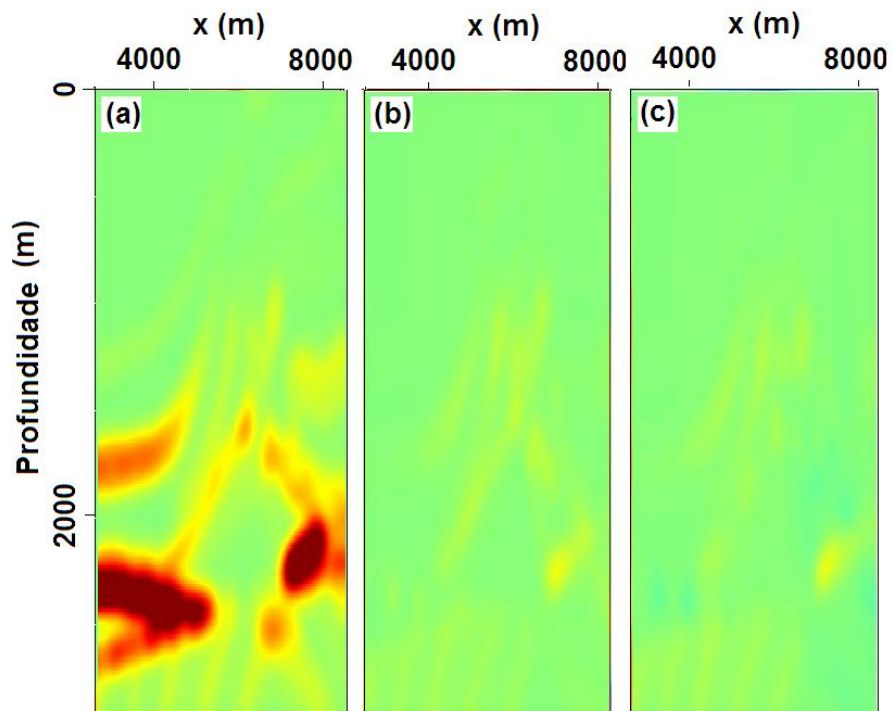
O Cálculo do gradiente, do tensor de estrutura e do tensor de difusão para o Modelo Marmousi são mostrados nas figuras que seguem (Figura 21, 22 e 23 respectivamente).

Figura 21- Gradiente do Dado Marmousi: informações sobre a orientação local da imagem. (a) Componente ( $zz$ ) e (b) Componente ( $xx$ ).



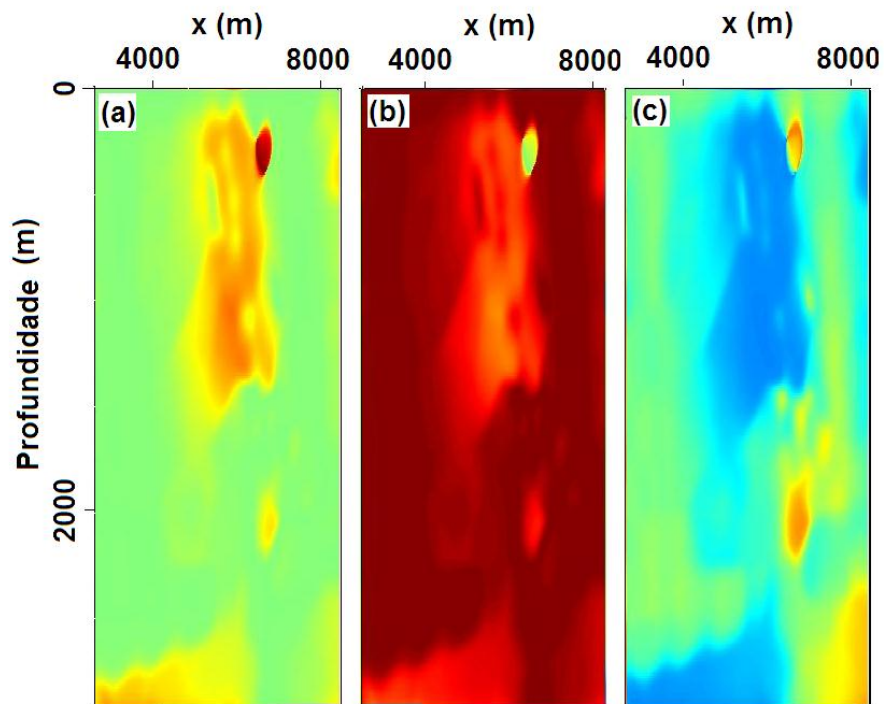
Fonte: Autora.

Figura 22- Tensor de Estrutura ( $S$ ) do Modelo Marmousi. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

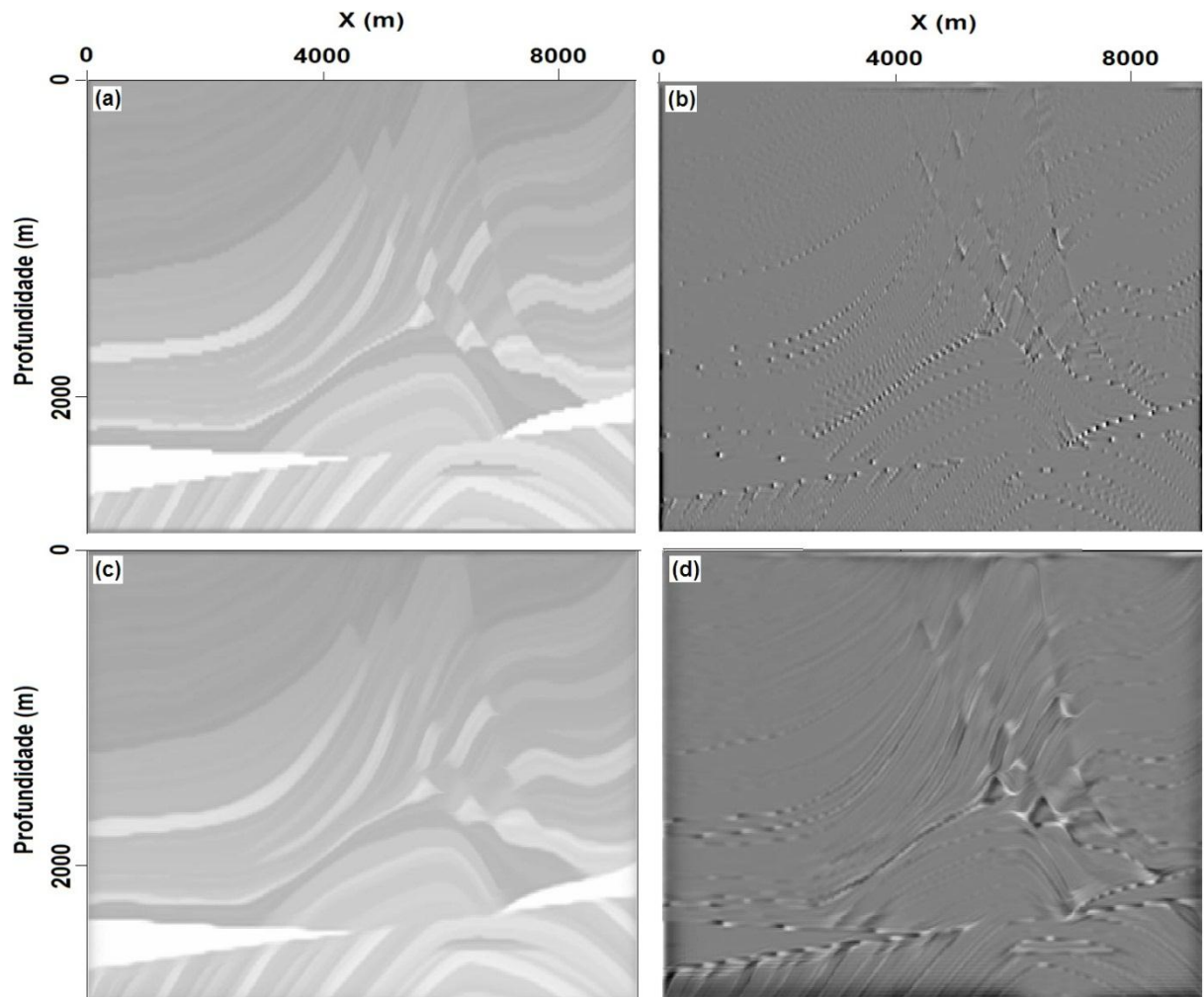
Figura 23 - Tensor de Difusão ( $D$ ) do Modelo Marmousi. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

Variando os parâmetros, foram aplicadas diferentes intensidades de suavização no Modelo de velocidade do dado Marmousi. A filtragem ao longo das reflexões suavizou consideravelmente o modelo, como mostram as partes reais da figura 24. Grande parte das discontinuidades estruturais e estratigráficas presentes no modelo (as com maior contraste) foram detectados pela parte imaginária da filtragem, (figura 24).

Figura 24 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa sobre o modelo de velocidade do Dado Marmousi. Nos respectivos pares real e imaginário (a) e (b) temos o resultado com menor suavização envolvendo os parâmetros  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  e  $\alpha_r$ : 2, 6 e 12 respectivamente. (c) e (d), o resultado com o maior valor para  $\alpha_r$ , 48 e os melhores valores para  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$ , 4 e 12, respectivamente.



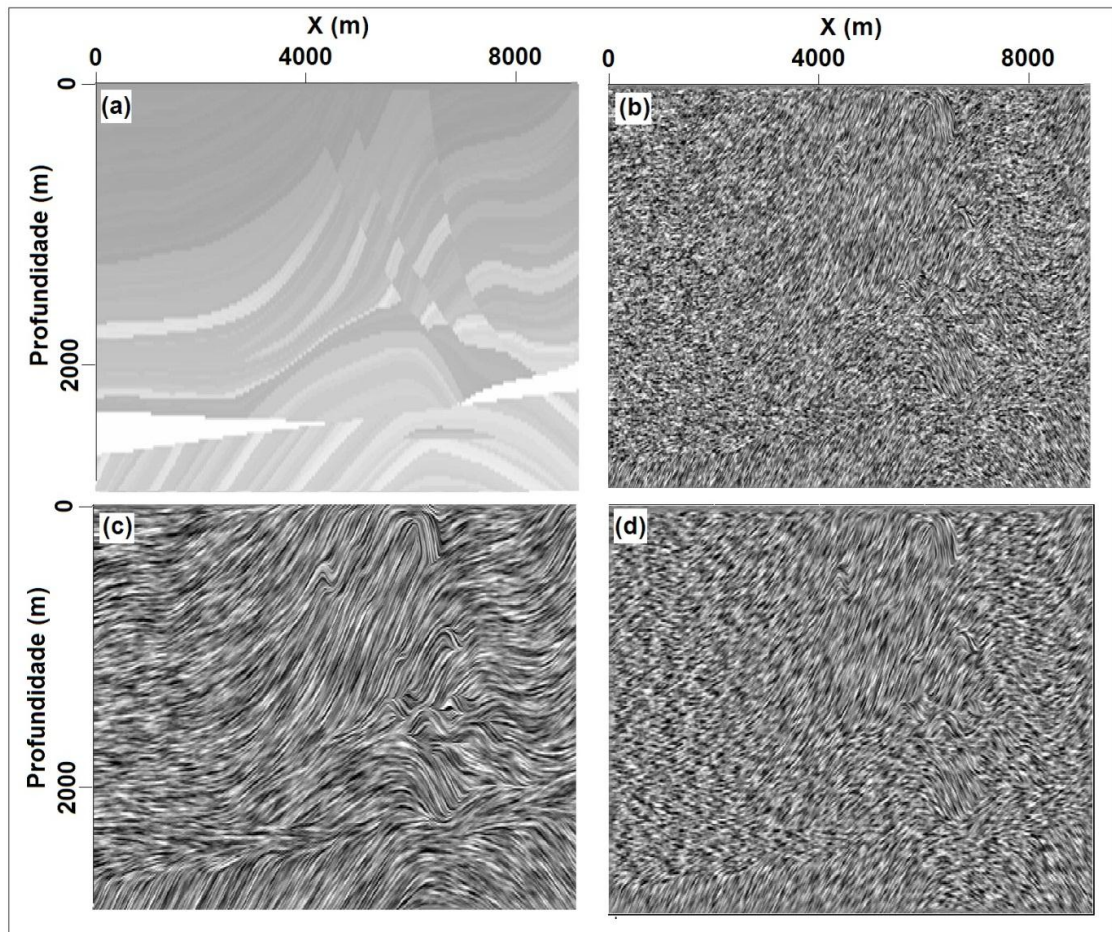
Fonte: Autora.

Na figura 24, o aumento na suavização de (24.a) para (24.c) é justificada pelo aumento dos valores do parâmetro que modula o tensor de difusividade. Mesmo para pequenos valores de suavização, grande parte dos eventos de descontinuidades são suavemente destacados pela parte imaginária.

As direções preferenciais de suavização aplicada pelo filtro são visivelmente percebidas através da imagem ruído do modelo de velocidade do Dado Marmousi. Na parte real podemos verificar a ação das direções de orientação do filtro na

imagem, enquanto que na parte imaginária somente áreas com forte contraste que o contorno é vagamente detectado (figura 25).

Figura 25 - Verificação das direções de suavização na imagem ruído do Modelo Marmousi. Modelo exato do Marmousi (a), respectiva imagem ruído (b), parte real (c) e parte imaginária (d).



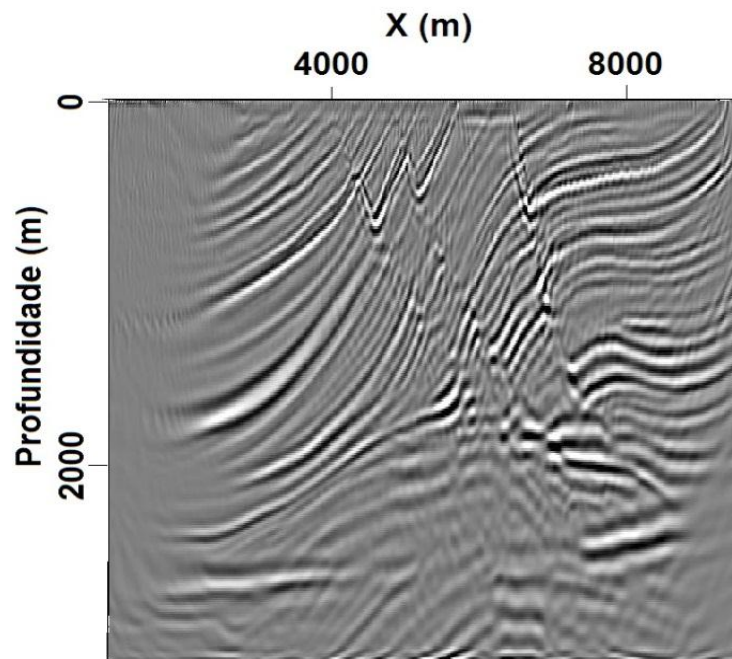
Fonte: Autora.

### 6.1.2 Filtragem estrutural de imagens migradas

O objetivo da migração sísmica é posicionar corretamente os refletores em subsuperfície. Isto é feito de maneira que corrija os efeitos indesejáveis que aparecem durante a propagação do sinal sísmico, colapsando as difrações e assim

produzindo uma imagem sísmica que possibilite uma melhor interpretação dos dados sísmicos migrados. No entanto, a imagem resultante desse processo apresenta ruído que por sua vez deve ser suavizado, de forma que suas verdadeiras informações estruturais (falhas) sejam detectadas. O que justifica nossa aplicação ao Modelo Marmousi Migrado no Tempo – RTM Marmousi (Figura 26).

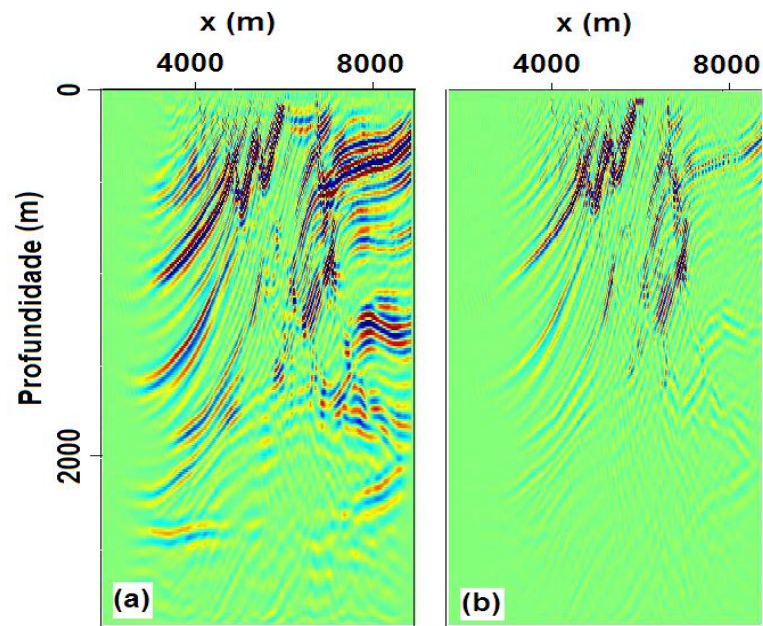
Figura 26- Dado Marmousi Migrado no tempo.



Fonte: Autora.

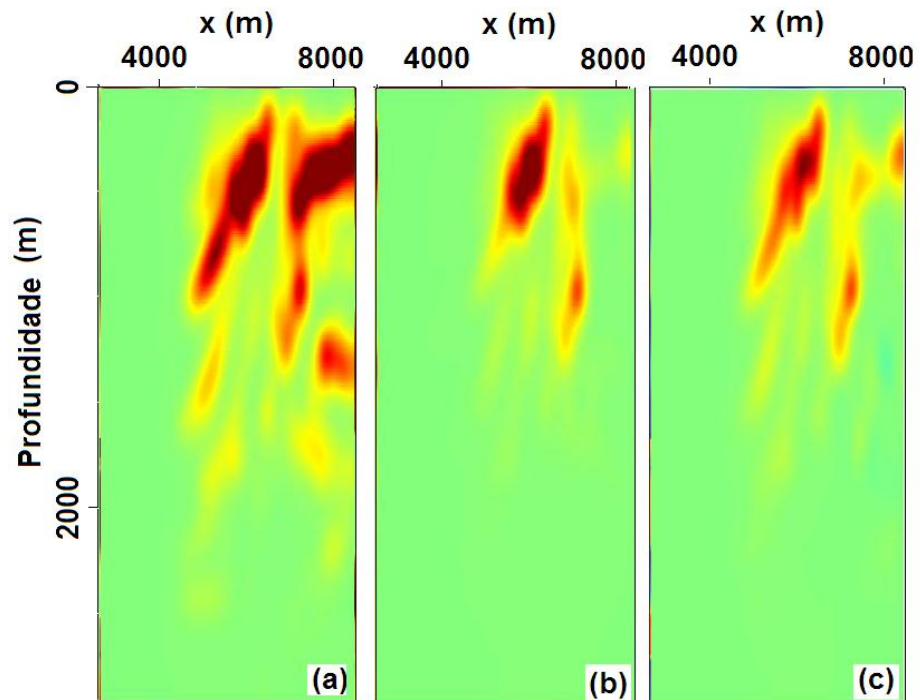
O gradiente da figura acima, assim como os tensores de estrutura e de difusão, foram calculados e seus resultados são mostrados nas figuras 27, 28 e 29, respectivamente.

Figura 27- Gradiente do RTM Marmousi: informações sobre a orientação local da imagem. (a) Componente ( $zz$ ) e (b) Componente ( $xx$ ).



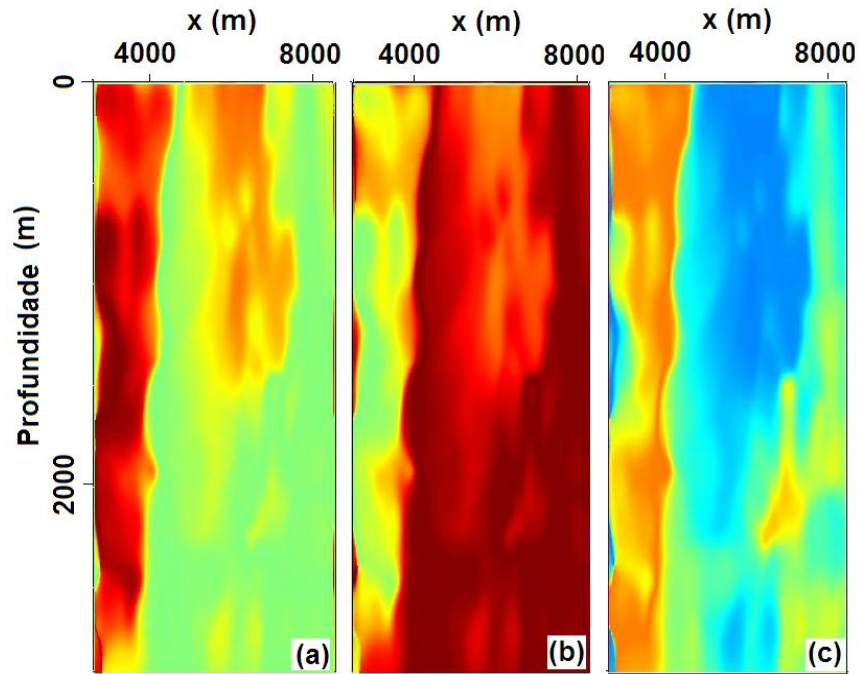
Fonte: Autora.

Figura 28 - Tensor de Estrutura ( $S$ ) do Marmousi- RTM. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

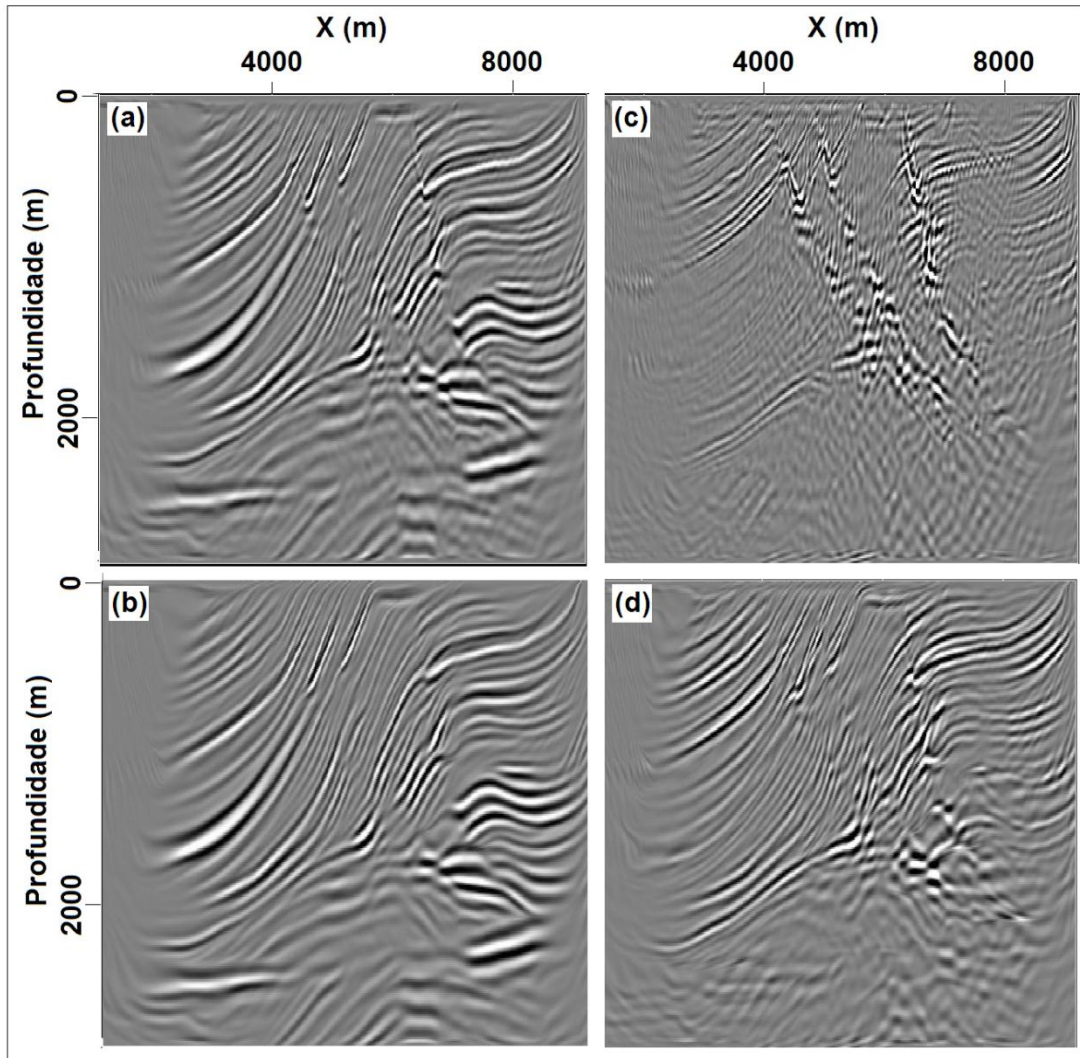
Figura 29 - Tensor de Difusão ( $\mathbf{D}$ ) do RTM Marmousi. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

O processo de filtragem nesta aplicação seguiu como esperado, uma vez que dependendo dos parâmetros escolhidos ( $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$ ,  $\alpha_r$  e  $\theta$ ), a suavização ocorreu de forma considerável nas partes reais da filtragem ao passo que a parte imaginária conseguiu destacar as principais falhas presentes no modelo (Figura 30).

Figura 30 - Aplicação do Filtro de Difusão Complexa no Modelo Marmousi -RTM. Nos respectivos pares real e imaginário (a) e (c) temos uma suavização aplicada com os menores valores dos parâmetros  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$ , sendo 2 e 6, respectivamente; e  $\alpha_r = 12$ . (b) e (d), o resultado com o maior valor para  $\alpha_r$ , 48 e com melhores valores para  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$ , 4 e 12, respectivamente.



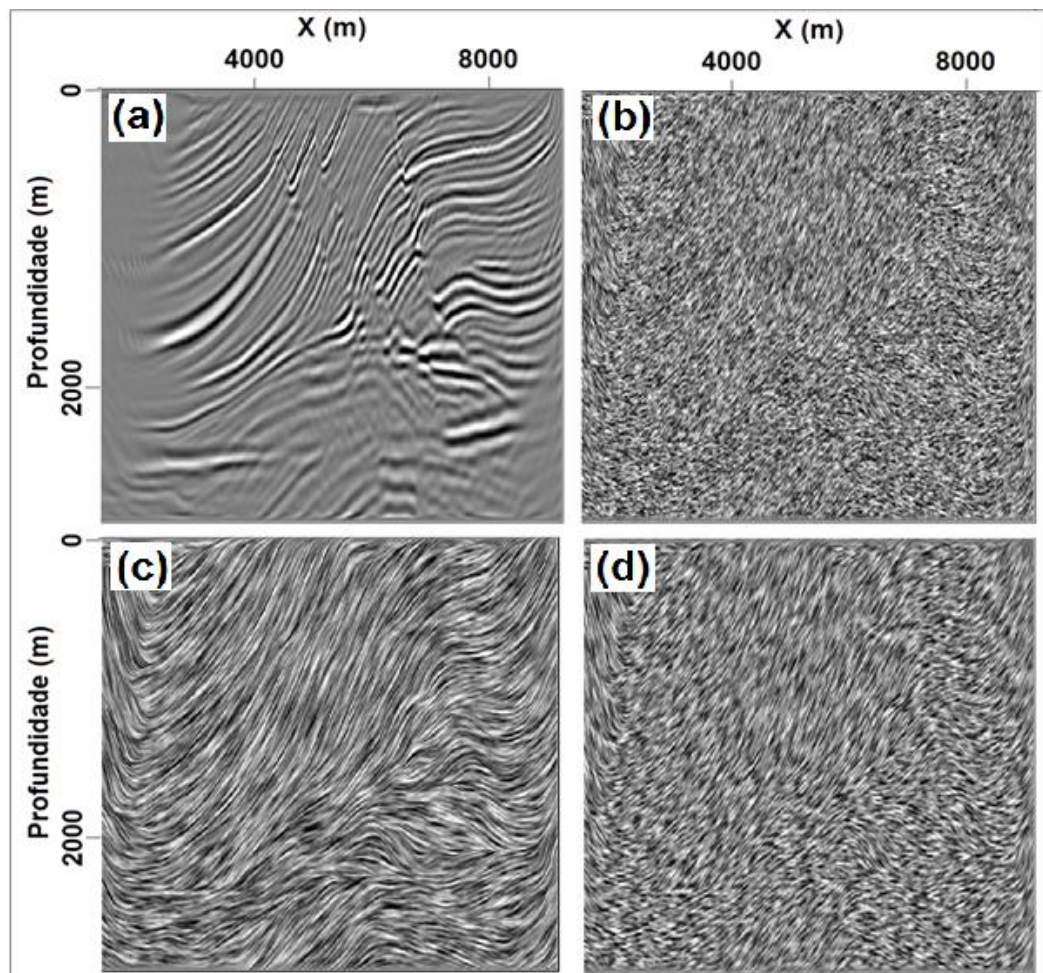
Fonte: Autora.

Ao compararmos as partes reais, a figura (30.b) apresenta-se de maneira mais suavizada que a figura (30.a), já que o valor de seus parâmetros são maiores. Por outro lado, ao adotarmos  $\alpha_r = 48$ , a suavização atuante foi muito forte distorcendo informações importantes das imagens, como descontinuidades estruturais e estratigráficas. O interessante deste filtro é poder associar duas imagens suavizadas de saída, sendo assim, por mais que os parâmetros de suavização extrapolem o valor limite e a parte real apresente perda de informações,

a parte imaginária detectará parte dos contornos estruturas da imagem, como podemos verificar na figura (30.d).

A imagem ruído do Modelo Migrado do Dado Marmousi nos forneceu uma boa noção do comportamento direcional atuante na imagem, figura 31. Ao compararmos as figuras (31.a) e (31.c), verificamos que de fato a parte real do filtro de difusão complexa atua ao longo das reflexões sísmicas. A informação fornecida pela parte imaginária (figura 31.d) pode ser vista através das áreas com texturas diferentes na imagem, quando associamos com a figura (31.a), vemos que esta região corresponde aos locais onde estão presentes as falha do modelo.

Figura 31- Verificação das direções de suavização na imagem Marmousi - RTM. Imagem de entrada (a), respectiva imagem ruído (b), parte real (c) e parte imaginária (d).



Fonte: Autora.

### **6.1.3 Precondicionamento do gradiente de funções objetivo usadas na inversão do campo de onda sísmico.**

Precondicionamento da inversão de forma de onda, com filtros Laplacianos direcionais não estacionários, pode produzir modelos de velocidade geologicamente plausíveis e ao mesmo tempo acelerar a convergência de algoritmos de otimização. Adicionalmente, filtros direcionais podem atenuar ruídos provenientes da geometria de aquisição ou contrastes de velocidades acentuados, Guitton (2012).

O objetivo da inversão completa da forma de onda (full-waveform inversion - FWI) é derivar as propriedades elásticas da subsuperfície, como a velocidade da onda P, a velocidade da onda S ou densidade. Estas propriedades (ou espaço do modelo) podem estar relacionadas com a presença de hidrocarbonetos e sua estimativa é um dos objetivos mais importantes no processamento sísmico.

O problema inverso é habitualmente formulado como a minimização do desajuste entre dados sísmicos registrados e dados sísmicos modelados, onde os últimos são obtidos resolvendo numericamente a equação de onda, geralmente usando a aproximação acústica.

Aqui, abordamos apenas o precondicionamento do gradiente da função objetivo na FWI como uma estratégia para incorporar uma informação geológica a priori.

Embora seja teoricamente equivalente à regularização, o precondicionamento do gradiente da FWI usando filtros direcionais estimados a partir da imagem migrada, em geral, produz convergência mais rápida. Nesta seção, o principal foco é atualizar os baixos números de onda nas primeiras iterações do algoritmo de otimização. Em nossos experimentos numéricos, aplicamos forte suavização direcional ao gradiente da FWI usando o filtro de Difusão Complexa.

a) Inversão da forma de onda completa

O objetivo do FWI é atualizar um modelo acústico da subsuperfície, ajustando dados modelados ao dado observado. Com este objetivo minimizamos a função

$$f(\mathbf{m}) = \|\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{mod}\|_2^2 \quad (6),$$

na qual  $\|\cdot\|_2$  é a norma  $L_2$ ,  $\mathbf{m}$  um vector de propriedades físicas (por exemplo, velocidade),  $\mathbf{d}_{obs}$  o vector de dados sísmicos observados e  $\mathbf{d}_{mod}$  o vector de dados sísmicos modelados.

A minimização de  $f(\mathbf{m})$  pode ser obtida através de métodos iterativos baseados no gradiente da função objetivo. Para minimizar a função o modelo é atualizado na direção oposta ao gradiente,

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \alpha_n \cdot \nabla f(\mathbf{m}_n) \quad (6.1),$$

na qual  $\nabla f(\mathbf{m})$  é o gradiente de  $f(\mathbf{m})$ ,  $\alpha_n$  o passo que precisa ser estimado, e  $n$  o número da iteração. Para modelar dados sísmicos, a equação de onda acústica pode ser parametrizada em termos da velocidade da onda P,  $V_P$  e da densidade,  $\rho$ .

$$\frac{1}{V_p^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla u(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t) \quad (6.2),$$

em que o termo fonte  $S(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)S(t)$ , onde  $S(t)$  é o pulso fonte, injetado na posição  $\mathbf{x}_s$ ;  $u(\mathbf{x}, t)$  o campo de pressão na posição  $\mathbf{x}$  e no tempo  $t$ . Em geral, o modelo é especificado apenas pela velocidade da onda P. No domínio do tempo, o gradiente da função objetivo é calculado a partir da expressão (Guitton, 2012),

$$\nabla f(\mathbf{m}_n) = \frac{-2}{V_p^3(\mathbf{x})} \sum_{Tiroso} \sum_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u_n \quad (6.3),$$

em que  $V_{p_n}(\mathbf{x})$  representa o modelo de velocidade na iteração  $n$ ,  $\delta u_n$  é o campo de onda residual propagado de forma reversa no tempo a partir da fronteira, no modelo obtido na iteração  $n$ , tais que  $\delta d = d_{obs} - d_{mod}$  é o resíduo entre o campo observado e o campo modelado.

### a.1) Precondicionamento

O preconditionamento é realizado através de um modelo parametrizado. Para isso fazemos a seguinte mudança de variável:  $\mathbf{m} = \mathbf{S}\mathbf{p}$ , onde  $\mathbf{p}$  é uma nova variável utilizada para a inversão e  $\mathbf{S}$  um operador preconditionado. Precondicionamento está relacionado com regularização. Supondo que um operador linear  $L$  ligando um modelo com um vector desconhecido  $\mathbf{q}$  e um vetor de dados  $\mathbf{d}$ , a função objetivo de um problema regularizado pode ser escrita:

$$g_{reg} = \|\mathbf{L}\mathbf{q} - \mathbf{d}\|_2^2 + \epsilon \|\mathbf{R}\mathbf{q}\|_2^2 \quad (6.4),$$

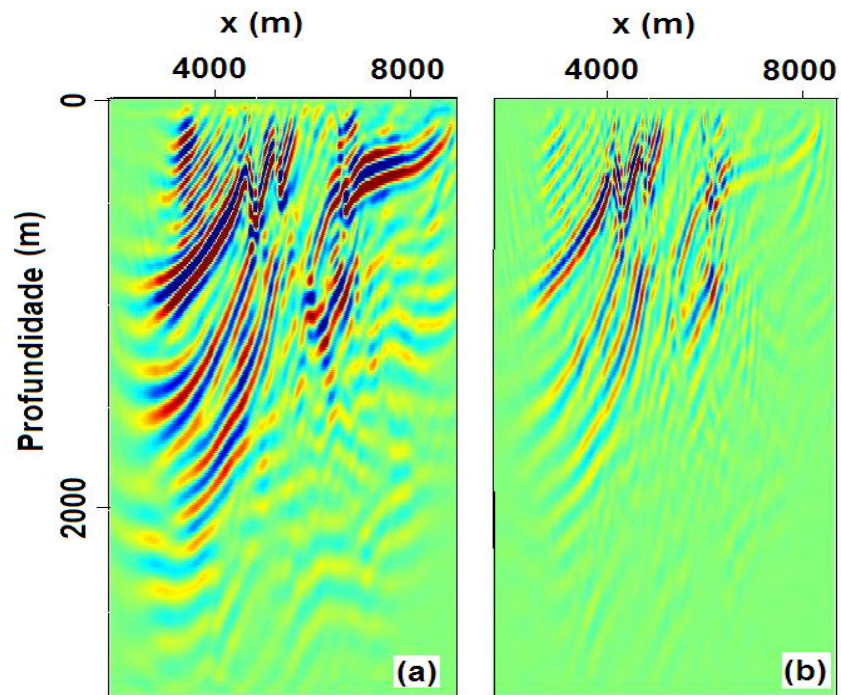
Em que  $\mathbf{R}$  é um operador de rugosidade. Com o preconditionamento, introduzimos  $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{p}$  ( $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}$ ) e minimizamos.

$$g_{prec}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{L}\mathbf{S}\mathbf{p} - \mathbf{d}\|_2^2 + \epsilon \|\mathbf{p}\|_2^2 \quad (6.5)$$

As duas formulações devem convergir para a mesma solução. A vantagem da equação (6.6) é que fornece uma taxa de convergência mais rápida. Além disso, como  $\mathbf{S}$  é um operador de suavização, o preconditionamento ajuda a recuperar os baixos números de onda de um determinado modelo, característica muito importante para FWI.

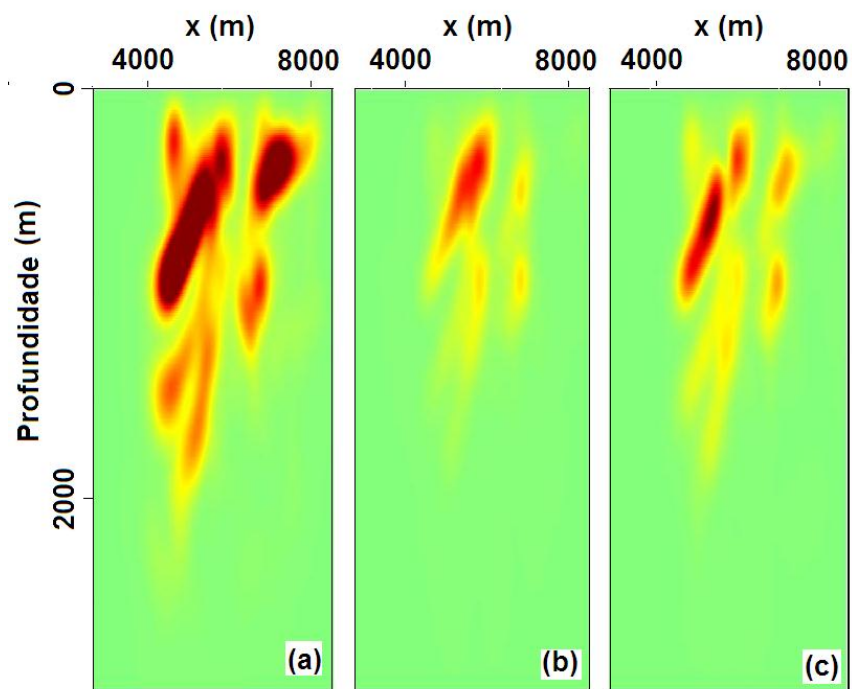
O gradiente da imagem, os tensores de estrutura e de difusão para esta aplicação podem ser verificados nas figuras 32, 33 e 34, respectivamente.

Figura 32 - Gradiente da imagem FWI: informações sobre a orientação local da imagem. (a) Componente (zz) e (b) Componente (xx).



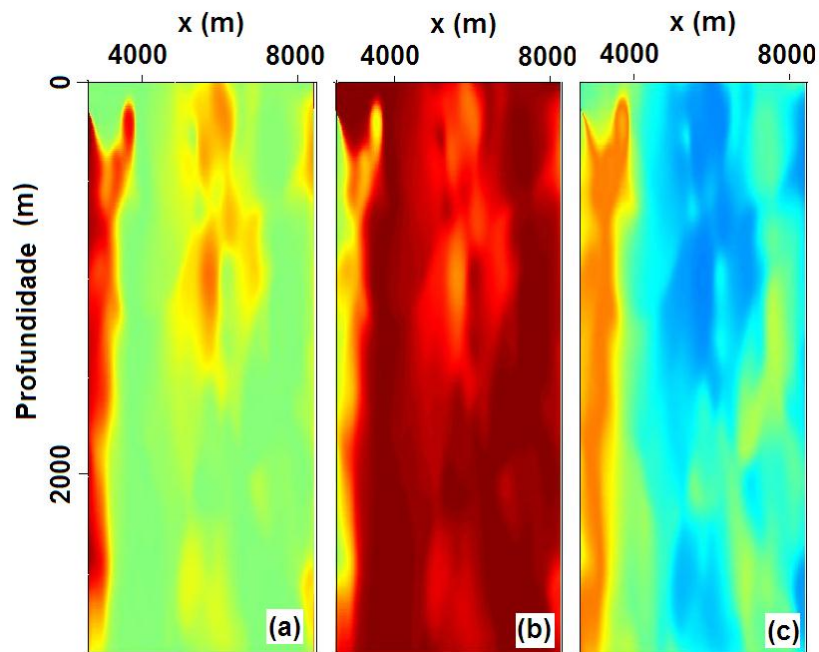
Fonte: Autora.

Figura 33 - Tensor de Estrutura ( $S$ ) para a aplicação FWI. (a) Componente (zz), (b) componente (xx) e (c) componente (zx).



Fonte: Autora.

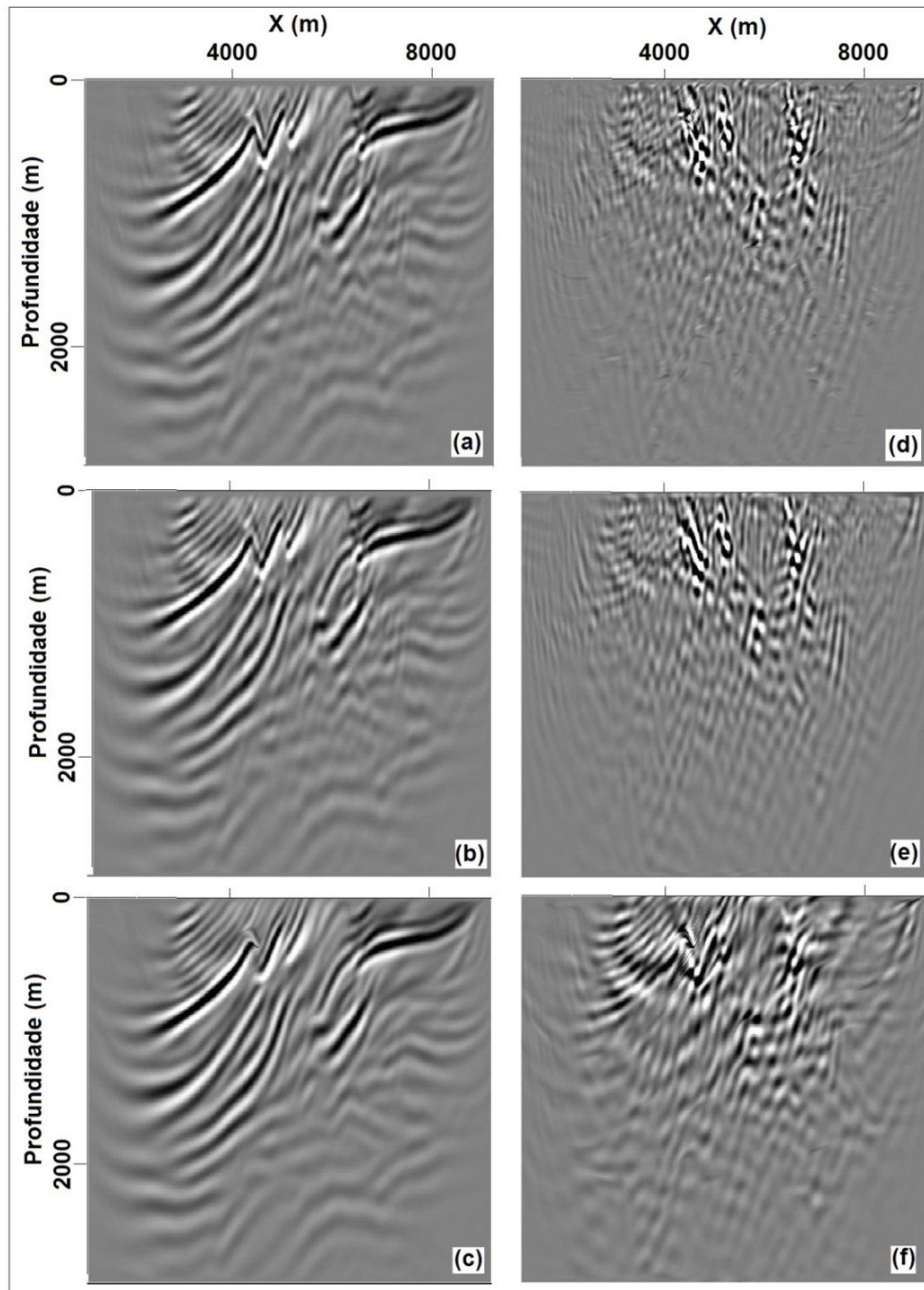
Figura 34 - Tensor de Difusão ( $\mathbf{D}$ ) para a aplicação FWI. (a) Componente ( $zz$ ), (b) componente ( $xx$ ) e (c) componente ( $zx$ ).



Fonte: Autora.

Com a aplicação do preconditionamento do gradiente, os resultados característicos do Filtro de Difusão Complexo formam enquanto que houve um ganho computacional com o processo iterativo convergindo mais rapidamente. A figura 35 mostra os resultados da suavização para diferentes parâmetros adotados.

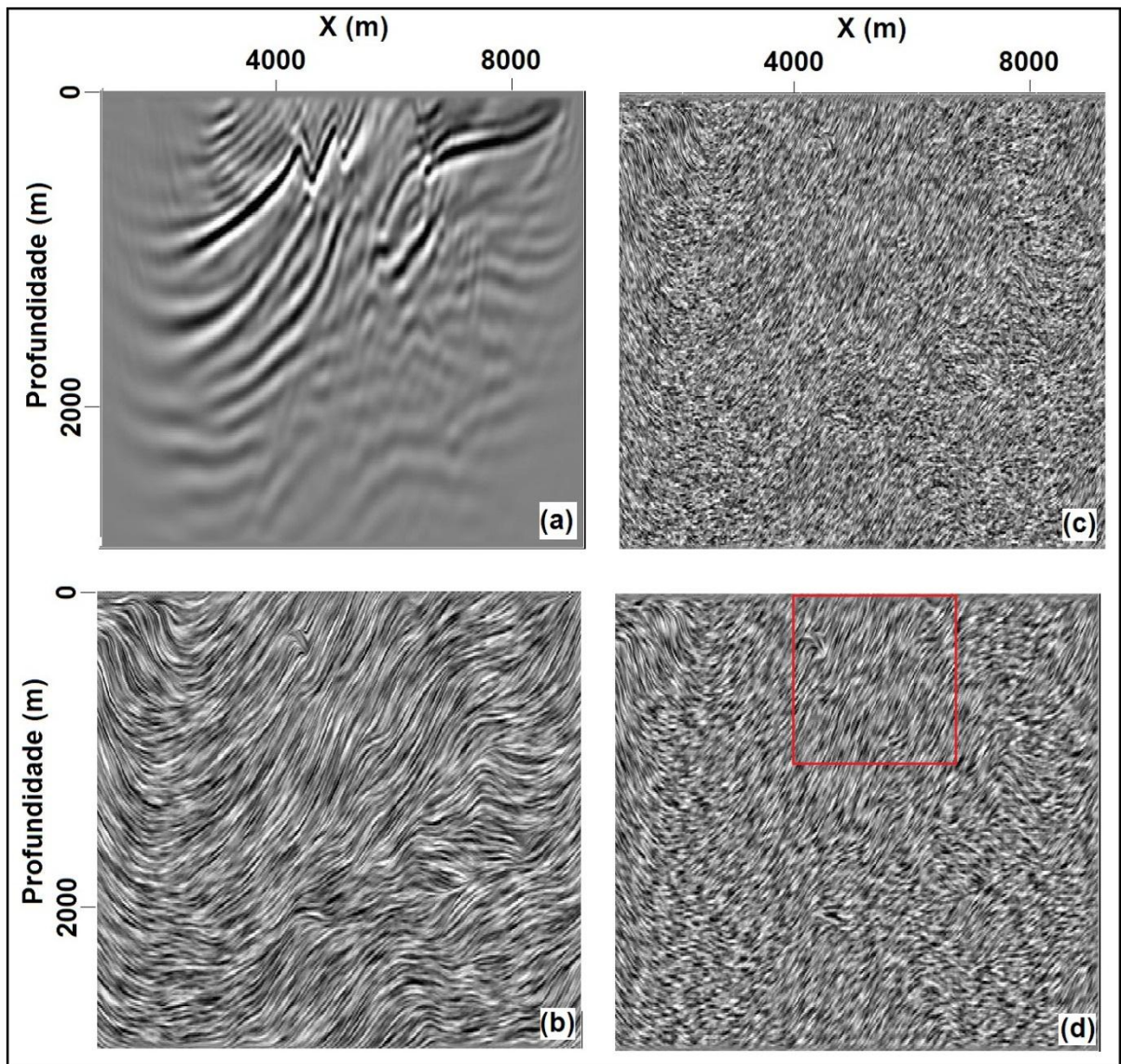
Figura 35- Aplicação do Filtro de Difusão Complexo para aplicação FWI. Nos respectivos pares real e imaginário (a) e (d) temos o melhor resultado com menor suavização envolvendo os parâmetros  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$  igual a 2 e 6, respectivamente. (b) e (e), o resultado com o maior valor para  $\alpha_r$ , 48 e os melhores valores para  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$ , 4 e 12. E por último em (c) e (f), a aplicação de um valor alto, tanto  $\alpha_r$  quanto para  $\theta$ , 48 e 5.0, respectivamente.



Fonte: Autora.

A direção de suavização também pode ser observada através da aplicação do filtro na imagem ruído (figura 36).

Figura 36- Verificação das direções de suavização na imagem ruído FWI. Imagem de entrada (a), respectiva imagem ruído (b), parte real (c) e parte imaginária (d). A figura (d) destaca a zona com mudança de textura associada às falhas.



Fonte: Autora.

## 7 CONCLUSÃO

Fizemos uma revisão a cerca dos filtros de difusão que vem sendo usados no processamento de imagens sísmicas, focando na construção e aplicação de Filtros de Difusão Complexa. Apresentamos Filtro de Difusão Complexa como uma possível alternativa para processamento de imagens sísmicas. Este filtro foi desenvolvido a partir de uma nova equação de difusão (Equação de Hale) que, por apresentar melhores condições de estabilidade, sua aplicação numérica demanda de um custo computacional mais baixo que a aplicação numérica da equação de difusão convencional.

Na Equação de Hale, modulamos o tensor de difusividade anisotrópico com um número complexo, resultando em duas imagens de saída do filtro, a parte real e a parte imaginária. A parte real do filtro de difusão complexa preserva as propriedades do filtro de Hale, suavizando os eventos ao longo dos eventos de reflexão nas imagens sísmicas. A parte imaginária do filtro destaca eventos nos contornos de imagens, em aplicações nas imagens sísmicas pode realçar descontinuidades estruturais e estratigráficas.

Mostramos também que, Filtro de Difusão Complexa pode ser aplicado ao condicionamento do gradiente de funções objetivo usadas na inversão do campo de onda sísmico, fazendo com que o processo iterativo seja mais rapidamente convergente. Desta forma, apresentamos Filtro de Difusão Complexa como uma possível alternativa para processamento de imagens sísmicas. Finalmente, custo computacional do filtro de difusão complexa apenas marginalmente maior que o de sua versão real.

## REFERÊNCIAS

- ALFARAJ, M; WANG, Y.; LUO, Y. Enhanced Isotropic gradient operator. **Geophysical Prospecting**, v.47, n.2, p. R.1121- R.1133. 2013.
- FEHMERS, G.C; HOCHER, C.F.W. Fast interpretation with structure-orientend filtering. **Geophysics**, v.68, n.4, p. R.1286- R.1293, jul-ago. 2003.
- GILBOA. G; ZEEVI, Y.Y; SOCHEN, N. Image and denoising by complex diffusion processes. CCTT Report 404, Technion, Israel, 2003.
- GUITTON. A; AYENI. G; DÍAZ, E. **Constrained full-waveform inversion by model reparameterization**. Geophysics, vol. 77, n. 2, p. R117–R127. março-abril, 2012.
- HALE, D. S. **Strutured-oriented Bilateral Filtering**. Golden, Center of Wave Phenomena, 2011.
- HALE, D. S. **Strutured-oriented smoothing and semblance**. Golden, Center of Wave Phenomena, 2009.
- LI, Xinxiang. **The anatomy of anisotropic diffusion filters**. CSEG Recorder, p.54-60, maio, 2005.
- OPPENHEIN, A.V; SCHAFER, R.W. e BUCK, J.R. **Discrete-time Signal Processing**. Prentice Hall, 2ed, 1999.
- SENRA, S.F. **Filtro de difusão anitrópica anômala como método de melhoramento de imagens de ressonância magnética nuclear ponderada em difusão**. Ribeirão Preto, 2013.
- WEICKERT, J. **Anisotropic Diffusion in image Processing**. Copenhagen: B.G. Teubner, 1998.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – SOLUÇÃO APROXIMADA PARA PEQUENOS VALORES DE TETA

Processos do tipo difusão complexa são comumente encontrados, por exemplo, em física quântica e eletro-óptica. A chamada Equação de Schrödinger é a equação fundamental da mecânica e em um caso simplificado para uma partícula sem spin, sujeito a um campo externo tem a forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi \quad (\text{A}),$$

Em que  $\psi = \psi(x, t)$  é a função de onda de uma partícula quantum,  $m$  é a massa,  $\hbar$  a constante de Planck,  $V(x)$  é o campo potencial externo,  $\Delta$  é o laplaciano e  $i = \sqrt{-1}$ . Com a condição inicial  $\psi|_{t=0} = \psi(x)$  e para cada  $t$  fixo, a solução é:

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\psi_0, \quad (\text{A.1}),$$

no qual o expoente é uma abreviatura para as séries de potência correspondente, e os termos de maior ordem são definidos recursivamente por  $H^n \psi = H(H^{n-1}\psi)$ . O operador:

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \quad (\text{A.2})$$

Fatorando o tempo para qualquer dimensão com coordenadas cartesianas  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $I(x, t) \in \mathbb{C}^N$  e denotando que esses sistemas de coordenadas  $g_\sigma(x, t) = \prod_i^N g_\sigma(x_i; t)$  tem-se que:

$$\text{Lim}_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Im}(I)}{\theta} = t \Delta g_{\tilde{\sigma}} * I_0 \quad (\text{A.3})$$

Onde,  $\text{Im}(\cdot)$  Denota o valor imaginário e  $\tilde{\sigma} = \text{Lim}_{\theta \rightarrow 0} \sigma = \sqrt{2t}$ . Por conveniência, o coeficiente de difusão complexa é adotado sendo unitário  $c = e^{i\theta}$ .

Usando a seguinte aproximação para teta:  $\cos \theta = 1 + O(\theta^3)$  e  $\sin \theta = \theta + O(\theta^3)$ ; introduzindo o operador  $\tilde{H}$ , o qual é similar ao operador de Schroedinger. Podemos escrever a equação (A) (em qualquer dimensão) como:  $I_t = \tilde{H}I$ ;  $I_{t=0} = I_0$ , sendo  $\tilde{H} = c\Delta$ . A solução é  $I = e^{t\tilde{H}}I_0$ , e é equivalente de (3.4) e (3.7)

Usando a aproximação acima, chegamos em:

$$\begin{aligned}
 I(x, t) &= e^{ct\Delta}I_0 = e^{e^{i\theta t\Delta}}I_0 \\
 &\approx e^{(1+i\theta)t\Delta}I_0 = e^{t\Delta}e^{i\theta t\Delta}I_0 \\
 &\approx e^{t\Delta}(1 + i\theta t\Delta)I_0 \\
 I(x, t) &= (1 + i\theta t\Delta)g_{\tilde{\sigma}} * I_0 \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Parte do erro desta aproximação depende das derivadas de ordem superiores (a partir da 4ª derivada) do sinal, porém, como estas derivadas vão decaindo exponencialmente pela convolução gaussiana, este erro diminui rapidamente como tempo. Experimentos numéricos mostram que para  $\theta = \frac{\pi}{30}$  o erro é  $\sim 0,1\%$  para a parte real e 3-5% para a parte imaginária (dependendo do sinal original).

## APÊNDICE B - APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

Segundo Oppenheim (1999), transformação bilinear pode ser usado para aproximar derivadas parciais como às da equação (4). Como um simples exemplo, considere a versão 1D desta equação com coeficientes constantes:

$$g(x) - \alpha g''(x) = f(x) \quad (\text{B.1})$$

Usando a notação de transformada-z, a transformação bilinear de uma derivada é a substituição:

$$g'(x) \Rightarrow 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} G(z) \quad (\text{B.2})$$

ou, equivalentemente,

$$-g(x) \Rightarrow 2 \frac{1-z}{1+z} G(z) \quad (\text{B.3})$$

Com esta aproximação, a transformada-z da equação (B.2) torna-se:

$$(z^{-1} + 2 + z) G(z) - 4\alpha(z^{-1} - 2 + z) G(z) = (z^{-1} + 2 + z) F(z) \quad (\text{B.4})$$

O que corresponde à aproximação por diferenças finitas

$$\begin{aligned} & (1 - 4\alpha) g[i - 1] + (2 + 8\alpha) g[i] + (1 - 4\alpha) g[i + 1] \\ & = f[i - 1] + 2f[i] + f[i + 1] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dado  $N$  amostras de entrada  $f[i]$ ,  $i = 0; 1; 2; \dots; N - 1$ , e condições de contorno adequadas (por exemplo, zero inclinação), podemos facilmente resolver esse sistema tri-diagonal de  $N$  equações para  $N$  amostras de saída suavizadas  $g[i]$ .

Apesar de outras aproximações de diferenças finitas para suavização da equação (B.2) parecer mais simples, a aplicação de transformação bilinear torna-se muito vantajosa para estes tipos de processos porque o filtro de suavização tem um zero na frequência Nyquist para todos os valores de  $\alpha > 0$  (Hale 2009).

A mesma transformação bilinear pode ser aplicada para as versões 2D e 3D da equação (B.2) com o coeficiente do tensor  $\mathbf{D}$  variável. A derivação é um pouco mais minuciosa e o sistema resultante de equações não é tri-diagonal, tal como na versão 1D. No entanto, como mencionado acima, o sistema de equações

permanece esparsa, simétrica e definida positiva, podendo ser resolvido eficientemente por iterações de gradiente conjugado.

Seja  $\mathbf{f}$  um vector contendo todas as amostras  $\mathbf{f} = [i_1; i_2; i_3; \dots; i_n]$  de uma imagem de entrada n-dimensional de  $f(\mathbf{x})$ , e fazendo  $\mathbf{g}$  denotar um vector correspondente de amostras  $\mathbf{g} = [i_1; i_2; i_3; \dots; 1_n]$  da imagem de saída suavizada  $g(\mathbf{x})$ ; depois transformada bilinear da equação (6), o sistema esparsa de equações a ser resolvidos tem a forma.

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A}) \mathbf{g} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (\text{B.6})$$

Nesta equação,  $\mathbf{D}$  representa uma matriz esparsa com elementos não nulos correspondentes aos coeficientes do tensor de suavização  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ , Já as matrizes esparsas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  correspondem à aproximação por diferenças finitas obtida com a transformada bilinear. Em cada iteração de gradiente conjugado, temos que calcular o produto de matriz-vector  $\mathbf{s} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A}) \mathbf{r}$  para alguns vectores temporários de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$ .

## APÊNDICE C - OPERADOR GRADIENTE 2D

A expressão algébrica para o gradiente numérico (5.4) pode ser expressa como:

$$\mathbf{D}_x = \frac{1}{(2+4\beta)} [F_{x+1,z} - F_{x-1,y} + \beta(F_{x+1,z+1} + F_{x+1,z-1} - F_{x-1,z+1} - F_{x-1,z-1})] \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{D}_z = \frac{1}{(2+4\beta)} [F_{x,z+1} - F_{x,z-1} + \beta(F_{x+1,z+1} + F_{x-1,z+1} - F_{x+1,z-1} - F_{x-1,z-1})]$$

Substituindo a equação (5.1) em (C.1) obtemos:

$$\mathbf{D}_x = \frac{1 + 2\beta \cos\theta(k\pi \cos\theta)}{1 + 2\beta} iF \text{sen}(k\pi \text{sen}\theta) \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{D}_y = \frac{1 + 2\beta \cos\theta(k\pi \text{sen}\theta)}{1 + 2\beta} iF \text{sen}(k\pi \cos\theta)$$

Com a finalidade de diminuir o tamanho da expressão acima, utilizamos as seguintes notações:

$$S_x \equiv \text{sen}(k\pi l_x) \equiv \text{sen}(k\pi \text{sen}\theta) \quad S_y \equiv \text{sen}(k\pi l_y) \equiv \text{sen}(k\pi \cos\theta);$$

$$C_x \equiv \cos(k\pi l_x) \equiv \cos(k\pi \text{sen}\theta) \quad C_y \equiv \cos(k\pi l_y) \equiv \cos(k\pi \cos\theta)$$

Sendo assim, o operador (C.2) reduz-se à:

$$\mathbf{D}_x = \frac{1+2\beta C_y}{1+2\beta} iFS_x \quad \mathbf{D}_y = \frac{1+2\beta C_x}{1+2\beta} iFS_y \quad (\text{C.3})$$

Ignorando a amplitude e combinando as direções do gradiente numérico com as de uma onda plana, obtemos:

$$\frac{\mathbf{D}_x}{l_x} = \frac{\mathbf{D}_y}{l_y} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{D}_x}{\text{sen}\theta} = \frac{\mathbf{D}_y}{\cos\theta} \quad (\text{C.4})$$

Por fim, combinando as equações (C.2) e (C.4) e resolvendo para o parâmetro  $\beta$ , chegamos em:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{l_x S_y - l_y S_x}{l_x C_x S_y - l_y C_y S_x} \quad (\text{C.5})$$

A expressão acima indica claramente que  $\beta$  depende da frequência e da direção.