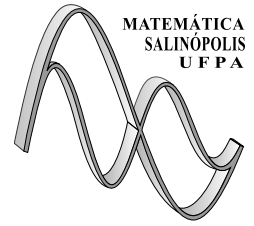




UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



DÉBORAH PALHETA DOS SANTOS

SISTEMA DE BRESSE: Energia Numérica

SALINÓPOLIS
2022

DÉBORAH PALHETA DOS SANTOS

SISTEMA DE BRESSE: Energia Numérica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro.

SALINÓPOLIS

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)**

S237s Santos, Déborah Palheta dos.
Sistema de Bresse : Energia numérica / Déborah Palheta
dos Santos. — 2022.
50 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de
Salinópolis, Curso de Licenciatura em Matemática,
Salinópolis, 2022.

1. Sistema de Bresse. 2. Diferenças Finitas. 3.
Energia Numérica. I. Título.

CDD 518.64

DÉBORAH PALHETA DOS SANTOS

SISTEMA DE BRESSE: Energia Numérica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção de grau de Licenciado(a) em Matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro.

Data de Aprovação: 30 de agosto de 2022

BANCA EXAMINADORA

Lindomar Miranda Ribeiro

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

(Orientador)

Amilcar Montalban Sayago

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago

(Membro)

Marcos Lima Cardoso

Prof. Dr. Marcos Lima Cardoso

(Membro)

À Deus

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida, por mostrar-me o caminho certo e pelo seu infinito amor.

À minha família, em especial minha mãe Maria Odetina por me incentivar e acreditar que eu seria capaz de superar os obstáculos que a vida me apresentou.

Ao meu namorado Carlos Augusto que esteve ao meu lado durante o meu percurso acadêmico.

Aos colegas de turma pelas trocas de ideias e ajuda mútua, conseguimos juntos prosseguir e superar todos os obstáculos apresentados durante esta trajetória.

Ao meu orientador Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro pela sua disponibilidade, dedicação e paciência durante este projeto, por sempre esclarecer as minhas dúvidas.

À Universidade Federal do Pará pela oportunidade de fazer o curso de Licenciatura em Matemática.

*"Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso!
Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu
Deus, estará com você por onde você andar."*

(Josué 1:9)

RESUMO

Neste trabalho realizamos uma abordagem numérica para a energia do sistema de Bresse com termo dissipativo na equação que representa o ângulo de rotação. Abordamos a teoria de semi-grupos, utilizando o Teorema de Hille-Yosida, através de uma consequência do Teorema de Lummer Phillips, para mostrar a existência e unicidade de solução exata para o sistema. Subsequentemente foi realizada a discretização do problema usando o método de diferenças finitas, visando a obtenção da energia numérica do sistema discreto.

Palavras-Chaves: Sistema de Bresse. Diferenças Finitas. Energia Numérica.

ABSTRACT

In this work we perform a numerical approach to the energy of the Bresse system with a dissipative term in the equation that represents the angle of rotation. We approach the theory of semi-groups, using the Hille-Yosida Theorem, through a consequence of the Lummer Phillips Theorem, to show the existence and uniqueness of an exact solution for the system. Subsequently, the problem was discretized using the finite difference method, in order to obtain the numerical energy of the discrete system.

Keywords: Bresse system. Finite Differences. Numerical Energy.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Viga arqueada fina	15
4.1	Malha numérica	34

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	subconjunto aberto do \mathbb{R}^n
$L_p(\Omega)$	espaço das funções Lebesgue integráveis
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev usual
$D(A)$	domínio do operador A
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$C^k(\Omega)$	espaço das funções diferenciáveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ até a ordem k
$(e^{t\mathcal{A}})_{t \geq 0}$	semi-grupo gerado pelo operador \mathcal{A}
E^n	energia no tempo n
E^{n-1}	energia no tempo $n - 1$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	O sistema de Bresse	14
1.2	Diferenças Finitas	16
1.3	Objetivos	16
1.3.1	Objetivo Geral	16
1.3.2	Objetivos Específicos	16
1.4	Organização do trabalho	16
2	RESULTADOS PRELIMINARES	17
3	O PROBLEMA	21
3.1	Energia de Solução	21
3.2	O Cenário de Semigrupos	25
3.3	Espaço de Fase	25
3.3.1	As Condições do Teorema de Lummer - Phillips	26
3.3.2	As Condições do Teorema de Lax - Milgran	29
4	ABORDAGEM NUMÉRICA	33
4.1	Discretização em Diferenças Finitas	33
4.2	Definindo a malha numérica	34
4.3	O problema discreto	35
5	ENERGIA NUMÉRICA	36
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50

1 INTRODUÇÃO

Vigas são elementos presentes em diversos tipos de estruturas, tais como pontes, viadutos, edifícios, entre outras. Em matemática, especificamente na área de equações diferenciais parciais, vem-se investigando há algum tempo, o comportamento assintótico das soluções de sistemas que regem o movimento desses elementos. O interesse é grande por este tipo de estudo, visto que as vigas são estruturas elásticas que possuem dimensões de comprimento, profundidade e espessura, e estão sujeitas à certos tipos de vibrações, que podem ser analisadas teoricamente e/ou experimentalmente.

Dentro desse contexto, para determinar o comportamento assintótico da solução de um sistema de vigas, tratando-se de uma abordagem contínua, deve-se obter a energia associada a ele, entretanto, para observar graficamente o comportamento das funções, torna-se necessário resolvê-lo numericamente, possibilitando assim, a viabilização da solução em gráficos através de simulações feitas em programas computacionais. Há a necessidade de realizar uma abordagem numérica, de modo que se encontre métodos numéricos que sejam eficientes para aplicação. O objeto de estudo deste trabalho será o sistema de vigas curvas governadas pelas hipóteses de Bresse.

O sistema de Bresse recebeu este nome em homenagem ao francês Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1833), engenheiro civil que fez grandes contribuições para a mecânica aplicada, por este fato é um dos 72 nomes gravados da torre Eiffel. Em 1854, Bresse publicou sua primeira monografia sobre a teoria elástica dos arcos. Ao lado de Winkler, deu a mais importante contribuição para o estabelecimento da teoria de arcos elásticos na análise de arcos de alvenaria na fase de estabelecimento da teoria estrutural. (KURRER, 2008)

O sistema obtido por Bresse foi publicado pela primeira vez em 1859, no livro *Cours de Mécanique appliquée* (BRESSE, 1859) e posteriormente, em 1993, Lagnese *et al.* (LAGNESE; LEUGERING; SCHMIDT, 1993) realizou a dedução rigorosa do sistema, com a finalidade de resolver o problema termoelástico para vigas finas de arco circular.

Com o avanço dos estudos, introduziu-se diferentes tipos de amortecimento ao sistema. Em termos de dissipação termoelástica, os autores Liu e Rao (LIU; RAO, 2009) consideraram a presença de duas dissipações termoelásticas atuando no deslocamento vertical e no deslocamento do ângulo de rotação respectivamente, e duas equações do calor acopladas, cujo resultado principal foi mostrar que o sistema físico é exponencialmente estável se, e somente se, as propagações de ondas fossem as mesmas. Este resultado é interessante do ponto de vista matemático, visto que na prática as propagações de ondas nunca são iguais.

Este mesmo resultado foi obtido no trabalho de Fatori e Rivera (FATORI; RIVERA, 2010), desta vez, considerando o sistema com apenas uma dissipação termoelástica e uma equação do balanço da energia.

Relacionado à termos de dissipação do tipo atrito, destacamos o trabalho de Boussouira *et al.* (BOUSSOUIRA; RIVERA; JÚNIOR, 2010), que estudou o sistema de Bresse com dissipação de atrito atuando apenas na equação de deslocamento do ângulo:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.3)$$

cujo principal resultado do trabalho foi provar que o mecanismo dissipativo é suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema, sob condição de que as velocidades de propagações de ondas fossem as mesmas. Realizou-se na abordagem numérica a discretização total em diferenças finitas, onde provou-se numericamente as questões relativas à falta de estabilidade exponencial.

Almeida Jr. (JUNIOR; SILVA, 2009), com o intuito de provar a estabilidade assintótica e numérica, estudou o sistema de Bresse com três amortecimentos de dissipação friccional:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) + \gamma_1 \varphi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.4)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_2 \psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.5)$$

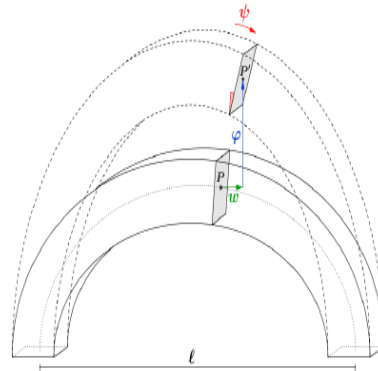
$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_3 \omega_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.6)$$

Na abordagem numérica, utilizou-se o esquema semi-discreto em diferenças finitas para mostrar que as equações do sistema são livres de termos espúrios que caracteriza problemas de sobre-estimação nos termos de rigidez, e assim, para comprovar numericamente as questões relacionadas ao decaimento exponencial, utilizou-se a versão totalmente discreta do sistema para fins de calcular a energia E^n .

1.1 O sistema de Bresse

No sistema de Bresse são considerados três tipos de movimentos sobre a viga, representados por $\varphi = \varphi(x, t)$ que denota o deslocamento vertical, $\psi = \psi(x, t)$ o ângulo de rotação e $\omega = \omega(x, t)$ o deslocamento horizontal, onde x e t representam espaço e tempo respectivamente. Na figura a seguir temos a representação dos movimentos, onde observa-se que, quando a viga sofre deformação, uma partícula representada por P da linha de referência passa a ocupar a posição P' .

Figura 1.1 – Viga arqueada fina



Fonte: (LIMA, 2015)

A dedução das equações constitutivas do sistema de Bresse é proveniente do princípio de D'Alembert, que leva em consideração o equilíbrio de forças atuantes no sistema.

$$\rho A \varphi_{tt} - N_x - lH = F_1 \quad (1.7)$$

$$\rho I \psi_{tt} - M_x + N = F_2 \quad (1.8)$$

$$\rho A \omega_{tt} - H_x + lN = F_3 \quad (1.9)$$

Com $\rho A = \rho_1$ e $\rho I = \rho_2$, onde ρ denota a densidade do material, e $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ são forças externas atuantes.

Temos ainda as seguintes relações de tensão-deformação:

$$H = \kappa_0(\omega_x - l\varphi) \quad (1.10)$$

$$N = \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \quad (1.11)$$

$$M = b\psi_x \quad (1.12)$$

onde H, N e M representam respectivamente a força de cisalhamento, a força axial e o momento fletor, e $\kappa = \kappa' GA, \kappa_0 = EA, b = EI$ e $l = R$, em que κ' é o módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento, E o módulo de elasticidade, A a área da seção transversal, I o momento de inércia (no que se refere ao eixo vertical) e R o raio da curvatura.

Substituindo as equações (1.10) – (1.12) em (1.7) – (1.9) obtém-se o seguinte sistema:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) = 0 \quad (1.13)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad (1.14)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad (1.15)$$

Ao tomar $l = 0$, a equação de deslocamento horizontal é desconsiderada, o sistema reduz-se então ao sistema de Timoshenko para vigas planas, obtido pelo engenheiro ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972), dado por:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (1.16)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 \quad (1.17)$$

As funções $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ representam respectivamente, o deslocamento transversal e o ângulo de rotação.

1.2 Diferenças Finitas

A abordagem numérica será realizada com o objetivo de encontrar a energia numérica do sistema de Bresse. Para isso, utilizaremos o método de diferenças finitas, que é uma técnica usada para obter soluções numéricas de um determinado problema. Para isso, o problema contínuo é transformado em um problema discreto, isto é, de dimensão finita.

A resolução de um problema através do método de diferenças finitas consiste na construção da malha, construção do problema discreto, a resolução do problema discreto e a visualização e interpretação dos resultados obtidos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

A partir da comprovação da existência e unicidade de solução para o problema de Bresse, nosso objetivo consiste em apresentar a energia numérica.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar a energia associada ao problema no aspecto contínuo;
- Usar o método de diferenças finitas e realizar os cálculos para obtenção da energia numérica.

1.4 Organização do trabalho

No capítulo 2 apresentamos os principais resultados que utilizaremos durante o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 3 realizamos a abordagem contínua para o sistema de Bresse, com dissipação na equação do ângulo de rotação, para obtenção da energia associada ao problema. Estudamos a existência e unicidade de solução do sistema por meio da teoria de semi-grupos.

No capítulo 4 iniciamos a abordagem numérica para discretização do sistema, utilizando o método de diferenças finitas.

Finalmente, no capítulo 5 realizamos os cálculos para obtenção da energia numérica.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os principais resultados que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Acerca das demonstrações, indicamos apenas as referências.

Definição 2.0.1 *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função dada por produto interno é uma função*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \|\cdot\|, \end{array} \right.$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$, se, e somente se $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$;
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in E$.

Definição 2.0.2 *Um espaço vetorial E munido de uma norma é chamado de espaço normado, que será denotado por $(E, \|\cdot\|)$.*

Definição 2.0.3 *Dizemos que uma sequência $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ é de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para*

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Definição 2.0.4 *Dizemos que um espaço vetorial normado E é completo se toda sequência de Cauchy de E converge para um elemento em E . Um espaço vetorial normado e completo é chamado de **espaço de Banach**.*

Definição 2.0.5 *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um produto interno é uma função*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, y \rangle = 0$ se, e somente se $x = 0$
2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in E$
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Definição 2.0.6 *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que E é um espaço de Hilbert, se E for completo na norma induzida pelo produto interno.*

Proposição 2.0.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja E um espaço com produto interno. Então,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

para todo $x, y \in E$.

Demonstração: Ver (KREYSZIG, 1991).

Definição 2.0.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ um conjunto aberto limitado e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L_p(\Omega)$ como sendo o espaço de Banach das funções (classe de equivalência de funções) reais p -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}.$$

munido da norma

$$\|f\|_p(\Omega) = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $p = 2$ e $\Omega = (0, L)$ o espaço

$$L^2(0, L) = \left\{ f : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

é um espaço de Hilbert munido do seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

Definição 2.0.8 *Diz-se que uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é*

1. **contínua** se existe $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H,$$

2. **coerciva** se existe $\kappa > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \kappa \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

Teorema 2.0.1 (Lax - Milgram) *Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para toda aplicação linear $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma única $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver (BREZIS; ESTEBAN, 1984).

Definição 2.0.9 Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que, $\forall |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições.

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega); |\alpha| \leq m\}.$$

Em particular, quando $m = 1, 2$, $p = 2$ e $\Omega = (0, L)$ denotamos

$$H^1(0, L) = W^{1,2}(0, L) = \{u \in L^2(0, L); \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, L)\},$$

$$H_0^1(0, L) = W_0^{1,2}(0, L) = \{u \in L^2(0, L); \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, L), u(0) = 0\},$$

$$H^2(0, L) = W^{2,2}(0, L) = \{u \in H^1(0, L); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0, L)\}.$$

Proposição 2.0.2 (Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver (BREZIS; ESTEBAN, 1984)

Proposição 2.0.3 Duas normas são equivalentes se existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_2$$

Demonstração: Ver (BREZIS; ESTEBAN, 1984).

Proposição 2.0.4 Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b > 0$ então $a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Demonstração: Ver (ADAMS; FOURNIER, 2003).

Teorema 2.0.2 (Hille - Yosida) Um operador A linear, não-limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações se, e somente se,

- A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;
- O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$, é válido $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Demonstração: Ver (RIVERA, 2008). ■

Teorema 2.0.3 . Seja A um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Então, dado qualquer $u_0 \in D(A)$ existe uma única função $u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$

satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u + Au = 0, \text{ em } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u_0|, \\ \left| \frac{du}{dt}(t) \right| &= |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver (BREZIS; ESTEBAN, 1984). ■

Teorema 2.0.4 (Lumner - Phillips) *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso em X .*

- *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*
- *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre X , então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração: Ver (RIVERA, 2008). ■

Corolário 2.0.1 *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Demonstração: Ver (RIVERA, 2008). ■

3 O PROBLEMA

Neste capítulo, apresentamos o problema objeto de estudo deste trabalho, com a presença de um termo de dissipação atuando em apenas uma equação do sistema.

Consideremos o seguinte sistema (3.1) – (3.3):

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0 (\omega_x - l\varphi) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma \psi_t = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (3.3)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \omega(\cdot, 0) = \omega_0 \\ \varphi_t(\cdot, 0) &= \varphi_1(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot), \quad \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1(\cdot), \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (3.4)$$

e condições de contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.5)$$

onde $\rho_1, \rho_2, b, k, \gamma$ são constantes positivas.

3.1 Energia de Solução

Nesta seção, definimos o funcional energia, necessário para a obtenção do espaço de fase do semigrupo associado ao problema (3.1) – (3.5). Para isso, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1 *A energia total de solução associada ao problema (3.1) – (3.5) é dada por*

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + b |\psi_x|^2 \\ &\quad + \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \gamma \psi_t^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando as equações (3.1), (3.2) e (3.3) por φ_t , ψ_t e ω_t , respectivamente, integrando-se de 0 a L , e somando-se os termos temos:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx}_{=I1} - \underbrace{\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x \varphi_t dx}_{=I2} - \underbrace{\int_0^L l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx}_{=I3} \\
& + \underbrace{\int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx}_{=I4} - \underbrace{\int_0^L b\psi_{xx} \psi_t dx}_{=I5} + \underbrace{\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t dx}_{=I6} \\
& + \underbrace{\int_0^L \gamma \psi_t \psi_t dx}_{=I7} + \underbrace{\int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx}_{=I8} - \underbrace{\int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x \omega_t dx}_{=I9} \\
& + \underbrace{\int_0^L lk(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t dx}_{=I10} = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Consideremos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi_t|^2 = \varphi_{tt} \varphi_t, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi_x|^2 = \varphi_x \varphi_{xt} \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi_t|^2 = \psi_{tt} \psi_t, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi_x|^2 = \psi_x \psi_{xt} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\omega_t|^2 = \omega_{tt} \omega_t, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\omega_x|^2 = \omega_x \omega_{xt} \tag{3.10}$$

definindo as integrais $I_1 - I_{10}$, usando as identidades (3.8) – (3.10) e as condições de contorno temos:

$$\begin{aligned}
I1 &= \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx; \\
I2 &= - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} dx; \\
I3 &= \int_0^L l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx; \\
I4 &= \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 dx;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I5 &= - \int_0^L b \psi_{xx} \psi_t \, dx \\
&= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L b |\psi_x|^2 \, dx; \\
I6 &= \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t \, dx; \\
I7 &= \int_0^L \gamma \psi_t \psi_t \, dx \\
&= \int_0^L \gamma \psi_t^2 \, dx; \\
I8 &= \int_0^L \rho_1 \omega_{tt} \omega_t \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 \, dx; \\
I9 &= - \int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} \, dx; \\
I10 &= \int_0^L lk(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t \, dx.
\end{aligned}$$

Assim reescrevemos a equação (3.7) como:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} \, dx \\
&- \int_0^L lk_0(\omega_x - l\varphi) \varphi_t \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L b |\psi_x|^2 \, dx \\
&+ \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t \, dx + \int_0^L \gamma \psi_t^2 \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 \, dx \\
&+ \int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} \, dx + \int_0^L lk(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t \, dx = 0, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

notando que,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{xt} \, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t \, dx \\
&+ \int_0^L lk(\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t \, dx \\
&= \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) (\varphi_x + \psi + l\omega)_t \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 \, dx \\
&\int_0^L lk_0(\omega_x - l\varphi) \varphi_t \, dx + \int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi) \omega_{xt} \, dx \\
&= \int_0^L \kappa_0(\omega_x - l\varphi) (\omega_x - l\varphi)_t \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2 \, dx
\end{aligned}$$

reescrevemos a equação (3.11) como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\omega_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L b |\psi_x|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2 dx + \int_0^L \gamma \psi_t^2 dx = 0. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + b |\psi_x|^2 \\ & + \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2) dx \\ & = - \int_0^L \gamma \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

de onde definimos a energia $E(t)$, por:

$$\begin{aligned} E(t) := & \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + b |\psi_x|^2 \\ & + \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Logo, temos de (3.12) e (3.13), que:

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \gamma \psi_t^2 dx. \quad (3.14)$$

Este fato nos permite afirmar que a energia $E(t)$ é decrescente e, integrando de 0 a t a equação (3.14), obtemos:

$$E(t) = - \int_0^t \int_0^L \gamma \psi_t^2 dx dt + E(0).$$

ou seja,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

■

Em particular, se $\gamma = 0$, o sistema é conservativo, logo temos que:

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

3.2 O Cenário de Semigrupos

Nesta seção, iremos utilizar a teoria de semi-grupos para provar a existência e unicidade de solução do problema. Primeiramente, escrevemos o problema na forma de Cauchy, que consiste em escrever o problema (1.1) – (6.6) como um sistema de EDO's de primeira ordem.

Para essa finalidade, considera-se $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t)'$, em que ' denota o vetor transposto. Assim, U satisfaz:

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0; \quad (3.15)$$

em que $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (\mathcal{H} será definido abaixo) é o operador derivada¹ dado por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{l^2 \kappa_0}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 & l \frac{(k+\kappa_0)}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & -\frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} I & \frac{-\gamma}{\rho_2} I & \frac{l\kappa}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{-l(\kappa+\kappa_0)}{\rho_1} \partial_x & 0 & -\frac{l\kappa}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{l^2 \kappa}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

em que $\partial_x(\cdot), \partial_x^2(\cdot)$ indicam os operadores derivadas de primeira e segunda ordens, respectivamente, na variável x , e I o operador identidade.

3.3 Espaço de Fase

A energia $E(t)$ descrita em (3.13) sugere o seguinte espaço de Hilbert \mathcal{H} abaixo:

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L).$$

Definimos o seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} (U, V)_{\mathcal{H}} &:= \int_0^L \{ \rho_1 \varphi \bar{\varphi} + \rho_2 \psi \bar{\psi} + \rho_1 \omega \bar{\omega} + b \psi_x \bar{\psi}_x + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) \\ &\quad + \kappa_0 (\omega_x - l\varphi) (\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) \} dx, \end{aligned} \quad (3.17)$$

¹Também chamado Operador Elíptico.

em que $U = (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \omega_1, \omega_2)'$ e $V = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)'$.

Quando $U = V = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, \omega, \tilde{\omega})'$, com $\tilde{\varphi} = \varphi_t$, $\tilde{\psi} = \psi_t$, $\tilde{\omega} = \omega_t$, temos a norma:

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \rho_1 \|\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\tilde{\psi}\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|\tilde{\omega}\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &+ \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, o operador \mathcal{A} tem domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$ definido por:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = ((H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \times H_0^1(0, L))^2, \quad (3.19)$$

gera um semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$.

3.3.1 As Condições do Teorema de Lummer - Phillips

Vamos mostrar que o operador elíptico \mathcal{A} é dissipativo, isto é, $Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq 0$. Usando a definição (3.17), temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + \frac{l^2\kappa_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \tilde{\psi} \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{\gamma}{\rho_2}\psi \\ \tilde{\omega} \\ \frac{\kappa_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x - \frac{l\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \psi \\ \tilde{\psi} \\ \omega \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^L \rho_1 \left\{ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi_x + l\omega)_x + \frac{l\kappa_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \right\} \tilde{\varphi} dx \\ &+ \int_0^L \rho_2 \left\{ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{\gamma}{\rho_2}\psi \right\} \tilde{\psi} dx \\ &+ \int_0^L \rho_1 \left\{ \frac{\kappa_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x - \frac{l\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \right\} \tilde{\omega} dx \\ &= \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi_x + l\omega)_x \tilde{\varphi} dx + l\kappa_0 \int_0^L (\omega_x - l\varphi) \tilde{\varphi} dx \\ &+ b \int_0^L \psi_{xx} \tilde{\psi} dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \tilde{\psi} dx - \gamma \int_0^L \tilde{\psi}^2 dx \\ &+ \kappa_0 \int_0^L (\omega_x - l\varphi)_x \tilde{\omega} dx - l\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega) \tilde{\omega} dx \\ &= -\gamma \int_0^L \tilde{\psi}^2 dx, \Rightarrow Re(\mathcal{A}U, U) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o operador \mathcal{A} é dissipativo.

Agora, vamos mostrar que 0 está no conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$.

Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)'$. Na equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, tomando $\lambda = 0$, temos:

$$-\mathcal{A}U = F \quad (3.20)$$

$$-\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x + \left(\frac{l\kappa}{\rho_1} + \frac{l\kappa_0}{\rho_1}\right)\omega_x - \frac{l^2\kappa_0}{\rho_1}\varphi \\ \tilde{\psi} \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}\varphi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi - \frac{\gamma}{\rho_2}\tilde{\psi} + \frac{l\kappa}{\rho_2}\omega \\ \tilde{\omega} \\ \frac{\kappa_0}{\rho_1}\omega_{xx} - \left(\frac{l\kappa_0}{\rho_1} + \frac{l\kappa}{\rho_1}\right)\varphi_x - \frac{l\kappa}{\rho_1}\psi - \frac{l^2\kappa}{\rho_1}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}.$$

De onde tiramos que,

$$\tilde{\varphi} = -f_1, \tilde{\psi} = -f_3, \tilde{\omega} = -f_5 \text{ em } H_0^1(0, L) \quad (3.21)$$

$$\frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x + \left(\frac{l\kappa}{\rho_1} + \frac{l\kappa_0}{\rho_1}\right)\omega_x - \frac{l^2\kappa_0}{\rho_1}\varphi = -f_2 \text{ em } L^2(0, L) \quad (3.22)$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}\varphi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi - \frac{\gamma}{\rho_2}\tilde{\psi} + \frac{l\kappa}{\rho_2}\omega = -f_4 \text{ em } L^2(0, L) \quad (3.23)$$

$$\frac{\kappa_0}{\rho_1}\omega_{xx} - \left(\frac{l\kappa_0}{\rho_1} + \frac{l\kappa}{\rho_1}\right)\varphi_x - \frac{l\kappa}{\rho_1}\psi - \frac{l^2\kappa}{\rho_1}\omega = -f_6 \text{ em } L^2(0, L) \quad (3.24)$$

Ou, equivalentemente,

$$\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) = -\rho_1 f_2 \text{ em } L^2(0, L) \quad (3.25)$$

$$b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = -\rho_2 f_4 - \gamma f_3 \text{ em } L^2(0, L) \quad (3.26)$$

$$\kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) = -\rho_1 f_6 \text{ em } L^2(0, L). \quad (3.27)$$

Agora, considere o seguinte espaço de Hilbert $\mathbf{H} = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$.

Tomando o vetor $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})$ em \mathbf{H} , fazendo as multiplicações (3.25) $\bar{\varphi}$, (3.26) $\bar{\psi}$ e (3.27) $\bar{\omega}$ e depois, somando os produtos, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \kappa[(\varphi_x + \psi + l\omega)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) + \kappa_0(\omega_x - l\varphi)(\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) + b\psi_x\bar{\psi}_x] dx \\ &= \int_0^L \rho_1 f_2 \bar{\varphi} + (\rho_2 f_4 - \gamma \tilde{\psi}) \bar{\psi} + \rho_1 f_6 \bar{\omega} dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De onde definimos o seguinte produto interno

$$(\xi, \eta) := \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) + \kappa_0(\omega_x - l\varphi)(\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) + b\psi_x\bar{\psi}_x dx \quad (3.29)$$

onde $\xi = (\varphi, \psi, \omega)$ e $\eta = (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})$.

Se $\xi = \eta$, obtemos:

$$\|\xi\|_{\mathbf{H}}^2 := \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \quad (3.30)$$

Devemos mostrar que o sistema (3.25) – (3.27) admite uma única solução (φ, ψ, ω) , para isso, utilizaremos a norma usual de \mathbf{H} .

Lema 3.3.1 *A norma $\|\xi\|_{\mathbf{H}}^2$ é equivalente à norma usual de \mathbf{H} definida por:*

$$|\xi|_{\mathbf{H}}^2 := \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2$$

Demonstração: Mostraremos que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\xi\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C|\xi|_{\mathbf{H}}^2$.

Usando a desigualdade triangular e a proposição 2.0.4 temos:

$$\begin{aligned} \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 &\leq \kappa (\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2})^2 \\ &\leq \kappa (\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + l\|\omega\|_{L^2})^2 \\ &\leq 2\kappa (\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + l^2\|\omega\|_{L^2}^2) \\ &\leq 2\kappa (\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2})^2 + 2\kappa l^2\|\omega\|_{L^2}^2 \\ &\leq 4\kappa \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + 4\kappa \|\psi\|_{L^2}^2 + 2\kappa l^2\|\omega\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

De forma análoga temos

$$\begin{aligned} \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 &\leq \kappa_0 (\|\omega_x\|_{L^2} + l\|\varphi\|_{L^2})^2 \\ &\leq 2\kappa_0 \|\omega_x\|_{L^2}^2 + 2l^2\kappa_0 \|\varphi\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Somando (3.31) e (3.32) e aplicando a desigualdade de Poincaré temos:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{\mathbf{H}}^2 &\leq 2l^2\kappa_0 c_{p_1} \|\varphi\|_{L^2}^2 + 4\kappa c_{p_2} \|\psi\|_{L^2}^2 + 2\kappa l^2 c_{p_3} \|\omega\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 4\kappa \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2\kappa_0 \|\omega_x\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Tomando $C = \max \{2l^2\kappa_0 c_{p_1}, 4\kappa c_{p_2}, 2\kappa l^2 c_{p_3}, 4\kappa, b, 2\kappa_0\}$ obtemos:

$$\|\xi\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}^2)$$

Portanto, concluímos que:

$$\|\xi\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C|\xi|_{\mathbf{H}}^2$$

Como existe uma constante $C > 0$ que majora uma das normas, a proposição 2.0.2 nos garante que as normas são equivalentes.

Na próxima seção, abordaremos o teorema de Lax-Milgram, que consiste em transformar o problema de evolução em um problema elíptico.

3.3.2 As Condições do Teorema de Lax - Milgran

Definimos as aplicações:

$$\begin{aligned}
 a : \mathbf{H}(0, L)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\xi, \eta) &\mapsto a(\xi, \eta) := \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) \\
 &\quad + \kappa_0(\omega_x - l\varphi)(\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) + b \psi_x \bar{\psi}_x dx,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} : \mathbf{H}(0, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 \xi &\mapsto \mathbf{L}(\xi) := \int_0^L \rho_1 f_2 \varphi + (\rho_2 f_4 - \gamma \tilde{\psi}) \psi + \rho_1 f_6 \omega dx,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $\xi = (\varphi, \psi, \omega)$ e $\eta = (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega})$ são quaisquer vetores de \mathbf{H} .

Vamos mostrar que $a(\xi, \eta)$ é:

- bilinear

A bilinearidade provém da linearidade da integral

- coerciva:

$$\begin{aligned}
 a(\xi, \xi) &= a((\varphi, \psi, \omega), (\varphi, \psi, \omega)) \\
 &= \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + \kappa_0(\omega_x - l\varphi)^2 + b\psi_x^2 dx \\
 &= \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
 &\geq \delta (\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2) \\
 &= \delta \|\xi\|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall \delta \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

- contínua:

$$\begin{aligned}
 |a(\xi, \eta)| &= |a((\varphi, \psi, \omega), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\omega}))| \\
 &= \left| \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) dx \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_0 \int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \kappa \int_0^L |(\varphi_x + \psi + l\omega)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega})| dx \\
&+ \kappa_0 \int_0^L |(\omega_x - l\varphi)(\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi})| dx + b \int_0^L |\psi_x \bar{\psi}_x| dx \\
&\leq \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} \|\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}\|_{L^2} \\
&+ \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|_{L^2} \|\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}\|_{L^2} + b \|\psi_x\|_{L^2} \|\bar{\psi}_x\|_{L^2} \\
&= \kappa \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \kappa_0 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ b \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left[\kappa^2 \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx \right) \right]^{1/2} \\
&+ \left[\kappa_0^2 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx \right) \right]^{1/2} \\
&+ \left[b^2 \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right) \right]^{1/2} \\
&\leq \sqrt{3} \left[\kappa \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) \kappa \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx \right) \right. \\
&+ \kappa_0 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) \kappa_0 \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx \right) \\
&\left. + b \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) b \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right) \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{3} \left[\kappa \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) \kappa \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}_x|^2 dx \right) \right. \\
&+ \kappa \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) \kappa_0 \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - \bar{\varphi}|^2 dx \right) \\
&+ \kappa \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) b \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right) \\
&+ \kappa_0 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) \kappa_0 \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx \right) \\
&+ \kappa_0 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) \kappa \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}_x|^2 dx \right) \\
&+ \kappa_0 \left(\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) b \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right) \\
&+ b \left(\int_0^L |\varphi_x|^2 dx \right) b \left(\int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right) \\
&+ b \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) \kappa \left(\int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx \right) \\
&+ b \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) \kappa_0 \left(\int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx \right) \left. \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{3} \left\{ \left(\kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \right) \right. \\
&\times \left[\kappa \int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx + \kappa_0 \int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx + b \int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right] \\
&+ \left(\kappa_0 \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \right) \\
&\times \left[\kappa \int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx + \kappa_0 \int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx + b \int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right] \\
&+ \left(b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) \\
&\times \left. \left[\kappa \int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}|^2 dx + \kappa_0 \int_0^L |\bar{\omega}_x + l\bar{\varphi}|^2 dx + b \int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right] \right\}^{1/2} \\
&= \sqrt{3} \left\{ \left[\kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + \kappa_0 \int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right] \right. \\
&\times \left. \left[\kappa \int_0^L |\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + \bar{\omega}|^2 dx + \kappa_0 \int_0^L |\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}|^2 dx + b \int_0^L |\bar{\psi}_x|^2 dx \right] \right\}^{1/2} \\
&= \sqrt{3} \left\{ \left(\kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \int_0^L \|\omega_x - l\varphi\|^2 dx + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&\times \left\{ \left(\kappa \|\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}\|_{L^2}^2 + b \|\bar{\psi}_x\|_{L^2}^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&= \sqrt{3} \|\xi\|_{\mathbf{H}} \|\eta\|_{\mathbf{H}}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $\mathbf{L}(\xi)$ é:

- linear.

A linearidade do operador provém da linearidade da integral.

- contínuo:

Para provar a continuidade do operador, iremos utilizar a norma usual do espaço \mathbf{H} .

$$\begin{aligned}
 |L(\xi)| &= |L(\varphi, \psi, \omega)| \\
 &= \left| \int_0^L \rho_1 \tilde{f}_2 \varphi + (\rho_2 \tilde{f}_4 - \gamma \tilde{\psi}) \psi + \rho_1 f_6 \omega \, dx \right| \\
 &\leq \int_0^L \left| \rho_1 \tilde{f}_2 \varphi + (\rho_2 \tilde{f}_4 - \gamma \tilde{\psi}) \psi + \rho_1 f_6 \omega \right| dx \\
 &\leq \int_0^L \left| \rho_1 \tilde{f}_2 \varphi \right| dx + \int_0^L \left| (\rho_2 \tilde{f}_4 - \gamma \tilde{\psi}) \right| |\psi| dx + \int_0^L \left| \rho_1 f_6 \omega \right| dx
 \end{aligned}$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré temos:

$$\begin{aligned}
 &\leq 2\rho_1 \|f_2\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \rho_2 \|f_4\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{\psi}\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + 2\rho_1 \|f_6\|_{L^2} \|\omega\| \\
 &\leq \rho_1 \|f_2\| \|\varphi\| + \rho_1 c_{p_1} \|f_2\| \|\varphi_x\| + \rho_2 \|f_4\| \|\psi\| + \gamma c_{p_2} \|\tilde{\psi}\| \|\psi_x\| \\
 &+ \rho_1 \|f_6\| \|\omega\| + \rho_1 c_{p_3} \|f_6\| \|\omega_x\|
 \end{aligned}$$

Tomando $C = \max \{ 2\rho_1 \|f_2\|, \rho_1 c_{p_1} \|f_2\|, \rho_2 \|f_4\|, \gamma c_{p_2} \|\tilde{\psi}\|, \rho_1 \|f_6\|, \rho_1 c_{p_3} \|f_6\| \}$, temos:

$$\begin{aligned}
 |L(\xi)| &\leq C \{ \|\varphi\| + \|\psi\| + \|\omega\| + \|\varphi_x\| + \|\psi_x\| + \|\omega_x\| \} \\
 &= C \left\{ \left(\int_0^L |\varphi|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_0^L |\psi|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_0^L |\omega|^2 \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_0^L |\varphi_x|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_0^L |\psi_x|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_0^L |\omega_x|^2 \right)^{1/2} \right\} \\
 &\leq \sqrt{6C} \{ \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\omega\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2 \}^{1/2} \\
 &\leq C \|\xi\|
 \end{aligned}$$

Logo, o operador linear $L(\xi)$ é contínuo na norma usual de \mathbf{H} .

Assim, pelo corolário 2.0.1, mostramos que \mathcal{A} é um gerador infinitesimal de um semi-grupo C_0 de contrações, pelas condições do teorema de Lax-Milgram e pelo teorema de Hille-Yosida, provamos que o problema (3.25) – (3.27) possui solução e ela é única.

4 ABORDAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo realizamos a abordagem numérica. Inicialmente, apresentamos o método de diferenças finitas para a discretização do problema contínuo, em seguida definimos a malha numérica.

4.1 Discretização em Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas consiste em tornar o problema contínuo em um problema finito, onde as derivadas presentes na equação são substituídas por aproximações que abrangem valores numéricos da função.

Consideremos os seguintes operadores de diferenças finitas, construídos com base na série de Taylor:

- Esquema diferença Progressivo (1ª ordem)

$$\partial_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad \partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

- Esquema diferença Regressivo (1ª ordem)

$$\bar{\partial}_x u_j^n := \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\partial}_t u_j^n := \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

- Esquema diferença centrada (1ª ordem)

$$\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

- Esquema diferença centrada (2ª ordem)

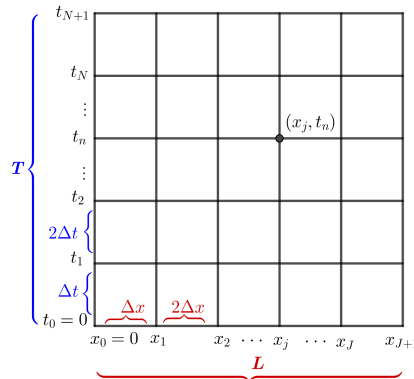
$$\bar{\partial}_x \partial_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad \bar{\partial}_t \partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$$

onde u_j^n representa a solução nos pontos (x_j, t_n) .

4.2 Definindo a malha numérica

A malha numérica é constituída por linhas que se interceptam e formam pontos. Ela se faz necessária quando há a intenção de implementar no computador, dados provenientes de resultados obtidos do aspecto contínuo.

Figura 4.1 – Malha numérica



Fonte: O autor

Para os nossos propósitos, definimos o tamanho da malha $\Delta x = \frac{L}{J+1}$, $\Delta t = \frac{T}{N+1}$ para $J, N \in \mathbb{N}$ e considere as seguintes subdivisões uniformes dos intervalos $[0, L]$ e $[0, T]$, respectivamente

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_J = J\Delta x < x_{J+1} = L, \quad (4.1)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = T, \quad (4.2)$$

onde $x_j = j\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$ para $j = 1, 2, \dots, J+1$ e $n = 1, 2, \dots, N+1$.

4.3 O problema discreto

Agora, consideremos uma discretização do problema contínuo (1.1 – 6.5) em diferenças finitas nas variáveis tempo e espaço:

$$\rho_1 \frac{\varphi_j^{n+1} - 2\varphi_j^n + \varphi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} - l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} - l\kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n + 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{4} = 0, \quad (4.3)$$

$$\rho_2 \frac{\psi_j^{n+1} - 2\psi_j^n + \psi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - b \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + \kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} + l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} + \gamma \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (4.4)$$

$$\rho_1 \frac{\omega_j^{n+1} - 2\omega_j^n + \omega_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{\Delta x^2} + l\kappa_0 \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + l\kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + l\kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} + l^2 \kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} = 0. \quad (4.5)$$

Sujeito às condições de contorno aproximadas por:

$$\varphi_0^n = \varphi_{j+1}^n = \psi_0^n = \psi_{j+1}^n = \omega_0^n = \omega_{j+1}^n = 0, \quad (4.6)$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots, N + 1$. E as condições iniciais dadas por:

$$\varphi_j^0 = \varphi(x_j, 0), \varphi_j^1 = \varphi_j^0 + \Delta t \varphi_t(x_j, 0), \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (4.7)$$

$$\psi_j^0 = \psi(x_j, 0), \psi_j^1 = \psi_j^0 + \Delta t \psi_t(x_j, 0), \quad \forall j = 1, 2, \dots, J \quad (4.8)$$

$$\omega_j^0 = \omega(x_j, 0), \omega_j^1 = \omega_j^0 + \Delta t \omega_t(x_j, 0), \quad \forall j = 1, 2, \dots, J. \quad (4.9)$$

5 ENERGIA NUMÉRICA

Neste capítulo, definimos a energia numérica associada ao problema discreto, que é o resultado principal deste trabalho. Para isso, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 5.0.1 *Para todo $\Delta t \in (0, T)$, $\Delta x \in (0, L)$, a energia E^n do sistema discreto (4.3)-(4.6) é dada por*

$$\begin{aligned}
 E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + \rho_1 \left(\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\Delta t} \right)^2 + b \left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) \\
 & + \kappa \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \\
 & \times \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^{n+1} + \psi_j^{n+1}}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^{n+1} + \omega_j^{n+1}}{2} \right) \\
 & \left. + \kappa_0 \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

e satisfaz $E^n \leq E^0$, $\forall n = 1, 2, \dots, N$.

Demonstração: Consideremos, agora, as seguintes multiplicações (4.3) $\times \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t}$,

(4.4) $\times \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t}$, (4.5) $\times \frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^{n-1}}{2\Delta t}$, e depois, somando de 1 até J , temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_1 \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \kappa \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right. \\
 & \quad \left. - l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} + l\kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} + l^2\kappa_0 \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4} \right) \\
 & \quad \times \left(\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} \right) = 0, \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_2 \frac{\psi_j^{n+1} - 2\psi_j^n + \psi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - b \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \kappa \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right. \\
 & \quad \left. + \kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} + l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} + \gamma \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
 & \quad \times \left(\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1} \right) = 0, \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_1 \frac{\omega_j^{n+1} - 2\omega_j^n + \omega_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{\Delta x^2} + l\kappa_0 \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right. \\
& \quad \left. + l\kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + l\kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} + l^2\kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \\
& \quad \times (\omega_j^{n+1} - \omega_j^{n-1}) = 0. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Ajuste do termo em ρ_1 na equação (5.1):

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_1 \frac{\varphi_j^{n+1} - 2\varphi_j^n + \varphi_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \times (\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^{n-1}) \\
& = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n+1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n+1} + \varphi_j^{n-1} \varphi_j^{n+1}}{\Delta t^2} \right) \\
& \quad - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n-1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n-1} + \varphi_j^{n-1} \varphi_j^{n+1}}{\Delta t^2} \right) \\
& = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n+1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n+1}}{\Delta t^2} \right) \\
& \quad - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n-1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \\
& = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n+1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n+1} + (\varphi_j^n)^2}{\Delta t^2} \right) \\
& \quad - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{(\varphi_j^{n-1})^2 - 2\varphi_j^n \varphi_j^{n-1} + (\varphi_j^n)^2}{\Delta t^2} \right) \\
& = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \rho_1 \left(\frac{\varphi_j^{n-1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\
& = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 \left(\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 \left(\frac{\varphi_j^{n-1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \right)^2. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Os ajustes dos termos em ρ_2 na equação (5.2) e em ρ_1 na equação (5.3) são análogos ao obtido no resultado (5.4), assim temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_2 \frac{\psi_j^{n+1} - 2\psi_j^n + \psi_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \times (\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}) \\
 = & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_2 \left(\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_2 \left(\frac{\psi_j^n - \psi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\rho_1 \frac{\omega_j^{n+1} - 2\omega_j^n + \omega_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \times (\omega_j^{n+1} - \omega_j^{n-1}) \\
 = & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 \left(\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 \left(\frac{\omega_j^n - \omega_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Agrupando os termos em κ na equação (5.1) e multiplicando pelo equivalente numérico à primeira derivada para a função ϕ temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(-\kappa \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right. \\
 & \left. - l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Exibiremos os cálculos, apenas para a multiplicação do primeiro fator em (5.6), pelo segundo fator no passo $n+1$, pois para a multiplicação pelo fator no tempo $n-1$ o processo é análogo. Assim,

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \times \phi_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right. \\
 & \left. \times \phi_j^{n+1} + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times \phi_j^{n+1} \right\} \\
 = & -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2} \right) \phi_j^{n+1} + \left(\frac{\phi_{j-1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2} \right) \phi_j^{n+1} \right] \right. \\
 & + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2\Delta x} \right) \phi_j^{n+1} + \left(\frac{-\psi_j^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \phi_j^{n+1} \right] \\
 & \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \phi_j^{n+1} + \left(\frac{-\omega_j^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \phi_j^{n+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x^2} \right) \varphi_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \varphi_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
&\quad + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_j^{n+1} - \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_{j+1}^{n+1} \right] \\
&\quad \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_j^{n+1} - \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \\
&= -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x^2} \right) (\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2\Delta x} \right) (\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}) \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2\Delta x} \right) (\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}) \right\} \\
&= -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_{j+1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \right\} \\
&= \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right\} \\
&= \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \right\} \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Analogamente, para a multiplicação do primeiro fator em (5.6) pelo fator no tempo $n - 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n-1} - \varphi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^{n-1} + \psi_j^{n-1}}{2} \right) \right. \\
 & \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} + \omega_j^{n-1}}{2} \right) \right\} \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Agrupando os termos em κ na equação (5.2) temos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + \kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} + l\kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \\
 & \times \left(\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1} \right)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Como foi feito em (5.6), assim agiremos em (5.9):

$$\begin{aligned}
 & \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} \right) \times \psi_j^{n+1} \right. \\
 & \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \times \psi_j^{n+1} \right\} \\
 & = \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \psi_j^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} \right] \right\} \\
 & = \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \psi_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \psi_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \psi_{j+1}^{n+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) (\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) (\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}) \\
 &\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) (\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}) \right\} \\
 &= \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \\
 &\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \left(\frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right\} \\
 &= \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \right\} \left(\frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Analogamente, para a multiplicação do primeiro fator em (5.9) pelo fator no tempo $n - 1$, temos:

$$-\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \right\} \left(\frac{\psi_j^{n-1} + \psi_{j+1}^{n-1}}{2} \right) \tag{5.11}$$

Agrupando os termos em κ na equação (5.3) temos:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(l\kappa \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} + l\kappa \frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} \right. \\
 &\quad \left. + l^2\kappa \frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) (\omega_j^{n+1} - \omega_j^{n-1}) \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Novamente, como foi feito em (5.6), assim o faremos em (5.12):

$$\begin{aligned}
 &l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} \right. \\
 &\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} \right] \right. \\
&\quad + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} \right] \\
&\quad \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} \right] \right\} \\
&= l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
&\quad + \left[\left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) \omega_{j+1}^{n+1} \right] \\
&\quad \left. + l \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) \omega_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \\
&= l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) (\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{4} \right) (\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}) \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{4} \right) (\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}) \right\} \\
&= l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right\} \\
&= l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \right\} \left(\frac{\omega_j^{n+1} + \omega_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Também, de modo análogo, para a multiplicação do primeiro fator em (5.12) pelo fator no tempo $n - 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 & -l\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n-1} - \varphi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\psi_{j+1}^{n-1} + \psi_j^{n-1}}{2} \right) \right. \\
 & \left. + l \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} + \omega_j^{n-1}}{2} \right) \right\} \left(\frac{\omega_j^n + \omega_{j+1}^n}{2} \right) \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Agora, agrupando os termos em (5.7), (5.10), (5.13), temos

$$\begin{aligned}
 & \kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \\
 & \times \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^{n+1} + \psi_j^{n+1}}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^{n+1} + \omega_j^{n+1}}{2} \right) \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Analogamente, agrupando os termos em (5.8), (5.11), (5.14), temos

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n-1} - \varphi_j^{n-1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^{n-1} + \psi_j^{n-1}}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^{n-1} + \omega_j^{n-1}}{2} \right) \\
 & \times \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Ajuste dos termos em κ_0 na equação (5.1):

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(-l\kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} + l^2\kappa_0 \frac{\varphi_{j+1}^n + 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{4} \right) (\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^{n-1}) \quad (5.17)$$

Fazendo para (5.17), de modo análogo como em (5.6), temos:

$$\begin{aligned}
 & -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times \varphi_j^{n+1} \right. \\
 & \left. - \left(l \frac{\varphi_{j+1}^n + 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{4} \right) \times \varphi_j^{n+1} \right\} \\
 & = -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_j^n - \omega_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \varphi_j^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{4} \right) \varphi_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{4} \right) \varphi_j^{n+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{2\Delta x} \right) \varphi_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
 &\quad \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{4} \right) \varphi_j^{n+1} + \left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{4} \right) \varphi_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \\
 &= -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{2\Delta x} \right) (\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1}) \right. \\
 &\quad \left. - l \left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{4} \right) (\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1}) \right\} \\
 &= -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - l \left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \right\} \\
 &= -l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1}}{2} \right) \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

analogamente, para a multiplicação com o termo no tempo $n - 1$ em (5.17) temos:

$$l\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} - \omega_j^{n-1}}{\Delta x} - l \frac{\varphi_{j+1}^{n-1} + \varphi_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{\varphi_j^n + \varphi_{j+1}^n}{2} \right) \quad (5.19)$$

Ajuste dos termos em κ_0 na equação (5.3):

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(-\kappa_0 \frac{\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{\Delta x^2} + l\kappa_0 \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times (\omega_j^{n+1} - \omega_j^{n-1}) \quad (5.20)$$

Analogamente, como em (5.6), o faremos para (5.20):

$$\begin{aligned}
 &-\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\omega_{j+1}^n - 2\omega_j^n + \omega_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \times \omega_j^{n+1} \right. \\
 &\quad \left. - l \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \times \omega_j^{n+1} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\omega_{j-1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) \right] \omega_j^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) - \left(\frac{\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \omega_j^{n+1} \right\} \\
&= -\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_{j-1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) \omega_j^{n+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} - \left(\frac{\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} \right] \right\} \\
&\quad - \kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) \omega_j^{n+1} + \left(\frac{\omega_j^n - \omega_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \omega_{j+1}^{n+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_j^{n+1} - \left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) \omega_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \\
&= -\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x^2} \right) (\omega_j^{n+1} - \omega_{j+1}^{n+1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2\Delta x} \right) (\omega_j^{n+1} - \omega_{j+1}^{n+1}) \right] \right\} \\
&= -\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left[- \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + l \left[\left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right] \right\} \\
&= \kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left\{ \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right\} \\
&= \kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Analogamente, para a multiplicação com o termo no tempo $n - 1$ em (5.20), temos:

$$- \kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} - \omega_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \quad (5.22)$$

Agora, agrupando os termos em (5.18), (5.21), temos:

$$\kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \quad (5.23)$$

Analogamente, agrupando os termos em (5.19), (5.22), temos:

$$- \kappa_0 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} - \omega_j^{n-1}}{\Delta x} - l \frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \quad (5.24)$$

Ajuste do termo em b na equação (5.2):

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(-b \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \times (\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}) \quad (5.25)$$

Analogamente, como em (5.6), o faremos para (5.25):

$$\begin{aligned} & -b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \psi_j^{n+1} \\ &= -b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\psi_{j-1}^n - \psi_j^n}{\Delta x^2} \right) \right\} \psi_j^{n+1} \\ &= -b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x^2} \right) \psi_j^{n+1} + \left(\frac{\psi_{j-1}^n - \psi_j^n}{\Delta x^2} \right) \psi_j^{n+1} \right\} \\ &= -b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x^2} \right) (\psi_j^{n+1} - \psi_{j+1}^{n+1}) \\ &= b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para a multiplicação com o termo no tempo $n - 1$ em (5.25), temos:

$$-b \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{j+1}^{n-1} - \psi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) \quad (5.27)$$

Ajuste para a multiplicação e o somatório do termo em γ na equação (5.2):

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J \left(\gamma \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \times (\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}) \quad (5.28)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} & \gamma \Delta t \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \times \left(\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ &= \gamma \Delta t \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\ &= \gamma \Delta t \Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Somando os resultados em (5.4) e (5.5), (5.5), juntamente com (5.15), (5.16), adicionando os termos (5.23), (5.24), junto com (5.26), (5.27) e (5.29) definimos:

$$\begin{aligned} E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\ & + \rho_1 \left(\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\Delta t} \right)^2 + b \left(\frac{\Psi_{j+1}^{n+1} - \Psi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\Psi_{j+1}^n - \Psi_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \kappa \left(\frac{\Phi_{j+1}^n - \Phi_j^n}{\Delta x} + \frac{\Psi_{j+1}^n + \Psi_j^n}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \\ & \times \left(\frac{\Phi_{j+1}^{n+1} - \Phi_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\Psi_{j+1}^{n+1} + \Psi_j^{n+1}}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^{n+1} + \omega_j^{n+1}}{2} \right) \\ & \left. + \kappa_0 \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\Phi_{j+1}^n + \Phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^{n+1} - \omega_j^{n+1}}{\Delta x} - l \frac{\Phi_{j+1}^{n+1} + \Phi_j^{n+1}}{2} \right) \right] \quad (5.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E^{n-1} := & -\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\varphi_j^{n-1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_j^{n-1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_1 \left(\frac{\omega_j^{n-1} - \omega_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + b \left(\frac{\psi_{j+1}^{n-1} - \psi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) \\
 & + \kappa \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n-1} - \varphi_j^{n-1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^{n-1} + \psi_j^{n-1}}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^{n-1} + \omega_j^{n-1}}{2} \right) \\
 & \times \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{j+1}^n + \psi_j^n}{2} + l \frac{\omega_{j+1}^n + \omega_j^n}{2} \right) \\
 & \left. + \kappa_0 \left(\frac{\omega_{j+1}^{n-1} - \omega_j^{n-1}}{\Delta x} - l \frac{\varphi_{j+1}^{n-1} + \varphi_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{j+1}^n - \omega_j^n}{\Delta x} - l \frac{\varphi_{j+1}^n + \varphi_j^n}{2} \right) \right] \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 E^n - E^{n-1} &= -\gamma \Delta x \Delta t \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \leq 0 \\
 \Rightarrow E^n &\leq E^{n-1}. \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Daí, concluímos, por recursividade, que

$$E^n \leq E^0. \quad (5.33)$$

Portanto, a energia do sistema discreto (4.3) – (4.5) é decrescente em cada passo n do tempo.

■

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Relacionado com este trabalho, a nível de trabalho de conclusão de curso, pode-se ainda realizar a abordagem numérica para o seguinte problema de Bresse termoelástico linear:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0 (\omega_x - l\varphi) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (6.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) + m\theta_x = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (6.3)$$

$$\theta_t - \kappa_1 \theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \quad (6.4)$$

com as seguintes condições iniciais,

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \omega(\cdot, 0) = \omega_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0(\cdot) \\ \varphi_t(\cdot, 0) &= \varphi_1(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot), \quad \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1(\cdot), \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (6.5)$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann,

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= \varphi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) \\ \psi_x(0, t) &= \psi_x(L, t) = \omega_x(0, t) = \omega_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como proposta, pode-se realizar a discretização desse problema em diferenças finitas, para fins de obtenção da energia numérica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- BOUSSOUIRA, F. A.; RIVERA, J. E. M.; JÚNIOR, D. d. S. A. Stability to weak dissipative bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, Elsevier, v. 374, n. 2, p. 481–498, 2010.
- BRESSE, J. A. C. *Cours de mecanique appliquee: Re'sistance des mate'riaux et stabilite'des constructions*. [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1859. v. 1.
- BREZIS, H.; ESTEBAN, J. R. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. [S.l.]: Alianza, 1984.
- FATORI, L. H.; RIVERA, J. E. M. Rates of decay to weak thermoelastic bresse system. *IMA journal of applied mathematics*, OUP, v. 75, n. 6, p. 881–904, 2010.
- JUNIOR, A.; SILVA, D. da. Estabilidade assintótica e numérica de sistemas dissipativos de vigas de timoshenko e vigas de bresse. 2009.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.
- KURRER, K.-E. The history of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics. *International Journal of Space Structures*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 23, n. 3, p. 193–197, 2008.
- LAGNESE, J.; LEUGERING, G.; SCHMIDT, E. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical methods in the applied sciences*, Wiley Online Library, v. 16, n. 5, p. 327–358, 1993.
- LIMA, P. R. D. Sistema de bresse termoelástico não linear. Dissertação de mestrado, UEL, 2015.
- LIU, Z.; RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 60, n. 1, p. 54–69, 2009.
- RIVERA, J. E. M. Estabilização de semigrupos e aplicações. *Série de Métodos Matemáticos*, 2008.